تمرين في الاحتمالات : منتهى الروعة والأناقة وتعدد الافكار

كيس يحتوي على أربع كريات تحمل الرقم 1 واثنتان تحملان العدد e (أساس اللوغاريتم النيبري)
وست كريات تحمل العدد $\frac{1}{e}$

نسحب على التوالي وبالإرجاع كرتين ونسجل x العدد الذي تحمله الكرة المسحوبة الأولى و y العدد الذي تحمله الكرة المسحوبة الثانية.
نرفق بهذه التجربة النقطة M ذات اللاحقة $z = \ln x + i \ln y$.

شكل شجرة الاحتمالات الموافقة لنص التمرين.

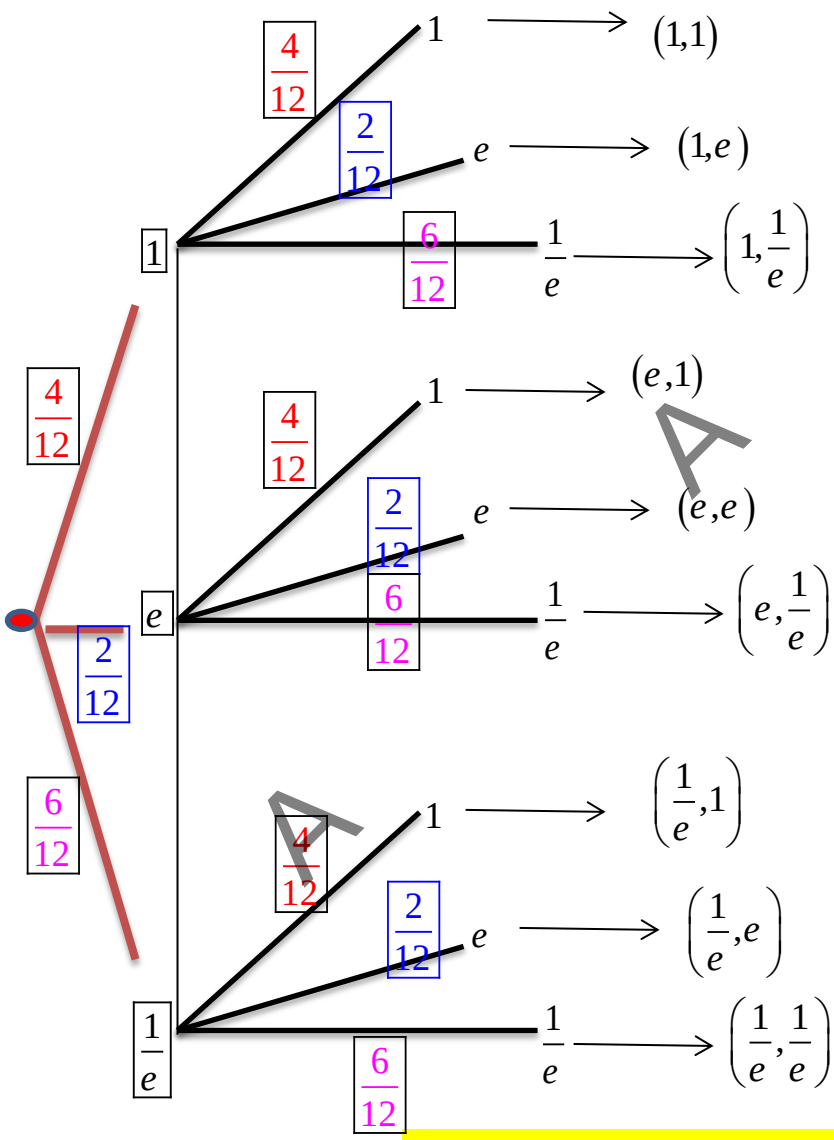
1) المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$. أحسب احتمال كلا من الحوادث التالية:

A : M تنتمي إلى محور الفواصل .
B : M تنتمي إلى محور التراتيب .
C : M تنتمي إلى المحورين.
D : M لا تنتمي إلى أي من المحورين .
E : قيس الزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$ يساوي $-\frac{\pi}{4}$.
F : النقطة M تنتمي إلى دائرة مثلثية.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة المسافة OM .
أ) ما هي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X
أحسب قانون الاحتمال لـ X .

الحل :

(1



2)

- A : M تنتمي إلى محور الفواصل .

حتى تنتمي النقطة M إلى محور الفواصل معناه الجزء التخيلي للعدد المركب z يكون معدوما أي $\ln y = 0$ أي $y = 1$.

إذن $P(A)=p(y=1)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

- **B** : M تنتمي إلى محور التراتيب .

حتى تنتمي النقطة M إلى محور التراتيب معناه الجزء الحقيقي للعدد المركب z يكون معدوما أي $\ln x=0$ أي $x=1$.

إذن $P(B)=p(x=1)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

- **C** : M تنتمي إلى المحورين.

حتى تنتمي النقطة M إلى كل من المحورين معناه $z=0$ أي $\ln x=0$ و $\ln y=0$ معناه $x=1$ و $y=1$. بما أن السحب بالإرجاع فإن الحادثتين A و B مستقلتان ومنه

إذن $P(C)=P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

- **D** : M لا تنتمي إلى أي من المحورين معناه الحادثة المعاكسة لها $\overline{D}$ هي M تنتمي على الأقل لإحد المحورين أي $A\cup B$

$P(\overline{D})=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

إذن $P(\overline{D})=\frac{5}{9}$ وبالتالي $P(D)=1-P(\overline{D})=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$.

