# طرائـــــــــق في الأعداد المركبة

## 1. كيف نجري الحساب في مجموعة الأعداد المركبة ؟

طريقة

- نجري الحساب كأننا في مجموعة الأعداد الحقيقية مع أخذ بعين الإعتبار أن $i^2=-1$ .

**مثال :**

أكتب على الشكل الجبري كلا من : $z_1=(2+3i)(1-2i)$ ، $z_2=(3-2i)^2+2(5-i)+1$

**الحل :** $z_1=(2+3i)(1-2i)=2-4i+3i-6i^2=2-i+6=8-i$

$z_2=(3-2i)^2+2(5-i)+1=9-12i+4i^2+10-2i+1=16-14i$ .

## 2. كيف نعلّم النقطة $A$ ذات اللاحقة $z_A=a+ib$ في معلم متعامد متجانس؟

طريقة :

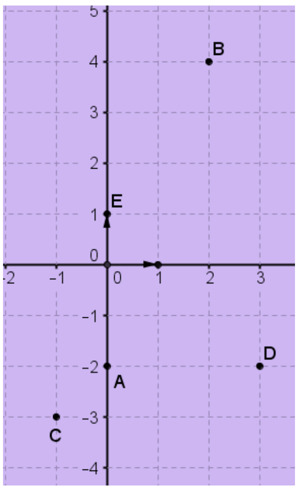
- نحدد إحداثيي هذه النقطة إنطلاقا من الشكل الجبري للاحقتها.
- إذا كان $z_A=a+ib$ فإن إحداثيي النقطة $A$ هما $(a\,;b)$ .
- نعلّم النقطة $A$ في المعلم.

**مثال :**

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامدو متجانس $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$

علّم النقط $A\,;B\,;C\,;D$ التي لواحقها على الترتيب :

$z_E=i\ ;z_D=3-2i\ ;z_C=-1-3i\ ;z_B=2+4i\ ;z_A=-2i$




**الحل :**

$E(0\,;1)\,;D(3;-2)\,;C(-1\,;-3)\,;B(2\,;4)\,;A(0\,;-2)$

## 3. كيف نحسب اللاحقة $z_{\overrightarrow{AB}}$ للشعاع $\overrightarrow{AB}$ ؟

طريقة :

نبين أن : $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$ .

**مثال :**

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين $A\,;B$

لواحقهما على الترتيب : $z_A=3-2i\ ;z_B=2+4i$ . عين لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ .

**الحل:**

$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=(2+4i)-(3-2i)=-1+6i$

## 4. كيف نحسب اللاحقة $z_H$ للنقطة $H$ منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$؟

**طريقة :**

- نعين $z_H$ كما يلي : $z_H = \dfrac{z_A + z_B}{2}$ .

**مثال :**

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ ، نعتبر النقطتين $A$ ; $B$

لواحقهما على الترتيب : $z_A = 6 - 2i$ ; $z_B = 2 + 4i$

عين $z_H$ لاحقة منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

**الحل :** $z_H = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{6 - 2i + 2 + 4i}{2} = \dfrac{8 + 2i}{2} = 4 + i$

## 5. كيف نحسب اللاحقة $z_I$ للنقطة $I$ مركز ثقل المثلث $ABC$؟

**طريقة :**

- نعين $z_I$ كما يلي : $z_I = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$ .

**مثال :**

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامدو متجانس $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط $A$ ; $B$ ; $C$

لواحقها على الترتيب : $z_A = 1 + 3i$ ; $z_B = -3 + 6i$ ; $z_C = 2$

عين $z_I$ لاحقة مركز ثقل المثلث $ABC$ .

**الحل :** $z_I = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = \dfrac{1 + 3i - 3 + 6i + 2}{3} = 3i$

## 6. كيف نحسب اللاحقة $z_G$ للنقطة $G$ مرجح الجملة $\left\{(A,\alpha); (B,\beta); (C,\gamma)\right\}$؟

**طريقة :**

نعين $z_G$ كما يلي : $z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \lambda z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$ **حيث** $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

**مثال :**

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط $A$ ; $B$ ; $C$

لواحقها على الترتيب : $z_A = 1 + i$ ; $z_B = -1 + 2i$ ; $z_C = 2 - i$

عين $z_G$ لاحقة مرجح الجملة $\left\{(A,2); (B,1); (C,-2)\right\}$ .

**الحل :** $z_G = \dfrac{2z_A + z_B - 2z_C}{2 + 1 - 2} = 2 + 2i - 1 + 2i - 4 + 2i = -3 + 6i$

## 7.كيف نجد مرافق عدد مركب ؟

طريقة :

- نستعمل التعريف : مرافق العدد المركب $z=x+iy$ هو $\overline{z}=x-iy$ .
- ونستعمل خواص المرافق التالية عند الحاجة إليها:

1) $z+\overline{z}=2x$ ، $z-\overline{z}=2yi$ ، $z\overline{z}=x^2+y^2$ .

2) $z$ حقيقي معناه $\overline{z}=z$ و $z$ تخيلي صرف معناه $\overline{z}=-z$ .

3) $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ ، $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$ ، $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ .

**مثال01 :** أوجد مرافق كلا من $z_1=11-7i$ ، $z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

**الحل :** $\overline{z_1}=11+7i$ ، $\overline{z_2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

**مثال02:**

ليكن $z=2+3i$ و $z'=1-i$ .اكتب على الشكل الجبري ما يلي :

$z+\overline{z}$ ، $z-\overline{z}$ ، $z\overline{z}$ ، $\overline{z+z'}$ ، $\overline{z\times z'}$ .

**الحل :**

$z+\overline{z}=4$ ، $z-\overline{z}=6i$ ، $z\overline{z}=4+9=13$ ،

$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}=2-3i+1+i=3-2i$

$\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}=(2-3i)(1+i)=5-i$.

## 8.كيف نكتب على الشكل الجبري حاصل قسمة عددين مركبين ؟

طريقة

- نضرب البسط والمقام في مرافق المقام . ( لاتنسى $z\overline{z}=x^2+y^2$)

**مثال:**

أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $z_1=\frac{1-i}{2+3i}$ ، $z_2=\frac{-3}{2-i}$

**الحل :** مرافق $2+3i$ هو $2-3i$ وبالتالي $(2+3i)(2-3i)=4+9=13$ .

$$z_1=\frac{1-i}{2+3i}=\frac{(1-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{2-3i-2i-3}{13}=-\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i .$$

- مرافق $2-i$ هو $2+i$ وبالتالي $(2+i)(2-i)=4+1=5$ .

$$z_2=\frac{-3}{2-i}=\frac{-3(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{-6-3i}{5}=-\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i .$$

## 9.كيف نحل معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهول العدد المركب z ؟

طريقة :

- نكتب المجاهيل في طرف والمعاليم في طرف فنحصل على الشكل $Az=B$ وبالتالي $z=\frac{B}{A}$ حيث $A\neq 0$ .
- اذا كانت المعادلة على شكل حاصل قسمة نجد القيمة أو القيم الممنوعة ثم نوحد المقامات أو نضرب الطرفين في الوسطين ونحل المعادلة الناتجة بطريقة عادية.

**مثال :**

حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية:

- $(2-i)z-i+2z=3(1+i)^2z+5$ .
- $\frac{(2-i)z}{z-1+i}=\frac{(2i+1)z+3}{1+iz}$ .

**الحل :**

- المعادلة $(2-i)z-i+2z=3(1+i)^2z+5$ تكافئ $(2-i)z-i+2z=3(1+2i-1)z+5$ تكافئ $(2-i)z-i+2z=6iz+5$ أي $(2-i+2-6i)z=5+i$ وبالتالي $(4-7i)z=5+i$ ومنه $z=\frac{5+i}{4-7i}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$.

وأخيرا المعادلة $(2-i)z-i+2z=3(1+i)^2z+5$ تقبل حلا وحيدا هو $z=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$

- المعادلة $\frac{(2-i)z}{z-1+i}=\frac{(2i+1)z+3}{1+iz}$ .

القيم الممنوعة : $z-1+i\neq 0$ و $1+iz\neq 0$ وبالتالي $z\neq 1-i$ و $z\neq -\frac{1}{i}$ أي $z\neq i$

أي $z\neq 1-i$ و $z\neq i$.

من أجل كل $z\neq 1-i$ و $z\neq i$ المعادلة $\frac{(2-i)z}{z-1+i}=\frac{(2i+1)z+3}{1+iz}$ تكافئ $\left[(2i+1)z+3\right](z-1+i)=(2-i)(1+iz)z$ بعد نشر الطرفين والتبسيط نجد $(1+2i)z^2-iz-3+3i=(1+2i)z^2+(2-i)z$ ومنه $2z=-3+3i$ وبالتالي $z=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$ .

وأخيرا المعادلة $\frac{(2-i)z}{z-1+i}=\frac{(2i+1)z+3}{1+iz}$ تقبل حلا وحيدا هو $z=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$.

## 10.كيف نحل في $\mathbb{C}$ معادلة بها $z$ و $\overline{z}$ ؟

طريقة :

- نضع $z=x+iy$ و $\overline{z}=x-iy$.
- ننشر ونكتب على الشكل $(.....)+i\,(.......)=0$ أي على الشكل $X+iY=0$
- من تعريف العدد المركب المعدوم : $X+iY=0$ تكافئ $X=0$ و $Y=0$

**مثال :**

حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلتين التاليتين:

**1)** $2iz+(1-i)\overline{z}=(1+iz)(2-i)$ .

**2)** $z^2+4\overline{z}-5=0$

**الحل :**

**1)** حلالمعادلة $2iz+(1-i)\overline{z}=(1+iz)(2-i)$ .نضع $z=x+iy$ و $\overline{z}=x-iy$.

المعادلة $2iz+(1-i)\overline{z}=(1+iz)(2-i)$ تكافئ

$2i(x+iy)+(1-i)(x-iy)=[1+i(x+iy)](2-i)$ بعد نشر وتبسيط الطرفين

نجد

$x+ix-3y-iy=x+2ix-2y+iy+2-i$ . ننقل الطرف الثاني الى الطرف الأول ونكتبها

على الشكل $X+iY=0$ أي $(-y-2)+(-x-2y+1)i=0$ تكافئ $\begin{cases}-y-2=0\\-x-2y+1=0\end{cases}$ أي

$\begin{cases}x=5\\y=-2\end{cases}$ ومنه المعادلة $2iz+(1-i)\overline{z}=(1+iz)(2-i)$ تقبل حلا وحيدا هو $z=5-2i$ .

**2)** حل المعادلة $z^2+4\overline{z}-5=0$ . نضع $z=x+iy$ ومنه $\overline{z}=x-iy$

المعادلة $z^2+4\overline{z}-5=0$ تكافئ $(x+iy)^2+4(x-iy)-5=0$ تكافئ

$x^2-y^2+4x-5+i(2xy-4y)=0$ أي $\begin{cases}x^2-y^2+4x-5=0......(1)\\y(x-2)=0..................(2)\end{cases}$

المعادلة (2) تكافئ $y=0$ أو $x=2$.

- حالة $y=0$ المعادلة (1) تكافئ $x^2+4x-5=0$ تكافئ $x=1$ أو $x=-5$ وبالتالي $z=1+0i=1$ أو $z=-5+0i=-5$.
- حالة $x=2$ المعادلة (1) تكافئ $4-y^2+8-5=0$ أي $y^2=7$ ومنه $y=\sqrt{7}$ أو $y=-\sqrt{7}$ وبالتالي $z=2+i\sqrt{7}$ أو $z=2-i\sqrt{7}$.

وأخيرا مجموعة حلول المعادلة $z^2+4\overline{z}-5=0$ هي $S=\{1,-5\ ,2+i\sqrt{7}\ ,2-i\sqrt{7}\}$

## 11.كيف نحل في $\mathbb{C}$ معادلة من الدرجة الثانية ذات معاملات حقيقية ؟

طريقة:

لتكن المعادلة ذات المجهول العدد المركب $z$ : $az^2+bz+c=0$ حيث $a$ , $b$ , $c$ حقيقية و $a\neq 0$ .

نحسب المميز $\Delta=b^2-4ac$

1) إذا كان $\Delta=0$ ، المعادلة $az^2+bz+c=0$ تقبل حلا حقيقيا مضاعفا هو $z=-\dfrac{b}{2a}$ .

2) إذا كان $\Delta>0$ ، المعادلة $az^2+bz+c=0$ تقبل حلين حقيقيين متمايزين هما :

$$z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} .$$

3) إذا كان $\Delta<0$ ، المعادلة $az^2+bz+c=0$ تقبل حلين مركبين مترافقين هما :

$$z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad , \quad z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} .$$

**مثال:**

حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول $z$ التالية :

1) $z^2-4z+4=0$ ، 2) $z^2-5z+6=0$ ، 3) $z^2+z+1=0$

**الحل :**

1) $z^2-4z+4=0$ . المميز $\Delta=16-4(1)(4)=16-16=0$ ومنه المعادلة $z^2-4z+4=0$ تقبل حلا حقيقيا مضاعفا هو $z=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{4}{2}=2$ . $S=\{2\}$

2) $z^2-5z+6=0$ . المميز $\Delta=25-4(1)(6)=25-24=1$ ومنه المعادلة $z^2-5z+6=0$ تقبل حلين حقيقيين متمايزين هما

$$z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+1}{2}=3 \quad , \quad z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-1}{2}=2$$

إذن $S=\{2\,,3\}$ .

3) $z^2+z+1=0$ . المميز $\Delta=1-4(1)(1)=-3=3i^2$ ومنه المعادلة $z^2+z+1=0$ تقبل حلين مركبين مترافقين هما

$$z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad , \quad z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

إذن $S=\left\{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ .

## 12.كيف نحل معادلة من الدرجة الثالثة ذات معاملات حقيقية عُلم أحد حلولها؟

طريقة : $P(z)=\lambda z^3+\beta z^2+\gamma z+\kappa$ حيث $a\neq 0$

نحلل $P(z)$: إذا كان $\alpha$ هو أحد حلول المعادلة $P(z)=0$ فإن $P(z)$ يُحلل كما يلي $P(z)=(z-\alpha)(az^2+bz+c)$.

ننشر ونبسط ونطابق ثم نحل جملة لتعيين $a\ ;\ b\ ;\ c$

$P(z)=0$ تؤول إلى $z-\alpha=0$ أو $az^2+bz+c=0$

**مثال :** ليكن $P$ كثير الحدود في $\mathbb{C}$ بحيث $P(z)=z^3-4z^2+6z-4$

1) أحسب $P(2)$ وماذا تستنتج ؟

2) حلل $P(z)$.

3) حل المعادلة $P(z)=0$.

**الحل :**

1) $P(2)=0$ ومنه 2 هو حل للمعادلة $P(z)=0$.

2) $P(z)=(z-2)(az^2+bz+c)$. ننشر ونبسط ونرتب فنجد

$$p(z)=az^3+(b-2a)z^2+(c-2b)z-2c$$

بالمطابقة نجد $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-4 \\ c-2b=6 \\ -2c=-4 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$ وبالتالي $P(z)=(z-2)(z^2-2z+2)$

3) $P(z)=0$ تكافئ $z-2=0$ أو $z^2-2z+2=0$.

$z-2=0$ معناه $z=2$ و نحل المعادلة $z^2-2z+2=0$ بالمميز فنجد $z=1-i$ أو $z=1+i$.

المعادلة $P(z)=0$ تقبل ثلاث حلول هي : $2$ ، $1-i$ ، $1+i$.

