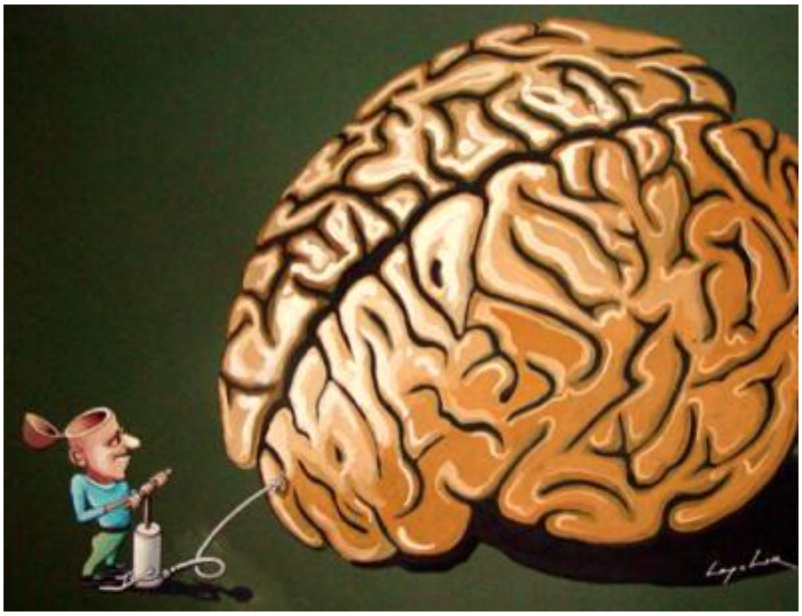
محور

الدوال الأصلية وحساب التكامل

العقل هو ذلك الجزء الذي يميز الإنسان عن غيره من الكائنات،العقل من يستعمله بشكل صحيح يعيش في نعيم ومن يستعمله بشكل خاطئ يجعل حياته جحيما



درس الدوال الأصلية

1. الدالة الأصلية لدالة على مجال

تعريف: f دالة معرفة على مجال I . نقول عن الدالة F المعرفة على المجال I والقابلة للاشتقاق على I أنها دالة أصلية للدالة f على المجال I إذا كان من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$

مثال01 :

- $F:x\mapsto 3x^2-6x+7$ هي دالة أصلية للدالة $f:x\mapsto 6x-6$ على $\mathbb{R}$ لأن $F'(x)=f(x)$.
- $F:x\mapsto \dfrac{5x}{x^2+1}$ هي دالة أصلية للدالة $f:x\mapsto \dfrac{-5x^2+5}{(x^2+1)^2}$ على $\mathbb{R}$ لأن $F'(x)=f(x)$.

تطبيق :

F و G دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x)=\dfrac{5x^2-x+3}{x^2+x+1}$ و $G(x)=\dfrac{-6x-2}{x^2+x+1}$

تحقق أن F و G أصليتان لنفس الدالة على $\mathbb{R}$.

الحل :

الطريقة الأولى: نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F'(x)=G'(x)$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F'(x)=\dfrac{2(3x^2+2x-2)}{(x^2+x+1)^2}$ و $G'(x)=\dfrac{2(3x^2+2x-2)}{(x^2+x+1)^2}$

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F'(x)=G'(x)$. الدالتان F و G هما إذن دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الطريقة الثانية : نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F(x)-G(x)=k$ حيث k عدد حقيقي.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$$F(x)-G(x)=\frac{5x^2-x+3}{x^2+x+1}-\frac{-6x-2}{x^2+x+1}=\frac{5x^2-x+3+6x+2}{x^2+x+1}=\frac{5x^2+5x+5}{x^2+x+1}=\frac{5(x^2+x+1)}{x^2+x+1}=5$$

أي $[F(x)-G(x)]'=0$ ومنه $F'(x)=G'(x)$ لأن مشتقة 5 تساوي صفر.

2. مجموعة الدوال الأصلية لدالة

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل عدد لانهائي من الدوال الأصلية على I من الشكل $x\mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت. دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط.

مثال:

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=6x^2+10x-8$. كل الدوال $F_1:x\mapsto 2x^3+5x^2-8x+1$ ، $F_2:x\mapsto 2x^3+5x^2-8x+13$ ، $F_3:x\mapsto 2x^3+5x^2-8x+\sqrt{7}$ هي دوال أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ بِ $F(x)=2x^3+5x^2-8x+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت.

3. الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير

f دالة مستمرة على مجال I. x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي.
توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$.

مثال :

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=12x^2-2x+3$
مجموعة الدوال الأصلية للدالة f هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x)=4x^3-x^2+3x+c$. توجد دالة أصلية وحيدة تأخذ القيمة 7 من أجل $x=1$ أي $F(1)=7$ أي $4-1+3+c=7$ ومنه $c=1$ أي $F(x)=4x^3-x^2+3x+1$.

4. الدوال الأصلية لدوال مألوفة

الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي الدوال F. c يمثل عددا حقيقيا كيفيا.

$I=$	$F(x)=$	$f(x)=$
$\mathbb{R}$	$F(x)=ax+c$	$f(x)=a$ (a عدد حقيقي)
$\mathbb{R}$	$F(x)=\frac{1}{2}x^2+c$	$f(x)=x$
$\mathbb{R}$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$f(x)=x^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$)
$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$	$F(x)=-\frac{1}{x}+c$	$f(x)=\frac{1}{x^2}$
$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$	$F(x)=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$f(x)=\frac{1}{x^n}$ ($n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$)
$]0;+\infty[$	$F(x)=2\sqrt{x}+c$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	$F(x)=-\cos x+c$	$f(x)=\sin x$
$\mathbb{R}$	$F(x)=\sin x+c$	$f(x)=\cos x$
$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k\in\mathbb{Z})$	$F(x)=\tan x+c$	$f(x)=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

تطبيق :

عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

1) $f(x)=8x^3-4x+7$ ، $I=\mathbb{R}$ (2 $g(x)=x^2+\sin x-\frac{1}{x^2}$ ، $I=]0;+\infty[$ (3 $h(x)=\frac{3}{x^4}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\cos x$ ، $I=]0;+\infty[$

الحل :

1) F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بـ: $F(x)=8\times\frac{1}{3+1}x^{3+1}-4\times\frac{1}{2}x^2+7x+c=2x^4-2x^2+7x+c$ حيث c ثابت حقيقي.

2) G دالة أصلية للدالة g على $]0;+\infty[$ معرفة بِـ :

$$G(x)=\frac{x^{2+1}}{2+1}+(-\cos x)-\left(-\frac{1}{(2-1)x^{2-1}}\right)+c=\frac{1}{3}x^3-\cos x+\frac{1}{x}+c$$ حيث c ثابت حقيقي.

حكمــة

من زاد في حبه لنفسه .. زاد كره الناس له

3) H دالة أصلية للدالة h على $]0;+\infty[$ معرفة بِـ :

$$H(x)=3\left(-\frac{1}{(4-1)x^{4-1}}\right)+2\sqrt{x}-(\sin x)+c=-\frac{1}{x^3}+2\sqrt{x}-\sin x+c$$

5. الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

الدالة f	الشروط الخاصة بالدالة u	F الدوال الأصلية للدالة f على I
$f=u'u$		$F=\frac{1}{2}u^2+c$
$(n\in\mathbb{N}^*)$ $f=u'u^n$		$F=\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$
$f=\frac{u'}{u^2}$	من أجل كل x من I : $u(x)\neq 0$	$F=-\frac{1}{u}+c$
$(n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N})$ $f=\frac{u'}{u^n}$	من أجل كل x من I : $u(x)\neq 0$	$F=-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$
$f=\frac{u'}{\sqrt{u}}$	من أجل كل x من I : $u(x)>0$	$F=2\sqrt{u}+c$

تطبيق01 : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

1) $f(x)=(3x^2+2x)(x^3+x^2+7)^2$ ، $I=\mathbb{R}$ 2) $g(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ ، $I=\mathbb{R}$

3) $h(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+11)^3}$ ، $I=\mathbb{R}$

الحل :

1) $f(x)=(3x^2+2x)(x^3+x^2+7)^2$: الدالة f من الشكل $u'u^n$ حيث $u(x)=x^3+x^2+7$ و $u'(x)=3x^2+2x$ و $n=2$.

دوالها الأصلية من الشكل $\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي $F(x)=\frac{1}{2+1}\left(x^3+x^2+7\right)^{2+1}+c=\frac{1}{3}\left(x^3+x^2+7\right)^3+c$ حيث c ثابت حقيقي.

2) $g(x)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$: الدالة g من الشكل $\frac{u'}{u^2}$ حيث $u(x)=x^2+1$ و $u'(x)=2x$.

دوالها الأصلية من الشكل $-\frac{1}{u}+c$ أي $G(x)=-\frac{1}{x^2+1}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

3) $h(x)=\frac{2x+1}{\left(x^2+x+11\right)^3}$: الدالة h من الشكل $\frac{u'}{u^n}$ حيث $u(x)=x^2+x+11$ و $u'(x)=2x+1$.

دوالها الأصلية من الشكل $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$ أي $H(x)=-\frac{1}{(3-1)\left(x^2+x+11\right)^{3-1}}+c=-\frac{1}{2\left(x^2+x+11\right)^2}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

تطبيق02 : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

1) $f(x)=(x+1)\left(2x^2+4x+1\right)^2$ ، $I=\mathbb{R}$ 2) $g(x)=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$ ، $I=\mathbb{R}$

3) $h(x)=\frac{3x+1}{\left(3x^2+2x+7\right)^3}$ ، $I=\mathbb{R}$ 4) $v(x)=\frac{5x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، $I=\mathbb{R}$

طريقة :

عنما لا نستطيع تطبيق مباشرة القواعد السابقة لتعيين دالة أصلية على مجال I للدالة f يمكننا:

1) ملاحظة إذا كانت f تكتب على أحد الأشكال $u'u^n$ أو $\frac{u'}{u^n}$ أو $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ مع تحديد عبارة $u(x)$.

2) حساب $u'(x)$ ثم تعيين عددا حقيقيا k (حسب كل حالة) بحيث $f=k\times u'u^n$ أو $f=k\times\frac{u'}{u^n}$ أو $f=k\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

3) تطبيق قواعد الدوال الأصلية.

الحل:

1) $f(x)=(x+1)\left(2x^2+4x+1\right)^2$ تكافئ $f(x)=\frac{1}{4}(4x+4)\left(2x^2+4x+5\right)^2$ وهي من الشكل $f=k\times u'u^n$ أي $f=\frac{1}{4}\times u'u^2$ حيث $u(x)=2x^2+4x+1$ و $u'(x)=4x+4$.

دوالها الأصلية من الشكل $\frac{1}{4}\times\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ وبالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$F(x)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\left[u(x)\right]^3=\frac{1}{12}\left(2x^2+4x+1\right)^3+c$ حيث c ثابت حقيقي.

2) $g(x)=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$ من الشكل $g=k\times\frac{u'}{u^2}$ أي $g=\frac{1}{2}\times\frac{u'}{u^2}$ حيث $u(x)=x^2+1$ و $u'(x)=2x$.

دوالها الأصلية من الشكل $\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{u}\right)+c$ أي $G(x)=-\frac{1}{2x^2+2}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

3) $h(x)=\dfrac{3x+1}{(3x^2+2x+7)^3}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6x+2}{(3x^2+2x+7)^3}$. الدالة h من الشكل $h=k\times\dfrac{u'}{u^n}$ أي $h=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'}{u^n}$ حيث $u(x)=3x^2+2x+7$ و $u'(x)=6x+2$.