- **E** : قيس الزاوية $\left(\overrightarrow{OM},\vec{u}\right)$ يساوي $-\frac{\pi}{4}$ معناه $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)=\frac{\pi}{4}$

معناه إحداثيي النقطة M متساويان وموجبان تماما أي $\ln x>0$ و $\ln y>0$ معناه $x>1$ و $y>1$ فيكون لدينا حسب معطيات التمرين $x=y=e$ أي

$P(x=e)=P(y=e)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ وأخيرا $P(E)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

- **F** : النقطة M تنتمي إلى دائرة مثلثية.

حتى تنتمي النقطة M إلى دائرة مثلثية معناه $OM=1$ أي $(\ln x)^2+(\ln y)^2=1$. بما أن x و y يأخذان فقط القيم 1 ، e و $\frac{1}{e}$ وبالتالي $\ln x$ و $\ln y$ يأخذان فقط القيم 0 ، 1 و -1 . إذن الثنائيات $(\ln x,\ln y)$ التي تحقق $(\ln x)^2+(\ln y)^2=1$ هي 4 حالات التالية :

- $(\ln x,\ln y)=(1,0)$ معناه $(x,y)=(e,1)$
- $(\ln x,\ln y)=(-1,0)$ معناه $(x,y)=\left(\frac{1}{e},1\right)$
- $(\ln x,\ln y)=(0,1)$ معناه $(x,y)=(1,e)$
- أو $(\ln x,\ln y)=(0,-1)$ معناه $(x,y)=\left(1,-\frac{1}{e}\right)$

إذن $P((e,1))=P((1,e))=\frac{2}{12}\times\frac{4}{12}=\frac{1}{18}$

وبالتالي $P((\frac{1}{e},1))=P((1,\frac{1}{e}))=\frac{6}{12}\times\frac{4}{12}=\frac{1}{6}$

$$P(F)=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{9}$$

2) بما أن x و y يأخذان فقط القيم 1 ، e و $\frac{1}{e}$ وبالتالي $\ln x$ و $\ln y$ يأخذان فقط القيم 0 ، 1 و -1 وبالتالي إحداثيات M $(\ln x,\ln y)$ الممكنة هي

الموافقة $\{(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(1,1),(1,-1),(-1,0),(-1,1),(-1,-1)\}$ للقيم التالية للثنائيات (x,y) :

$$\left\{(1,1),(1,e),\left(1,\frac{1}{e}\right),(e,1),(e,e),\left(e,\frac{1}{e}\right),\left(\frac{1}{e},1\right),\left(\frac{1}{e},e\right),\left(\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)\right\}$$

إذن المسافات OM الممكنة هي 0 ; 1 ; $\sqrt{2}$ وهي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X .

قانون الإحتمال :

$$P(X=0)=P((1,1))=\frac{4}{12}\times\frac{4}{12}=\mathbf{\frac{1}{9}}$$

$$P(X=1)=P((1,e))+P((e,1))+P((1,\frac{1}{e})+P((\frac{1}{e},1)=$$

$$=\frac{2}{12}\times\frac{4}{12}+\frac{2}{12}\times\frac{4}{12}+\frac{4}{12}\times\frac{6}{12}+\frac{4}{12}\times\frac{6}{12}=\mathbf{\frac{4}{9}}$$

$$P(X=\sqrt{2})=P((e,e))+P((e,\frac{1}{e}))+P((\frac{1}{e},e)+P((\frac{1}{e},\frac{1}{e})=$$

$$=\frac{2}{12}\times\frac{2}{12}+\frac{2}{12}\times\frac{6}{12}+\frac{2}{12}\times\frac{6}{12}+\frac{6}{12}\times\frac{6}{12}=\mathbf{\frac{4}{9}}$$

ونلخص في الجدول التالي :

x_i	0	1	$\sqrt{2}$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

$$\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{9}{9}=1$$

التمرين رقم 01:

أجريت دراسة على 1800 تلميذ بإحدى الثانويات (من بينهم 850 ولد) عن الشعب التي يدرسون بها

- البنين الذين يدرسون في شعبة الرياضيات يمثلون 10% من مجموع تلاميذ الثانوية.
- 150 تلميذ من بينهم 130 بنت يدرسون في شعبة العلوم الإنسانية.
- $\frac{2}{3}$ من مجموع تلاميذ الثانوية يدرسون في شعبة العلوم التجريبية.

1) أكمل الجدول التالي :

	بنين	بنات	المجموع
يدرسون في شعبة الرياضيات			
يدرسون في شعبة العلوم التجريبية			
يدرسون في شعبة العلوم الإنسانية		130	
المجمـــوع			1800

2) صادفنا تلميذا في ساحة الثانوية .أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A : هذا التلميذ هو بنتا.

B : هذا التلميذ في شعبة الرياضيات

C : هذا التلميذ هو بنت و في شعبة الرياضيات

D : هذا التلميذ هو بنت أو في شعبة الرياضيات.

التمرين رقم 02:

كيس يحتوي على 5 كريات مرقمة كالتالي : 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الكيس . ليكن X المتغير العشوائي الحقيقي الذي يأخذ مجموع رقمي الكريتين المسحوبتين.

1. أعط قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X.
2. أحسب الأمل الرياضي لـ X

أحسب التباين والإنحراف المعياري .