## 13.كيف نجد طويلة عدد مركب معطى على شكله الجبري ؟

طريقة :

ليكن $z=x+iy$

- نطبق القانون $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z.\bar{z}}$.
- ونستعمل الخواص التالية حسب الحاجة إليها :

$$|zz'|=|z|.|z'|\ ;\ \left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}\ ;\ |z|=|\bar{z}|\ ;\ |z^n|=|z|^n\ ;\ |z+z'|\le|z|+|z'|$$

**مثال :** ليكن $z=3+4i$ و $z'=1+i$ أحسب $|z|$ ، $|z'|$ ، $|zz'|$ ، $\left|\frac{z}{z'}\right|$ ، $|z^4|$

**الحل :**

$|z|=|3+4i|=\sqrt{9+16}=5$ . $|z'|=\sqrt{2}$ ، $|z\,z'|=5\sqrt{2}$ . $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ .

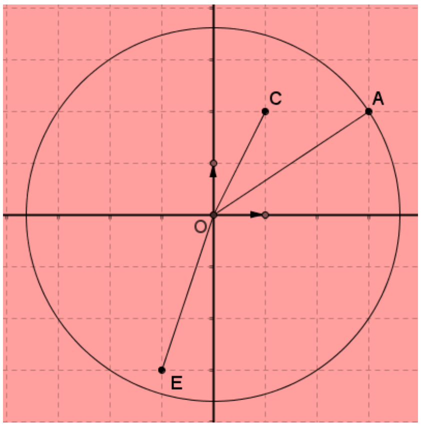
$|z^4|=5^4=625$

## 14.كيف نقرأ بيانيا طويلة عدد مركب $z_M$ ؟

طريقة :

نستعمل $|z_M|=OM$ حيث $M$ نقطة من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$ لاحقتها $z=x+iy$ .

مثال : المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. عين بيانيا طويلة لواحق كلا من $A$ , $C$ , $E$ .




**الحل :**

$|z_A|=OA=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$ ، $|z_E|=OE=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$ ،
$|z_C|=OC=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ .

## 15.كيف نفسر هندسيا طويلة عدد مركب ؟

طريقة :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$. $A$ و $B$ نقطتان متمايزتان وتختلفان عن $O$ لاحقتاهما على الترتيب $z_A$ و $z_B$

- $|z_A|=OA$ ، $|z_B|=OB$ ، $|z_B-z_A|=AB$ .
- $\left|\frac{z_A}{z_B}\right|=\frac{OA}{OB}$ ، $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{AC}{AB}$.

**مثال:**

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر $A$ , $B$ , $C$ ثلاث نقط لواحقها $z_A=2-i$ , $z_B=5+i$ , $z_C=2i$ على الترتيب.

أحسب $BC$ ; $AC$ ; $AB$ واستنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

**الحل :**

$$AB = |z_B - z_A| = |5+i-2+i| = |3+2i| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$AC = |z_C - z_A| = |2i-2+i| = |-2+3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |2i-5-i| = |-5+i| = \sqrt{25+1} = \sqrt{30}$$

لدينا $AB = AC$ ومنه المثلث $ABC$ متساوي الساقين.

## 16.كيف نجد عمدة عدد مركب غير معدوم معطى على شكله الجبري ؟

لدينا الحالات التالية :

**الحالة الأولى :** $z$ عدد حقيقي موجب تماما أي $z = a$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $a > 0$ .

طريقة : $\arg z \equiv 0[2\pi]$ .

**مثال :**أوجد $\arg(5)$ ، $\arg(\sqrt{3})$ .

**الحل :** $\arg(5) \equiv 0[2\pi]$ ، $\arg(\sqrt{3}) \equiv 0[2\pi]$.

**الحالة الثانية :** $z$ عدد حقيقي سالب تماما أي $z = a$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $a < 0$ .

طريقة: $\arg z \equiv \pi[2\pi]$ .

**مثال :**أوجد $\arg(-2)$ ، $\arg\left(-\frac{1}{2}\right)$ .

**الحل :** $\arg(-2) \equiv \pi[2\pi]$ ، $\arg\left(-\frac{1}{2}\right) \equiv \pi[2\pi]$.

**الحالة الثالثة:** $z$ عدد تخيلي صرف أي $z = ai$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $a > 0$ .

طريقة: $\arg z \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .

**مثال :**أوجد $\arg(2i)$ ، $\arg(i)$ .

**الحل :** $\arg(2i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ، $\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

**الحالة الرابعة:** $z$ عدد تخيلي صرف أي $z = ai$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $a < 0$ .

طريقة: $\arg z \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ .

**مثال :**أوجد $\arg(-2i)$ ، $\arg(-i)$ .

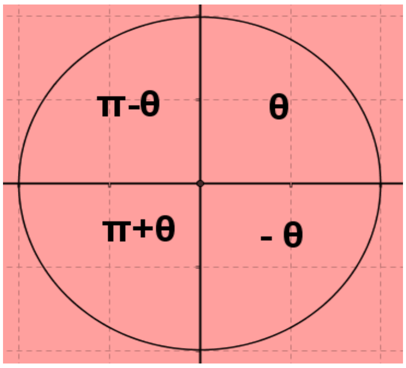
**الحل :** $\arg(-2i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ، $\arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

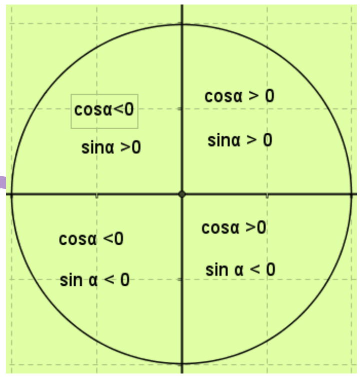
**الحالة الخامسة:** $z$ عدد مركب حيث $z = x + iy$.

طريقة: نضع $|z|=r$ حيث $r=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\arg z \equiv \alpha[2\pi]$ حيث $\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x}{r}\\ \sin\alpha=\dfrac{y}{r}\end{cases}$

ونحصل على $\alpha$ باستعمال قوانين والنسب المثلثية.

| $\alpha$ | $0$ | $\dfrac{\pi}{6}$ | $\dfrac{\pi}{4}$ | $\dfrac{\pi}{3}$ | $\dfrac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\dfrac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ |
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ |




- ونستعمل الخواص التالية كلما احتجنا إلى ذلك :

$\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')$ ، $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$ ،

$\arg(\overline{z})=-\arg(z)$ ، $\arg(z^n)=n\arg(z)$ ، $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\arg(z)$ .

**مثال:**

أوجد $\arg\left(\sqrt{3}+i\right)$ ، $\arg(1-i\sqrt{3})$ ، $\arg(-2+2i)$ ، $\arg\left(-3-\sqrt{3}i\right)$

**الحل :**

- حساب $\arg\left(\sqrt{3}+i\right)$ : لدينا $r=\left|\sqrt{3}+i\right|$ أي $r=2$

نضع $\arg\left(\sqrt{3}+i\right)\equiv\alpha[2\pi]$ حيث $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{1}{2}\end{cases}$ لدينا $\cos\alpha>0$ و $\sin\alpha>0$ وبالتالي

العمدة $\alpha$ تقع في الربع الأول ومنه نستنتج أن $\arg\left(\sqrt{3}+i\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

- حساب $\arg(1-i\sqrt{3})$ : لدينا $r=\left|1-i\sqrt{3}\right|$ أي $r=2$

نضع $\arg(1-i\sqrt{3})\equiv\alpha[2\pi]$ حيث $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{1}{2}\\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ لدينا $\cos\alpha>0$ و $\sin\alpha<0$ وبالتالي

العمدة $\alpha$ تقع في الربع الرابع ومنه نستنتج أن $\arg(1-i\sqrt{3})\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

- حساب $\arg\left(-2+2i\right)$ : لدينا $r=\left|-2+2i\right|$ أي $r=2\sqrt{2}$

نضع $\arg\left(-2+2i\right)\equiv\alpha[2\pi]$ حيث $\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ لدينا $\cos\alpha<0$ و $\sin\alpha>0$ وبالتالي

العمدة $\alpha$ تقع في الربع الثاني ومنه نستنتج أن $\arg\left(-2+2i\right)\equiv\pi-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ أي

$\arg\left(-2+2i\right)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

- حساب $\arg\left(-3-\sqrt{3}i\right)$: لدينا $r=\left|-3-\sqrt{3}i\right|$ أي $r=2\sqrt{3}$

نضع $\arg\left(-3-\sqrt{3}i\right)\equiv\alpha[2\pi]$ حيث $\begin{cases}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=-\frac{1}{2}\end{cases}$ لدينا $\cos\alpha<0$ و $\sin\alpha<0$

وبالتالي العمدة $\alpha$ تقع في الربع الثالث ومنه نستنتج أن $\arg\left(-3-\sqrt{3}i\right)\equiv\pi+\frac{\pi}{6}[2\pi]$ أي

$\arg\left(-3-\sqrt{3}i\right)\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$.

**مثال 02:**

ليكن $z_1=1+i$ و $z_2=\sqrt{3}+i$ .

أوجد $\arg(z_1)$ ، $\arg(z_2)$ ، $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ ، $\arg(z_1 \times z_2)$ ، $\arg(z^5{}_1)$

**الحل :**

- لدينا $\arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ ، $\arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ .
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$ أي $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$ .
- $\arg(z_1 \times z_2) \equiv \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$ أي $\arg(z_1 \times z_2) \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$ .
- $\arg(z^5{}_1) \equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi]$.

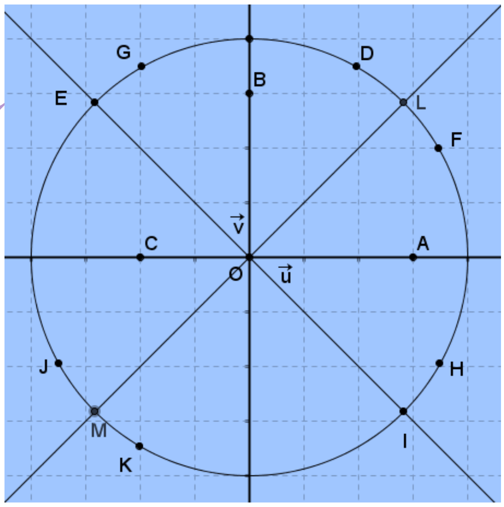
## 17.كيف نقرأ بيانيا عمدة عدد مركب $z_M$ ؟

طريقة :

نقرأ $arg(z_M) = (\vec{u};\overrightarrow{OM})[2\pi]$ حيث $\vec{u}$ شعاع الوحدة على محور الفواصل و $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ هي الزاوية الموجهة المشكلة من الشعاعين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{OM}$ .

**مثال :**

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$. عين بيانيا عمدة لواحق كلا من $A$ $B$ , $C$ , $D$ , $E$ , $F$ , $G$ , $H$ , $I$ , $J$ , $K$ , $L$ , $M$ .




**الحل : نقرأ بيانيا**

$\arg(z_A) = (\vec{u};\overrightarrow{OA})$ أي $\arg(z_A) \equiv 0[2\pi]$ .

$\arg(z_B) = (\vec{u};\overrightarrow{OB})$ أي $\arg(z_B) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .

$\arg(z_C)=(\vec{u};\overrightarrow{OC})$ أي $\arg(z_C)\equiv\pi[2\pi]$ .

$\arg(z_D)=(\vec{u};\overrightarrow{OD})$ أي $\arg(z_D)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ . لأن $\cos(\vec{u};\overrightarrow{OD})=\frac{1}{2}$ و $\sin(\vec{u};\overrightarrow{OD})>0$

$\arg(z_E)=(\vec{u};\overrightarrow{OE})$ أي $\arg(z_E)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$ . لأن المستقيم هو منصف الربع الثاني والربع الرابع.

$\arg(z_F)=(\vec{u};\overrightarrow{OF})$ أي $\arg(z_F)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ . لأن $\sin(\vec{u};\overrightarrow{OF})=\frac{1}{2}$ و $\cos(\vec{u};\overrightarrow{OF})>0$

$\arg(z_G)=(\vec{u};\overrightarrow{OG})$ أي $\arg(z_G)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ . لأن $\cos(\vec{u};\overrightarrow{OG})=-\frac{1}{2}$ و $\sin(\vec{u};\overrightarrow{OG})>0$

$\arg(z_H)=(\vec{u};\overrightarrow{OH})$ أي $\arg(z_H)\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]$ . لأن $\sin(\vec{u};\overrightarrow{OH})=-\frac{1}{2}$ و $\cos(\vec{u};\overrightarrow{OH})>0$

$\arg(z_I)=(\vec{u};\overrightarrow{OI})$ أي $\arg(z_I)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ . لأن المستقيم هو منصف الربع الثاني والربع الرابع.

$\arg(z_J)=(\vec{u};\overrightarrow{OJ})$ أي $\arg(z_J)\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$ . لأن $\sin(\vec{u};\overrightarrow{OJ})=-\frac{1}{2}$ و $\cos(\vec{u};\overrightarrow{OJ})<0$.

$\arg(z_K)=(\vec{u};\overrightarrow{OK})$ أي $\arg(z_K)\equiv\frac{4\pi}{3}[2\pi]$ . لأن $\cos(\vec{u};\overrightarrow{OK})=-\frac{1}{2}$ و $\sin(\vec{u};\overrightarrow{OK})<0$.

$\arg(z_L)=(\vec{u};\overrightarrow{OL})$ أي $\arg(z_L)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ . لأن المستقيم هو منصف الربع الأول والربع الثالث.

$\arg(z_M)=(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ أي $\arg(z_M)\equiv\frac{5\pi}{4}[2\pi]$ . لأن المستقيم هو منصف الربع الأول والربع الثالث.

## 18. كيف نفسر هندسيا عمدة عدد مركب غير معدوم ؟

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. $A$ و $B$ نقطتان متمايزتان وتختلفان عن $O$ لاحقتاهما على الترتيب $z_A$ و $z_B$.

طريقة :

- $\arg(z_A)=\left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right)$ ، $\arg(z_B)=\left(\vec{u};\overrightarrow{OB}\right)$ ، $\arg(z_B-z_A)=\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right)$ .
- $\arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)=\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$
- $\arg\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$ ، مع $A$ تختلف عن $C$ .

**مثال01:**

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$، $A$ و $B$ نقطتان بحيث $z_A=1+i$ ; $z_B=\sqrt{3}+i$ على الترتيب.

أحسب $\arg(z_A)$ ، $\arg(z_B)$ ، $\arg\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)$ وفسر ذلك هندسيا.

**الحل :**

$\arg(z_A)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ ونفسر ذلك هندسيا بأن $\left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ .

$\arg(z_B)\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$ ونفسر ذلك هندسيا بأن $\left(\vec{u};\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ .

$\arg\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)\equiv\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)[2\pi]$ أي $\arg\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)\equiv\left(\dfrac{\pi}{12}\right)[2\pi]$ ونفسر ذلك هندسيا بأن $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\pi}{12}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ .

**مثال02:**

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر $A$ , $B$ , $C$ ثلاث نقط لواحقها $z_A=1+2i$ ; $z_B=1+\sqrt{3}+i$ $z_C=1-2i$ على الترتيب.

أحسب $\arg\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)$ وفسر ذلك هندسيا.

**الحل :**

$$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{1-2i-1-\sqrt{3}-i}{1+2i-1-\sqrt{3}-i}=\frac{-\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}+i}=i\sqrt{3}$$ ومنه $\arg\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

نفسر ذلك هندسيا بأن $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ أي المستقيمان $(BA)$ و $(BC)$ متعامدان.

## 19. كيف نعين قيسا لزاوية موجهة $\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right)$ ; $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BN}\right)$ ؟

طريقة :

- $\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right)=\arg\left(z_B-z_A\right)$ .
- $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BN}\right)=\arg\left(\frac{z_N-z_B}{z_M-z_A}\right)$

**مثال :**

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط $A$ ; $B$ ; $C$ و $D$ لواحقهما على الترتيب : $z_A=2-3i$ ; $z_B=3-2i$ .
$z_C=2\sqrt{3}+3i$ ; $z_D=\sqrt{3}+2i$ عين لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ .

1) عين قيسا للزاوية الموجهة $\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right)$.
2) عين قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AB}\right)$.