دوالها الأصلية من الشكل $\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}\right)+c$ أي $H(x)=-\dfrac{1}{4(3x^2+2x+7)^2}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

4) $v(x)=\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+1}}=5\times\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$ من الشكل $v=k\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ أي $v=5\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ حيث $u(x)=x^2+1$ و $u'(x)=2x$.

دوالها الأصلية من الشكل $V(x)=5\times\sqrt{x^2+1}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

6) الدوال الأصلية للدوال $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I :

بما أنّ الدالة $F:x\mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I ، $F'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

فإنّ الدالة $F:x\mapsto e^{u(x)}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$ على I.

تطبيق : عين في كل حالة من الحالتين التاليتين دالة أصلية للدالة f على المجال I:

1) $f(x)=2xe^{x^2+3}$ على $I=\mathbb{R}$. 2) $f(x)=(x+1)e^{x^2+2x-5}$ على $I=\mathbb{R}$.

الحل :

1) $f(x)=2xe^{x^2+3}$ من الشكل $f(x)=u'(x)e^{u(x)}$ حيث $u(x)=x^2+3$ و $u'(x)=2x$ دوالها الأصلية من الشكل $F:x\mapsto e^{u(x)}+c$ أي $F(x)=e^{x^2+3}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

2) $f(x)=(x+1)e^{x^2+2x-5}=\dfrac{1}{2}(2x+2)e^{x^2+2x-5}$ من الشكل $f(x)=\dfrac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ حيث $u(x)=x^2+2x-5$ و $u'(x)=2x+2$ دوالها الأصلية من الشكل $F:x\mapsto\dfrac{1}{2}e^{u(x)}+c$ أي $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2+2x-5}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

7) الدوال الأصلية للدوال من الشكل $x\mapsto\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن:

بما أن الدالة $F:x\mapsto\ln[u(x)]$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I ، $F'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

فإن الدالة $F:x\mapsto\ln[u(x)]$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ على I.

تطبيق: عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ ، $I=]-1;+\infty[$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}$ ، $I=]2;+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ ، $I=]0;\pi[$ 4) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ ، $I=]1;+\infty[$ 5) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$.

الحل :

(1 $f(x)=\frac{1}{x+1}$ من الشكل $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ ومنه دوالها الأصلية هي F حيث $F(x)=\ln(x+1)+c$ على $]-1;+\infty[$ حيث c ثابت حقيقي.

(2 $f(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$ دوالها الأصلية هي F حيث $F(x)=\ln(x-2)-\ln(x+2)=\ln\frac{x-2}{x+2}+c$ على $]2;+\infty[$ حيث c ثابت حقيقي..

(3 $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ من الشكل $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ ومنه دوالها الأصلية هي F حيث $F(x)=\ln(\sin x)+c$ على $]0;\pi[$ حيث c ثابت حقيقي.

(4 $f(x)=\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2-1}$ من الشكل $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$ ومنه دوالها الأصلية هي F حيث $F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+c$ على $]1;+\infty[$ حيث c ثابت حقيقي.

(5 $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ من الشكل $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ ومنه دوالها الأصلية هي F حيث $F(x)=\ln(e^x+1)+c$ على $\mathbb{R}$ حيث c ثابت حقيقي.

حكمة

قال أحد الحكماء لابنه في موعظة : يا بني .. إذا أردت أن تصاحب رجلاً فأغضبه .. فإن أنصفك من نفسه فلا تدع صحبته .. وإلا فاحذره.

المعادلات التفاضلية

1) المعادلات التفاضلية من الشكل $y'=f(x)$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و كانت F دالة أصلية لها على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'=f(x)$ هي الدوال y حيث: $y=F(x)+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت.

- حلول المعادلة التفاضلية $y'=\frac{1}{(x+1)^2}$ في $]-1;+\infty[$ هي الدوال y حيث: $y=-\frac{1}{x+1}+c$ حيث c ثابت حقيقي.
- حلول المعادلة التفاضلية $y'=\ln x$ في $]0;+\infty[$ هي الدوال y حيث: $y=x\ln x-x+c$ حيث c ثابت حقيقي.

2) المعادلات التفاضلية من الشكل $y''=f(x)$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و إذا كانت F دالة أصلية لها على I و كانت G دالة أصلية للدالة F على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y''=f(x)$ هي الدوال y حيث: $y=G(x)+c_1x+c_2$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

مثال:

- حلول المعادلة التفاضلية $y''=\cos x$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y=-\cos x+c_1x+c_2$ حيث c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

- حلول المعادلة التفاضلية $y''=4e^{2x}$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y=e^{2x}+c_1x+c_2$ حيث c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

3) المعادلات التفاضلية من الشكل $y''=-\omega^2 y$

مبرهنة : إذا كان ω عددا حقيقيا غير معدوم فإن حلول المعادلة التفاضلية $y''=-\omega^2 y$ هي الدوال y حيث:

$y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ حيث c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

مثال:

- حلول المعادلة التفاضلية $y''=-4y$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)$ حيث c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.
- حلول المعادلة التفاضلية $y''+3y$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y=c_1\cos\left(\sqrt{3}x\right)+c_2\sin\left(\sqrt{3}x\right)$ حيث c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

تطبيق :

بين أن الدالة $f:x\mapsto Ae^{3x}+Be^{-3x}$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y"-9y=0$

الحل :

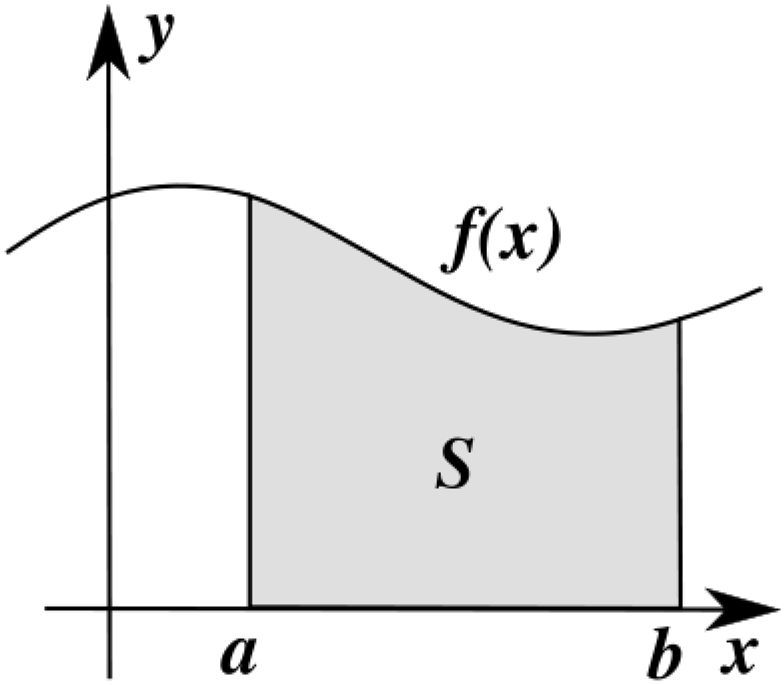
من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=3Ae^{3x}-3Be^{-3x}$ و $f''(x)=9Ae^{3x}+9Be^{-3x}=9f(x)$

ومنه $f"(x)-9f(x)=0$ ومنه f هي حل للمعادلة التفاضلية $y"-9y=0$.

حكمة

سئل الاسكندر: لِمَ تُكرم معلمك فوق كرامة أبيك فقال : إن أبي سبب حياتي الفانية ومعلمي سبب حياتي الباقية

حساب التكامل



تعلمت أنه خير للإنسان أن يكون كالسلحفاة في الطريق الصحيح على أن يكون غزالاً في الطريق الخطأ.

تعلمت أن المتسلق الجيد يركز على هدفه ولا ينظر إلى الأسفل حيث المخاطر التي تشتت الذهن.

تعلمت أن الذي ينجح في النهاية من لديه القدرة على التحمل والصبر.

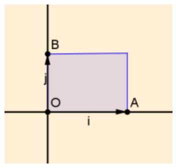
تعلمت أن من أكثر الأسلحة الفعالة التي يملكها الإنسان هي الوقت والصبر.

تعلمت أنه عندما تضحك يضحك لك العالم وعندما تبكي تبكي وحدك.

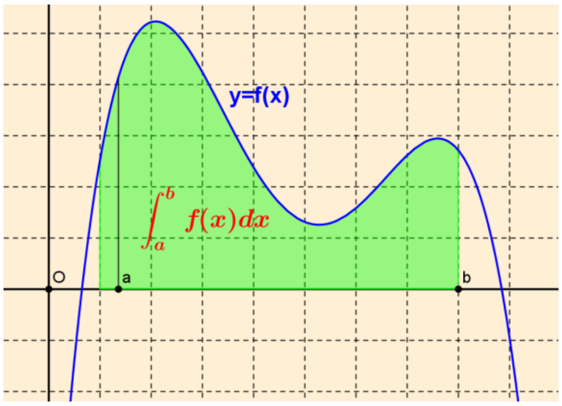
تعلمت أن الشجرة المثمرة هي من يهاجمها الناس.

درس : حساب التكامل

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $\left(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ ولتكن A و B نقطتان بحيث $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$, $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$. وحدة المساحة هي مساحة المستطيل الذي ضلعاه $[OA]$ و $[OB]$.

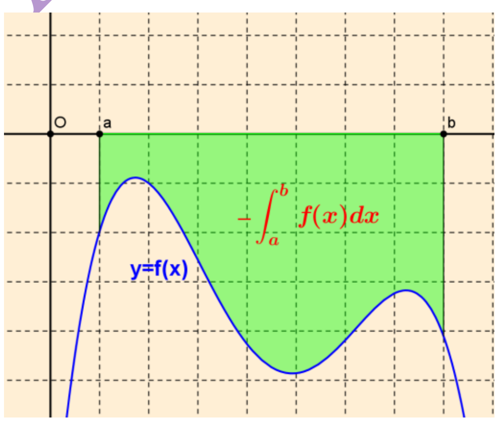


1) إذا كانت الدالة f مستمرة وموجبة على المجال $[a\,,\,b]$ ، فإن مساحة الحيز من المستوي المحدد بمحور الفواصل والمنحني الممثل للدالة f والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي التكامل من a إلى b للدالة f ونرمز لها $\int_a^b f(x)\,dx$ وحدة المساحة



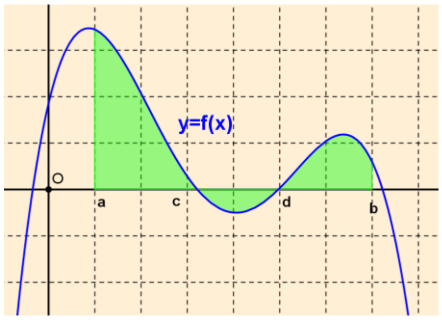
هذه المساحة هي مجموعة النقط $(x\,,\,y)$ التي تحقق $\begin{cases} a\le x\le b \\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$

2) إذا كانت الدالة f مستمرة وسالبة على المجال $[a\,,\,b]$ ، فإن مساحة الحيز من المستوي المحدد بمحور الفواصل والمنحني الممثل للدالة f والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي التكامل من a إلى b للدالة f ونرمز لها $-\int_a^b f(x)\,dx$ وحدة المساحة.