التمرين رقم 03:

تعيين قانون الإحتمال لمتغير عشوائي

نرمي زهرة نرد متوازنة 3 مرات متتابعة .أثناء رمي النرد :

يخسر اللاعب $3DA$ إذا حصل على مضاعف للعدد 3.

يربح اللاعب $6DA$ إذا حصل على عدد غير مضاعف لـ 3.

X هو المتغير العشوائي الذي يساوي قيمة الربح أو الخسارة للاعب.

1. عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X.

2. أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$ والإنحراف المعياري $\sigma(X)$.

التمرين رقم 04:

صندوق به 6 قريصات تحمل الرقم 1 و 4 قريصات تحمل الرقم 3 .نسحب في آن واحد 3 قريصات وكل السحبات متساوية الإحتمال .نعرف متغيرا عشوائيا X الذي يرفق في كل سحبة مجموع الأرقام الظاهرة على القريصات المسحوبة

1. ما هي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X .
2. عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .
3. أحسب كلا من الأمل الرياضياتي $E(X)$ و التباين $V(X)$ والإنحراف المعياري $\sigma(X)$
4. عين إحتمال الحادثة : " $X<7$ "

التمرين رقم 05

كيس يحتوي على قريصات من ثلاثة ألوان ، النصف بيضاء ، الثلث خضراء ، السدس صفراء.

50% من القريصات البيضاء دائرية الشكل.

30% من القريصات الخضراء دائرية الشكل.

40% من القريصات الصفراء دائرية الشكل.

كل القريصات الأخرى مربعة الشكل.

نسحب قريصة واحدة عشوائيا .

1. مثل شجرة الإحتمالات التي يمكن أن تصادفنا .
2. ماحتمال أن تكون القريصة المسحوبة دائرية الشكل ؟
3. علما بأن القريصة المسحوبة دائرية الشكل ، ما احتمال أن تكون بيضاء.

التمرين رقم 06:

علبة تحتوي على نمطين من الأسئلة " ثقافة عامة " و " رياضيات "

ثلث الأسئلة من نمط الثقافة العامة ، والباقي من نمط الرياضيات .

أولا :

يختار المترشح سؤالا واحدا عشوائيا مع العلم أن :

احتمال أن يجيب المترشح على سؤال الثقافة العامة هو $\frac{1}{2}$.

احتمال أن يجيب المترشح على سؤال الرياضيات هو $\frac{3}{4}$.

نعتبر الحوادث التالية :

- C : السؤال يحمل نمط الثقافة العامة.
- M : السؤال يحمل نمط الرياضيات.
- E : المترشح يجيب عن السؤال .

يمكنك استعمال شجرة الإحتمال .

1) أحسب احتمال الحادثة :

" السؤال من نمط الرياضيات والمترشح يجيب صحيح عن السؤال ".

2) بين أن احتمال الحادثة E يساوي $\frac{2}{3}$.

3) نفرض أن المترشح لم يجب صحيح عن السؤال ، ما احتمال ان يكون هذا السؤال من نمط الثقافة العامة .

ثانيا :

قوانين اللعبة تتم كالتالي :

يسحب المترشح سؤالا ويسجل 5 نقط إذا أجاب صحيحا وتنتهي اللعبة .

وإلا يسحب سؤالا ثانيا و يسجل نقطتين إذا أجاب صحيحا وتنتهي اللعبة .

وإلا يسحب سؤالا ثالثا و يسجل نقطة واحدة إذا أجاب صحيحا وإلا تنتهي اللعبة ولم يسجل أي نقطة .

1) عبر عما سبق باستعمال شجرة الإحتمال .

2) عرف قانون الإحتمال لعدد النقط المسجلة للمترشح .

3) أحسب الأمل الرياضي لعدد النقط المسجلة للمترشح .

التمرين رقم 07:

كيس U يحتوي على 3 قريصات سوداء و قريصة واحدة بيضاء ، كيس آخر V يحتوي على قريصتين بيضاوين و قريصتين سوداوين.كل هذه القريصات لا يمكن التمييز فيما بينها باللمس.

نرمي زهرة نرد منتظمة ذات ستة أوجه ، إذا تحصلنا على العدد 1 ، نسحب قريصة عشوائيا من الكيس U

وإلا نسحب قريصة عشوائيا من الكيس V .

ما احتمال الحصول على قريصة بيضاء ؟

التمرين رقم 08:

زهرة نرد مكعبة الشكل، أربعة من أوجهها ملونة بالأحمر ووجهان بالأصفر، كل الأوجه لها نفس احتمال الظهور .نرمي زهرة النرد مرة واحدة (تعطى النتائج في شكل كسر غير قابل للاختزال).

1) ما هو احتمال أن يكون لون الوجه العلوي :

أ) A : أصفر؟ ، ب) B :أحمر؟

2) نعيد هذه التجربة ثلاث مرات، ما احتمال أن يكون الوجه العلوي أصفرا:

أ) F :3مرات ، ب) G :مرتين ، ج) H : مرة واحدة على الأقل.

التمرين رقم 09:

تملك شركة ما 50 جهازا للإعلام الآلي. احتمال أن يتعطل الجهاز هو 0,01 . نفرض أن تشغيل أي جهاز مستقل عن تشغيل البقية.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بعدد الأجهزة العاطلة من بين 50 جهاز.