**الحل :**

1) $\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right)=\arg\left(z_B-z_A\right)$

لدينا $\arg\left(z_B-z_A\right)=\arg\left(3-2i-2+3i\right)=\arg\left(1+i\right)$ و منه $\arg(1+i)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

وبالتالي $\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\pi}{4}$ .

2) $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AB}\right)=\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_D}\right)$.

$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_D}\right)=\arg\left(\frac{3-2i-2+3i}{2\sqrt{3}+3i-\sqrt{3}-2i}\right)$ أي $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_D}\right)=\arg\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)$

وبالتالي

$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_D}\right)\equiv\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$ أي $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\pi}{12}$

## 20. كيف نجد الشكل المثلثي والأسي لعدد مركب مكتوب على شكله الجبري ؟

طريقة :

- نعين طويلته $r=|z|$ و نعين عمدة له $\alpha=\arg(z)$ .

فيكون الشكل المثلثي للعدد المركب $z=x+iy$ هو $z=r\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)$ .

ويكون الشكل الأسي للعدد المركب $z = x + iy$ هو $z = re^{i\alpha}$ .

**مثال :**

أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل المثلثي ثم الأسي :

$z_1 = 3\sqrt{3} + 3i$ ، $z_2 = 2 - 2i$ ، $z_3 = -3 - \sqrt{3}i$

**الحل :**

- $z_1 = 3\sqrt{3} + 3i$ : لدينا $r = \left|3\sqrt{3} + 3i\right|$ أي $r = 6$

نضع $\arg(z_1) \equiv \alpha[2\pi]$ حيث $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ ومنه $\arg\left(3\sqrt{3} + 3i\right) \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

الشكل المثلثي للعدد المركب $z_1 = 3\sqrt{3} + 3i$ هو $z_1 = 6\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ .

الشكل الأسي للعدد المركب $z_1 = 3\sqrt{3} + 3i$ هو $z_1 = 6e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

- $z_2 = 2 - 2i$

لدينا $r = \left|2 - 2i\right|$ أي $r = 2\sqrt{2}$

نضع $\arg(2 - 2i) \equiv \theta[2\pi]$ حيث $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\arg(2 - 2i) \equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

الشكل المثلثي للعدد المركب $z_2 = 2 - 2i$ هو $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ .

الشكل الأسي للعدد المركب $z_2 = 2 - 2i$ هو $z_2 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ .

- $z_3 = -3 - \sqrt{3}i$ ، لدينا $r = 2\sqrt{3}$

نضع $\arg\left(-3 - \sqrt{3}i\right) \equiv \beta[2\pi]$ حيث $\begin{cases} \cos\beta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\beta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ ومنه $\arg\left(-3 - \sqrt{3}i\right) \equiv \dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$.

الشكل المثلثي للعدد المركب $z_3 = -3 - \sqrt{3}i$ هو $z_2 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$ .

الشكل الأسي للعدد المركب $z_3 = -3 - \sqrt{3}i$ هو $z_3 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ .

## 21. كيف ننتقل من الشكل المثلثي والأسي لعدد مركب إلى شكله الجبري ؟

**طريقة :**

- ننشر عبارة الشكل المثلثي ( أو الأسي)ونحسب القيم المضبوطة للعمدة فنحصل على الشكل الجبري.

**مثال :**

أكتب العددين المركبين التاليين على الشكل الجبري:

$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ، $z_2 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

**الحل :**

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i$$

## 22. كيف نعين طويلة عدد مركب معطى على الشكل $z = Ae^{i\alpha}$ حيث $A \in \mathbb{R}^*$ ؟

**طريقة :**

- $|z| = |Ae^{i\alpha}| = |A|$ لأن $|e^{i\alpha}| = 1$

**مثال :**

أوجد طويلة كلا من العددين المركبين التاليين $z_1 = -2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ، $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

**الحل :**

- طويلة $z_1 = -2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ هي $|z_1| = |-2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$ .
- طويلة $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ هي $|z_2| = |2| = 2$ .

## 23. كيف نعين طويلة عدد مركب معطى على الشكل $z = Ae^{i\alpha}$ حيث $A \in \mathbb{C}^*$ ؟

**طريقة :**

- $|z| = |Ae^{i\alpha}| = |A|$ لأن $|e^{i\alpha}| = 1$

**مثال :**

أوجد طويلة كلا من العددين المركبين التاليين $z_1 = (1+\sqrt{3}i)e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_2 = -2ie^{i\frac{\pi}{6}}$

**الحل :**

- طويلة $z_1 = (1+i\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$ هي $|z_1| = |1+i\sqrt{3}| = 2$ .

- طويلة $z_2=-2ie^{i\frac{\pi}{6}}$ هي $|z_2|=|-2i|=2$ .

## 24. كيف نعين عمدة عدد مركب معطى على الشكل $z=Ae^{i\alpha}$ حيث $A\in\mathbb{R}^*$ ؟

**طريقة :**

- إذاكان $A>0$ فإن $\arg(z)=\arg\left(Ae^{i\alpha}\right)=\arg(A)+\arg e^{i\alpha}=\alpha$ لأن $\arg(A)\equiv 0[2\pi]$ .
- إذاكان $A<0$ فإن $\arg(z)=\arg\left(Ae^{i\alpha}\right)=\pi+\alpha$

**مثال :**

أوجد عمدة لكل من العددين المركبين التاليين $z_1=-2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_2=2e^{i\frac{\pi}{4}}$

**الحل :**

- $\arg(z_1)\equiv\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$ أي $\arg(z_1)\equiv\frac{7\pi}{6}[2\pi]$.
- $\arg(z_2)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ .

## 25. كيف نعين عمدة عدد مركب معطى على الشكل $z=Ae^{i\alpha}$ حيث $A\in\mathbb{C}^*$ ؟

**طريقة :**

- $\arg(z)=\arg(A)+\arg e^{i\alpha}=\arg(A)+\alpha$

**مثال :**

أوجد عمدة لكل من العددين المركبين التاليين $z_1=ie^{i\frac{2\pi}{3}}$ ، $z_2=(1+i)e^{i\frac{\pi}{3}}$

**الحل :**

- بما أن $\arg(i)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ و $\arg\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ فإن :

  $\arg(z_1)\equiv\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)[2\pi]$ أي $\arg(z_1)\equiv\frac{7\pi}{6}[2\pi]$.
- بما أن $\arg(1+i)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ و $\arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ فإن :

  $\arg(z_2)\equiv\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)[2\pi]$ أي $\arg(z_2)\equiv\frac{7\pi}{12}[2\pi]$.

## 26. كيف نطبق دستور موافر ؟

**طريقة:**

- نكتب العدد المركب المعطى داخل الأقواس على الشكل المثلثي.

- نطبق دستور موافر: من أجل كل عدد $n \in \mathbb{Z}$ ،
$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$ .

- **مثال 01 :** عين الشكل المثلثي للعدد المركب $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^7$ .

- **الحل :**

- نكتب العدد $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ على الشكل المثلثي فنجد $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$ .

نطبق دستور موافر فنجد: $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^7 = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^7 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}$

**مثال 02 :** عين الشكل الجبري للعدد المركب $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{400}$ .

**الحل :**

$$z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{400} = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{400} = \cos\frac{400\pi}{3} + i\sin\frac{400\pi}{3}$$

$$z = \cos\left(66 \times 2\pi + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(66 \times 2\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**مثال 03 :** أحسب $z = (-1+i)^{300}$ .

**الحل :**

$$z = (-1+i)^{300} = \left(\sqrt{2}\right)^{300}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^{300}$$

$$z = \left(\sqrt{2}\right)^{300}\left(\cos(\pi + 224\pi) + i\sin(\pi + 224\pi)\right) = 2^{150}(\cos\pi + i\sin\pi) = -2^{150}$$

**27.كيف نستنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ من الشكل الجبري والمثلثي لعدد مركب؟**

طريقة:

نطابق بين الشكل المثلثي والجبري للعدد المركب الذي عمدته $\alpha$ كما يلي: $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ و $\sin\alpha = \frac{y}{r}$ حيث $x$ الجزء الحقيقي و $y$ الجزء التخيلي من الشكل الجبري لهذا العدد و $r$ طويلته من الشكل المثلثي.

**مثال :**

ليكن $z_1=1+i$ و $z_2=\sqrt{3}+i$ .

1) أوجد الشكل المثلثي لكل من $z_1=1+i$ ، $z_2=\sqrt{3}+i$ ، $Z=\frac{z_1}{z_2}$ ، $Z'=z_1\times z_2$ .

2) أوجد الشكل الجبري لكل من $Z$ و $Z'$ .

3) استنتج القيم المضبوطة لكل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$ ثم $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

**الحل :**

**1)** حساب الشكل المثلثي:

$z_1=1+i$ شكله المثلثي هو $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z_2=\sqrt{3}+i$ شكله المثلثي هو $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$Z=\frac{z_1}{z_2}$ شكله المثلثي $Z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

أي $Z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ .

$Z'=z_1\times z_2$ شكله المثلثي $Z=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right)$

أي $Z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ .

**2)** حساب الشكل الجبري:

$Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\frac{\sqrt{3}-1}{4}i$ ، $Z'=z_1\times z_2=\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}+1\right)i$

**3)** استنتاج القيم المضبوطة:

❖ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

$\frac{\pi}{12}$ هي عمدة للعدد المركب $Z$ ولدينا الشكلين الجبري والمثلثي له:

$Z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ و $Z=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\frac{\sqrt{3}-1}{4}i$ بالمطابقة نجد :

$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{x}{r}=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ، $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{y}{r}=\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

❖ $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$ .

**$\frac{5\pi}{12}$ هي عمدة للعدد المركب $Z'$ ولدينا الشكلين الجبري والمثلثي له:**

$Z'=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ و $Z'=\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}+1\right)i$ بالمطابقة نجد :

$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ، $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

## 28. كيف نبين أن شعاعين $\vec{u}(z)$ و $\vec{v}(z')$ مرتبطان خطيا؟

**طريقة:**

نبين أن $\frac{z'}{z}$ يساوي عدد حقيقي $k$ أي $(\vec{u},\vec{v})\equiv 0[2\pi]$ أو $(\vec{u},\vec{v})\equiv \pi[2\pi]$

**مثال :**

$\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ شعاعان لاحقتاهما على الترتيب $z_{\vec{u_1}}=2-4i$ و $z_{\vec{u_2}}=1-2i$. بين أن $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ مرتبطان خطيا.

**الحل :**

$\frac{z_{\vec{u_1}}}{z_{\vec{u_2}}}=\frac{2-4i}{1-2i}=\frac{2(1-2i)}{1-2i}=2$ ومنه $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ مرتبطان خطيا.

## 29. كيف نبين أن شعاعين $\vec{u}(z)$ و $\vec{v}(z')$ متعامدان؟

**طريقة 01:**

- نستعمل الجداء السلمي : $\vec{u}.\vec{v}=0$

**طريقة02 :**

- نبين أن $\frac{z'}{z}$ تخيلي أي $(\vec{u},\vec{v})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ أو $(\vec{u},\vec{v})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

**مثال :**

$\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ شعاعان لاحقتاهما على الترتيب $z_{\vec{u_1}}=4-2i$ و $z_{\vec{u_2}}=3+6i$. بين أن $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ متعامدين.

الحل :

الطريقة 01:

لدينا $z_{\vec{u_1}}=4-2i$ و $z_{\vec{u_2}}=3+6i$ أي $\vec{u_1}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ و $\vec{u_2}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ نستعمل الجداء السلمي.

$\vec{u_1}.\vec{u_2}=(3)(4)+(6)(-2)=12-12=0$ ومنه $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ متعامدان.

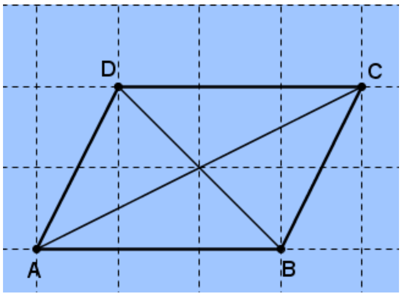
الطريقة 02:

$\frac{z_{\vec{u_1}}}{z_{\vec{u_2}}}=\frac{4-2i}{3+6i}=-\frac{2}{3}i$ ومنه $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ متعامدين.

**30. كيف نبين أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ؟**

طريقة 01:

-- نبين أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ أي $z_B-z_A=z_C-z_D$ .




طريقة 02:

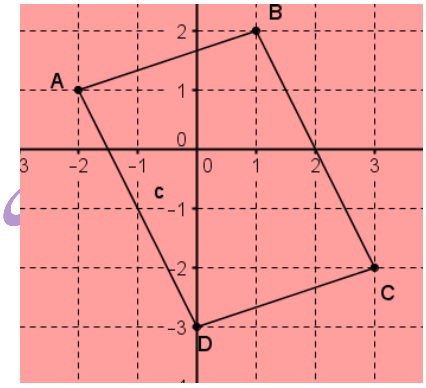
--- نبين أن القطران $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان (لهما نفس المنتصف) أي

$$\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$$

**مثال 01:**

المستوي منسوب إلى معلم متعامدو متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ . علّم النقط $A, B, C, D$ التي لواحقها على الترتيب: $z_A=-2+i$ , $z_B=1+2i$ , $z_C=3-2i$, $z_D=-3i$ .

بين أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.




الحل :

**الطريقة01 :** نبين أن $z_B-z_A=z_C-z_D$

$$z_B-z_A=(1+2i)-(-2+i)=1+2i+2-i=3+i$$

$$z_C-z_D=(3-2i)-(-3i)=3-2i+3i=3+i$$

ومنه $z_B-z_A=z_C-z_D$ وبالتالي الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

**الطريقة 02:** نبين أن القطران $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان.

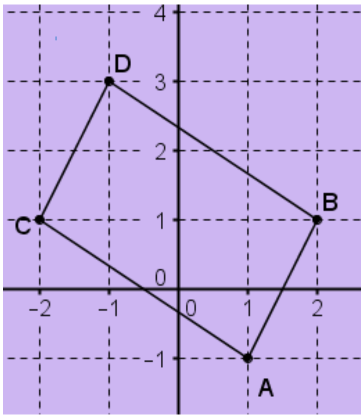
$$\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{-2+i+3-2i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \quad \text{و} \quad \frac{z_B+z_D}{2}=\frac{1+2i-3i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

ومنه القطران متناصفان وبالتالي الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

**مثال 02:**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O , \vec{u} , \vec{v}\right)$ . علّم النقط $A$ , $B$ , $C$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 1-i$ , $z_B = 2+i$ , $z_C = -2+i$ .

أوجد $z_D$ حتى يكون الرباعي $ABDC$ متوازي الأضلاع.




**الحل :**

$ABDC$ متوازي الأضلاع معناه $z_B - z_A = z_D - z_C$

أي $z_D = z_B - z_A + z_C$ ومنه

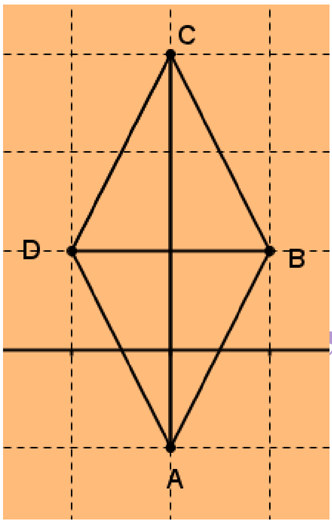
$z_D = 2+i-1+i-2+i = -1+3i$.

## 31. كيف نبين أن الرباعي $ABCD$ معين ؟

**طريقة 01:**

**المعين هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متقايسان .**

- نبين أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و$AB = AD$ .