3) إذا كانت الدالة f مستمرة وتغير إشارتها على المجال $[a\,,b]$. نجزء هذا المجال إلى مجالات جزئية تحافظ في كل منها الدالة f على إشارة ثابتة ونطبق القواعد السابقة . الجزء الملون هو مساحة الحيز من المستوي المحدد بمحور الفواصل والمنحني الممثل للدالة f والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx$$

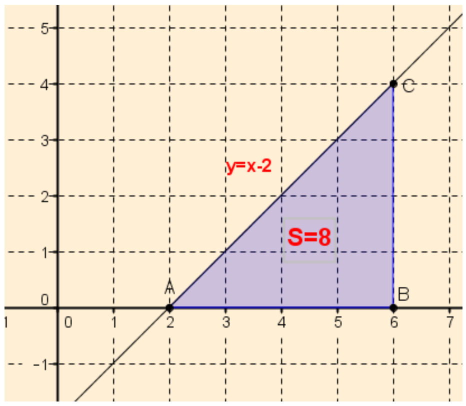


أمثلة :

1) أحسب التكامل $\int_{2}^{6}(x-2)\,dx$

أولا نرسم المنحني الممثل للدالة $f: x \mapsto x+2$ وهي دالة تآلفية . الحيز في هذه الحالة هو **مثلث** ABC

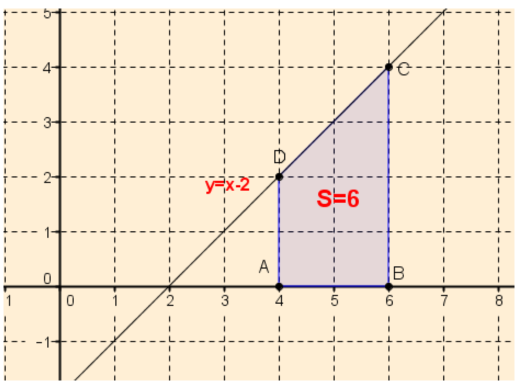
$$\int_{2}^{6}(x-2)\,dx = S_{ABC} = \frac{1}{2}\times AB\times BC = \frac{1}{2}\times 4\times 4 = 8$$



2) أحسب التكامل $\int_{4}^{6}(x-2)\,dx$

أولا نرسم المنحني الممثل للدالة $f: x \mapsto x+2$ وهي دالة تآلفية . الحيز في هذه الحالة هو شبه منحرف $ABCD$

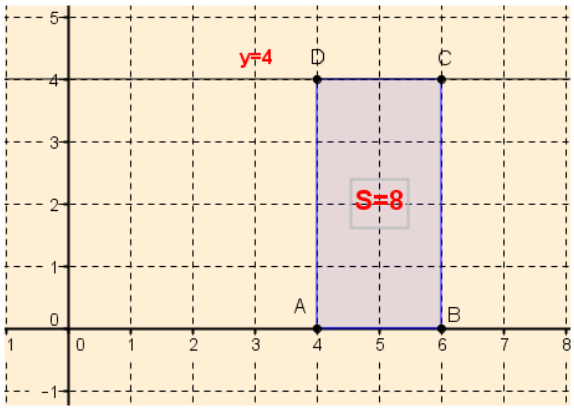
$$\int_{4}^{6}(x-2)\,dx = S_{ABCD} = \frac{(AD+BC)\times AB}{2} = \frac{(2+4)\times 2}{2} = 6$$



3) أحسب التكامل $\int_{4}^{6}4\,dx$

أولا نرسم المنحني الممثل للدالة $f: x \mapsto 4$ وهي دالة ثابتة $(f(x)=4)$. الحيز في هذه الحالة هو مستطيل $ABCD$

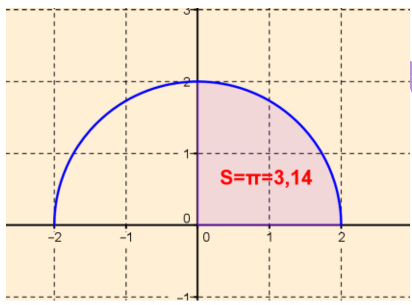
$$\int_{4}^{6}4\,dx = S_{ABCD} = AB\times AD = 2\times 4 = 8$$



4) بين أن مجموعة النقط $M(x,y)$ التي معادلتها $y=\sqrt{4-x^2}$ هي نصف دائرة ثم أحسب التكامل $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

$y=\sqrt{4-x^2}$ تكافئ $\begin{cases} y^2=4-x^2 \\ y\geq 0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y\geq 0 \end{cases}$ وهي معادلة جزء من الدائرة التي مركزها O وطول نصف قطرها 2 والواقعة فوق محور الفواصل أي نصف دائرة.

التكامل $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ يمثل إذن مساحة ربع الدائرة التي مركزها O وطول نصف قطرها 2 .

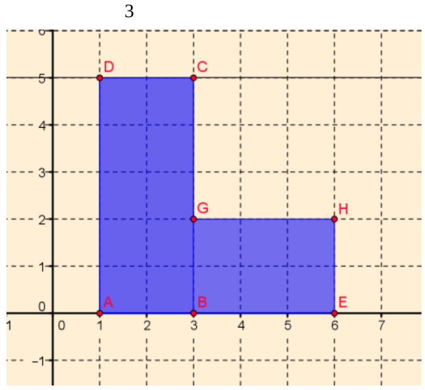


$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\left(\pi\times r^2\right)=\frac{1}{4}\left(\pi\times 2^2\right)=\pi$$

5) نستطيع في بعض الحالات حساب تكامل لدوال غير مستمرة مثلا : $\begin{cases} f(x)=5 & , \quad x<3 \\ f(x)=2 & , \quad x\geq 3 \end{cases}$ ونحسب $\int_1^6 f(x)\,dx$.

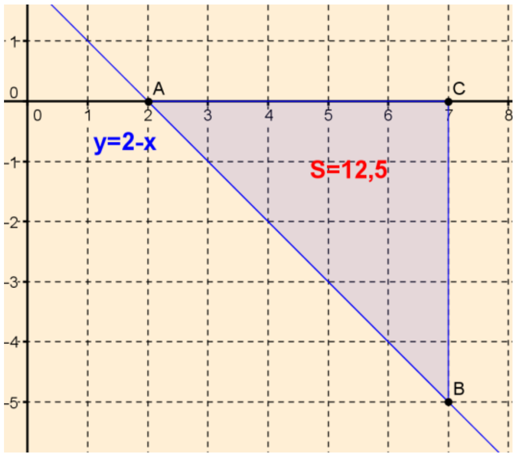
$\int_1^6 f(x)\,dx$ يمثل مساحة الشكل $AEHGCD$ و هو مجموع مساحتي المستطيلين $ABCD$ و $BEHG$

$$\int_1^6 f(x)\,dx=\int_1^3 f(x)\,dx+\int_3^9 f(x)=AB\times BC+BE\times EH=2\times 5+3\times 2=16$$

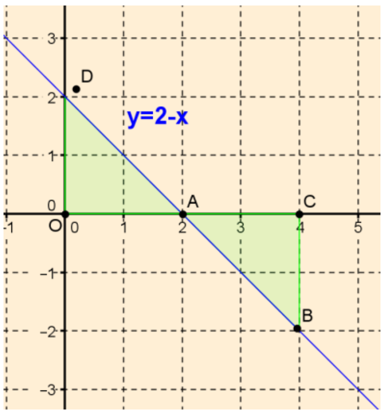


6) أحسب التكامل $\int_2^7 (2-x)\,dx$

$\int_{2}^{7}(2-x)\,dx=-\frac{1}{2}\times5\times5=-\frac{25}{2}=-12{,}5$. إذن مساحة المثلث ABC هي $-\int_{2}^{7}(2-x)\,dx=12{,}5$



7) أحسب $\int_{0}^{4}(2-x)dx$



$$\int_{0}^{4}(2-x)dx=S_{OAD}+(-S_{ABC})=\frac{1}{2}(2)(2)-\frac{1}{2}(2)(2)=0$$

الدالة الأصلية و مساحة حيز

f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a\le b$. (C_f) منحني f في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ و F دالة أصلية لِـ f على I. مساحة الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$.

تعريف التكامل

f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I.

يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$، حيث F دالة أصلية للدالة f على I، التكامل من a إلى b لِـ f

و نرمز إليه بالرمز $\int_{a}^{b}f(x)dx$. نقرأ: "التكامل من a إلى b لِـ $f(x)$ تفاضل x ".

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\left[F(x)\right]_{a}^{b}=F(b)-F(a)$$

مثال : نحاول حساب التكاملات السابقة باستعمال الدوال الأصلية :

1) $\int_{2}^{6}(x-2)\,dx$ ، 2) $\int_{4}^{6}(x-2)\,dx$ ، 3) $\int_{4}^{6}4\,dx$ 4) $\int_{0}^{7}(2-x)dx$.

1) $\int_{2}^{6}(x-2)dx=\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{2}^{6}=\left(\frac{36}{2}-12\right)-\left(\frac{4}{2}-4\right)=8$

2) $\int_{4}^{6}(x-2)dx=\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{4}^{6}=\left(\frac{36}{2}-12\right)-\left(\frac{16}{2}-8\right)=6$

3) $\int_{4}^{6}4dx=\left[4x\right]_{4}^{6}=(24)-(16)=8$.

4) $\int_{2}^{7}(2-x)dx=\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_{2}^{7}=\left(14-\frac{49}{2}\right)-\left(4-\frac{4}{2}\right)=-\frac{25}{2}$.

تطبيق :

أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_{1}^{3}\left(3x^2-4x+1\right)dx$ ، 2) $\int_{0}^{2}\frac{2x}{x^2+1}dx$ ، 3) $\int_{0}^{2}2xe^{x^2}dx$ ، 4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$ ، 5) $\int_{-1}^{0}(2x-3)\left(x^2-3x+1\right)dx$

الحل :

1) $\int_{1}^{3}\left(3x^2-4x+1\right)dx=\left[3\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+x\right]_{1}^{3}=\left[x^3-2x^2+x\right]_{1}^{3}$

$=(27-18+3)-(1-2+1)=12$

2) $\int_{0}^{2}\frac{2x}{x^2+1}dx=\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_{0}^{2}=\ln 5-\ln 1=\ln 5$

3) $\int_{0}^{2}2xe^{x^2}dx=\left[e^{x^2}\right]_{0}^{2}=e^4-e^0=e^4-1$

4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\left[\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin-\frac{\pi}{2}=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}=2$

5) $\int_{-1}^{0}(2x-3)\left(x^2-3x+1\right)^3dx=\left[\frac{1}{4}\left(x^2-3x+1\right)^4\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{4}-\frac{625}{4}=\frac{-624}{4}=-156$

خواص التكامل

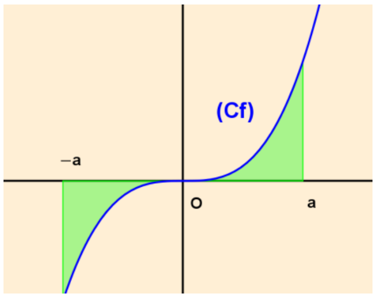
f و g دالتان مستمرتان على المجال I . a ، b عددان حقيقيين من I.