1) ما احتمال أن لا يتعطل أي جهاز ؟

2) ما احتمال أن تتعطل 5 أجهزة ؟

3) ما احتمال أن يتعطل جهاز واحد على الأقل ؟

4) أ) ما ذا تمثل $P(X=3)$ ثم أحسب قيمتها.

ب) أحسب $P(X\leq 3)$ ثم فسر النتيجة.

ج) أحسب $E(X)$

التمرين رقم 10 :

يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 5 كرات حمراء (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس)

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق .

1) نعتبر الحادثتين :

A : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون ".

B : الحصول على ثلاث كرات مختلفة في اللون مثنى مثنى" .

بين أن $P(A)=\frac{3}{44}$ و $P(B)=\frac{3}{11}$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق كل سحبة لثلاث كرات بعدد الألوان التي تحملها.

أ) عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X .

ب) أوجد قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X

ج) أحسب الأمل الرياضياتي ، التباين و الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

التمرين رقم 11 :

كل سؤال يحتوي على ثلاث إجابات :أ) ، ب) ، ج) إجابة واحدة فقط صحيحة.

عين في كل سؤال الإجابة الصحيحة مع التبرير.

كيس يحتوي على 8 كرات لا نفرق بينها باللمس ، 5 حمراء و 3 سوداء.

أولا : نسحب بطريقة عشوائية 3 كرات في آن واحد.

السؤال رقم 01 : احتمال سحب 3 كرات سوداء هو:

أ) $\frac{1}{56}$ ، ب) $\frac{1}{120}$ ، ج) $\frac{1}{3}$.

السؤال رقم 02 : احتمال سحب 3 كرات من نفس اللون هو:

أ) $\frac{11}{56}$ ، ب) $\frac{11}{120}$ ، ج) $\frac{16}{24}$.

ثانيا : نسحب بطريقة عشوائية كرة من الكيس.نسجل لونها ثم نعيدها إلى الكيس نكرر هذه التجربة 5 مرات متتالية مع العلم أن كل تجربة مستقلة عن الأخرى .

السؤال رقم 03 : احتمال الحصول 5 مرات على كرة سوداء هو:

أ) $\left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$ ، ب) $\left(\frac{3}{8}\right)^5$ ، ج) $\left(\frac{1}{5}\right)^5$.

السؤال رقم 04 : احتمال الحصول 2 كرات سوداء و 3 كرات حمراء هو:

أ) $\left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$ ، ب) $2\times\frac{5}{8}+3\times\frac{3}{8}$ ، ج) $10\times\left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$.

التمرين رقم 12:

U_1 و U_2 كيسان و n عدد طبيعي غير معدوم .

الكيس U_1 يحتوي على 3 كرات سوداء و n كرة بيضاء والكيس U_2 يحتوي على n كرة سوداء و 3 كرات بيضاء.

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس U_1 و كرة واحدة من الكيس U_2.

وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع الكرات السوداء الموجودة في الكيسين U_1 و U_2.

1) أحسب احتمال الحادثتين A و B التاليتين:

F : < الكرتان المسحوبتان من نفس اللون >.

G : < الكرتان المسحوبتان إحداهما على الأقل بيضاء >.

2) أ) عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ب) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

ج) ما هو عدد الكرات في كل كيس إذا علمت أن $E(x)=6$

3) إذا كان الكيس U_1 يحتوي على 3 كرات سوداء و 4 كرات بيضاء والكيس U_2 يحتوي على 4 كرات سوداء و 3 كرات بيضاء. أحسب التباين والإنحراف المعياري لـ X .

التمرين رقم 13:

كيس يحتوي على ثلاث كرات صفراء ، كرتين زرقاوتين ، كرة واحدة حمراء وأربع كرات خضراء .لا يمكن التمييز بين هذه الكرات باللمس.

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس.

1) أحسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية :

الحادثة J : <سحب كرة صفراء> ، الحادثة B : <سحب كرة زرقاء> ، الحادثة R : <سحب كرة حمراء> ، الحادثة V : <سحب كرة خضراء> ،

2) نعرف متغير عشوائي X الذي يرفق كل سحبة بقيمة الربح الموافق لها حيث :

- إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء نربح $10DA$.
- إذا كانت الكرة المسحوبة خضراء نربح $2DA$.
- إذا كانت الكرة المسحوبة صفراء أو زرقاء نربح $3DA$.

أ) أحسب قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ب) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

ج) أحسب التباين والإنحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

التمرين رقم 14:

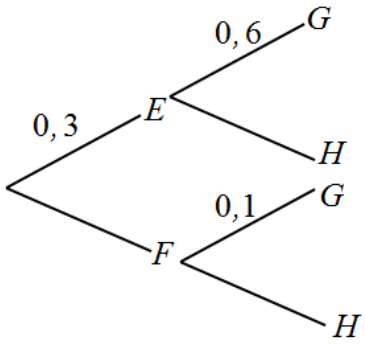
يوجد جواب واحد فقط صحيح لكل سؤال من الأسئلة التالية.

عين الجواب الصحيح مع التبرير

السؤال رقم 01 : إذا كانت A و B حادثتين مستقلتين حيث $P(A)=0,6$ و $P(B)=0,3$ فإن :

أ) $P(A\cup B)=0,9$ ، ب) $P(A\cap B)=0,18$ ، ج) $P_A(B)=0,4$.