**طريقة 02:**

**المعين هو متوازي أضلاع فيه القطران متناصفان ومتعامدان.**

- نبين أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$

و $\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{BD} = 0$

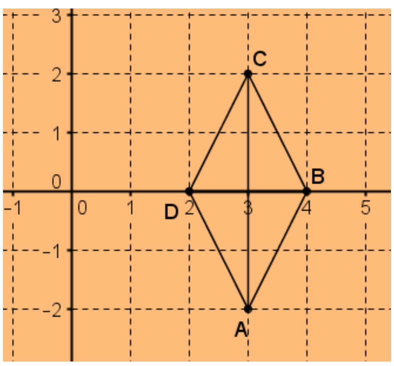
**مثال 01:**

المستوي منسوب إلى معلم متعامدو متجانس $\left(O , \vec{u} , \vec{v}\right)$ .

علّم النقط $A$ , $B$ , $C$ , $D$ التي لواحقها على الترتيب :

$z_A = 3-2i$ , $z_B = 4$ , $z_C = 3+2i$ ; $z_D = 2$ .

بين أن الرباعي $ABCD$ معين.




**الحل :**

**الطريقة 01:** نبين ان $ABCD$ متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران و متقايسان أي $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و$AB = AD$ .

- لدينا من جهة $z_B - z_A = 4-3+2i = 1+2i$ و $z_C - z_D = 3+2i-2 = 1+2i$

ومنه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ وبالتالي $ABCD$ متوازي أضلاع.

- لدينا من جهة أخرى $AB = |z_B - z_A| = |4-3+2i| = |1+2i| = \sqrt{5}$

و $AD = |z_D - z_A| = |2-3+2i| = |-1+2i| = \sqrt{5}$ ومنه $AB = AD$.

وأخيرا $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و $AB = AD$ وبالتالي $ABCD$ معين.

**الطريقة 02:** نبين أن $ABCD$ متوازي أضلاع فيه القطران متناصفان ومتعامدان.

- بينا سابقا أن $ABCD$ متوازي أضلاع .

$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{3-2i+3+2i}{2} = \frac{6}{2} = 3$ و $\frac{z_B + z_D}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$ ومنه القطران متناصفان

هذا من جهة ومن جهة أخرى لدينا $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ متعامدان لأن الجداء السلمي لهما معدوم.

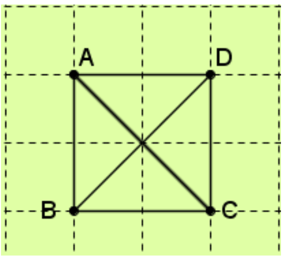
وأخيرا القطران $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان ومتعامدان إذن $ABCD$ معين.

## 32. كيف نبين أن الرباعي $ABCD$ مربع ؟

**طريقة 01:**

**المربع هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متقايسان ومتعامدان.**

نبين أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و $AB = AD$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ .




**طريقة 02:**

**المربع هو متوازي أضلاع فيه القطران متناصفان و متقايسان ومتعامدان.**

**نبين أن :** $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$ و $BD = AC$ و $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$

**مثال :**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . علّم النقط $A$ , $B$ , $C$ , $D$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 2+5i$ , $z_B = 2+i$ , $z_C = 6+i$ ; $z_D = 6+5i$ .

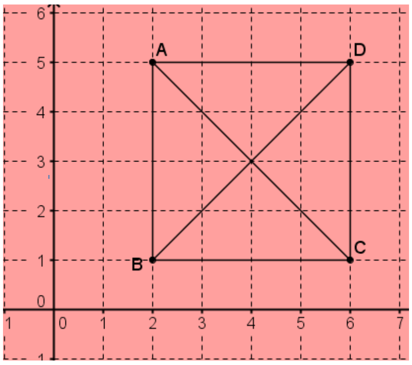
بين أن الرباعي $ABCD$ مربع.

**الحل :**

**الطريقة 01:**

- نبين ان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و $AB = AD$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ .
- $z_B - z_A = 2+i-2-5i = -4i$ و $z_C - z_D = 6+i-6-5i = -4i$ ومنه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

- $AB=|2+i-2-5i|=|-4i|=4$ و $AD=|6+5i-2-5i|=4$ ومنه $.AB=AD$




- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$. ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$

وأخيرا الرباعي $ABCD$ مربع.

**الطريقة 02:**

--- نبين أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و القطران $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان ومتقايسان ومتعامدان أي

نبين : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$ و $BD=AC$ و $(BD)\perp(AC)$

- بينا في الطريقة الأولى أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
- $\frac{z_B+z_D}{2}=\frac{2+i+6+5i}{2}=4+3i$ و $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{2+5i+6+i}{2}=4+3i$ ومنه القطران متناصفان .
- $BD=|z_D-z_B|=|4+4i|=4\sqrt{2}$ و $AC=|z_C-z_A|=|4-4i|=4\sqrt{2}$ ومنه $BD=AC$
- $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}=0$ اي $.(BD)\perp(AC)$

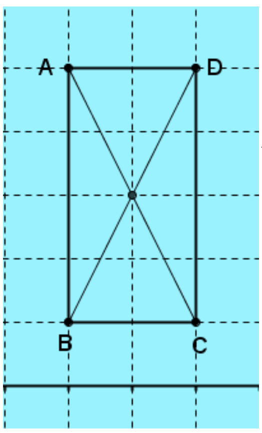
وأخيرا الرباعي $ABCD$ مربع.

## 33. كيف نبين أن الرباعي $ABCD$ مستطيل؟

**طريقة 01:**

**المستطيل هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متعامدان وغير متقايسان.**

--- نبين ان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $AB\neq AD$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$ .




**طريقة 02:**

**المستطيل هو متوازي أضلاع فيه القطران متناصفان و متقايسان .**

--- نبين أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$ و $BD=AC$.

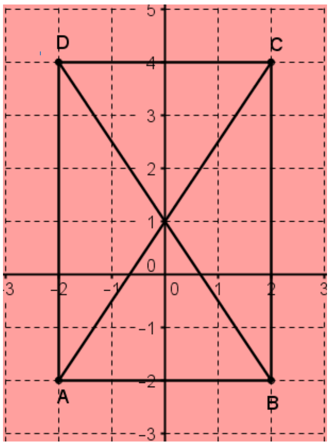
**مثال :**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ .

علّم النقط $A$ , $B$ , $C$ , $D$ التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=-2-2i$ , $z_B=2-2i$ , $z_C=2+4i$ ; $z_D=-2+4i$ .

بين أن الرباعي $ABCD$ مستطيل.




**الحل :**

**الطريقة 01:**

- نبين ان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $AB\neq AD$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$ .
- $z_B-z_A=4$ و $z_C-z_D=4$ ومنه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
- $AB=|z_B-z_A|=4$ و $AD=|z_D-z_A|=6$

ومنه $AB\neq AD$.

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$

وأخيرا الرباعي $ABCD$ مستطيل.

**الطريقة 02:**

- نبين أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ والقطران $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان ومتقايسان أي نبين :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$ و $BD=AC$ .

- بينا في الطريقة الأولى أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
- $\frac{z_B+z_D}{2}=\frac{2-2i-2+4i}{2}=i$ و $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{-2-2i+2+4i}{2}=i$ ومنه القطران متناصفان .
- $BD=|z_D-z_B|=|-4+6i|=\sqrt{52}$ و $AC=|z_C-z_A|=|4+6i|=\sqrt{52}$ ومنه

$BD=AC$

وأخيرا الرباعي $ABCD$ مستطيل.

**34. كيف نبين أن 3 نقط $A$ ; $B$ ; $C$ في استقامية ؟**

**طريقة:**

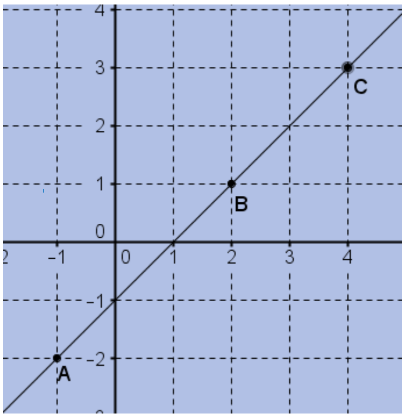
- نبين أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا أي $\overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{AC}$ أي $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=k$ حيث

$k\in\mathbb{R}$

**مثال :**

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ تعطى النقط $A$ , $B$ , $C$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-1-2i$ , $z_B=2+i$ , $z_C=4+3i$ .

بين أن النقط $A$ , $B$ , $C$ في استقامية.




**الحل :**

نبين أن $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{2+i+1+2i}{4+3i+1+2i} = \frac{3+3i}{5+5i} = \frac{3(1+i)}{5(1+i)} = \frac{3}{5}$$

## 35. كيف نبين أن المثلث $ABC$ متساوي الساقين رأسه $A$ ؟

**طريقة:**

- نبين أن $\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$ أي $AB = AC$ .

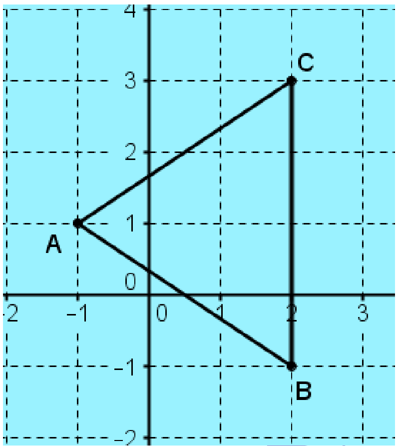
**مثال :**

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$

تعطى النقط $A$ , $B$ , $C$ التي لواحقها على الترتيب

: $z_A = -1+i$ , $z_B = 2-i$ , $z_C = 2+3i$ .

بين أن المثلث $ABC$ متساوي الساقين رأسه $A$




**الحل :**

نبين أن $\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$

$\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \left|\dfrac{3-2i}{3+2i}\right| = 1$ أي $AB = AC$

وبالتالي المثلث $ABC$ متساوي الساقين رأسه $A$.

## 36. كيف نبين أن المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع ؟

**طريقة1:**

- نبين أن $AB = AC = BC$

**طريقة2:**

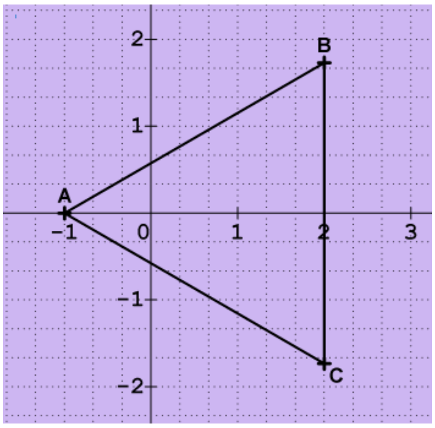
- نبين أن $\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$ و $\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ أو

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

**مثال :**

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ تعطى النقط $A$ , $B$ , $C$ التي لواحقها على الترتيب: $z_A=-1$ , $z_B=2+i\sqrt{3}$ , $z_C=2-i\sqrt{3}$ .

بين أن المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع.




**الحل :**

- **الطريقة1 :** نبين أن $AB=AC=BC$

$$AB=|z_B-z_A|=|2+i\sqrt{3}+1|=2\sqrt{3}$$

$$AC=|z_C-z_A|=|2-i\sqrt{3}+1|=2\sqrt{3}$$

$$BC=|z_C-z_B|=|2-i\sqrt{3}-2-i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$$

ومنه $AB=AC=BC$

وبالتالي المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع.

- **الطريقة2:**

$$\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{-1-2+i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}-2+i\sqrt{3}}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ معناه $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})=\frac{\pi}{3}$ .

و $\left|\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right|=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$ أي $AC=BC$ ومنه المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع.

## 37. كيف نبين أن المثلث $ABC$ قائم في $A$ ؟

**طريقة1:**

- **استعمال مبرهنة فيثاغورس:** نبين أن $AB^2+AC^2=BC^2$

**طريقة2:**

- **استعمال الجداء السلمي :** نبين أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ :

**طريقة3:**

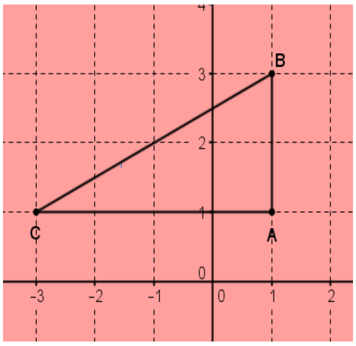
- نبين أن $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\in i\mathbb{R}^*$ أي $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ تخيلي صرف.

**مثال:**

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ تعطى النقط $A$ , $B$ , $C$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A=1+i$ , $z_B=1+3i$ , $z_C=-3+i$ .

بين أن المثلث $ABC$ قائم في $A$.

**الحل :**




- **الطريقة 1 : نبين أن** $AB^2+AC^2=BC^2$

لدينا : $AB=|z_B-z_A|=|1+3i-1-i|=2$ ومنه $AB^2=4$ .

لدينا : $AC=|z_C-z_A|=|-3+i-1-i|=4$ ومنه $AC^2=16$ .

لدينا : $BC=|z_C-z_B|=|-3+i-1-3i|=|-4-2i|=\sqrt{20}$

ومنه $BC^2=20$ .

إذن $AB^2+AC^2=BC^2$ ومنه المثلث $ABC$ قائم في $A$.

- **الطريقة2: نبين أن** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ وبالتالي المثلث $ABC$ قائم في $A$.

- **الطريقة3: نبين أن** $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ **تخيلي صرف**

$\frac{2i}{-2}=-i$ ، $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{1+3i-1-i}{-3+i-1-i}$ ومنه المثلث $ABC$ قائم في $A$.

**38. كيف نستنتج طبيعة مثلث $ABC$ من حسابنا لـ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ؟**

لتكن $A$ , $B$ , $C$ ثلاث نقط مختلفة مثنى مثنى من المستوى المركب ، لواحقها $z_A$ , $z_B$ , $z_C$ على التوالي : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}[2\pi]$ و $\frac{AC}{AB}=\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|$.

طريقة :

**1)** إذا كان $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$ و $\arg\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ أو $\arg\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

فإن المثلث $ABC$ قائم في $A$ متساوي الساقين.

**2)** إذا كان $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$ و $\arg\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ أو $\arg\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

فإن المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع.

**3)** إذا كان $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$ و $\arg\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\equiv\theta[2\pi]$ حيث $\theta\neq\pm\frac{\pi}{3}$ فإن المثلث

$ABC$ متساوي الساقين.

**4)** إذا كان $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=r$ حيث $r\neq1$ و $\arg\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

أو $\arg\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ فإن المثلث $ABC$ قائم في $A$ .

**مثال 01:**

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O\,,\vec{u}\,,\vec{v}\right)$، نعتبر $A\,,B\,,C$ ثلاث نقط لواحقها $z_A = 2-i$ , $z_B = 5+i$ , $z_C = 2i$ على الترتيب. أحسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ واستنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

**الحل:**

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2i-2+i}{5+i-2+i} = \frac{-2+3i}{3+2i} = \frac{2i^2+3i}{3+2i} = \frac{i(2i+3)}{3+2i} = i$$

لدينا من جهة $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |i| = 1$ أي $\frac{AC}{AB} = 1$ أي $AC = AB$

ومن جهة أخرى $\arg\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \arg i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,, k \in \mathbb{Z}$ أي $(AB) \perp (AC)$

ومنه المثلث $ABC$ قائم في النقطة $A$ و متساوي الساقين.

**مثال 02 :**

$A\,,B\,,C$ ثلاث نقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O\,,\vec{u}\,,\vec{v}\right)$، لواحقها على الترتيب $z_A = i$ ، $z_B = 2+i$ ، $z_C = 1+i\left(\sqrt{3}+1\right)$.

أحسب الطويلة وعمدة للعدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ واستنتج أن المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع.

**الحل :**

نبين أن $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$ و $\arg\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\arg\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ .

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{(2+i)-(i)}{1+i\left(\sqrt{3}+1\right)-i} = \frac{2}{1+i\sqrt{3}} = \frac{2-2i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$$

ومنه $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$ أي $AB = AC$ .

إذا كانت $\theta$ هي عمدة لـ $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ فإن $\theta = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

أي $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$ ومنه المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع.