1) $\int_{a}^{a}f(x)dx=0$ ، 2) $\int_{a}^{b}f(x)dx=-\int_{b}^{a}f(x)dx$ ، 3) **علاقة شال :** $\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{b}f(x)dx$ حيث $c\in I$.

4) $\int_{a}^{b}kf(x)dx=k\int_{b}^{a}f(x)dx$ حيث $k\in\mathbb{R}$ ، 5) $\int_{a}^{b}\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_{a}^{b}f(x)dx+\int_{a}^{b}g(x)dx$.

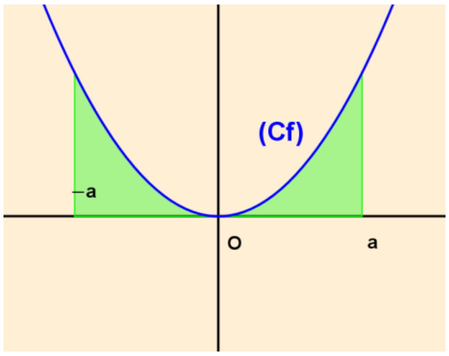
تكامل الدالة الفردية :

إذا كانت الدالة f فردية ومستمرة على مجال I مركزه O فإنه من أجل كل a من I : $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$



تكامل الدالة الزوجية:

إذا كانت الدالة f زوجيةومستمرة على مجال I مركزه O فإنه من أجل كل a من I: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$



التكامل والمقارنة

f و g دالتان مستمرتان على مجال $[a\,;b]$.

1) إذا كان من أجل كل x من $[a\,;b]$، $f(x)\geq 0$ فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

2) إذا كان من أجل كل x من $[a\,;b]$، $f(x)\leq g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

مثال : نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي t من $[0\ ,\ x]$: $e^t \geq 1$.

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0\,,\,+\infty[$ فإن $e^x \geq x+1$.

الحل :

بما أن $e^t \geq 1$ فإن $\int_0^x e^t dt \geq \int_0^x 1dt$ وبالتالي $\left[e^t\right]_0^x \geq \left[t\right]_0^x$ أي $e^x - e^0 \geq x-0$ ومنه $e^x \geq x+1$

القيمة المتوسطة لدالة على مجال

f دالة مستمرة على مجال $[a\,;b]$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a\,;b]$ هي العدد الحقيقي m حيث: $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

مثال : عين القيمة المتوسطة للدالة الأسية $(x \mapsto e^x)$ على المجال $[0\ ,\ 3]$

الحل :

نعلم ان الدالة الأصلية للدالة $f: x \mapsto e^x$ هي الدوال $F: x \mapsto e^x + c$ حيث c ثابت حقيقي.

$$m=\frac{1}{3-0}\int_0^3 e^x dx=\frac{1}{3}\left[e^x\right]_0^3=\frac{e^3-e^0}{3}=\frac{e^3-1}{3}$$

حصر القيمة المتوسطة

f دالة مستمرة على مجال $[a\,;b]$.

إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل x من $[a\,;b]$، $m\leq f(x)\leq M$ فإن:

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$

لسان العاقل وراء قلبه ، وقلب الأحمق وراء لسانه

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بِ $f(x)=1+\ln(x+1)$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0\ ;\ e-1]$.

2) استنتج حصرا لِ $f(x)$.

3) استنتج حصرا للعدد الحقيقي $I=\int_1^{e-1} f(x)dx$

الحل:

1) لدينا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، $f'(x)=\frac{1}{x+1}$ أي $f'(x)>0$ ومنه f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و بالتالي هي كذلك متزايدة تماما على المجال $[0\ ;\ e-1]$.

2) بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0\ ;\ e-1]$ نستنتج أنه من أجل كل x من $[0\ ;\ e-1]$، $f(0)\leq f(x)\leq f(e-1)$ أي $1\leq f(x)\leq 2$.

3) بتطبيق حصر القيمة المتوسطة نجد $(e-2)\leq\int_1^{e-1} f(x)dx\leq 2(e-2)$.

المكاملة بالتجزئة

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I و u' و v' مشتقاتهما على الترتيب مستمرتان على I.

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

مثال :

باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب: $A=\int_0^1 xe^{2x}dx$ و $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

الحل:

1) حساب $A=\int_0^1 xe^{2x}dx$: نضع $u(x)=x$ ، $v'(x)=e^{2x}$ و منه $u'(x)=1$ ، $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة نكتب : $A=\int_0^1 xe^{2x}dx=\int_0^1 u(x)v'(x)dx=\left[x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\right]_0^1-\int_0^1(1)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)dx$

و منه $A=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}e^0\right]=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$ إذن $A=\frac{e^2+1}{4}$.

2) حساب $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$: نضع $u(x)=x$ ، $v'(x)=\cos x$ و منه $u'(x)=1$ ، $v(x)=\sin x$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة نكتب : $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)\,dx=\left[x(\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1)(\sin x)\,dx$

و منه $B=\frac{\pi}{2}-\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\left[-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right]=\frac{\pi}{2}-1$ إذن $B=\frac{\pi}{2}-1$.

حساب الحجوم

حساب حجوم بعض المجسمات البسيطة

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ محاوره $(x'x)$، $(y'y)$ و $(z'z)$.

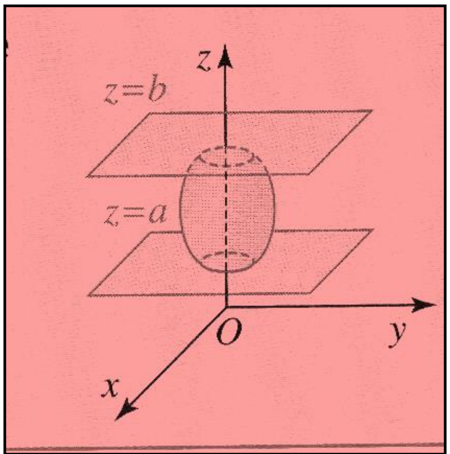
وحدة الحجوم $(u.v)$ هي حجم متوازي المستطيلات المنشأ على $(O;I,J,K)$.

المجسم Σ محدد بمستويين (P_1) ، (P_2)

نعتبر في الفضاء مجسما Σ محددا بمستويين موازيين للمستوي (xOy) معادلتاهما: $z=a$ و $z=b$.

نسمي V حجم المجسم و $S(z)$ مساحة مقطع المجسم بمستو موازٍ للمستوي (xOy) راقمه z حيث $a\le z\le b$.

فإن $V=\int_a^b S(z)\,dz$.



حجم مجسم دوراني محوره $(x'x)$

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر الجزء من المستوي $(O,\vec{i},\vec{j})$ المحدد بالمنحني الذي معادلته $y=f(x)$ والمستقيمين الذين معادلتاهما $x=b$, $x=a$ والمحور $(O,\vec{i})$.

عندما يدورهذا الجزء من المستوي يولد مجسما دورانيا محددا بالمستويين الموازيين لـ $(O,\vec{j},\vec{k})$ راقمهما على الترتيب a و b .

حجم هذا المجسم الدوراني بوحدة الحجوم هو $V=\int_a^b S(x)dx=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$

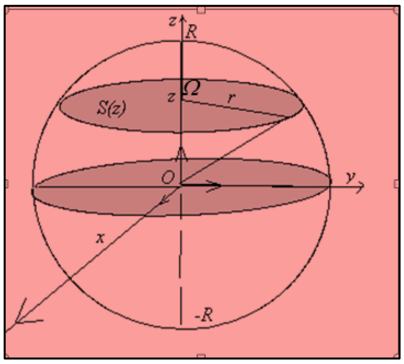
مثال: أحسب V حجم المجسم الدوراني المولد بالدوران حول المحور $(x'x)$ للحيز المحدد بمنحني الدالة $f:x\mapsto x^2$ وبالمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$.

الحل: $\frac{\pi}{5}=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\pi\int_0^1(x^4)\,dx=\pi\int_0^1(x^2)^2\,dx\;V$

أمثلة متنوعة

1) برهن أن حجم كرة طول نصف قطرها R هو: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

الحل :



نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

الكرة التي مركزها O و طول نصف قطرها R.

مقطع هذه الكرة بمستو مواز للمستوي (xOy) و راقمه z حيث $-R<z<R$

هي دائرة مركزها $\Omega(0\,;0\,;z)$ و طول نصف قطرها $r=\Omega M$ مع $OM=R$.

لدينا في المثلث القائم $O\Omega M$: $r^2+z^2=R^2$ ومنه $r^2=R^2-z^2$.

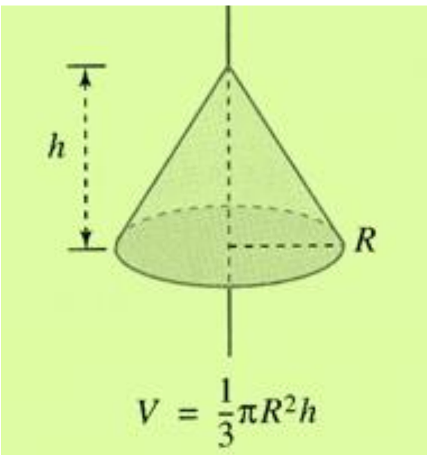
إذن مساحة القرص الذي مركزه Ω و طول نصف قطره R هي: $S(z)=\pi\left(R^2-z^2\right)$

ونحسب الحجم كما يلي : $V=\int_{-R}^{R}S(z)dz=\int_{-R}^{R}\pi\left(R^2-z^2\right)dz$ و بالتالي:

$V=\pi\left[R^2z-\frac{1}{3}z^3\right]_{-R}^{R}=\pi\left[\left(R^3-\frac{1}{3}R^3\right)-\left(-R^3+\frac{1}{3}R^3\right)\right]$ و منه $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ وحدة الحجوم

2) برهن أن حجم المخروط الدوراني الذي راسه O وارتفاعه h و طول نصف قطره R هو $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$

الحل :



ليكن r طول نصف قطر القرص

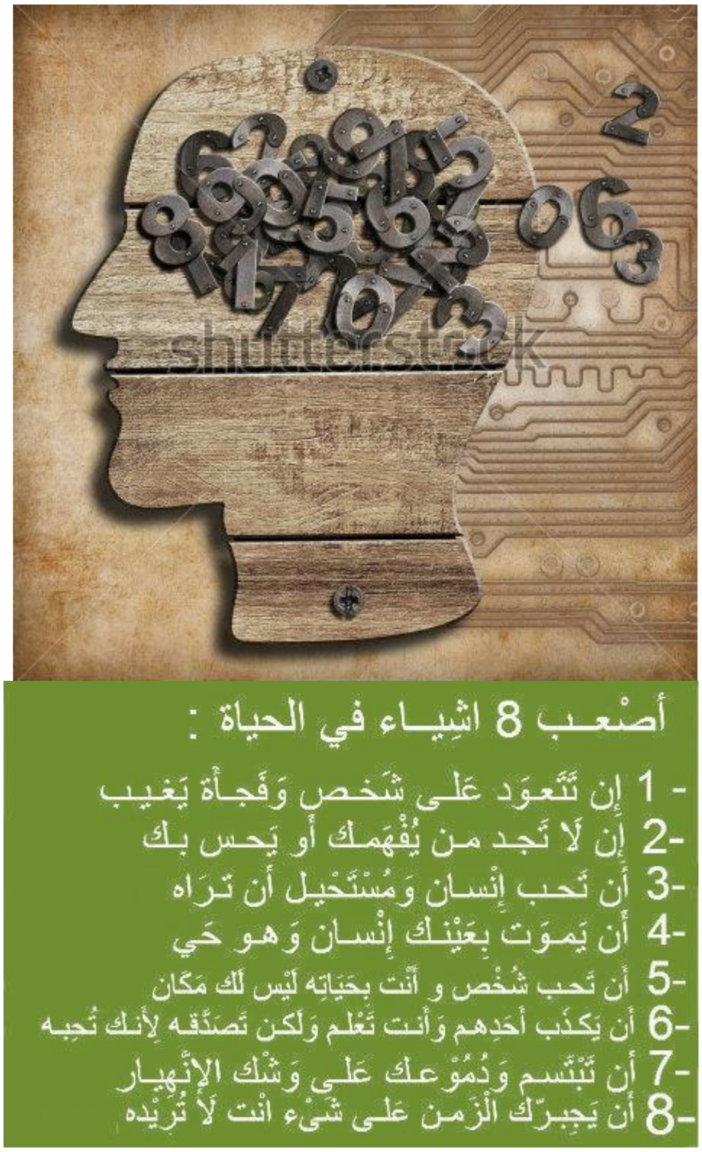
لدينا حسب مبرهنة طاليس $\frac{r}{R}=\frac{z}{h}$ ومنه $r=\frac{Rz}{h}$

