حالات معادلة المستوي

الحالة الأولى من حالات معادلة المستوي:

قاعدة: لمعرفة معادلة المستوي نحتاج ناظم $\vec{n}(a,b,c)$ و نقطة $A(x_0,y_0,z_0)$

وتكون المعادلة:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

فتؤول المعادلة إلى الشكل $ax+by+cz+d=0$

مثال:

اكتب معادلة المستوي الذي يمر بالنقطة $A(3,-3,5)$ و يقبل $\vec{n}(1,-1,2)$ ناظماً له

الحل:

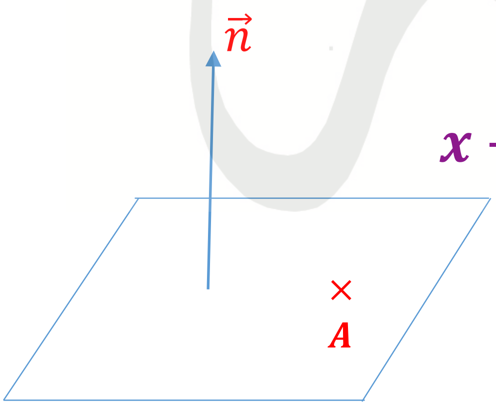
معادلة المستوي هي:

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$1(x-3)-1(y+3)+2(z-5)=0$$

$$x-3-y-3+2z-10=0$$

فتكون معادلة المستوي المطلوب:



$$x-y+2z-16=0$$

حالات معادلة المستوي

الحالة الثانية من حالات معادلة المستوي:

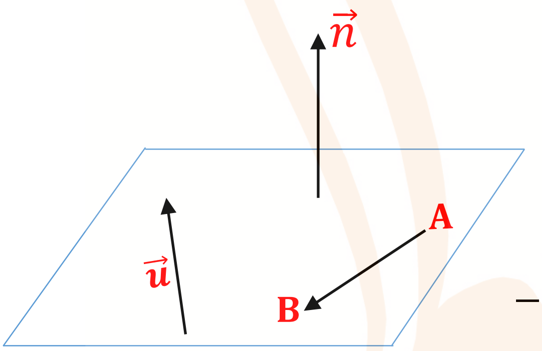
معادلة المستوي معطى فيه شعاع توجيه ونقطتين منه

مثال:

اكتب معادلة المستوي المار بالنقطتين $A(1,2,0)$ و $B(-1,0,2)$ و يقبل الشعاع $\vec{u}(2,0,1)$ أحد شعاعي التوجيه له

الحل:

لنأخذ $\overrightarrow{AB}(-2,-2,2)$ و $\vec{u}(2,0,1)$ شعاعين غير مرتبطين خطياً و يكون الناظم $\vec{n}(a,b,c)$ عمودي على شعاعي التوجيه $\overrightarrow{AB}$ & $\vec{u}$



فيكون $\overrightarrow{AB}\,.\,\vec{n} = 0$

$$-2a - 2b + 2c = 0$$

بالاختصار على (2)

$$-a - b + c = 0 \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\vec{u}\,.\,\vec{n} = 0$$

$$2a + C = 0 \cdots\cdots\cdots (2)$$

نحلّ جملة المعادلتين (1) & (2) بثلاث مجاهيل لذلك نفرض $a = 1$ و نعوضها في (2)

$$\Rightarrow 2 + c = 0 \Rightarrow c = -2$$

نعوض $c = -2$ في (1)

$$-1 - b + (-2) = 0 \Rightarrow b = -3$$

فيكون $\vec{n}(1,-3,-2)$ فيمكن أخذ النقطة A أو B

لدينا الناظم $\vec{n}(1,-3,-2)$ و النقطة $A(1,2,0)$

معادلة المستوي هي:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$1(x - 1) - 3(y - 2) - 2(z - 0) = 0$$

$$x - 3y - 2z - 1 + 6 = 0$$

فتكون معادلة المستوي المطلوب

$$x - 3y - 2z + 5 = 0$$

حالات معادلة المستوي

الحالة الثالثة من حالات معادلة المستوي:

معادلة المستوي الذي له شعاعي توجيه معلومين ويمر بنقطة معلومة

مثال:

اكتب معادلة المستوي p و يقبل $\vec{v}(2,0,1)\&\ \vec{u}(1,2,0)$ شعاعي توجيه له و يمر بالنقطة $A(1,0,1)$