**مثال 03 :**

$C, B, A$ ثلاث نقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$، لواحقها على الترتيب $z_A = 4+4i$ ; $z_B = 6+i$ ; $z_C = 2+i$ .

أحسب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ واستنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

**الحل :**

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2+i-4-4i}{6+i-4-4i} = \frac{-2-3i}{2-3i} = \frac{5}{13} - \frac{12}{13}i$$

$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \left|\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i\right| = \sqrt{\frac{25}{169} + \frac{144}{169}} = 1$ ومنه $AC = AB$ والمثلث $ABC$ متساوي الساقين.

**مثال 04:**

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$، نعتبر $C, B, A$ ثلاث نقط لواحقها $z_A = 2+i$ ; $z_B = 5+i$ ; $z_C = 2+6i$ على الترتيب. أحسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ واستنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

**الحل :**

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2+6i-2-i}{5+i-2-i} = \frac{5i}{3}.$$

$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \left|\frac{5}{3}i\right| = \frac{5}{3}$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ومنه المثلث $ABC$ قائم في $A$ .

## 39 كيف نبين أن نقطة $A(z_A)$ تنتمي إلى دائرة $(C)$ مركزها $\Omega(z_\Omega)$ وطول نصف قطرها $r$ ؟

**طريقة:**

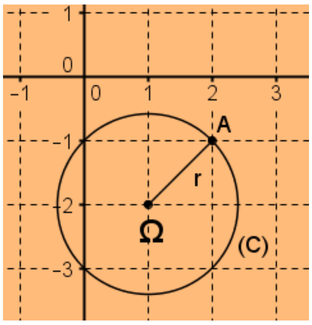
- نبين أن $A\Omega = r$ .
- نستنتج أن $A \in (C)$ .

**مثال :**

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ تعطى الدائرة $(C)$ التي طول نصف قطرها $r = \sqrt{2}$ و لاحقة مركزها $z_\Omega = 1-2i$ . بين أن النقطة $A$ ذات اللاحقة $z_A = 2-i$ تنتمي إلى الدائرة $(C)$.

**الحل :**

- نبين أن $A\Omega = 2$ .




$A\Omega=|z_{\Omega}-z_A|=|1-2i-2+i|=|-1-i|=\sqrt{2}$

ومنه نستنتج أن $A\in(C)$ .

## 40. كيف نبين أن 3 نقط $A\ ;\ B\ ;\ C$ تنتمي إلى نفس الدائرة $(C)$ علم مركزها $\Omega(z_{\Omega})$؟

**طريقة:**

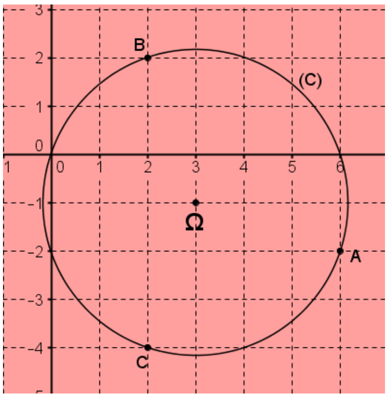
- نبين أن $\Omega A=\Omega B=\Omega C$ .
- هذه الأطوال أنصاف أقطار.

**مثال :**

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ تعطى النقط $A\ ,B\ ,C$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A=6-2i\ ,z_B=2+2i\ ,z_C=2-4i$ .

بين أن النقط $A\ ,B\ ,C$ تنتمي إلى الدائرة $(C)$ التي لاحقة مركزها $z_{\Omega}=3-i$

**الحل :**




- نبين أن $\Omega A=\Omega B=\Omega C$ .

$\Omega A=|z_A-z_{\Omega}|=|6-2i-3+i|=|3-i|=\sqrt{10}$

$\Omega B=|z_B-z_{\Omega}|=|2+2i-3+i|=|-1+3i|=\sqrt{10}$

$\Omega C=|z_C-z_{\Omega}|=|2-4i-3+i|=|-1-3i|=\sqrt{10}$

ومنه النقط $A\ ,B\ ,C$ تنتمي إلى الدائرة $(C)$

التي لاحقة مركزها $z_{\Omega}=3-i$ ونصف قطرها $r=\sqrt{10}$

## 41. كيف نبين أن 4 نقط $A\ ;\ B\ ;\ C\ ;D$ تنتمي إلى نفس الدائرة $(C)$ ؟

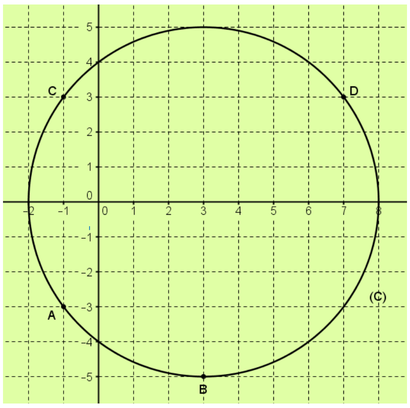
**طريقة:**

- نبين أن $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\times\dfrac{z_B-z_C}{z_D-z_C}\in\mathbb{R}$

**مثال :**

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامدو متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ تعطى النقط $A\ ,B\ ,C$ و $D$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-1-3i\ ,z_B=3-5i\ ,z_C=-1+3i\ ;z_D=7+3i$ .

بين أن النقط $A\ ,B\ ,C$ و $D$ تنتمي إلى نفس الدائرة $(C)$




**الحل :**

نبين أن $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \dfrac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$

$$\frac{7+3i+1+3i}{3-5i+1+3i} \times \frac{3-5i+1-3i}{7+3i+1-3i} = \frac{8+6i}{4-2i} \times \frac{4-8i}{8} = \frac{5}{2}$$

ومنه النقط $A$ , $B$ , $C$ و $D$ تنتمي إلى نفس الدائرة $(C)$

## 42. كيف نعين مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|z - z_A| = k$ ؟

**طريقة :**

- $|z - z_A| = k$ معناه $AM = k$ .
- مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|z - z_A| = k$ هي دائرة مركزها $A$ وطول نصف قطرها $k$ $(k > 0)$

**مثال :**

عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي في كل حالة من الحالات التالية :

**1)** $|z - 3 + 2i| = \sqrt{5}$ ، **2)** $|(1+i)z + 2 - i| = 2\sqrt{2}$ ، **3)** $|\overline{z} - 1 - 2i| = 4$.

**الحل :**

1) $|z - 3 + 2i| = \sqrt{5}$ تكافئ $|z - (3-2i)| = \sqrt{5}$ من الشكل $|z - z_A| = \sqrt{5}$ حيث $z_A = 3 - 2i$ . إذن مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق $|z - 3 + 2i| = \sqrt{5}$ هي دائرة مركزها $A(3;-2)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{5}$ .

2) $|(1+i)z + 2 - i| = 2\sqrt{2}$ تكافئ $\left|(1+i)\left(z + \dfrac{2-i}{1+i}\right)\right| = 2\sqrt{2}$ أي

$\sqrt{2}\left|\left(z + \dfrac{2-i}{1+i}\right)\right| = 2\sqrt{2}$ تكافئ $\left|\left(z - \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)\right)\right| = 2$ من الشكل $|z - z_B| = 2$

حيث $z_B = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$ .

إذن مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق $|(1+i)z + 2 - i| = 2\sqrt{2}$ هي دائرة مركزها $B\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ وطول نصف قطرها 2 .

3) $|\overline{z} - 1 - 2i| = 4$ تكافئ $\left|\overline{\overline{z} - 1 - 2i}\right| = 4$ تكافئ $|z - 1 + 2i| = 4$ أي $|z - (1-2i)| = 4$

من الشكل $|z - z_{\Omega}| = 4$ حيث $z_{\Omega} = 1 - 2i$ . إذن مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق $|\overline{z} - 1 - 2i| = 4$ هي دائرة مركزها $\Omega(1;-2)$ وطول نصف قطرها 4 .

## 43. كيف نعين مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|z - z_A| = |z - z_B|$ ؟

**طريقة :**

- $|z - z_A| = |z - z_B|$ معناه $AM = BM$ .
- مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|z - z_A| = |z - z_B|$ هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$ .

**مثال :**

عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي في كل حالة من الحالتين التاليتين :

1) $|z - 1 - i| = |z + 3 - 5i|$ ، 2) $|\overline{z} - 1 - 2i| = |z + 5i|$

**الحل :**

1) $|z - 1 - i| = |z + 3 - 5i|$ تكافئ $|z - (1+i)| = |z - (-3+5i)|$ من الشكل $|z - z_A| = |z - z_B|$ حيث $z_A = 1 + i$ و $z_B = -3 + 5i$ .

مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|z - 1 - i| = |z + 3 - 5i|$ هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $A(1;1)$ و $B(-3;5)$ .

2) $|\overline{z} - 3 - 2i| = |z + 5i|$ تكافئ $|\overline{\overline{z} - 3 - 2i}| = |z + 5i|$ تكافئ

$|z - 3 + 2i| = |z + 5i|$

3) $|z - (3 - 2i)| = |z - (-5i)|$ من الشكل $|z - z_B| = |z - z_C|$ حيث $z_B = 3 - 2i$ و $z_C = -5i$ .

مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|\overline{z} - 3 - 2i| = |z + 5i|$ محور القطعة المستقيمة $[BC]$ حيث $B(3;-2)$ و $C(0;-5)$ .

## 44. كيف نعين مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $Z = \frac{z - z_B}{z - z_A}$ حقيقيا ؟

**طريقة 01:**

- نعوض كل $z$ بـ $z = x + iy$ .
- نكتب العبارة الناتجة بعد التعويض على الشكل $X + iY$ .
- يكون $Z \in \mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $Y = 0$ .
- نحل المعادلة لنجد $x$ و $y$ أو علاقة بين $x$ و $y$ .

**طريقة 02:**

- $Z\in\mathbb{R}$ معناه $Z=0$ أو $\arg Z\equiv 0[\pi]$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ .

**مثال :**

ليكن $Z=\dfrac{z-1+i}{z+2-i}$ . عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حتى يكون $Z$ حقيقيا.

**الحل :**

**الطريقة 01: تحليليا**

من أجل كل $z\neq -2+i$

- نعوض كل $z$ بـ $z=x+iy$ في عبارة $Z$:

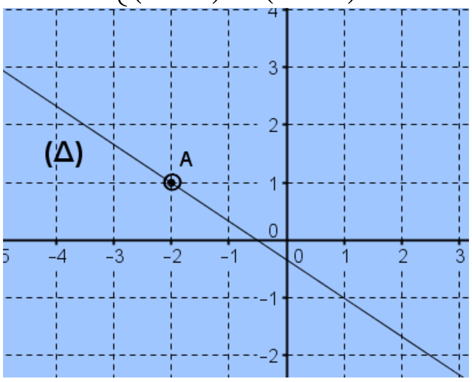
$$Z=\frac{x+iy-1+i}{x+iy+2-i}=\frac{(x-1)+(y+1)i}{(x+2)+(y-1)i}.$$

- نكتب $Z$ على الشكل الجبري أي $Z=X+iY$

$$Z=\frac{(x-1)+(y+1)i}{(x+2)+(y-1)i}\times\frac{(x+2)-(y-1)i}{(x+2)-(y-1)i}=\frac{x^2+y^2+x-3}{(x+2)^2+(y-1)^2}+\frac{2x+3y+1}{(x+2)^2+(y-1)^2}i$$

- يكون $Z\in\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $Y=0$ أي $\begin{cases}2x+3y+1=0\\(x;y)\neq(-2;1)\end{cases}$.

مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حتى يكون $Z$ حقيقيا هي مستقيم $(\Delta)$ معادلته $2x+3y+1=0$ باستثناء النقطة $A(-2;1)$ .




**الطريقة 02: هندسيا**

$Z\in\mathbb{R}$ معناه $Z=0$ أو $\arg Z\equiv 0[\pi]$ تكافئ $\dfrac{z-1+i}{z+2-i}=0$ أو

$$\arg\left(\frac{z-1+i}{z+2-i}\right)\equiv 0[\pi]$$

تكافئ $\begin{cases}z=1-i\\z\neq -2+i\end{cases}$ أو $\arg\left(\dfrac{z_M-z_B}{z_M-z_A}\right)\equiv 0[\pi]$ (حيث $z_B=1-i$ و $z_A=-2+i$) .

معناه ( $M=B$ و $M\neq A$ ) أو $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)\equiv 0[\pi]$ تكافئ ( $M=B$ و $M\neq A$ )

أو النقط $B$ ; $A$ ; $M$ في استقامية معناه $M$ تنتمي للمستقيم $(AB)$ و $M\neq A$.

**الخلاصة** : مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حتى يكون $Z$ حقيقيا هي المستقيم $(AB)$ حيث $B(1;-1)$ باستثناء النقطة $A(-2;1)$ .

**45. كيف نعين مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $\dfrac{z-z_B}{z-z_A}$ تخيليا صرفا ؟**

**طريقة01 :**

- نعوض كل $z$ بـ $z=x+iy$ .
- نكتب العبارة الناتجة بعد التعويض على الشكل $X+iY$ .
- يكون $Z\in i\mathbb{R}^*$ إذا وفقط إذا كان $X=0$ .
- نحل المعادلة لنجد $x$ و $y$ أو علاقة بين $x$ و $y$ .

**طريقة 02:**

- $Z$ **تخيلي صرف** معناه $Z=0$ أو $\arg Z\equiv\dfrac{\pi}{2}[\pi]$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ .

**مثال :**

- نأخذ نفس التمرين السابق :ليكن $Z=\dfrac{z-1+i}{z+2-i}$ . عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حتى يكون $Z$ تخيليا صرفا.

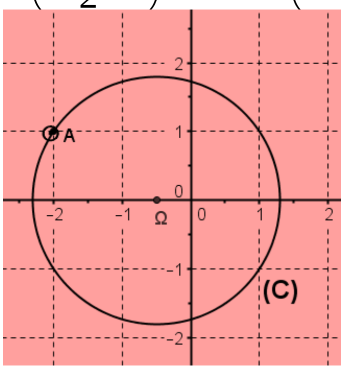
**الطريقة 01:** تحليليا

**الحل :**

**من أجل كل** $z\neq-2+i$

**وجدنا** $Z=\dfrac{x^2+y^2+x-3}{(x+2)^2+(y-1)^2}+\dfrac{2x+3y+1}{(x+2)^2+(y-1)^2}i$

- يكون $Z\in i\mathbb{R}^*$ إذا وفقط إذا كان $Y=0$ أي $\begin{cases}x^2+y^2+x-3=0\\(x;y)\neq(-2;1)\end{cases}$.
- مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حتى يكون $Z$ تخيليا صرفا هي دائرة $(C)$ معادلتها $x^2+y^2+x-3=0$ أي $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{13}{4}$ مركزها $\Omega\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ وطول نصف قطرها $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ باستثناء النقطة $A(-2;1)$ .



**الطريقة 02:** هندسيا

$Z$ تخيلي صرف معناه $Z=0$ أو $\arg Z\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ .

تكافئ $\frac{z-1+i}{z+2-i}=0$ أو $\arg\left(\frac{z-1+i}{z+2-i}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$

تكافئ $\begin{cases}z=1-i\\ z\neq-2+i\end{cases}$ أو $\arg\left(\frac{z_M-z_B}{z_M-z_A}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ (حيث $z_B=1-i$ و $z_A=-2+i$) .

معناه ( $M=B$ و $M\neq A$ ) أو $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ تكافئ $M$ تنتمي للدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة $A(-2;1)$ .

الخلاصة : مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حتى يكون $Z$ تخيليا صرفا هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ حيث $B(1;-1)$ باستثناء النقطة $A(-2;1)$ .

## 46.كيف نعين مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $\arg(z)\equiv\theta[\pi]$ ؟

طريقة:

- مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $\arg(z)\equiv\theta[\pi]$ هي مستقيم $(\Delta)$ يشكل زاوية مع محور الفواصل قيسها $\alpha$ باستثناء المبدأ $O$ .