ومنه مساحة القرص بدلالة z هي $S(z)=\pi\times r^2=\pi\left(\frac{Rz}{h}\right)^2=\pi\frac{R^2}{h^2}z^2$

ويكون حجم المخروط

$$V=\int_0^h S(z)dz=\int_0^h\left(\pi\frac{R^2}{h^2}\right)z^2dz=\left(\pi\frac{R^2}{h^2}\right)\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h=\left(\pi\frac{R^2}{h^2}\right)\left[\frac{h^3}{3}-\frac{0}{3}\right]=\frac{1}{3}\pi R^2h$$

تمارين محلولة للتدريب



تمارين محلولة حول الدوال الأصلية و التكامل

التمرين رقم 01 : أحسب F الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ للدوال التالية:

1) $f(x)=-10x^4+8x^3+3x^2-4x+17$ على المجال $\mathbb{R}$ ، 2) $f(x)=\dfrac{4x^3+2x^2-5}{3}$ على المجال $\mathbb{R}$ ،

3) $f(x)=-2\cos x-4\sin x+3$ على المجال $\mathbb{R}$ ، 4) $f(x)=3-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{5}{x^4}$ على المجال $]0\ ,+\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-2x+3$ على المجال $]0\ ,+\infty[$

التمرين رقم 02 : الدوال الأصلية للدوال من الشكل $u'u^n$: أحسب الدوال الأصلية على المجال I لكل من :

1) $f(x)=2x\left(x^2-1\right)^3$ ، $I=\mathbb{R}$ ، 2) $f(x)=-3(-3x+1)^4$ ، $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=x^2\left(x^3-2\right)^2$ ، $I=\mathbb{R}$ ، 4) $f(x)=\dfrac{(2x+3)^3}{7}$ ، $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=e^x\left(e^x-2\right)^3$ ، $I=\mathbb{R}$ ، 6) $f(x)=e^{-2x}\left(e^{-2x}+2\right)^3$ ، $I=\mathbb{R}$

7) $f(x)=\dfrac{1}{x}(\ln x)^2$ ، $I=]0;+\infty[$ ، 8) $f(x)=\dfrac{3}{x-1}\left[\ln(x-1)\right]^2$ ، $I=]1;+\infty[$

9) $f(x)=-2\cos x\sin^2 x$ ، $I=\mathbb{R}$

التمرين رقم 03 : الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\dfrac{u'}{u^n}$: أحسب الدوال الأصلية على المجال I لكل من :

1) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^3}$ ، $I=]-1;+\infty[$ 2) $f(x)=\dfrac{7}{(2x+1)^3}$ ، $I=\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ ، $I=]1;+\infty[$ 4) $f(x)=\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$ ، $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$ ؛ $I=]0;\pi[$

التمرين رقم 04 : الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$: أحسب الدوال الأصلية على المجال I لكل من :

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ ؛ $I=]2;+\infty[$ 2) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ ؛ $I=]-\infty;2[$

3) $f(x)=\dfrac{2e^x}{3\sqrt{e^x+1}}$ ، $I=\mathbb{R}$ 4) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x+1}}$ ، $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ ، $I=]1;+\infty[$

التمرين رقم 05 : الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\dfrac{u'}{u}$: أحسب الدوال الأصلية على المجال I لكل من :

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ ؛ $I=]2;+\infty[$ 2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ ؛ $I=\mathbb{R}$ 4) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ ؛ $I=]0;\pi[$

التمرين رقم 06 : أحسب الدوال الأصلية لكل من الدوال التالية على المجال المعطى I:

1) $f(x)=2x^3-4x+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}$ مع $I=]0\,;+\infty[$.

2) $f(x)=(2x+1)^4$ مع $I=\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\dfrac{1}{(3x+2)^2}$ مع $I=]0\,;+\infty[$.

4) $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x+2)^3}$ مع $I=\mathbb{R}$.

من ضيع حرثه .. ندم يوم حصاده

التمرين رقم 07 :

لتكن f الدالة المعرفة على $]0\ ;\ +\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+x-3}{(x+1)^2}$.

1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0\ ;\ +\infty[$:

$f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2}$.

2) استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $]0\ ;\ +\infty[$.

التمرين رقم 08 : أحسب $A=\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx$ ، $B=\displaystyle\int_{-2}^{0}\frac{x-1}{x^2-2x+5}dx$

التمرين رقم 09 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^x)$ ونعرف التكامل التالي : $I=\displaystyle\int_0^{\ln 2}f(x)dx$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)>0$ واستنتج إشارة I .

2) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث $\dfrac{e^x}{1+e^x}=a+\dfrac{b}{1+e^x}$.

3) أحسب $A=\displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{1}{1+e^x}dx$ ثم $B=\displaystyle\int_0^{\ln 2}f'(x)dx$

4) أحسب $f(x)+f'(x)$ ثم استنتج قيمة التكامل I .

التمرين رقم 10 :

1) أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم فإن $\dfrac{1}{x(x^2+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx}{x^2+1}$.

2) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب $\int_{1}^{2}\frac{x\ln x}{\left(x^{2}+1\right)^{2}}dx$

التمرين رقم 11 :

أحسب $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,d\,x$

التمرين رقم 12:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f\left(x\right)=x^{2}e^{2x}$

1) عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=(ax^{2}+bx+c)e^{2x}$ أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

2) أحسب $\int_{0}^{1}f\left(x\right)dx$

التمرين رقم 13 :

1) احسب التكامل $I_{1}=\int_{0}^{1}\frac{x}{1+x^{2}}dx$

2) ليكن $I_{2}=\int_{0}^{1}\frac{x^{3}}{1+x^{2}}dx$ احسب $I_{1}+I_{2}$ ثم استنتج قيمة I_{2} .

التمرين رقم 14 :

نضع $A=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cos^{2}x\ dx$ و $B=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin^{2}x\ dx$.

1) أحسب $A+B$.

2) أحسب باستعمال المكاملة بالتجزئة $A-B$.

3) استنتج من 1) و 2) قيمة كلا من A و B .

التمرين رقم 15 :

باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب : $A=\int_{0}^{\pi}x\sin x\,dx$ ، $B=\int_{1}^{e}\ln t\,dt$ ، $C=\int_{-1}^{0}\left(2x+1\right)e^{-x}\,dx$.

حلول التمارين التدريبة

قمة الصبر أن تسكت وفي قلبك جرح يتكلم وقمة القوة أن تبتسم وفي عينك ألف دمعة!!!!!!!!

حلول تطبيقات الدوال الأصلية والتكامل

حل التمرين رقم 01 :

1) $f(x)=-10x^4+8x^3+3x^2-4x+17$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ أي $F(x)=-10\frac{x^5}{5}+8\left(\frac{x^4}{4}\right)+3\left(\frac{x^3}{3}\right)-4\left(\frac{x^2}{2}\right)+17x+c=-2x^5+2x^4+x^3-2x^2+17x+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

2) $f(x)=\frac{4x^3+2x^2-5}{3}=\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}$.الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ أي $F(x)=\frac{4}{3}\left(\frac{x^4}{4}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right)-\frac{5}{3}x+c=\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{9}x^3-\frac{5}{3}x+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

3) $f(x)=-2\cos x-4\sin x+3$.الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ أي $F(x)=-2(\sin x)-4(-\cos x)+3x+c=-2\sin x+4\cos x+3x+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

4) $f(x)=3-\frac{1}{x^3}+\frac{5}{x^4}$.الدالة f معرفة ومستمرة على $]0\ ,\ +\infty[$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $]0\ ,\ +\infty[$ أي $F(x)=3x-\left(\frac{-1}{2x^2}\right)+5\left(\frac{-1}{3x^3}\right)+c=3x+\frac{1}{2x^2}-\frac{5}{3x^3}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

5) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-2x+3$. الدالة f معرفة ومستمرة على $]0\ ,\ +\infty[$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $]0\ ,\ +\infty[$ أي $F(x)=\sqrt{x}-x^2+3x+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

حل التمرين رقم 02 :

1) $f(x)=2x\left(x^2-1\right)^3$ الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=u'u^n$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي $F(x)=\frac{1}{4}\left(x^2-1\right)^4+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

2) $f(x)=-3(-3x+1)^4$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=u'u^n$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي $F(x)=\frac{1}{5}(-3x+1)^5+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

حكمـة

خيانة الوطن

مثل الذي خان وطنه و باع بلاده مثل الذي يسرق من مال أبيه ليطعم اللصوص ، فلا أبوه يسامحه و لا اللص يكافئه

3) $f(x)=x^2\left(x^3-2\right)^2=\frac{1}{3}\times 3x^2\left(x^3-2\right)^2$.الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=\frac{1}{3}u'u^n$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=\frac{1}{3}\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي $F(x)=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}\left(x^3-2\right)^3+c=\frac{1}{9}\left(x^3-2\right)^3+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

4) $f(x)=\frac{(2x+3)^3}{7}=\frac{1}{7}(2x+3)^3=\frac{1}{14}\times 2(2x+3)^3$.الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=\frac{1}{14}u'u^n$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=\frac{1}{14}\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي $F(x)=\frac{1}{14}.\frac{1}{4}(2x+3)^4+c=\frac{1}{56}(2x+3)^4+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

5) $f(x)=e^x\left(e^x-2\right)^3$.الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=u'u^n$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي $F(x)=\frac{1}{4}\left(e^x-2\right)^4+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

6) $f(x)=e^{-2x}\left(e^{-2x}+2\right)^3$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=-\frac{1}{2}u'u^n$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=-\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي $F(x)=-\frac{1}{8}\left(e^{-2x}+2\right)^4+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

7) $f(x)=\frac{1}{x}(\ln x)^2$.الدالة f معرفة ومستمرة على $]0\ ,\ +\infty[$ وهي من الشكل $f=u'u^n$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $]0\ ,\ +\infty[$ من الشكل $F=\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي $F(x)=\frac{1}{3}(\ln x)^3+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