السؤال رقم 02 : نعتبر الشجرة المتوازنة التالية :



الإحتمال الشرطي $P_H(F)$ يساوي :

أ) 0,63 ، ب) 0,75 ، ج) 0,84 .

السؤال رقم 03:

يمثل الجدول التالي قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X

x_i	2	4	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي X يساوي :

أ) $\frac{3}{2}$ ، ب) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ، ج) 2

التمرين رقم 15:

يحتوي كيس على 7 قريصات تحمل الأعداد $0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ -1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 1$ (لا يمكن التمييز بينها باللمس).

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث قريصات من الكيس، ولتكن الحوادث التالية :

الحادثة A : لاتوجد أي قريصة تحمل العدد 0 من بين القريصات الثلاثة المسحوبة .

الحادثة B :سحب ثلاث قريصات تحمل أعدادا مختلفة مثنى مثنى.

الحادثة C : مجموع الأعداد المسجلة على القريصات الثلاثة المسحوبة معدوم .

أحسب احتمال كل من الحوادث A و B و C .

التمرين رقم 16:

نرمي 10 مرات حجر منتظم مرقم من 1 إلى 6، وليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة عدد مرات الحصول على رقم مضاعف للعدد 3.

1) عين القانون الذي يتبعه X محددا وسيطيه.
2) أحسب الأمل الرياضياتي والإنحراف المعياري للمتغير العشوائي X .
3) ماحتمال الحصول 8 مرات على مضاعف للعدد 3؟
4) ماحتمال الحصول على 9 مرات على الأكثر على مضاعف العدد 3 :

التمرين رقم 17:

كيسان U_1 و U_2 يحوي كل واحد منهما 5 قريصات مرقمة من 1 إلى 5. نسحب عشوائيا قريصة واحدة من كل كيس. نحصل على العدد N مكون من رقمين، رقم عشراته هو العدد المسحوب من الكيس U_1 ورقم أحاده هو العدد المسحوب من الكيس U_2.

نريد حساب احتمالات الحوادث التالية:

الحادثة A: العدد N زوجي . الحادثة B: العدد N مضاعف لـ 3 . الحادثة C: مجموع الرقمين مضاعف لـ 6 . الحادثة $A \cap B$: العدد N زوجي ومضاعف للعدد 3 . الحادثة $A \cup B$: العدد N زوجي أومضاعف للعدد 3 .

- عين الإجابة الصحيحة من بين الإجابات أ ، ب ، ج ، د المقترحة مع التعليل.

	الإجابة أ	الإجابة ب	الإجابة ج	الإجابة د
السؤال01: $P(A)$ يساوي :	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{25}$
السؤال02: $P(B)$ يساوي :	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$
السؤال03: $P(C)$ يساوي :	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
السؤال04: $P(A \cap B)$ يساوي :	0,16	$\frac{18}{125}$	$\frac{1}{6}$	0
السؤال05: $P(A \cup B)$ يساوي :	0,47	$\frac{3}{5}$	$\frac{19}{25}$	$\frac{5}{6}$

حل التمرين رقم 01:

1) الجدول :

- بما أنه يوجد 850 ولد من بين 1800 تلميذ بالثانوية فإنه يوجد $1800-850=950$ بنت .
- البنين الذين يدرسون في شعبة الرياضيات يمثلون 10% من مجموع تلاميذ الثانوية أي $\frac{1800\times 10}{100}=180$ بنين .
- 150 تلميذ من بينهم 130 بنت يدرسون في شعبة العلوم الإنسانية معناه 20 ولد يدرسون في شعبة العلوم الإنسانية
- ونستنتج بسهولة أن عدد البنيين في شعبة العلوم التجريبية هو $850-180-20=650$.
- بما أن $\frac{2}{3}$ من مجموع تلاميذ الثانوية يدرسون في شعبة العلوم التجريبية هذا يكافئ $\frac{1800\times 2}{3}=1200$ تلميذ
- ونستنتج بسهولة أن عدد التلاميذ في شعبة الرياضيات هو $1800-1200-150=450$.
- ونستنتج بسهولة أن عدد البنات في شعبة الرياضيات هو $450-180=270$.
- ونستنتج بسهولة أن عدد البنات في شعبة العلوم التجريبية هو $1200-650=550$.

ونلخص كل هذا في الجدول التالي :

	بنين	بنات	المجموع
يدرسون في شعبة الرياضيات	180	270	450
يدرسون في شعبة العلوم التجريبية	650	550	1200
يدرسون في شعبة العلوم الإنسانية	20	130	150
المجمـــوع	850	950	1800

2)

- إحتمال الحادثة A : لدينا 950 بنتا في الثانوية إذن $p(A)=\frac{950}{1800}=\frac{19}{36}=0,53$
- إحتمال الحادثة B : لدينا 450 تلميذ في شعبة الرياضيات إذن : $p(B)=\frac{450}{1800}=\frac{1}{4}=0,25$
- إحتمال الحادثة C : لدينا 270 بنت في شعبة الرياضيات إذن : $p(B)=\frac{270}{1800}=\frac{3}{20}=0,15$
- إحتمال الحادثة D : هي الحادثة $A\cup B$ إذن :

$$p(D)=p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

بما أن $A\cap B=C$ فإن $p(D)=p(A)+p(B)-p(C)=\frac{950}{1800}+\frac{450}{1800}-\frac{270}{1800}=\frac{113}{180}$

وأخيرا $p(D)=0,63$

حل التمرين رقم 02:

1) حتى نفرق بين الكريات من الأحسن أن نرمز لها بالرموز $a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\ ;\ e$ والحاملة على الترتيب للأرقام $3\ ;\ 2\ ;\ 2\ ;\ 1\ ;\ 1$.