1) انتبه إلى أن $\arg(z)\equiv\alpha[\pi]$ معناه $\arg(z)\equiv\alpha[2\pi]$ أو $\arg(z)\equiv\pi+\alpha[2\pi]$

**مثال :**

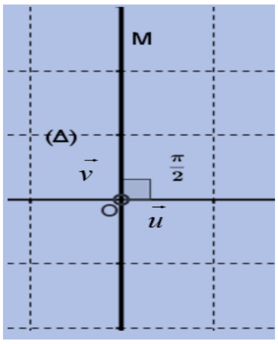
عين مجموعة النقط $M(z)$ في المستوي المركب التي تحقق :

1) $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ ، 2) $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{6}[\pi]$

**الحل :**

1) $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$ معناه $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ أو $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)\equiv\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$

أي مجموعة النقط $M(z)$ هي محور التراتيب باستثناء المبدأ $O$ .



2) $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{6}[\pi]$ معناه $\left(\vec{u}\ ;\overrightarrow{OM}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[\pi]$ أو $\left(\vec{u}\ ;\overrightarrow{OM}\right)\equiv\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$ أي

مجموعة النقط $M\left(z\right)$ هي مستقيم $\left(\Delta\right)$ الذي

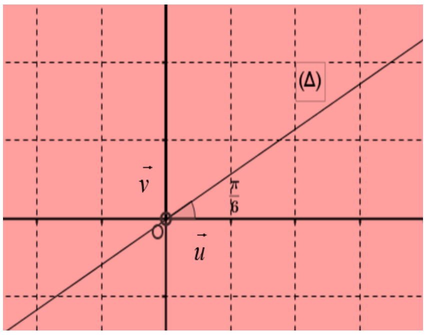
يشكل زاوية مع محور الفواصل

قيسها $\frac{\pi}{6}$ باستثناء المبدأ $O$. ( $M$ تختلف

عن المبدأ $O$ ).

يمكن تعيين معادلة $\left(\Delta\right)$ على أساس

يشمل المبدأ وميله $a=\tan\frac{\pi}{6}$ أي $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ .




- لاحظ أن $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{6}[\pi]$ معناه $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ أو $\arg(z)\equiv\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$.

## 47.كيف نعين مجموعة النقط $M\left(z\right)$ بحيث $\arg\left(z\right)\equiv\theta\left[2\pi\right]$ ؟

طريقة:

- مجموعة النقط $M\left(z\right)$ بحيث $\arg\left(z\right)\equiv\theta\left[2\pi\right]$ هي نصف المستقيم $\left(OM\right)$ باستثناء المبدأ $O$ حيث $A$ نقطة من المستوي المركب بحيث $\left(\vec{u}\ ;\overrightarrow{OA}\right)\equiv\alpha\left[2\pi\right]$.

**مثال :** عين مجموعة النقط $M\left(z\right)$ في المستوي المركب التي تحقق :

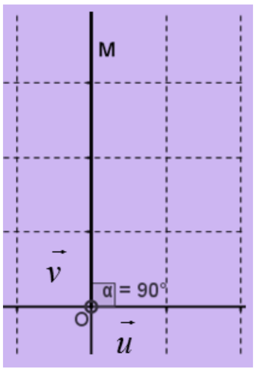
1) $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ، 2) $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ .

**الحل :**

1) $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ معناه $\left(\vec{u}\ ;\overrightarrow{OM}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ أي مجموعة

النقط $M\left(z\right)$ هي نصف مستقيم أي الجزء من محور التراتيب

الذي تكون فيه تراتيب نقطه موجبة تماما. ( $M$ تختلف عن $O$ ).

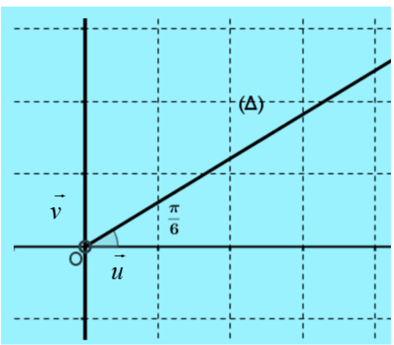



2) $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ معناه $\left(\vec{u}\ ;\overrightarrow{OM}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ أي مجموعة النقط $M\left(z\right)$ هي

نصف المستقيم $\left(\Delta\right)$ الذي يشكل زاوية مع

محور الفواصل قيسها $\frac{\pi}{6}$ باستثناء المبدأ $O$.

( $M$ تختلف عن المبدأ $O$ ).



## 48.كيف نعين مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $z = z_{\Omega} + re^{i\theta}$ مع $r \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ و $\theta \in \mathbb{R}$ ؟

طريقة:

- إذا كان $r$ ثابت و $\theta$ تمسح $\mathbb{R}$ فإن مجموعة النقط $M(z)$ هي دائرة لاحقة مركزها $z_{\Omega}$ ونصف قطرها $r$ .
- إذا كان $r$ متغيرو $\theta$ ثابت فإن مجموعة النقط $M(z)$ هي نصف مستقيم مبدؤه $\Omega$ و $e^{i\theta}$ لاحقة شعاع توجيهه .

**مثال :**

أوجد مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث :

(1 $z = 1 - i + 2e^{i\theta}$ ، (2 $z = 1 - i + re^{i\frac{\pi}{6}}$

**الحل :**

**الطريقة01 :** هندسيا

(1 $z = 1 - i + 2e^{i\theta}$. و $\theta$ تمسح $\mathbb{R}$ معناه $z - (1-i) = 2e^{i\theta}$ تكافئ $|z - (1-i)| = 2$ من الشكل $|z - z_A| = 2$ وبالتالي مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي هي دائرة لاحقة مركزها هي $z_A = 1 - i$ ونصف قطرها $r = 2$ و معادلتها $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ .

**الطريقة02 :** تحليليا

نضع $z = x + iy$ ومنه $x + iy = 1 - i + 2e^{i\theta}$ أي

$$(x-1) + (y+1)i = 2\cos\theta + 2i\sin\theta$$

ومنه $\begin{cases} x - 1 = 2\cos\theta \\ y + 1 = 2\sin\theta \end{cases}$ ومنه $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 4$ وأخيرا

$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ وهي معادلة دائرة لاحقة مركزها $z_{\Omega} = 1 - i$ وطول نصف قطرها 2 .

(2 $z = 1 - i + re^{i\frac{\pi}{6}}$ بما أن $r$ متغيرو $\theta$ ثابت فإن مجموعة النقط $M(z)$ هي نصف مستقيم مبدؤه $\Omega(1;-1)$ . لدينا $e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ،لاحقة شعاع توجيهه هي $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ أي ميله $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

لأن : نضع $z = x + iy$ ومنه $x + iy = 1 - i + re^{i\frac{\pi}{6}}$ أي

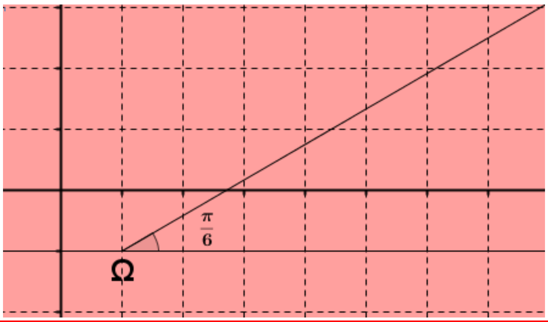
$$(x-1) + (y+1)i = r\cos\theta + ri\sin\theta$$

ومنه $r>0$ أي $\begin{cases} x-1=r\cos\dfrac{\pi}{6} \\ y+1=r\sin\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$ $r>0$ ومنه $\begin{cases} x-1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r \\ y+1=\dfrac{1}{2}r \end{cases}$

أي $\begin{cases} x>1 \text{ و } y>-1 \\ x-1=\sqrt{3}(y+1) \end{cases}$

ونحصل على معادلة نصف المستقيم

هي $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ( ميله $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ )




## 49.كيف نعين مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $\arg(z-z_A)\equiv\theta[2\pi]$ ؟

طريقة:

- مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $\arg(z-z_A)\equiv\theta[2\pi]$ هي نصف مستقيم مفتوح $(AM)$ باستثناء $A$ حيث $A$ نقطة من المستوى المركب و $(\vec{u};\overrightarrow{AM})\equiv\alpha[2\pi]$ .

**مثال :**

عين مجموعة النقط $M(z)$ في المستوى المركب التي تحقق: $\arg(z-1+2i)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ .

**الحل :**

$\arg(z-1+2i)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ معناه $\arg(z-(1-2i))\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ إذا كانت $z_A=1-2i$ فإن

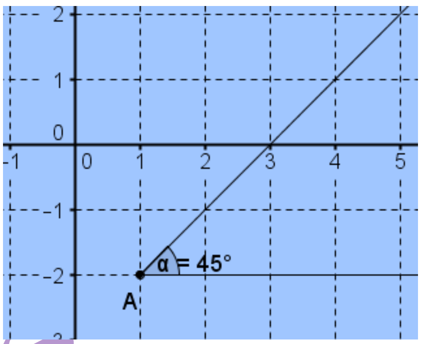
$\arg(z-(1-2i))\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ معناه $(\vec{u};\overrightarrow{AM})\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي نصف

المستقيم المفتوح $(AM)$ باستثناء $A$

حيث $A(1;-2)$ نقطة من المستوى المركب

و $(\vec{u};\overrightarrow{AM})\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$




## 50.كيف ننشئ نقط إحداثياتها أعدادا صماء ؟

طريقة:

- نجد $r$ طويلة لاحقة هذه النقطة .
- هذه النقطة تنتمي الى الدائرة التي مركزها $O$ وطول نصف قطرها $r$ .
- نجد مستقيم يشمل فاصلة أو ترتيبة هذه النقطة .

- تكون هذه النقطة هي نقطة تقاطع الدائرة مع المستقيم .

**مثال 01 :**

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$ ولتكن النقط : $C\,,B\,,A$

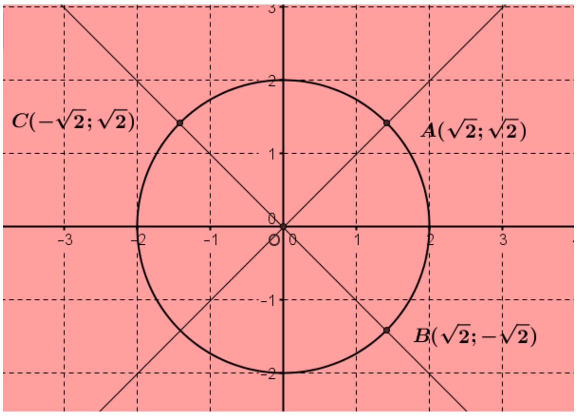
التي لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ ، $z_B=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ ، $z_C=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

علّم بدون أي حساب وبدون قيم تقريبية وباستعمال الطويلة فقط.

**الحل :**

لدينا $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2$ إذن النقط $C\,,B\,,A$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $O$ وطول نصف قطرها 2 .

- لدينا $z_A=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ الجزء الحقيقي يساوي الجزء التخيلي أي $\operatorname{Re}(z_A)=\operatorname{Im}(z_A)=\sqrt{2}$ إذن النقطة $A$ تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته $y=x$ وتقع $A$ في الربع الأول لأن $\operatorname{Re}(z_A)>0\,,\operatorname{Im}(z_A)>0$
- لدينا $z_B=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ الجزء الحقيقي معاكس الجزء التخيلي أي $\operatorname{Re}(z_B)=-\operatorname{Im}(z_B)$ إذن النقطة $B$ تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته $y=-x$ وتقع $B$ في الربع الرابع لأن $\operatorname{Re}(z_B)>0\,,\operatorname{Im}(z_B)<0$
- لدينا $z_C=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ الجزء الحقيقي معاكس الجزء التخيلي أي $\operatorname{Re}(z_C)=-\operatorname{Im}(z_C)$ إذن النقطة $C$ تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته $y=-x$ وتقع $C$ في الربع الثاني لأن $\operatorname{Re}(z_C)<0\,,\operatorname{Im}(z_C)>0$




**مثال 02 :**

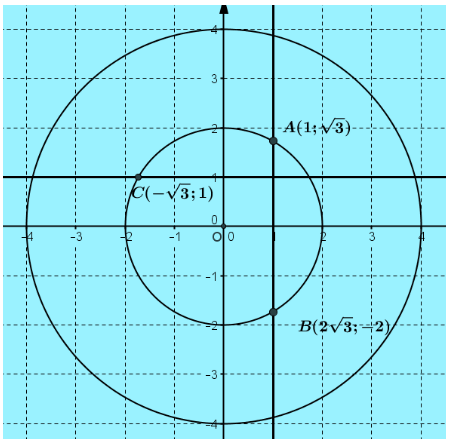
في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$ ولتكن النقط : $C\,,B\,,A$

التي لواحقها على الترتيب: $z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=2\sqrt{3}-2i$ ، $z_C=-\sqrt{3}+i$

علّم بدون أي حساب وبدون قيم تقريبية وباستعمال الطويلة فقط.

**الحل :**

- لدينا $z_A = 1+i\sqrt{3}$ و $|z_A| = 2$ إذن النقطة $A$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $O$ وطول نصف قطرها $2$ وفاصلتها تساوي 1 إذن فهي نقطة تقاطع هذه الدائرة مع المستقيم العمودي الذي معادلته $x=1$ ، وتقع $A$ في الربع الأول لأن $\text{Re}(z_A)>0 , \text{Im}(z_A)>0$
- لدينا $z_B = 2\sqrt{3}-2i$ و $|z_B| = \sqrt{12+4} = 4$ إذن النقطة $B$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $O$ وطول نصف قطرها $4$ وترتيبتها تساوي $-2$ إذن فهي نقطة تقاطع هذه الدائرة مع المستقيم الأفقي الذي معادلته $y=-2$ ، وتقع $B$ في الربع الرابع لأن $\text{Re}(z_B)>0 , \text{Im}(z_B)<0$
- لدينا $z_C = -\sqrt{3}+i$ و $|z_C| = 2$ إذن النقطة $C$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $O$ وطول نصف قطرها $2$ وترتيبتها تساوي 1 إذن فهي نقطة تقاطع هذه الدائرة مع المستقيم الأفقي الذي معادلته $y=1$ ، وتقع $C$ في الربع الثاني لأن $\text{Re}(z_C)<0 , \text{Im}(z_C)>0$




**51. كيف نعين لاحقة النقطة أو النقط الصامدة ( المضاعفة) بتطبيق $f$ ؟**

طريقة:

- نحل المعادلة $f(z)=z$ أي $z'=z$

حل أو حلول هذه المعادلة هي لواحق النقط الصامدة ( المضاعفة)

**مثال :**

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر التطبيق $f$ من المستوي في نفسه والذي يرفق بكل نقطة $M$ التي لاحقتها $z$ النقطة $M'$ التي لاحقتها $z'$ بحيث من أجل كل $z \neq 1$ ، $z' = \dfrac{2iz+3}{z-1}$ . عين النقط الصامدة بالتحويل $f$ .

**الحل :**

نحل المعادلة $f(z)=z$ . $z = \dfrac{-2z-1}{z-1}$ تكافئ $z^2-z+2z+1=0$ أي $z^2+z+1=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز فنجد $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ; $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ . توجد نقطتان صامدتان $A$ و $B$ لاحقتاهما $z_A=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $z_B=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

**52. كيف نعين الكتابة المركبة للإنسحاب الذي لاحقة شعاعه $z_{\vec{u}}$ وكيف نجد صورة نقطة ودائرة بهذا الإنسحاب ؟**

طريقة:

- العبارة المركبة $z'-z=z_{\vec{u}}$ .
- نعوض $z$ بـ $z_A$ لنجد صورة $A$ .
- صورة دائرة $(C)$ التي لاحقة مركزها $z_H$ وطول نصف قطرها $r$ بالإنسحاب الذي لاحقة شعاعه $z_{\vec{u}}$ هي دائرة $(C')$ لاحقة مركزها $z_{H'}$ وطول نصف قطرها $r'=r$ حيث $H'$ هي صورة $H$ بهذا الإنسحاب.