الحل:

نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$ فيكون

$$\vec{n}\cdot\vec{u}=0 \Longrightarrow a+2b=0 \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\vec{n}\cdot\vec{v}=0 \Longrightarrow 2a+c=0 \cdots\cdots\cdots (2)$$

نفرض $a=2$ فيكون $2+2b=0$ فيكون $b=-1$ و يكون

$c=-4$ و يكون $\vec{n}(2,-1,-4)$

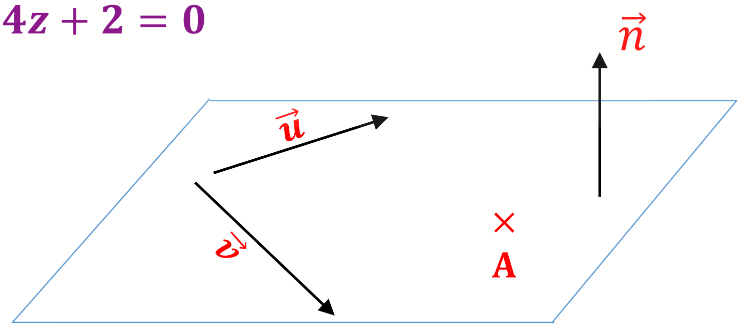
معادلة المستوي

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$2(x-1)+(-1)(y-0)-4(z-1)=0$$

فتكون معادلة المستوي المطلوب:

$$2x-y-4z+2=0$$



حالات معادلة المستوي

الحالة الرابعة من حالات معادلة المستوي:

معادلة المستوي المار بثلاث نقاط متمايزة

مثال:

اكتب معادلة المستوي المار بالنقاط $A(1,0,-2)\,,B(1,2,2)\,,C(0,-1,2)$

الحل:

لنأخذ شعاعي التوجيه $\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}(0,2,4)\,,\overrightarrow{AC}(-1,-1,4)$$

لنفرض ناظم المستوي $\vec{n}(a,b,c)$ فيكون $\vec{n}\,.\overrightarrow{AB}=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b+4c=0 \\ b+2c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \end{cases}$$

$$\vec{n}\,.\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow -a-b+4c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

نحل جملة المعادلات بثلاث مجاهيل لذلك نفرض $C=1$ فيكون $b=-2$ $b=-2(1)\Rightarrow$

و يكون $-a-(-2)+4(1)=0 \Rightarrow a=6$

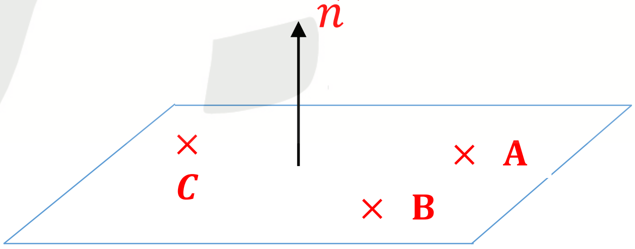
فيكون $\vec{n}(6,-2,1)$ نأخذ أي نقطة من النقاط $A\,,B\,,C$ ولتكن $A(1,0,-2)$ فيكون

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$6(x-1)+(-2)(y-0)+1(z+2)=0$$

فتكون معادلة المستوي المطلوب

$$6x-2y+z-4=0$$



حالات معادلة المستوي

الحالة الخامسة من حالات معادلة المستوي:

معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة

مثال:

اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة التي طرفاها $A(1,2,-1), B(0,1,3)$

الحل:

نحتاج ناظم ونقطة

المستوي المحوري هو مستوي عمودي على القطعة المستقيمة من منتصفها لذلك يكون فيه $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ هو الناظم ويمر من النقطة I منتصف القطعة المستقيمة AB

$$I\left(\frac{0+1}{2}, \frac{1+2}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB}\ (-1,-1,4) = (a,b,c)$$