8) $f(x)=\frac{3}{x-1}\left[\ln(x-1)\right]^2=3\times\frac{1}{x-1}\left[\ln(x-1)\right]^2$.الدالة f معرفة ومستمرة على $]1\ ,\ +\infty[$ وهي من الشكل $f=3u'u^n$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $]1\ ,\ +\infty[$ من الشكل $F=3\times\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي $F(x)=3\times\frac{1}{3}\left[\ln(\ln x-1)\right]^3+c=\left[\ln(\ln x-1)\right]^3+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

9) $f(x)=-2\cos x\sin^2 x=-2(\cos x)(\sin x)^2$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=-2u'u^n$ فهي تقبل دوال أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=-2\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي $F(x)=\dfrac{-2}{3}(\sin x)^3+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

حل التمرين رقم 03 :

1) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^3}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $]-1;+\infty[$ وهي من الشكل $f=\dfrac{u'}{u^n}$ فهي تقبل دوال أصلية F على $]-1;+\infty[$ من الشكل $F=-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$ أي $F(x)=\dfrac{-1}{2(x+1)^2}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

2) $f(x)=\dfrac{7}{(2x+1)^3}=\dfrac{7}{2}\times\dfrac{2}{(2x+1)^3}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ وهي من الشكل $f=\dfrac{7}{2}\times\dfrac{u'}{u^n}$ فهي تقبل دوال أصلية F على $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ من الشكل $F=-\dfrac{7}{2}\times\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$ أي $F(x)=\dfrac{-7}{4(2x+1)^2}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

3) $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^2}=\dfrac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $]1;+\infty[$ وهي من الشكل $f=\dfrac{u'}{u^n}$ فهي تقبل دوال أصلية F على $]1;+\infty[$ من الشكل $F=-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$ أي $F(x)=\dfrac{-1}{\ln x}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

4) $f(x)=\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=2\times\dfrac{u'}{u^n}$ فهي تقبل دوال أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=2\times\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$ أي $F(x)=\dfrac{-2}{(1+e^x)}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

5) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $]0;\pi[$ وهي من الشكل $f=\dfrac{u'}{u^n}$ فهي تقبل دوال أصلية F على $]0;\pi[$ من الشكل $F=-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$ أي $F(x)=\dfrac{-1}{2(\sin x)^2}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

حل التمرين رقم 04 :

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $]2;+\infty[$ وهي من الشكل $f=\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ فهي تقبل دوال أصلية F على $]2;+\infty[$ من الشكل $F=2\sqrt{u}+c$ أي $F(x)=2\sqrt{x-2}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

2) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $]-\infty;2[$ وهي من الشكل $f=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $]-\infty;2[$ من الشكل $F=\dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{u}\right)+c$ أي $F(x)=\sqrt{x^2-2x}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

3) $f(x)=\dfrac{2e^x}{3\sqrt{e^x+1}}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=\dfrac{2}{3}\left(2\sqrt{u}\right)+c$ أي $F(x)=\dfrac{4}{3}\sqrt{e^x+1}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

حكمة

أضمن طريقة لتدمير الرجل الذي لا يعرف إدارة ماله هي أن تعطيه المزيد من المال

4) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x+1}}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=2\sqrt{u}+c$ أي $F(x)=2\sqrt{\sin x+1}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

5) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\ln x}}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $]1;+\infty[$ وهي من الشكل $f=\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $]1;+\infty[$ من الشكل $F=2\sqrt{u}+c$ أي $F(x)=2\sqrt{\ln x}+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

حل التمرين رقم 05 :

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $]2;+\infty[$ وهي من الشكل $f=\dfrac{u'}{u}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $]2;+\infty[$ من الشكل $F=\ln u+c$. وعلى المجال $]2;+\infty[$ يكون $x-2>0$ إذن $F(x)=\ln(x-2)+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{x^2+3}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=\dfrac{1}{2}.\dfrac{u'}{u}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=\ln u+c$ إذن $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right)+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

3) $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ وهي من الشكل $f=\frac{u'}{u}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=\ln u+c$ إذن $F(x)=\ln\left(e^x+1\right)+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

4) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$. الدالة f معرفة ومستمرة على $]0;\pi[$ وهي من الشكل $f=\frac{u'}{u}$ فهي تقبل دوالا أصلية F على $\mathbb{R}$ من الشكل $F=\ln u+c$ ولدينا $\sin x>0$ على $]0;\pi[$ إذن $F(x)=\ln(\sin x)+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

حل التمرين رقم 06 :

1) $f(x)=2x^3-4x+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}=2x^3-4x+2\left(\frac{1}{x^2}\right)-5\left(\frac{1}{x^3}\right)$ **دوالها الأصلية F حيث**

$F(x)=2\frac{x^4}{4}-4\frac{x^2}{2}+2\left(-\frac{1}{x}\right)-5\left(-\frac{1}{2x^2}\right)+c=\frac{x^4}{2}-2x^2-\frac{2}{x}+\frac{5}{2x^2}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

2) $f(x)=(2x+1)^4=\frac{1}{2}(2)(2x+1)^4$ من الشكل $\frac{1}{2}u'u^n$ دوالها الأصلية F حيث

$F(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}(2x+1)^5\right]+c=\frac{1}{10}(2x+1)^5+c$ حيث c ثابت حقيقي.

3) $f(x)=\frac{1}{(3x+2)^2}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{(3x+2)^2}$ من الشكل $\frac{1}{3}\times\frac{u'}{u^2}$ دوالها الأصلية F حيث

$F(x)=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{(2-1)(3x+2)^{2-1}}\right]+c=-\frac{1}{3(3x+2)}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

4) $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+2)^3}$ من الشكل $\frac{u'}{u^3}$ دوالها الأصلية F حيث

$F(x)=\left[-\frac{1}{(3-1)\left(x^2+x+2\right)^{3-1}}\right]+c=-\frac{1}{2\left(x^2+x+2\right)^2}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

حل التمرين رقم 07 :

1) $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x+1)^2}=\frac{(ax+b)(x+1)^2+c}{(x+1)^2}$ بعد النشر والتبسيط نجد $c=-3$, $b=0$, $a=1$ أي

$f(x)=x-\frac{3}{(x+1)^2}$.

2) $F(x)=\frac{x^2}{2}-3\left[\frac{-1}{(2-1)(x+1)^{2-1}}\right]+k=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x+1}+k$ حيث k ثابت حقيقي.

حل التمرين رقم 08 :

1) حساب $A=\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx$

الدالة $f:x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ معرفة ومستمرة على $[1\ ,\ e^2]$ فهي تقبل إذن دوالا أصلية على هذا المجال .

$A=\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^{e^2}\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)dx$. الدالة f من الشكل $f=u'u$ حيث $u(x)=\ln x$ و $u'(x)=\frac{1}{x}$.

إذن $A=\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{e^2}=\frac{1}{2}(\ln e^2)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2=2$ وأخيرا $\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx=2$

$B=\int_{-2}^{0}\frac{x-1}{x^2-2x+5}dx$

الدالة $f:x\mapsto\frac{x-1}{x^2-2x+5}$ معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ فهي تقبل إذن دوالا أصلية على $\mathbb{R}$.

$B=\int_{-2}^{0}\frac{x-1}{x^2-2x+5}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx$ من الشكل من الشكل $\frac{1}{2}\times\frac{u'}{u}$ حيث $u(x)=x^2-2x+5$ وهي موجبة تماما $(\Delta<0)$ و $u'(x)=2x-2$

$B=\int_{-2}^{0}\frac{x-1}{x^2-2x+5}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2-2x+5\right)\right]_{-2}^{0}=\frac{1}{2}[\ln 5-\ln 13]=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{13}$

حل التمرين رقم 09 :

1) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $e^x>0$ ومنه $e^x+1>1$ وبالتالي $\ln(e^x+1)>0$ وكذلك من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{-x}>0$ ومنه $e^{-x}\ln(1+e^x)>0$ أي $f(x)>0$. وبما أن $0<\ln 2$ فحسب الخاصية :

إذا كانت $f(x)\geq 0$ و $a\leq b$ فإن $\int_a^b f(x)dx\geq 0$ نستنتج أن $\int_0^{\ln 2}f(x)dx>0$.

2) $\frac{ae^x+a+b}{1+e^x}=a+\frac{b}{1+e^x}=\frac{e^x}{1+e^x}$ وبالمطابقة نجد $a=1$ و $a+b=0$ أي $b=-1$. إذن $\frac{e^x}{1+e^x}=1-\frac{1}{1+e^x}$.

3) $A=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{1+e^x}dx=\int_0^{\ln 2}\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=\left[x-\ln(1+e^x)\right]_0^{\ln 2}=\ln 2-\ln\left(1+e^{\ln 2}\right)-0+\ln\left(1+e^0\right)$

أي $A=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{1+e^x}dx=\ln 2-\ln\left(1+e^{\ln 2}\right)-0+\ln\left(1+e^0\right)=\ln 2-\ln 3+\ln 2=2\ln 2-\ln 3=\ln\frac{4}{3}$

$$\boxed{A=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{1+e^x}dx=\ln\frac{4}{3}}$$

إذن $B=\int_0^{\ln 2}f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^{\ln 2}=f(\ln 2)-f(0)=e^{-\ln 2}\ln\left(1+e^{\ln 2}\right)-\ln 2=\frac{1}{2}\ln 3-\ln 2$

$$\boxed{B=\int_0^{\ln 2}f'(x)dx=\frac{1}{2}\ln 3-\ln 2}$$

4) لدينا $f(x)=e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)$ ومنه $f'(x)=-e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)+\frac{e^x}{1+e^x}\times e^{-x}=\frac{1}{1+e^x}-e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)$ إذن

$$f(x)+f'(x)=e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)+\frac{1}{1+e^x}-e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)=\frac{1}{1+e^x}$$

بما أن $f(x)+f'(x)=\frac{1}{1+e^x}$ فإن $f(x)=\frac{1}{1+e^x}-f'(x)$ ومنه

$\int_0^{\ln 2}f(x)dx=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{1+e^x}dx-\int_0^{\ln 2}f'(x)dx=A-B=\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\ln 3+\ln 2=\frac{3}{2}\ln\frac{4}{3}$ وأخيرا $\boxed{I=\int_0^{\ln 2}f(x)dx=\frac{3}{2}\ln\frac{4}{3}}$

حل التمرين رقم 10 :

1) من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم فإن $\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{a}{x}+\frac{bx}{x^2+1}=\frac{a\left(x^2+1\right)+bx^2}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{(a+b)x^2+a}{x\left(x^2+1\right)}$

بالمطابقة نجد $a=1$ و $a+b=0$ أي $b=-1$ ومنه $\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$.

2)حساب $\int_1^2\frac{x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$: نضع $u(x)=\ln x$ ، $v'(x)=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$ و منه $u'(x)=\frac{1}{x}$ ، $v(x)=-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة : $\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$ نكتب :

$$\int_1^2\frac{x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\left[(\ln x)\left(\frac{-1}{2\left(x^2+1\right)}\right)\right]_1^2-\int_1^2\left(\frac{-1}{2\left(x^2+1\right)}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{-\ln 2}{10}\right]+\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}dx$$

ولكن $\int_1^2\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5$

ومنه $\int_1^2\frac{x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\left[\frac{-\ln 2}{10}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5\right]=\frac{-\ln 2}{10}+\frac{3\ln 2}{4}-\frac{\ln 5}{4}=\frac{13\ln 2}{20}-\frac{\ln 5}{4}$

وأخيرا $\boxed{\int_1^2\frac{x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\frac{13\ln 2}{20}-\frac{\ln 5}{4}}$

حل التمرين رقم 11 :

الدالة $f : x \mapsto \tan x$ معرفة ومستمرة على المجال $\left]\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3}\right[$ فهي تقبل على هذا المجال دوالا أصلية .