**مثال :**

نعتبر الإنسحاب $T$ الذي لاحقة شعاعه $z_{\vec{u}}=2-3i$ في المستوي المركب .

1) أعط الكتابة المركبة لهذا الإنسحاب.
2) أوجد اللاحقة $z_{A'}$ صورة النقطة $A(-3;2)$ بهذا الإنسحاب.
3) أوجد صورة الدائرة $(C)$ التي لاحقة مركزها $z_H=2-i$ طول نصف قطرها $r=3$ بهذا الإنسحاب.

**الحل :**

1) الكتابة المركبة لهذا الإنسحاب: $z'-z=z_{\vec{u}}$ أي $z'=z+2-3i$
2) حساب $z_{A'}$ : $z_{A'}=z_A+2-3i$ ومنه $z_{A'}=-3+2i+2-3i=-1-i$ .
3) صورة الدائرة $(C)$ هي دائرة $(C')$.
لاحقة مركزها $z_{H'}=z_H+2-3i=2-i+2-3i=4-4i$ وطول نصف قطرها $r'=3$ .

معادلة $(C')$ هي $(x-4)^2+(y+4)^2=9$.

**53. كيف نعين الكتابة المركبة للتحاكي الذي نسبته $k$ ولاحقة مركزه $z_\Omega$ وكيف نجد صورة نقطة ودائرة بهذا التحاكي ؟**

طريقة:

- العبارة المركبة $z'-z_\Omega=k(z-z_\Omega)$ .
- نعوض $z$ بـ $z_A$ لنجد صورة $A$ .

- صورة دائرة $(C)$ التي لاحقة مركزها $z_H$ وطول نصف قطرها $r$ بالتحاكي الذي نسبته $k$ هي
دائرة $(C')$ لاحقة مركزها $z_{H'}$ وطول نصف قطرها $r'=|k|\times r$ حيث $H'$ هي صورة $H$ بهذا التحاكي.

**مثال :**

نعتبر التحاكي $h$ في المستوي المركب الذي نسبته $-2$ ولاحقة مركزه $z_\Omega=2-3i$ .

1) أعط الكتابة المركبة لهذا التحاكي.
2) أوجد اللاحقة $z_{A'}$ صورة النقطة $A(1;-2)$ بهذا التحاكي.
3) أوجد صورة الدائرة $(C)$ التي لاحقة مركزها $z_H=2-i$ وطول نصف قطرها $r=3$ بهذا التحاكي.

**الحل :**

1) الكتابة المركبة لهذا التحاكي: $z'-z_\Omega=k(z-z_\Omega)$ ومنه $z'-2+3i=-2(z-2+3i)$ أي $z'=-2z+6-9i$.
2) حساب $z_{A'}$ : $z_{A'}=-2z_A+6-9i$ ومنه $z_{A'}=-2(1-2i)+6-9i=4-5i$
3) صورة دائرة $(C)$ هي دائرة $(C')$ لاحقة مركزها $z_{H'}=-2z_H+6-9i=-4+2i+6-9i=2-7i$ وطول نصف قطرها $r'=|-2|\times 3=6$ .
معادلة $(C')$ هي $(x-2)^2+(y+7)^2=36$ .

**54. كيف نعين الكتابة المركبة للدوران الذي زاويته $\theta$ ولاحقة مركزه $z_\Omega$ وكيف نجد صورة نقطة ودائرة بهذا الدوران ؟**

طريقة:

- العبارة المركبة $z'-z_\Omega=e^{i\theta}(z-z_\Omega)$ .
- نعوض $z$ بـ $z_A$ لنجد صورة $A$ .
- صورة دائرة $(C)$ التي لاحقة مركزها $z_H$ وطول نصف قطرها $r$ بالتحاكي الذي نسبته $k$ هي
دائرة $(C')$ لاحقة مركزها $z_{H'}$ ونصف قطرها $r'=r$ حيث $H'$ هي صورة $H$ بهذا الدوران.

**مثال :**

نعتبر الدوران $r$ في المستوي المركب الذي زاويته $\frac{\pi}{2}$ ولاحقة مركزه $z_\Omega=2-3i$ .

1) أعط الكتابة المركبة لهذا التحاكي.

2) أوجد اللاحقة $z_{H'}$ صورة النقطة $H\left(1;-2\right)$ بهذا الدوران.

3) أوجد صورة الدائرة $\left(C\right)$ التي لاحقة مركزها $z_H$ وطول نصف قطرها $r=2$ بهذا الدوران.

**الحل :**

1) الكتابة المركبة لهذا الدوران $z'-z_{\Omega}=e^{i\theta}\left(z-z_{\Omega}\right)$ ومنه

$z'-2+3i=e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z-2+3i\right)$ أي $z'-2+3i=i\left(z-2+3i\right)$ ومنه

$z'=iz-1-5i$

2) حساب $z_{H'}$ : $z_{H'}=iz_H-1-5i$ ومنه $z_{H'}=i\left(1-2i\right)-1-5i=1-4i$

3) صورة دائرة $\left(C\right)$ هي دائرة $\left(C'\right)$ لاحقة مركزها $z_{H'}=1-4i$ وطول نصف قطرها $r'=2$ .

معادلة $\left(C'\right)$ هي $(x-1)^2+(y+4)^2=4$ .

**55. كيف نعين الكتابة المركبة للتشابه المباشر الذي نسبته $k$ و زاويته $\theta$ ولاحقة مركزه $z_{\Omega}$ وكيف نجد صورة نقطة ودائرة بهذا التشابه ؟**

طريقة:

- العبارة المركبة $z'-z_{\Omega}=ke^{i\theta}\left(z-z_{\Omega}\right)$ .
- نعوض $z$ بـ $z_A$ لنجد صورة $A$ .
- صورة دائرة $\left(C\right)$ التي لاحقة مركزها $z_H$ ونصف قطرها $r$ بالتشابه المباشر الذي نسبته $k$ هي دائرة $\left(C'\right)$ لاحقة مركزها $z_{H'}$ ونصف قطرها $r'=\left|k\right|\times r$ حيث $H'$ هي صورة $H$ بهذا التشابه.

**مثال :**

نعتبر التشابه المباشر $S$ في المستوي المركب الذي نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ولاحقة مركزه $z_{\Omega}=2-3i$ .

1) أعط الكتابة المركبة لهذا التشابه.

2) أوجد اللاحقة $z_{H'}$ صورة النقطة $H\left(1;-2\right)$ بهذا التشابه.

3) أوجد صورة الدائرة $\left(C\right)$ التي لاحقة مركزها $z_H$ وطول نصف قطرها $r=2$ بهذا التشابه.

**الحل :**

1) الكتابة المركبة لهذا التشابه $z'-z_{\Omega}=ke^{i\theta}\left(z-z_{\Omega}\right)$ ومنه

$z'-2+3i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z-2+3i\right)$ أي $z'-2+3i=\left(1+i\right)\left(z-2+3i\right)$ ومنه

$z'=\left(1+i\right)z-3-2i$

2) حساب $z_{H'}$ : $z_{H'}=(1+i)z_H-3-2i$ ومنه

$z_{H'}=(1+i)(1-2i)-3-2i=-3i$

3) صورة دائرة $(C)$ هي دائرة $(C')$ لاحقة مركزها $z_{H'}=-3i$ وطول نصف قطرها $r'=2\sqrt{2}$ .

**56. كيف نتعرف على طبيعة تحويل نقطي للمستوي في نفسه والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ انطلاقا من كتابته المركبة $z'=az+b$ ؟**

طريقة:

- إذا كان $a=1$ يكون التحويل انسحاب لاحقة شعاعه $z_{\vec{u}}=b$ .
- إذا كان $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ يكون التحويل تحاكي نسبته $a$ ولاحقة مركزه $z_\Omega=\dfrac{b}{1-a}$ .
- إذا كان $a\in\mathbb{C}^*$ و $|a|=1$ يكون التحويل دوران زاويته $\arg(a)$ ولاحقة مركزه $z_\Omega=\dfrac{b}{1-a}$ .
- إذا كان $a\in\mathbb{C}^*$ و $|a|\neq 1$ يكون التحويل تشابه نسبته $|a|$ و زاويته $\arg(a)$ ولاحقة مركزه $z_\Omega=\dfrac{b}{1-a}$

**مثال :**

عين طبيعة كل تحويل نقطي من المستوي في نفسه والذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ من التحويلات التالية وحدد العناصر المميزة لكل منها:

1) $z'=z+4-2i$ ، 2) $z'=2z+1-3i$ ، 3) $z'=iz+4+i$ ، 4) $z'=(1-i)z+2+i$

**الحل :**

**1)** $z'=z+4-2i$ من الشكل $z'=az+b$ حيث $a=1$ إذن هو انسحاب لاحقة شعاعه $z_{\vec{u}}=4-2i$ .

**2)** $z'=2z+1-3i$ من الشكل $z'=az+b$ حيث $a=2$ $\left(a\in\mathbb{R}^*-\{1\}\right)$ إذن هو تحاكي نسبته $2$ ولاحقة مركزه $z_\Omega=\dfrac{1-3i}{1-2}=-1+3i$ .

**3)** $z'=iz+4+i$ من الشكل $z'=az+b$ حيث $a=i$ ( $a\in\mathbb{C}^*$ و $|a|=1$ ) إذن هو دوران زاويته $\arg(i)$ أي $\dfrac{\pi}{2}$ ولاحقة مركزه $z_\Omega=\dfrac{4+i}{1-i}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i$ .

4) $z'=(1-i)z+2+i$ من الشكل $z'=az+b$ حيث $a=1-i$ و $|a|=\sqrt{2}$ ( $a\in\mathbb{C}^*$ و $|a|\neq 1$ ) إذن هو تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\arg(1-i)$ أي $-\frac{\pi}{4}$ ولاحقة مركزه $z_\Omega=\frac{2+i}{1-1+i}=\frac{2+i}{i}=1-2i$ .

# الأعداد المركبة

## ملخص للدرس وأمثلة محلولة



## رقم الهاتف لأستاذ الرياضيات

ترك أستاذ الرياضيات رسالة صوتية على هاتفه لمن يتصل به .. ( عفواً .. الرقم الذي تتصل به تخيلي ، اضرب في $(i)$ واتصل مجدداً ).

# الدرس مع تطبيقات محلولة

## تعريف :

نسمي مجموعة الأعداد المركبة ونرمزلها بـ $\mathbb{C}$ المجموعة التي تحوي $\mathbb{R}$ وتحقق ما يلي :

1) يوجد في $\mathbb{C}$ عنصر غير حقيقي واحد $i$ بحيث $i^2=-1$.
2) كل عنصر من $\mathbb{C}$ يكتب على شكل وحيد $z=x+iy$ حيث $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$ .
3) المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعملتي الجمع والضرب تمددان نفس العمليتين في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ولهما نفس الخواص.

## تعاريف ومصطلحات :

1. تسمى الكتابة $z=x+iy$ حيث $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$ الشكل الجبري للعدد المركب $z$.
2. في الكتابة $z=x+iy$ :

- يسمى $x$ الجزء الحقيقي للعدد المركب $z$ ونرمزله $Re(z)$ .
- يسمى $y$ الجزء التخيلي للعدد المركب $z$ ونرمزله $Im(z)$.
- إذا كان $y=0$ يكون $z=x$ وبالتالي يكون $z$ حقيقيا.
- إذا كان $x=0$ يكون $z=iy$ نسمي $z$ عندئذ تخيليا صرف.

تخيلي صرف
!!!!!! أه أه أه
أه أنا
تخيلت طاحلي
الصرف

**مثال :**

1) $z_1=2-3i$ عدد مركب حيث $Im(z_1)=-3$ , $Re(z_1)=2$.
2) $z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ عدد مركب حيث $Im(z_2)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ , $Re(z_2)=\frac{1}{2}$.
3) $z=3i$ تخيلي صرف $Re(z)=0$
4) $z=\sqrt{3}$ حقيقي $Im(z)=0$

**تمرين تطبيقي:**

$z_1$ و $z_2$ عددان مركبان بحيث : $z_1=1+2i$ , $z_2=3-i$. أكتب على الشكل الجبري كلا من:

1) $z_1-5z_2$ ، 2) $(z_1)^2+(z_2)^2$ ، 3) $z_1.z_2$ ، 4) $(z_1)^3$

**الحل :**

1) $z_1-5z_2=1+2i-5(3-i)=1+2i-15+5i=-14+7i$.
2) $(z_1)^2+(z_2)^2=(1+2i)^2+(3-i)^2=1+4i+4i^2+9-6i+i^2$
$=1+4i-4+9-6i-1=5-2i$
3) $z_1.z_2=(1+2i)(3-i)=3-i+6i-2i^2=3+5i+2=5+5i$

4)

$$(z_1)^3=(1+2i)^3=(1+2i)^2(1+2i)=(1+4i+4i^2)(1+2i)$$
$$=(1+4i-4)(1+2i)=(-3+4i)(1+2i)=-3-6i+4i-8=-11-2i$$

## تساوي عددين مركبين :

ليكن $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ يكون $z=z'$ إذا وفقط إذا كان $(x=x')$ و $(y=y')$.

**تمرين تطبيقي01:**

$z$ و $z'$ عددان مركبان بحيث : $z'=2x-6+11i$ ، $z=8+(3y-1)i$ . عين العددين الحقيقيين $x$ و $y$ حتى يكون $z=z'$.

**الحل :**

$z=z'$ **تكافئ** $8+(3y-1)i=2x-6+11i$ تكافئ $\begin{cases}8=2x-6\\3y-1=11\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}x=7\\y=4\end{cases}$

**تمرين تطبيقي02:**

عين العددين الحقيقيين $x$ و $y$ حتى يكون: $2x+3iy-1+i(x-yi+2)=3i-1$

**الحل :**

- $2x+3iy-1+i(x-yi+2)=3i-1$

ننشر الطرف الأول نجد $2x+3iy-1+ix+y+2i=-1+3i$

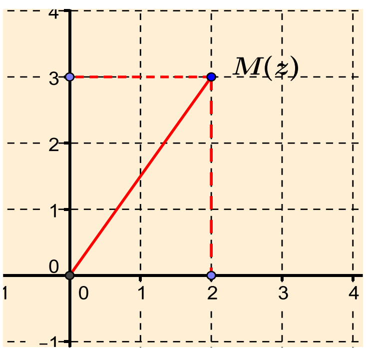
ونكتب الطرف الأول على الشكل الجبري نحصل على : $(2x+y-1)+i(x+3y+2)=-1+3i$ ومنه

$\begin{cases}(2x+y-1)=-1\\(x+3y+2)=3\end{cases}$ فنجد $x=\frac{-1}{5}$ و $y=\frac{2}{5}$

## التمثيل الهندسي لعدد مركب

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

- بكل نقطة $M(x,y)$ نرفق العدد المركب $z=x+iy$. نقول أن $z=x+iy$ هو لاحقة $M$ ونقول أن $M(x,y)$ هي صورة العدد المركب $z=x+iy$. ونكتب $z_M=x+iy$
- بكل شعاع $\vec{V}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ نرفق العدد المركب $z=x+iy$. نقول أن $z=x+iy$ هو لاحقة الشعاع $\vec{V}$ ونقول أن $\vec{V}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ هي صورة العدد المركب $z=x+iy$ ونكتب $z_{\vec{V}}=x+iy$
- لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $z_B-z_A$



$M(2\,,3) \qquad z=2+3i$

**خاصية :** لاحقة منتصف قطعة مستقيمة $[AB]$

لاحقة النقطة $I$ منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هي $z_I$ حيث $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$