معادلة المستوي

$$a(x - x_I) + b(y - y_I) + c(z - z_I) = 0$$

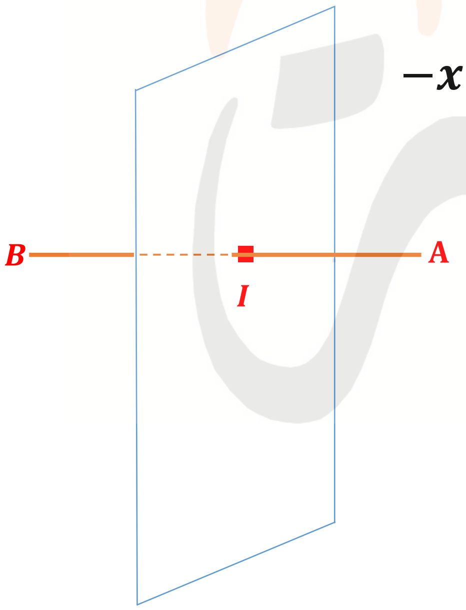
$$-1\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1\left(y - \frac{3}{2}\right) + 4(z - 1) = 0$$

$$-x - y + 4z + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 4 = 0$$

$$-x - y + 4z - 2 = 0$$

فتكون معادلة المستوي المطلوب

$$x + y - 4z + 2 = 0$$



حالات معادلة المستوي

الـحالـة السـادسـة مـن حالات معـادلـة المسـتـوي:

معادلة مستوي يوازي مستوٍ معلوم ويمر بنقطة معلومة

مثال:

اكتب معادلة المستوي P الذي يوازي المستوي $Q: 3x-2y+z+1=0$ و يمر بالنقطة $A(1,0,-2)$

الحل:

بما أن المستويان Q & P متوازيان فكل ناظم لأحدهما يمكن اعتباره ناظم للآخر فيكون

$$\vec{n}_p=\vec{n}_Q\,(3,-2,1)=(a,b,c)$$

ويمر بالنقطة $A(1,0,-2)$

معادلة المستوي المطلوب P هي:

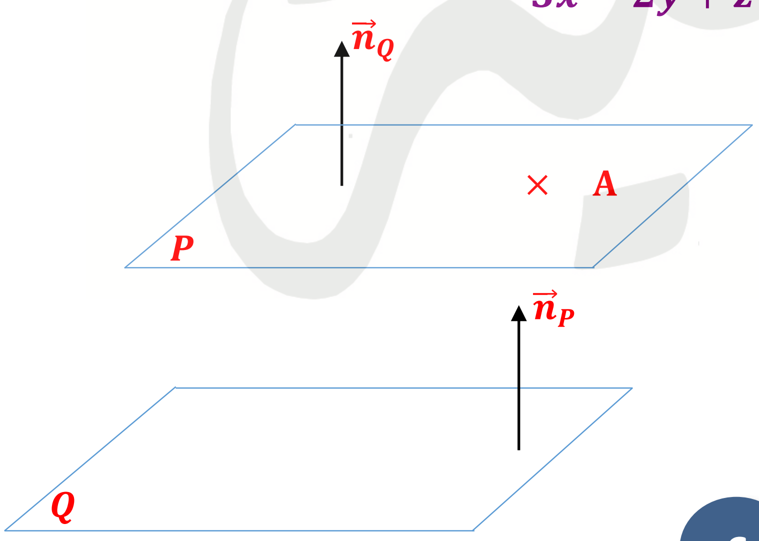
$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$3(x-1)-2(y-0)+1(z+2)=0$$

$$3x-2y+z-3+2=0$$

فتكون معادلة المستوي المطلوب

$$3x-2y+z-1=0$$



حالات معادلة المستوي

الحالة السابعة من حالات معادلة المستوي:

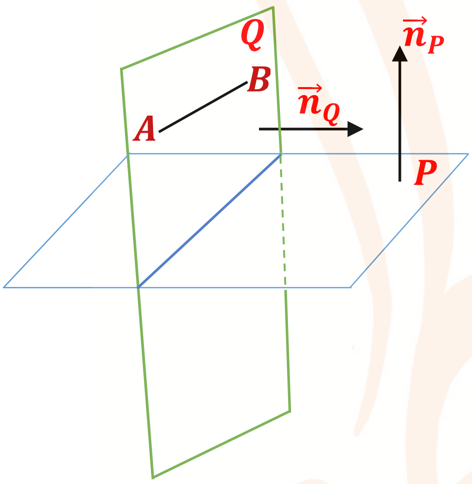
معادلة مستوي يمر بنقطتين ويعامد مستوي معلوم

مثال: (المسألة الرابعة في الصفحة 65)

جد معادلة المستوي Q العمودي على المستوي $P: x - y + 3z - 4 = 0$ و يمر بالنقطتين $A(1,-1,2)\ ,B(2,0,4)$

الحل:

المستوي المطلوب Q يمر من $A\ ,B$ فهو يقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاع توجيه له $\overrightarrow{AB}(1,1,2)$ و المستوي Q يعامد P فهو يقبل $\vec{n}_p$ شعاع توجيه له حيث $\vec{n}_p(1,-1,3)$



نفرض $\vec{n}_Q(a,b,c)$

$\vec{n}_Q$ الناظم عمودي على شعاعي التوجيه فيكون: $\vec{n}_p \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$$(a,b,c).(1,1,2) = 0$$

$$a + b + 2c = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\vec{n}_p \cdot \vec{n}_Q = 0$$

$$(a,b,c).(1,-1,3) = 0$$

$$a - b + 3c = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

بحل جملة المعادلتين $(1)\&(2)$ بثلاث مجاهيل ونأخذ $C = 1$ يكون

$$a + b = -2$$

$$a - b = -3 \qquad \text{بالجمع}$$

$$2a = -5 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$$

$$-\frac{5}{2} + b = -2 \Rightarrow b = -2 + \frac{5}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

يكون $\vec{n}_Q(-\frac{5}{2},\frac{1}{2},1)$ ويمكن أخذ الناظم $\vec{n}_Q(-5,1,2)$ و لنأخذ النقطة $A(1,-1,2)$ فتكون معادلة المستوي

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$-5(x - 1) + 1(y + 1) + 2(z - 2) = 0$$

$$-5x + y + 2z + 5 + 1 - 4 = 0$$

فتكون معادلة المستوي المطلوب

$$-5x + y + 2z + 2 = 0$$

حالات معادلة المستوي

الحالة الثامنة من حالات معادلة المستوي:

معادلة مستوي يمس كرة معلومة في نقطة منها

مثال:

لدينا الكرة التي معادلتها $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=3$ و النقطة $A(3,0,1)$ نقطة منها

اكتب معادلة المستوي المماس للكرة في النقطة A

الحل:

إن المستقيم (ΩA) المار من مركز الكرة Ω و نقطة التماس A عمودي على المستوي المماس في نقطة التماس A

فيكون

$$\vec{n}=\overrightarrow{\Omega A}=(2-3,1-0,0-1)$$

$$\vec{n}(-1,1,-1)$$

حيث $\Omega(2,1,0)$ مركز الكرة المعطاة

معادلة المستوي المطلوب يقبل $\vec{n}$ ناظماً له و يمر بالنقطة $A(3,0,1)$

فيكون

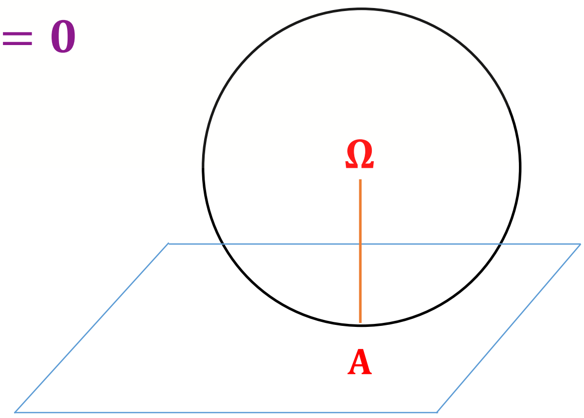
$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$-1(x-3)+1(y-0)-1(z-1)=0$$

$$-x+y-z+3+1=0$$

فتكون معادلة المستوي المطلوب

$$-x+y-z+4=0$$



حالات معادلة المستوي

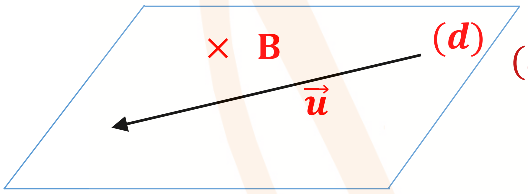
الحالة التاسعة من حالات معادلة المستوي:

معادلة مستوي يحوي مستقيم ونقطة خارجة عنه

مثال:

اكتب معادلة المستوي الذي يحوي المستقيم

$$(d):\begin{cases} \alpha = t+1 \\ y = 2t-1 \\ z = t \end{cases} \qquad t\epsilon\mathbb{R}$$



يمر المستوي من النقطة $B(2,0,1)$

الحل:

إن B لا تنتمي إلى المستقيم (d) لأنها لا تحقق التمثيل الوسيطي له

لنأخذ نقطة A من المستقيم (d) كما يلي:

$$t=0:\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad A(1,-1,0)$$

لنأخذ $\overrightarrow{AB}(1,1,1)$ شعاع توجيه للمستوي المطلوب

$\vec{u}(1,2,1)$ شعاع توجيه المستقيم وبنفس الوقت شعاع توجيه للمستوي

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي المطلوب

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$$

$$a+b+c=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \ (1)$$

$$\vec{n}\cdot\vec{u} = 0$$

$$a+2b+c=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \ (2)$$

نفرض $a=1$ ونعوض $1+b+c=0$

بالحل المشترك نجد $b=0$ & $c=-1$ ويكون $\vec{n}(1,0,-1)$ نكتب معادلة المستوي المطلوب:

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$1(x-1)+0(y+1)+(-1)(z-0)=0$$

فتكون معادلة المستوي المطلوب:

$$x-z-1=0$$

حالات معادلة المستوي

الحالة العاشرة من حالات معادلة المستوي:

معادلة مستوي محدد بمستقيمين متقاطعين

مثال:

اكتب معادلة المستوي p الذي يحوي d_1 , d_2 المعطاة بالتمثيل الوسيطي التالي:

$$(d_1):\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 2t+2 \\ z = -4t-1 \end{cases} \quad t\epsilon\mathbb{R} \qquad , \qquad (d_2):\begin{cases} x = 2t-2 \\ y = -t \\ z = 3 \end{cases} \quad t\epsilon\mathbb{R}$$

الحل:

$\overrightarrow{u_1}$ شعاع توجيه المستقيم d_1 هو نفسه شعاع توجيه للمستوي المطلوب:

$$\overrightarrow{u_1}(3,2,-4)$$

$\overrightarrow{u_2}$ شعاع توجيه المستقيم d_2 هو نفسه شعاع توجيه المستوي المطلوب:

$$\overrightarrow{u_2}(2,-1,0)$$

لنأخذ $\vec{n}(a,b,c)$ الشعاع الناظم للمستوي P فيكون:

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{u_1} = 0$$

$$3a+2b-4c = 0 \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$7-4c = 0 \Rightarrow c = \frac{7}{4}$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{u_2} = 0$$

$$2a-b = 0 \cdots\cdots\cdots (2)$$

لنأخذ $a = 1$ و نعوض بالمعادلتين فنجد: $b = 2$ & $c = \frac{7}{4}$

ويكون $\vec{n}(1,2,\frac{7}{4})$ و يمكن أخذه $\vec{n}(4,8,7)$ ولكتابة معادلة المستوي نحتاج ناظم ونقطة

يمكن إيجاد النقطة من d_1 أو من d_2 بأخذ $t = 0$ في d_1 فتكون النقطة $A(1,2,-1)$

ملاحظة: يمكن أخذ النقطة من d_2 بأخذ $t = 0$ و لتكن $B(2,0,3)$

فتكون معادلة المستوي

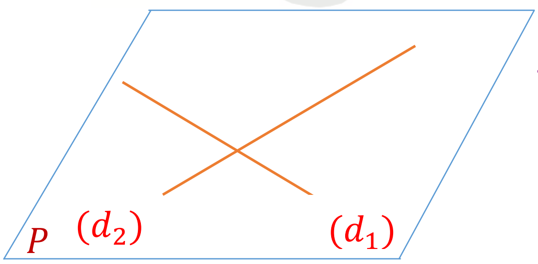
$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A) = 0$$

$$4(x-1)+8(y-2)+7(z+1) = 0$$

$$4x+8y+7z-4-16+7 = 0$$

فتكون معادلة المستوي المطلوب:

$$4x+8y+7z-13 = 0$$



حالات معادلة المستوي

الـحالـة الحادية عشر مـن حالات معـادلـة المسـتـوي:

معادلة مستوي محدد بمستقيمين معلومين

مثال:

اكتب معادلة المستوي p المار من d_1 , d_2 المعطى بالتمثيل الوسيطي:

$$(d_1):\begin{cases} x = t+1 \\ y = -t-2 \\ z = 2t \end{cases} \quad t\epsilon\mathbb{R} \qquad (d_2):\begin{cases} x = t \\ y = -t+1 \\ z = 2t-2 \end{cases} \quad t\epsilon\mathbb{R}$$

الحل:

نأخذ $\vec{u}(1,-1,2)$ شعاع توجيه المستقيم هو نفسه شعاع توجيه المستوي ولنأخذ $B(0,1,-2)$ من المستقيم d_2 و نأخذ $A(1,-2,0)$ من المستقيم d_1 موافقةً لـ $t=0$

فيكون $\overrightarrow{AB}(-1,+3,-2)$ شعاع توجيه للمستوي P و بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ الناظم للمستوي P فيكون:

$$\vec{n}\cdot\vec{u}=0$$

$$a-b+2c=0 \;\cdots\cdots\cdots\cdots\; (1)$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

$$-a+3b-2c=0 \;\cdots\cdots\cdots\cdots\; (2)$$

بفرض $c=1$ يكون $a=-2\ \&\ b=0$

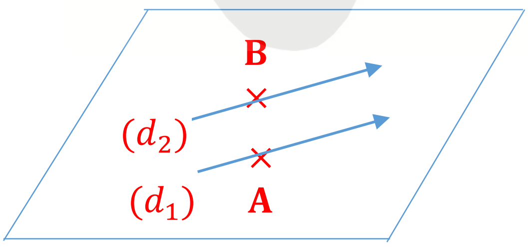
فيكون الناظم $\vec{n}(-2,0,1)$

معادلة المستوي المطلوب:

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$-2(x-1)+0(y+2)+1(z-0)=0$$

فتكون معادلة المستوي المطلوب :



$$-2x+z+2=0$$

حالات معادلة المستوي

الحالة الثانية عشر من حالات معادلة المستوي:

معادلة مستوي عمودي على فصل مشترك لمستويين ويمر من نقطة معلومة.

مثال: (المسألة 15 في الصفحة 30)

اكتب معادلة المستوي R العمودي على كل من

$P: x - 2y + 3z - 5 = 0$

$Q: x + y + z + 1 = 0$

والذي يمر بالنقطة $A(2, 5, -2)$

الحل:

إن الناظمين للمستويين P & Q هما أشعة توجيه في المستوي R و $\vec{n}_R(a, b, c)$ ناظم المستوي R

فيكون $\vec{n}_R \cdot \vec{n}_P = 0$

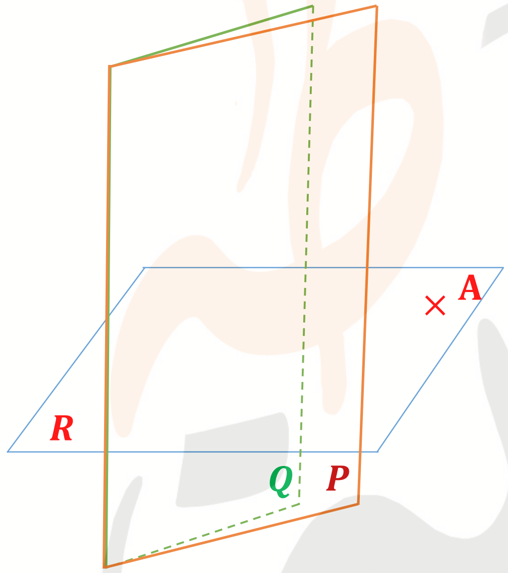
$(a, b, c) \cdot (1, -2, 3) = 0$

$a - 2b + 3c = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (1)$

$\vec{n}_R \cdot \vec{n}_Q = 0$

$(a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = 0$

$a + b + c = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (2)$



نفرض $a = 1$ فيكون: $\begin{cases} 1 - 2b + 3c = 0 \\ 1 + b + c = 0 \end{cases}$

بالجمع $\begin{cases} -2b + 3c = -1 \\ 2b + 2c = -2 \end{cases}$

$$5c = -3 \Rightarrow c = -\frac{3}{5}$$

نعوض $c = -\frac{3}{5}$ في (2)

$$1 + b - \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow b = -1 + \frac{3}{5} \Rightarrow b = -\frac{2}{5}$$

$\vec{n}_R(1, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{5})$ يمكن أخذ الناظم $\vec{n}_R(-5, 2, 3)$

معادلة المستوي الذي ناظمه $\vec{n}_R(-5, 2, 3)$ و يمر بالنقطة $A(2, 5, -2)$ هي:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$-5(x - 2) + 2(y - 5) + 3(z + 2) = 0$$

فتكون معادلة المستوي المطلوب:

$$-5x + 2y + 3z + 6 = 0$$