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin x}{\cos x} dx$ وهذه الدالة f من الشكل $-\frac{u'}{u}$ حيث $u(x) = \cos x$ وهي موجبة تماما على

المجال $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3}\right]$ إذن $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx = -[\ln(\cos x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\left[\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\left[\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$

وأخيرا : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx = \frac{1}{2}\ln 2$

حل التمرين رقم 12:

1) F أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ معناه $F'(x) = f(x)$ أي

$$F'(x) = (2ax+b)e^{2x} + 2e^{2x}(ax^2+bx+c) = \left[2ax^2 + (2a+2b)x + b + 2c\right]e^{2x}$$

$F'(x) = f(x)$ تكافئ $\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$ ومنه $F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{2x}$

2) حساب $\int_0^1 f(x)dx$: $\int_0^1 f(x)dx = [F(x)]_0^1 = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^0 = \frac{e^2-1}{4}$

حل التمرين رقم 13 :

1) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$ وأخيرا $I_1 = \frac{1}{2}\ln 2$

2) $I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x\left(1+x^2\right)}{1+x^2}dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ إذن $I_1 + I_2 = \frac{1}{2}$.

نستنتج أن $I_2 = \frac{1}{2} - I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

حكمة

كن في الدنيا كالنحلة إن أكلت أكلت طيبا وإن أطعمت أطعمت طيبا وإن سقطت على شيء لم تكسره ولم تخدشه.

حل التمرين رقم 14 :

(1 $A+B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\ dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}$ إذن

$A+B=\frac{\pi^2}{8}$

(2 $A-B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\ dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$

نضع $u(x)=x$ ، $v'(x)=\cos 2x$ و منه $u'(x)=1$ ، $v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة : $\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$ نكتب :

$A-B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx=\left[(x)\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2x\,dx=\left[\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}$ إذن $A-B=-\frac{1}{2}$

(3 لدينا $\begin{cases} A+B=\frac{\pi^2}{8} \\ A-B=-\frac{1}{2} \end{cases}$ ومنه $A=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}$ و $B=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$.

حل التمرين رقم 15 :

1)حساب $A=\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$. نضع $u(x)=x$ ، $v'(x)=\sin x$ و منه $u'(x)=1$ ، $v(x)=-\cos x$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة : $\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$ نكتب :

$A=\int_0^{\pi} x\sin x\,dx=\left[(x)(-\cos x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\cos x\,dx=[\pi]+[\sin x]_0^{\pi}=\pi$ إذن $A=\pi$

2)حساب $B=\int_1^{e}\ln t\,dt$. نضع $u(t)=\ln t$ ، $v'(t)=1$ و منه $u'(t)=\frac{1}{t}$ ، $v(t)=t$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة : $\int_a^b u(t)v'(t)dt=\left[u(t)v(t)\right]_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)dt$ نكتب :

$B=\int_1^{e}\ln t\,dt=\left[(t)(\ln t)\right]_1^{e}-\int_1^{e}\frac{1}{t}\times t\,dt=\left[e\ln e-1\ln 1\right]-\left[e-1\right]=1$ إذن $B=1$.

(1 حساب $C=\int_{-1}^{0}(2x+1)e^{-x}dx$

نضع $u(x)=2x+1$ ، $v'(x)=e^{-x}$ و منه $u'(x)=2$ ، $v(x)=-e^{-x}$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة : $\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$ نكتب :

$C=\int_{-1}^{0}(2x+1)e^{-x}dx=\left[(2x+1)\left(-e^{-x}\right)\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}-2e^{-x}dx=[-1-e]-\left[2e^{-x}\right]_{-1}^{0}=e-3$ إذن $C=e-3$

استعد للبكالوريا

تمارين نموذجية

التمرين رقم 01:

الهدف من هذا التمرين هو حساب التكاملات التالية :

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} \quad ، \quad J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \quad ، \quad K=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx.$$

أولا : حساب I:

f الدالة المعرفة على $[0,1]$ كما يلي : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$

1) أحسب الدالة المشتقة للدالة $x\mapsto\sqrt{x^2+2}$.
2) استنتج الدالة المشتقة f' للدالة f.
3) أحسب قيمة I.

ثانيا: حساب J و K

1) بدون حساب J و K بين أن $J+2I=K$.
2) باستعمال المكاملة بالتجزئة على K، بين أن $K=\sqrt{3}-J$.
3) استنتج قيمة كلا من J و K.

التمرين رقم 02:

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq1$ كما يلي:

$$u_n=\int_{\ln n}^{\ln(n+1)} e^{2x}dx$$ حيث $\ln$ هو اللوغاريتم النيبري.

1. أحسب u_n بدلالة n
2. بين أنّ المتتالية (u_n) هي متتالية حسابية يطلب تعيين الحد الأول والأساس.
3. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq1$ كما يلي: $v_n=e^{u_n}$ بين أنّ (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين الحد الأول والأساس.
4. أحسب بدلالة n المجموع $S_n=u_1+u_2+.......+u_n$
5. أحسب بدلالة n الجداء $P_n=v_1\times v_2\times v_3........\times v_n$.

التمرين رقم 03:

الأسئلة الثلاثة مستقلة فيما بينها .

1) نعتبر التكامل $I=\int_0^1 \frac{x^2}{x+2}dx$

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0,1]$: $\frac{x^2}{x^2+2}=x-2+\frac{4}{x+2}$.

ب) استنتج القيمة المضبوطة لـ I.

2) نعتبر التكاملين : $K=\int_0^{\ln 16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx$ ، و $J=\int_0^{\ln 16}\frac{1}{e^x+4}dx$

أ) أحسب $K-3J$ و $K+J$.

ب) استنتج القيمة المضبوطة لكل من K و J .

3) لتكن f الدالة المعرفة على $[-1,1]$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

أ) تحقق من أن (C_f) هو نصف دائرة مركزها O وطول نصف قطرها 1 والتي يقع في نصف المستوي الذي تراتيب نقطه موجبة .

ب) استنتج أن $\int_0^1\sqrt{1-x^2}=\frac{\pi}{4}$.

التمرين رقم 04:

1. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع. $u_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$

بين أنّ . $u_1=1-\frac{2}{e}$

2. باستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أن :

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1}=(n+1)u_n-\frac{1}{e}$

3. أحسب u_2 بدلالة e .

4. بين أن. $u_3=6-\frac{16}{e}$

تحقق أن $\int_0^1 2x^3-8x^2+4x\ \ e^{-x}dx=0$

لا تكن كقمة الجبل..ترى الناس صغارا ويراها الناس صغيرة

التمرين رقم 05

نعتبر المتتالية (I_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم كما يلي : $I_n=\int_0^1 x^n e^{x^2}dx$.

1) أ) لتكن g الدالة المعرفة بـ $g(x)=xe^{x^2}$. بين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $G(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة g .

ب) استنتج قيمة I_1 .

2) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا : $I_{n+2}=\frac{1}{2}e-\frac{n+1}{2}I_n$.

3) استنتج I_3 و I_5

التمرين رقم 06

نريد حصرا للتكامل $I=\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}dx$.

1) أدرس تغيرات الدالتين u و v المعرفتين على $[0;1]$ كما يلي :

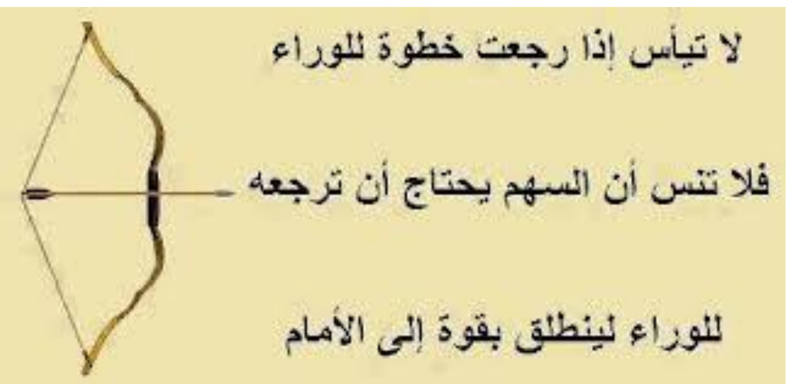
$u(x)=x-1+e^{-x}$ و $v(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}$.

2) تحقق انه من أجل كل x من $[0;1]$: $1-x\leq e^{-x}\leq 1-x+\frac{x^2}{2}$.........(1)

3) بين أنه من أجل كل x من $[0;1]$: $1-x\leq \frac{e^{-x^2}}{1+x}\leq 1-x+\frac{x^4}{2(1+x)}$.........(2) .

4) تحقق من أجل كل x من $[0;1]$: $\frac{x^4}{1+x}=x^3-x^2+x-1+\frac{1}{x+1}$

5) استنتج من العلاقة (2) أن $\frac{1}{2}\leq I\leq \frac{5}{24}+\frac{1}{2}\ln 2$.



حلول استعد للبكالوريا

حكمـة

- قال أحمد شوقي : وإذا أصيب القوم في أخلاقهم ... فأقم عليهم مأتما وعويلا

كُن مِثل القَمر...
يَرفَع النّاس رؤوسهم
لِيَرُوه...وَلَيسَ مِثلَ...
الدُّخَـــان يَرتَفع ليراه
النـَّـــاس...

حل التمرين رقم 01:

أولا:

1) نضع $u(x)=\sqrt{x^2+2}$ ، u قابلة للإشتقاق على $[0,1]$ و $u'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

2) $$f'(x)=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$$

3) $$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}=\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)=\ln(1+\sqrt{3})-\ln\sqrt{2}$$

ثانيا: $\left[f(x)\right]_0^1$

1) $$J+2I=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx+2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}=\int_0^1\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\int_0^1\sqrt{x^2+2}\,dx=K.$$

2) $K=\int_0^1\sqrt{x^2+2}\,dx$ نستعمل المكاملة بالتجزئة

$$u(x)=\sqrt{x^2+2}\;;\;u'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$
$$v(x)=x\;;\;v'(x)=1$$

$$K=\int_0^1\sqrt{x^2+2}\,dx=\left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\sqrt{3}-J$$

إذن $K=\sqrt{3}-J$.

4) استنتاج قيمة كلا من J و K.

لدينا $J+2I=K$ و $K=\sqrt{3}-J$ نحل الجملة : $\begin{cases}J+2I=K\\ K=\sqrt{3}-J\end{cases}$ التي تكافئ $\begin{cases}J=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-I\\ K=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+I\end{cases}$

الإرادة والمثابرة غالبا ما يصنعان الفرق بين الفشل والنجاح.