الجدول التالي يعطي كل السحبات الممكنة وقيم المتغير العشوائي X.

السحب ا	$a;b$	$a;c$	$a;d$	$a;e$	$b;c$	$b;d$	$b;e$	$c;d$	$c;e$	$d;e$
X	2	3	3	4	3	3	4	4	5	5

توجد عشر سحبات متساوية الإحتمال. حسب الجدول السابق لدينا :

سحبة واحدة فقط تعطي $X=$ وهي $a;b$

4 سحبات تعطي $X=$ وهي $a;c$ ، $a;d$ ، $b;c$ ، $b;d$.

3 سحبات تعطي $X=$ وهي $a;e$ ، $b;e$ ، $c;d$.

سحبتان فقط تعطيان $X=$ وهي $c;e$ ، $d;e$.

ومنه قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X.

قيم x_i	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

2) الأمل الرياضي :

- نعلم أن :الأمل الرياضي يحسب بالقانون $E(X)=\sum_{i=}^{k} x_i \times p_i$

$$E(X)=2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{4}{10}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{2}{10}=\frac{36}{10}=3,6$$

- نعلم أن : الإنحراف المعياري يحسب بالقانون $V(X)=\sum_{i=}^{k} x_i^2\times p_i - E(X)^2$

$$V(X)=2^2\times\frac{1}{10}+3^2\times\frac{4}{10}+4^2\times\frac{3}{10}+5^5\times\frac{2}{10}-3,6^2=\frac{138}{10}-3,6^2=0,84 \quad .$$

- نعلم أن : التباين يحسب بالقانون $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

$$\sigma(X)=\sqrt{0,84}\approx 0,92 .$$

حل التمرين رقم 03 :

1) المتغير العشوائي X يأخذ القيمة -3 و 6.الحادثتان $X=-3$ و $X=6$ حادثان متعاكستان.

نحسب $P(X=6)$ وهو أحتمال الحادثة "لا يوجد أي مضاعف للعدد 3 "

من بين الأعداد من 1 إلى 6 يوجد 4 أعداد ليست مضاعفة للعدد 3 وهي :1 ، 2 ، 4 ، 5 عدد الحالات الممكنة هو $6\times6\times6$ أي 216 .

عدد الحالات الملائمة هي $4\times4\times4$ أي 64 وبالتالي :

$$P(X=6)=\frac{64}{216}=\frac{8}{27}$$ يكون عندئذ $$P(X=-3)=1-P(X=6)=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$$

X	3	6
P_i	$\frac{19}{27}$	$\frac{8}{27}$

(2

- نعلم أن :الأمل الرياضي يحسب بالقانون $E(X)=\sum_{i=}^{k} x_i\times p_i$

$$E(X)=-3\times\frac{19}{27}+6\times\frac{8}{27}=-\frac{1}{3}$$

- نعلم أن :الإنحراف المعياري يحسب بالقانون $V(X)=\sum_{i=}^{k} x_i^2\times p_i - E(X)^2$

$$V(X)=9\times\frac{19}{27}+36\times\frac{8}{27}+\frac{1}{9}=\frac{152}{9} \quad .$$

- نعلم أن :التباين يحسب بالقانون $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

$$\sigma(X)=\frac{\sqrt{152}}{3}=4,11 .$$

حل التمرين رقم 04:

عدد الحالات الممكنة لسحب 3 قريصات من بين 10 قريصات هو $C_{10}^{3}=120$

لدينا القريصات : **1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1** ، **3 , 3 , 3 , 3**

المجاميع الممكنة لثلاث قريصات هي :

3+ 3 + 3 =9 ، **1+ 3 + 3 =7** ، **1+ 1 + 3 =5** ، **1+ 1 + 1 =3**

إذن القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي : $\{3\,,5\,,7\,,9\}$

$p(X=3)=\dfrac{C_6^3}{120}=\dfrac{20}{120}$ ، $p(X=5)=\dfrac{C_6^2\times C_4^1}{120}=\dfrac{60}{120}$ ،

$p(X=7)=\dfrac{C_6^1\times C_4^2}{120}=\dfrac{36}{120}$

$p(X=9)=\dfrac{C_4^3}{120}=\dfrac{4}{120}$

x_i	3	5	7	9	المجموع
$p(\{x=x_i\})$	$\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{4}{120}=\dfrac{1}{30}$	1

3) الأمل الرياضياتي $E(X)$: $E(X)=(3)\times\dfrac{1}{6}+(5)\times\dfrac{1}{2}+(7)\times\dfrac{3}{10}+(9)\times\dfrac{1}{30}=5,4$

التباين : $V(X)$

$V(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2=9\times\dfrac{1}{6}+25\times\dfrac{1}{2}+49\times\dfrac{3}{10}+81\times\dfrac{1}{30}-(5,4)^2=2,24$

الإنحراف المعياري $\sigma(X)$: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{2,24}=1,49$.