ونجد $\begin{cases} J=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\ln(1+\sqrt{3})+\ln\sqrt{2} \\ K=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\ln(1+\sqrt{3})-\ln\sqrt{2} \end{cases}$

حل التمرين رقم 02:

1) $u_n=\int_{\ln n}^{\ln(n+1)} e^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{\ln n}^{\ln(n+1)}=n+\frac{1}{2}$

2) $u_{n+1}-u_n=\left(n+1+\frac{1}{2}\right)-\left(n+\frac{1}{2}\right)=1$ ومنه u_n حسابية أساسها 1 وحده الأول $u_1=\frac{3}{2}$

3) $v_{n+1}=e^{u_{n+1}}=e^{u_n+1}=e^{u_n}\times e^1=v_n\times e$ ومنه v_n هندسية أساسها e وحده الأول $v_1=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

4) $S_n=u_1+u_2+.......+u_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)=\frac{n}{2}(\frac{3}{2}+n+\frac{1}{2})=\frac{n}{2}(n+2)$

5) $P_n=v_1\times v_2\times v_3........\times v_n=e^{u_1}\times e^{u_2}\times e^{u_3}\times........e^{u_n}$

$=e^{u_1+u_2+.......+u_n}=e^{S_n}=e^{\frac{n}{2}(n+2)}$.

حل التمرين رقم 03:

1) أ) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من $[0,1]$: $\frac{x^2}{x^2+2}=\frac{x^2-4+4}{x+2}=\frac{(x-2)(x+2)+4}{x+2}=x-2+\frac{4}{x+2}$.

ب) $I=\int_0^1\frac{x^2}{x+2}dx=\int_0^1\left(x-2+\frac{4}{x+2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-2x+ln(x+2)\right]_0^1=-\frac{3}{2}+4ln\frac{3}{2}$.

2) أ) لدينا : $K=\int_0^{ln16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx$ ، و $J=\int_0^{\ln 16}\frac{1}{e^x+4}dx$

$K-3J=\int_0^{ln16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx-3\int_0^{ln16}\frac{1}{e^x+4}dx=\int_0^{ln16}\frac{e^x}{e^x+4}dx=\left[ln(e^x+4)\right]_0^{ln16}=ln4$ و

$K+J=\int_0^{ln16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx+\int_0^{ln16}\frac{1}{e^x+4}dx=\int_0^{ln16}\frac{e^x+4}{e^x+4}dx=[x]_0^{ln16}=ln16$.

ب) لدينا إذن : $\begin{cases} K-3J=ln4 \\ K+J=ln16 \end{cases}$ نحل الجملة فنجد : $J=\frac{\ln 2}{2}$ و $K=\frac{7ln2}{2}$.

3) f الدالة المعرفة على $[-1,1]$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

أ) لتكن $M(x,y)$ نقطة من (C_f) فيكون لدينا $y=\sqrt{1-x^2}$ حيث $y\geq 0$ ومنه النقطة M تقع في نصف المستوي الذي تراتيب نقطه موجبة .

وكذلك $OM^2=x^2+y^2=x^2+1-x^2=1$ أي $OM=1$.

إذن النقطة M تقع على نصف دائرة مركزها O وطول نصف قطرها 1 والتي يقع في نصف المستوي الذي تراتيب نقطه موجبة

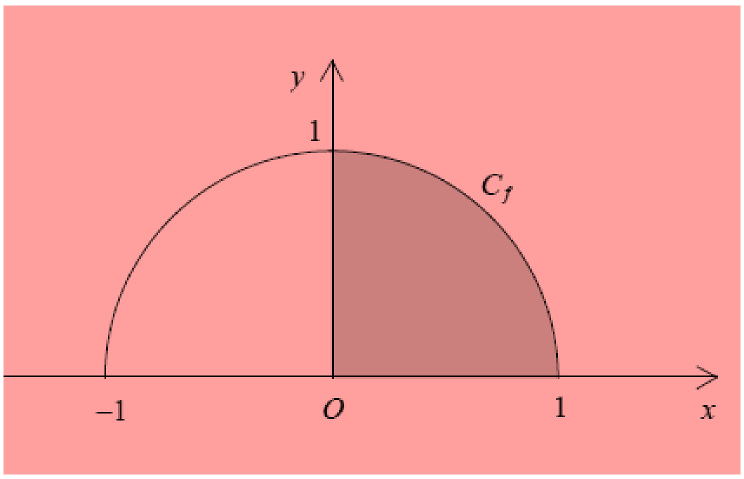
وبالعكس لتكن $N(a,b)$ نقطة من هذا نصف الدائرة فيكون :

$(ON^2=1$ و $b\geq 0)$ أي $(a^2+b^2=1$ و $b\geq 0)$ أو كذلك $(b^2=1-a^2$ و $b\geq 0)$

وبما أن $a\in[-1,1]$ فإن $1-a^2\geq 0$ فإن $b=\sqrt{1-a^2}$ أي $b=f(a)$ ومنه $N\in(C_f)$.

ب) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}$ يمثل مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$ هذا الحيز هو ربع القرص الذي طول نصف قطره 1 مساحته $\frac{\pi}{4}$

إذن : $\int_0^1\sqrt{1-x^2}=\frac{\pi}{4}$



حل التمرين رقم 04:

1) $u_1=\int_0^1 xe^{-x}dx$ نكامل بالتجزئة :

لدينا $\begin{cases}u(x)=x\\ v'(x)=e^{-x}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}u'(x)=1\\ v(x)=-e^{-x}\end{cases}$

$$u_1=\int_0^1 xe^{-x}dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^1-\left[-e^{-x}\right]_0^1=u_1=1-\frac{2}{e}$$

2) $u_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx$ نكامل بالتجزئة :

نضع $u(x)=x^{n+1}$ و $v'(x)=e^{-x}$ ومنه $u'(x)=(n+1)x^{n}$ و $v(x)=-e^{-x}$

$$u_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx=\left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 -(n+1)x^{n}e^{-x}dx$$

$$u_{n+1}=\left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^1+(n+1)\int_0^1 x^{n}e^{-x}dx=\left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^1+(n+1)u_n$$

$$u_{n+1}=-\frac{1}{e}+(n+1)u_n$$

3) من العلاقة $u_{n+1}=(n+1)u_n-\frac{1}{e}$ نستنتج أن $u_2=2u_1-\frac{1}{e}=2\left(1-\frac{2}{e}\right)-\frac{1}{e}=2-\frac{5}{e}$

4) من العلاقة $u_{n+1}=(n+1)u_n-\frac{1}{e}$ نستنتج أن $u_3=3u_2-\frac{1}{e}=3\left(2-\frac{5}{e}\right)-\frac{1}{e}=6-\frac{16}{e}$

5)
$$\int_0^1 (2x^3-8x^2+4x)e^{-x}dx=2\int_0^1 x^3e^{-x}dx-8\int_0^1 x^2e^{-x}dx+4\int_0^1 xe^{-x}dx$$
$$=2u_3-8u_2+4u_1=2\left(6-\frac{16}{e}\right)-8\left(2-\frac{5}{e}\right)+4\left(1-\frac{2}{e}\right)=0$$

حل التمرين رقم 05:

1) أ) الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $G'(x)=\frac{1}{2}\times 2xe^{x^2}=xe^{x^2}=g(x)$ أي الدالة G هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة g .

ب) $I_1=\int_0^1 x^1e^{x^2}dx=\left[G(x)\right]_0^1=G(1)-G(0)=\frac{1}{2}e^1-\frac{1}{2}e^0=\frac{e-1}{2}$ ومنه $I_1=\frac{e-1}{2}$

2) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا : $I_{n+2}=\int_0^1 x^{n+2}e^{x^2}dx=\int_0^1 x^{n+1}\times xe^{x^2}dx$

نضع $u(x)=x^{n+1}$ و $v'(x)=xe^{x^2}$ ومنه $u'(x)=(n+1)x^n$ و $v(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}$.

$$I_{n+2}=\int_0^1 x^{n+1}\times xe^{x^2}dx=\left[x^{n+1}\times\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1-\int_0^1 (n+1)x^n\times\frac{1}{2}e^{x^2}dx$$

$$I_{n+2}=\left(1^{n+1}\times\frac{1}{2}e^1-0\times\frac{1}{2}e^0\right)-\frac{n+1}{2}\int_0^1 x^n\times e^{x^2}dx=\frac{1}{2}e-\frac{n+1}{2}I_n$$

3) لدينا $I_{n+2}=\frac{1}{2}e-\frac{n+1}{2}I_n$ و $I_1=\frac{e-1}{2}$

$$I_3=I_{1+2}=\frac{1}{2}e-\frac{1+1}{2}I_1=\frac{e}{2}-\frac{e-1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$I_5=I_{3+2}=\frac{1}{2}e-\frac{3+1}{2}I_3=\frac{e}{2}-2I_3=\frac{e-2}{2}$$

حل التمرين رقم 06

---

1) **دراسة تغيرات** u : الدالة u مستمرة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ وخصوصا على $[0\,;1]$

و $u'(x)=1-e^{-x}=1-\frac{1}{e^x}>0$ أي $u'(x)>0$ ومنه u متزايدة تماما جدول تغيراتها على المجال $[0\,;1]$

لاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل x من $[0\,;1]$: $u(x)\geq 0$

x	0	1
$u'(x)$	+	
$u(x)$	0 ↗	$\frac{1}{e}$

دراسة تغيرات v : الدالة v مستمرة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ وخصوصا على $[0\,;1]$ و $v'(x)=-1+x-e^{-x}=u(x)$

أي $v'(x)\geq 0$ ومنه v متزايدة تماما جدول تغيراتها على المجال $[0\,;1]$

x	0	1
$v'(x)$	+	
$v(x)$	0 ↗	$\frac{e-2}{2e}$

لاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل x من $[0\,;1]$: $v(x)\geq 0$

2) لدينا مما سبق $u(x)\geq 0$ و $v(x)\geq 0$ أي $x-1+e^{-x}\geq 0$ و $1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}\geq 0$

ومنه $e^{-x}\ge 1-x$ و $e^{-x}\le 1-x+\frac{x^2}{2}$ وبالتالي : $1-x\le e^{-x}\le 1-x+\frac{x^2}{2}$.........(1)

3) لدينا $0\le x\le 1$ ومنه $0\le x^2\le 1$ وبالتالي نعوض كل x بـ x^2 في العلاقة (1) فنجد $1-x^2\le e^{-x^2}\le 1-x^2+\frac{x^4}{2}$

ونقسم كل الأطراف على العدد الحقيقي الموجب تماما $1+x$ فنجد $1-x\le \frac{e^{-x^2}}{1+x}\le 1-x+\frac{x^4}{2(1+x)}$.........(2)

4) من أجل كل x من $[0\,;1]$: نوحد المقامات في $x^3-x^2+x-1+\frac{1}{x+1}$

$$x^3-x^2+x-1+\frac{1}{x+1}=\frac{x^4+x^3-x^3-x^2+x^2+x-x-1+1}{x+1}=\frac{x^4}{x+1}.$$

5) تصبح العلاقة (2) كما يلي: $1-x\le \frac{e^{-x^2}}{1+x}\le 1-x+\frac{1}{2}\left(x^3-x^2+x-1+\frac{1}{x+1}\right)$ أي

وبالتالي $1-x\le \frac{e^{-x^2}}{1+x}\le 1-x+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)}$:

$1-x\le \frac{e^{-x^2}}{1+x}\le \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)}$ نكامل الأطراف فنجد

فنحصل على : $\int_0^1(1-x)dx\le\int_0^1\frac{e^{-x^2}}{1+x}dx\le\int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)}\right)dx$

$\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1\le I\le\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}\ln|x+1|\right]_0^1$ وأخيرا $\frac{1}{2}\le I\le\frac{5}{24}+\frac{1}{2}\ln 2$

حكمـة

المال كوسخ الأذن ، إن أبقيته ضرك و إن أخرجته نفعك