1) حساب $p\left(\{X<7\}\right)$:

لدينا : $\{X<7\}=\{X=3\}\cup\{X=5\}$ والحادثتان $\{X=3\},\{X=5\}$ غير متوافقتين إذن :

$$p(\{X<7\}) = p(\{X=3\}) + p(\{X=5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \quad .$$

حل التمرين رقم 05 :

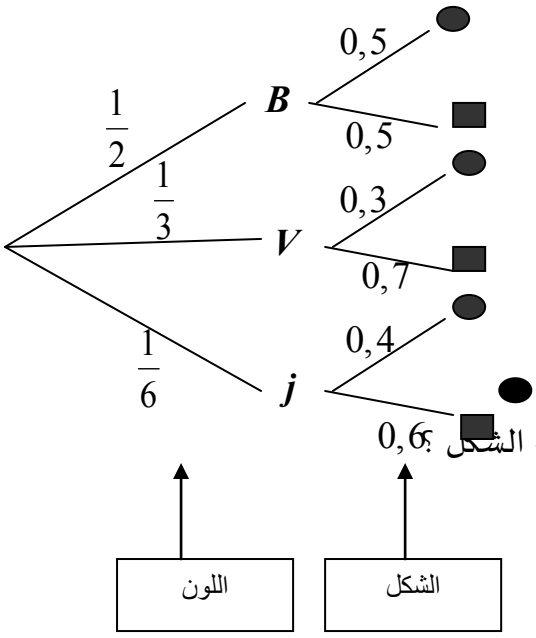
لتكن :

B الحادثة : " القريصة بيضاء " ،

V الحادثة : " القريصة خضراء " ،

j الحادثة : " القريصة صفراء "

R الحادثة : " القريصة دائرية الشكل "



2) ماحتمال أن تكون القريصة المسحوبة دائرية الشكل ؟

قريصة دائرية الشكل ، إما أن تكون بيضاء أو صفراء أو خضراء، وعبّر عن ذلك بـ :

$$R = B \cap R \cup J \cap R \cup V \cap R$$

$$P(R) = P(B) \times P_B(R) + P(V) \times P_V(R) + P(J) \times P_J(R)$$

إذن :

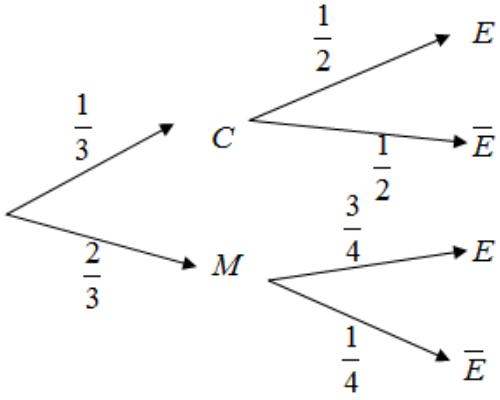
$$P(R) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{10} = \frac{5}{12}$$

3) علما بأن القريصة المسحوبة دائرية الشكل ، ما احتمال أن تكون بيضاء.

$$P_R(B) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{4}$$

حل التمرين رقم 06:

أولا :



1) احتمال الحادثة : " السؤال من نمط الرياضيات والمترشح يجيب صحيح عن السؤال ".

$$P(M \cap E) = P(M) \times P_M(E) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

2) نبين أن احتمال الحادثة E يساوي $\frac{2}{3}$.

لدينا :

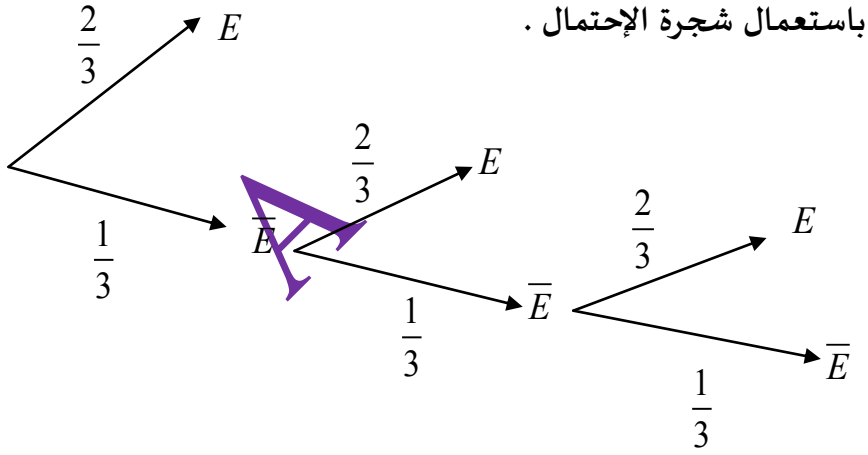
$$P(E) = P(C \cap E) + P(M \cap E) = P(C) \times P_C(E) + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

3) المترشح لم يجب صحيح عن السؤال ، ما احتمال ان يكون هذا السؤال من نمط الثقافة العامة .

$$P_{\overline{E}}(C) = \frac{P(C \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{P(C) \times P_C(\overline{E})}{1 - P(E)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

ثانيا :

1) نعبر عن اللعبة باستعمال شجرة الإحتمال .



2) قانون الإحتمال لعدد النقط المسجلة للمترشح .

x_i	0	1	2	5
$P(x = x_i)$	$P(\overline{E} \cap \overline{E} \cap \overline{E})$	$P(\overline{E} \cap \overline{E} \cap E)$	$P(\overline{E} \cap E)$	$P(E)$

حيث : $P(E) = \frac{2}{3}$ ، $P(\overline{E} \cap E) = P(E) \times P(\overline{E}) = \frac{2}{9}$

$$P(\overline{E}\cap\overline{E}\cap E)=P(\overline{E})^2\times P(E)=\frac{2}{27}\quad ،\quad P(\overline{E}\cap\overline{E}\cap\overline{E})=P(\overline{E})^3=\frac{1}{27}$$

أي :

x_i	0	1	2	5
$P(x=x_i)$	$P(\overline{E}\cap\overline{E}\cap\overline{E})=\frac{1}{27}$	$P(\overline{E}\cap\overline{E}\cap E)=\frac{2}{27}$	$P(\overline{E}\cap E)=\frac{2}{9}$	$P(E)=\frac{2}{3}$

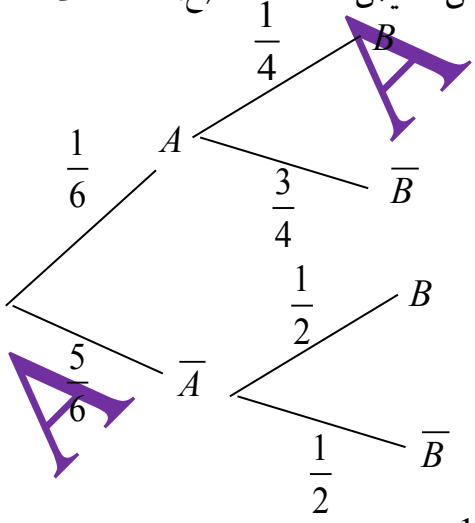
3) حساب الأمل الرياضي لعدد النقط المسجلة للمترشح .

$$E(X)=0\times\frac{1}{27}+1\times\frac{2}{27}+2\times\frac{2}{9}+5\times\frac{2}{3}=\frac{104}{27}\simeq$$

حل التمرين رقم 07:

السحب في كل من الكيسين متساوي الإحتمكال

نضع A :"حادثة سحب قريصة من الكيس U " ، نضع: B " حادثة القريصة المسحوبة بيضاء" .



لدينا : $p(A)=\frac{1}{6}$ وبالتالي $p(\overline{A})=1-p(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

لدينا : $p_A(B)=\frac{1}{4}$ ومنه $p_A(\overline{B})=1-p_A(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

ولدينا كذلك : $p_{\overline{A}}(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ومنه $p_{\overline{A}}(\overline{B})=1-p_{\overline{A}}(B)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

A و $\overline{A}$ تشكل تجزئة إذن $p(B)=p(B\cap A)+p(\overline{A}\cap B)$

أي $p(B)=p(A)\times p_A(B)+p(\overline{A})\times p_{\overline{A}}(B)$

$$p(B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{24}$$

حل التمرين رقم 08:

1) أ)احتمال أن يكون لون الوجه العلوي أصفر هو $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$:

ب) احتمال أن يكون لون الوجه العلوي أحمر هو $P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$:

2.أ) احتمال أن يكون الوجه العلوي أصفرا 3 مرات هو:

$$P(F)=P(X=3)=C_3^3 p^3(1-q)^{3-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

ب) احتمال أن يكون الجه العلوي أصفرا مرتين هو :

$$P(G)=P(X=2)=C_3^2 p^2(1-q)^{3-2}=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}$$

ج) احتمال أن يكون لون الوجه العلوي أصفرا مرة واحدة على الأقل هو

$$P(H)=P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{19}{27}$$

حل التمرين رقم 09:

لدينا $X=\{0;1;2;.....;50\}$

نعتبر قانون برنولي هنل لدينا مخرجين : S : "الجهاز عاطل " و $E=\overline{S}$: "الجهاز غير عاطل" ومنه

$P(S)=0,01$ و $P(E)=1-0,01=0,99$

المتغير العشوائي X يتبع قانون ثنائي الحد بوسيطيه $p=0,01$ و $n=50$.

1) احتمال الحادثة A :"أن لا يتعطل أي جهاز":نطبق القانون $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

$P(X=0)=C_{50}^0(0,01)^0(1-0,01)^{50}=(0,99)^{50}\simeq$.

2) احتمال أن تتعطل 5 أجهزة :

$$P(X=5)=C_{50}^5(0,01)^5(1-0,01)^{50-5}\simeq 0,000128$$

3) إذا كانت B حادثة يتعطل جهاز واحد على الأقل هي الحادثة المعاكسة للحادثة A :" لا يتعطل أي جهاز" ومنه $P(B)=P(\overline{A})=1-P(A)\simeq 1-0,605\simeq 0,395$.

4) أ) $P(X=3)$ تمثل احتمال أن تتعطل 3 أجهزة عاطلة من بين 50 جهاز الموجودة في الشركة :

$$P(X=3)=C_{50}^3(0,01)^3(1-0,01)^{50-3}\simeq 0,0122$$

ب) $P(X\leq 3)$ تمثل احتمال أن تتعطل 3 أجهزة عاطلة من بين 50 جهاز الموجودة:

$$P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$

بعد الحساب مثل ما سبق نجد $P(X\leq 3)\simeq 0,699$

التفسير: احتمال أن تتعطل 3 أجهزة على الأكثر هو تقريبا 0,7 أو بعبارة أخرى هو احتمال على الأقل يتعطل 47 جهاز.

ج) $E(X)=n\times p=50\times 0,01=0,5$

D
A
A
S