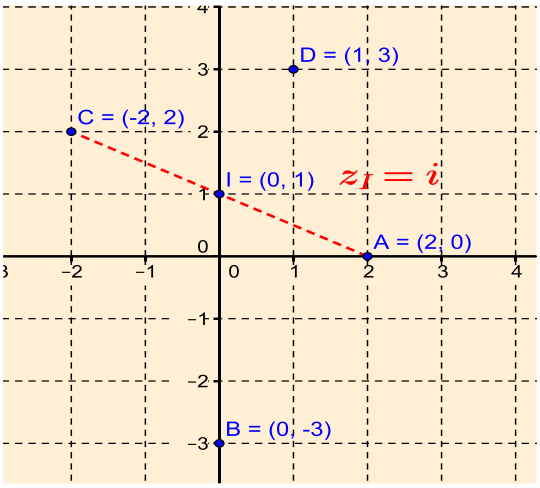
**تمرين تطبيقي01:**

علّم في المستوي المركب النقط $D\,,C\,,B\,,A$

التي لواحقها على الترتيب :

$z_D=1+3i \;\;,\; z_C=-2+2i \;,\; z_B=-3i \;,\; z_A=2$

ثم أوجد لاحقة النقطة $I$ منتصف $[AC]$




**الحل :**

$$z_I=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{2-2+2i}{2}=i$$

**تمرين تطبيقي02:**

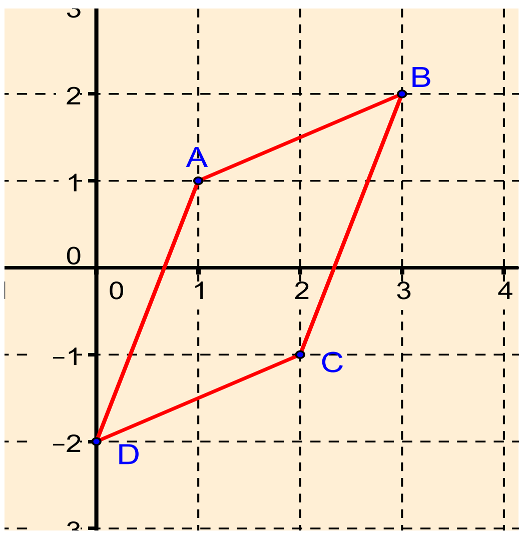
1) علّم النقط $A\,,B\,,C\,,D$ التي لواحقها على الترتيب :

$z_D=-2i\,,\; z_C=2-i\,,\, z_B=3+2i\;,\, z_A=1+i$

2) تحقق أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

**الحل :**

1) تعليم النقط


2) $ABCD$ متوازي الأضلاع معناه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ أي $z_B-z_A=z_C-z_D$

$z_B-z_A=(3+2i)-(1+i)=2+i$

$$z_C - z_D = (2-i) - (-2i) = 2+i$$

ومنه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ وبالتالي الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

## مرافق عدد مركب:

مرافق العدد المركب $z$ حيث $z=x+iy$ هو العدد الذي نرمزله بـ $\bar{z}$ حيث $\bar{z}=x-iy$.

مرافق العدد المركب $2+3i$ هو العدد المركب $2-3i$.

مرافق العدد المركب $-7i$ هو العدد المركب $7i$.

مرافق العدد المركب $5$ هو العدد المركب $5$.

**ملاحظة :**

إذا كانت $M$ نقطة لاحقتها $z$ فإن النقطة $M'$ ذات اللاحقة $\bar{z}$ هي نظيرة $M$ بالنسبة إلى محور الفواصل.

**خواص :** من أجل كل عددين مركبين $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ لدينا :

(1 $\bar{\bar{z}}=z$ ، (2 $z.\bar{z}=x^2+y^2$ ، (3 $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$ ، (4 $\overline{z-z'}=\bar{z}-\bar{z}'$

(5 $\overline{z.z'}=\bar{z}.\bar{z}'$ ، (6 $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\bar{z}'}$ حيث $z'\neq 0$ ، (7 $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ حيث $z'\neq 0$

(8 $Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$ ، $Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$ ، (9 $\overline{(z^n)}=(\bar{z})^n$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

(10 $z$ حقيقي يكافئ $z=\bar{z}$ ، (11 $z$ تخيلي صرف يكافئ $z=-\bar{z}$ .

**ملاحظة هامة :** تُفيدنا الخاصية $z.\bar{z}=x^2+y^2$ كثيرا عند ضرب عددين مترافقين مثل

$(3+4i)(3-4i)=9+16=25$ ، $(1-i)(1+i)=1+1=2$ ،

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)=3+1=4$$

**تمرين تطبيقي01:** ليكن $z=2+3i$ و $z'=-1-i$ أكتب على الشكل الجبري ما يلي :

$\bar{z}$ , $\bar{z}'$ , $\overline{z+z'}$ , $\overline{z.z'}$ , $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$

**الحل :**

$$\bar{z}=\overline{2+3i}=2-3i \quad ; \quad \bar{z}'=\overline{-1-i}=-1+i$$

$$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'=2-3i-1+i=1-2i$$

$$\overline{z.z'}=\bar{z}.\bar{z}'=(2-3i)(-1+i)=1+5i$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}=\frac{2-3i}{-1+i}=\frac{(2-3i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{-5}{2}+\frac{1}{2}i$$

راهم قاوين بزاف بصح أنا Z
اللي نعرفهم هما
*Zelabia* , *Zitoun* ,
*Zoom* ,*Zero*

**تمرين تطبيقي02:** أكتب على الشكل الجبري كلا من العددين المركبين $z=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ و $z'=\frac{1-i}{2+i}$

**الحل :** نضرب البسط والمقام في مرافق المقام

$$z=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}=\frac{3-2i\sqrt{3}+i^2}{3+1}=\frac{3-2i\sqrt{3}-1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z'=\frac{1-i}{2+i}=\frac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i-2i+i^2}{4+1}=\frac{1-3i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$$

## المعادلات من الدرجة الأولى

كل معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهول $z$ تؤول إلى الشكل $(az=b)$ ومنه $(z=\frac{b}{a})$ أو $(a\bar{z}=b)$ ومنه $(\bar{z}=\frac{b}{a})$ حيث $a\neq 0$ ( $a$ و $b$) حقيقيان أو مركبان.

**تمرين تطبيقي:** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول $z$ التالية :

$$(2-i)z=-1+3iz-2i.....(1)\qquad (1-i)z=-1+i\bar{z}-4i.....(2)$$

$$z^2+4\bar{z}-5=0.....(3)$$

**الحل :** **حل المعادلة** $(2-i)z=-1+3iz-2i$ :

$(2-i)z=-1+3iz-2i$ تكافئ $(2-i)z-3iz=-1-2i$ تكافئ $(2-i-3i)z=-1-2i$

ومنه $z=\frac{-1-2i}{2-4i}=\frac{(-1-2i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)}=\frac{6-8i}{4+16}=\frac{3}{10}-\frac{2}{5}i$.

**حل المعادلة** $(1-i)z=-1+i\bar{z}-4i$ : نضع $z=x+iy$ ومنه $\bar{z}=x-iy$

المعادلة $(1-i)z=-1+i\bar{z}-4i$ تكافئ $(1-i)(x+iy)=-1+i(x-iy)-4i$ تكافئ

$x+iy-ix-i^2y=-1+ix-i^2y-4i$ أي $x+iy-ix+y=-1+ix+y-4i$

تكافئ $(x+y)+i(y-x)=(-1+y)+i(x-4)$ تكافئ $\begin{cases}x+y=-1+y\\ y-x=x-4\end{cases}$ ومنه

$x=-1\ ,\ y=-6$

$x=-1$ و $y=-6$ وأخيرا مجموعة حلول المعادلة $(1-i)z=-1+i\bar{z}-4i$ هي $S=\{-1-6i\}$

**حل المعادلة** $z^2+4\bar{z}-5=0$ : نضع $z=x+iy$ ومنه $\bar{z}=x-iy$

المعادلة $z^2+4\bar{z}-5=0$ تكافئ $(x+iy)^2+4(x-iy)-5=0$ تكافئ

$x^2-y^2+4x-5+i(2xy-4y)=0$ أي $\begin{cases} x^2-y^2+4x-5=0 ......(1) \\ y(x-2)=0 ..................(2) \end{cases}$

المعادلة (2) تكافئ $y=0$ أو $x=2$.

- حالة $y=0$ المعادلة (1) تكافئ $x^2+4x-5=0$ تكافئ $x=1$ أو $x=-5$ وبالتالي $z=1+0i=1$ أو $z=-5+0i=-5$.
- حالة $x=2$ المعادلة (1) تكافئ $4-y^2+8-5=0$ أي $y^2=7$ ومنه $y=\sqrt{7}$ أو $y=-\sqrt{7}$ وبالتالي $z=2+i\sqrt{7}$ أو $z=2-i\sqrt{7}$.

وأخيرا مجموعة حلول المعادلة $z^2+4\bar{z}-5=0$ هي $S=\{1,-5\ ,2+i\sqrt{7}\ ,2-i\sqrt{7}\}$

## لاحقة مرجح :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\ ,\vec{u}\ ,\vec{v})$ .

$A$ و $B$ نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب هما $z_A$ و $z_B$ .

$\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان حيث $\alpha+\beta\neq 0$. إذا كانت النقطة $G$ هي مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإن لاحقة $G$ هي $z_G$ حيث $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$

**ملاحظة:** تستعمل نفس الطريقة في حساب لاحقة مرجح عدة نقط .

**تمرين تطبيقي:** في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\ ,\vec{u}\ ,\vec{v})$ نعتبر النقط $A(2\ ,3)$ ، $B(-1,2)$ ، $C(1,4)$.

1) أوجد $z_A$ ، $z_B$ ، $z_C$ لواحق النقط $A\ ,B\ ,C$ على الترتيب.

2) أوجد $z_G$ لاحقة النقطة $G$ مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-1),(C,-2)\}$

**الحل :**

1) $z_A=2+3i$ ، $z_B=-1+2i$ ، $z_C=1+4i$.

2) لدينا مجموع المعاملات غير معدوم: $2-1-2\neq 0$ إذن $G$ موجود.

$z_G=\dfrac{2z_A-z_B-2z_C}{2-1-2}=\dfrac{2(2+3i)-(-1+2i)-2(1+4i)}{-1}=-3+4i$.

## طويلة عدد مركب :

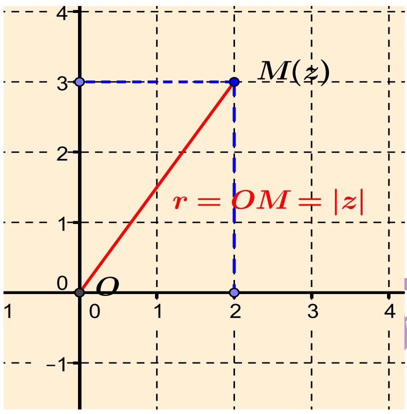
$z$ عدد مركب حيث: $z=x+iy$ ( $x$ و $y$ عددان حقيقيان ). نسمي طويلة العدد المركب $z$ العدد الحقيقي الموجب الذي نرمزله $|z|$ حيث $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z.\bar{z}}$

$|1+i|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ ، $|3-i|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$ ، $|-2i|=2$ ، $|-3|=3$

$$\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$$

## التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ . لتكن $M(x,y)$ صورة العدد المركب $z=x+iy$ . لدينا $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ ولدينا $OM=\sqrt{x^2+y^2}$ إذن $|z|=OM$




$$r=|z|=OM=\sqrt{x^2+y^2}$$

## خواص طويلة عدد مركب.

1) $|z|=0$ تكافئ $z=0$ ، 2) $|-z|=|z|$ ، 3) $|\bar{z}|=|z|$ ، 4) $|z\bar{z}|=|z|^2$

5) $|zz'|=|z||z'|$ ، 6) $\left|\frac{1}{z'}\right|=\frac{1}{|z'|}$ حيث $z'\neq 0$ ، 7) $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ حيث $z'\neq 0$

8) $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ ، 9) $|z^n|=|z|^n$

ركبلي الخلعة هذا Zl
نحسبZero

**ملاحظة :**

$A$ و $B$ نقطتان لاحقتاهما على الترتيب $z_A$ و $z_B$ :

$$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=|z_B-z_A|$$

**تمرين تطبيقي 01:**

عين طويلة العدد المركب $z$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $z=(2-3i)(3+i)$ ، 2) $z=\frac{3+4i}{2-i}$ ، 3) $z=(1+i)^8$ ، 4) $z=\left(\frac{(2+i)^8}{(4+3i)^4}\right)^3$

**الحل :**

1) $|z|=|(2-3i)(3+i)|=|(2-3i)||(3+i)|=\sqrt{13}.\sqrt{10}=\sqrt{130}$

2) $|z|=\left|\dfrac{3+4i}{2-i}\right|=\dfrac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ ، 3) $|z|=\left|(1+i)^8\right|=|1+i|^8=\left(\sqrt{2}\right)^8=16$

4) $|z|=\left|\left(\dfrac{(2+i)^8}{(4+3i)^4}\right)^3\right|=\left(\dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^8}{(5)^4}\right)^3=\left(\dfrac{625}{625}\right)^3=1$

**تمرين تطبيقي 02:** $A$ ، $B$ ، $C$ ثلاث نقط لواحقها على الترتيب

$z_A=2+i$ ، $z_B=4+i$ ، $z_C=4+3i$

أحسب الأطوال $AB$ ، $AC$ ، $BC$ واستنتج طبيعة المثلث $ABC$.

**الحل :**

$$AB=|z_B-z_A|=|(4+i)-(2+i)|=|2|=2$$

$$AC=|z_C-z_A|=|(4+3i)-(2+i)|=|2+2i|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$BC=|z_C-z_B|=|(4+3i)-(4+i)|=|2i|=2$$

لدينا من جهة $AB=BC$ ومن جهة أخرى $AB^2+BC^2=AC^2$ إذن المثلث $ABC$ قائم في $B$ ومتساوي الساقين.

## دراسة مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي التي تحقق مساواة معطاة:

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

**مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق : $AM=k$ حيث $k\in\mathbb{R}$**

**نميز 3 حالات :**

1) حالة $k<0$ ، مجموعة النقط هي مجموعة خالية.

2) حالة $k=0$ ، مجموعة النقطة هي $\{A\}$

3) حالة $k>0$ ، مجموعة النقط هي دائرة مركزها $A$ وطول نصف قطرها $k$.

**باستعمال الأعداد المركبة :**

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

مجموعة النقط $M(x,y)$ التي لاحقتها $z=x+iy$ بحيث : $AM=k$ مع $k\in\mathbb{R}$.

نكتب $AM=k$ على الشكل $|z-z_A|=k$

**نميز 3 حالات :**

4) حالة $k<0$ ، مجموعة النقط هي مجموعة خالية.

5) حالة $k=0$ ، مجموعة النقطة هي $\{A\}$

6) حالة $k>0$ ، مجموعة النقط هي دائرة لاحقة مركزها $z_A$ وطول نصف قطرها $k$.

**تمرين تطبيقي 01:**

عين ثم مثل مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $|z+2i|=2$ ، 2) $|z+1-2i|=|z-3|$.

**الحل :**

1) $|z+2i|=2$

**الطريقة 01 :** لتكن $H$ النقطة التي لاحقتها $z_H$ حيث $z_H=-2i$.

$|z+2i|=2$ تكافئ $|z-(-2i)|=2$ تكافئ $|z-z_H|=2$ تكافئ $HM=2$ : وهي دائرة مركزها $H$ وطول نصف قطرها 2.

**الطريقة 02 :** $|z+2i|=2$ تكافئ $|x+iy+2i|=2$ تكافئ $|x+(y+2)i|=2$ تكافئ $\sqrt{x^2+(y+2)^2}=2$ وبتربيع الطرفين نحصل على $x^2+(y+2)^2=4$ .

وأخيرا مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ التي تحقق $|z+2i|=2$ هي الدائرة $(C)$ مركزها $H(0,-2)$ وطول نصف قطرها 2.

2) $|z+1-2i|=|z-3|$.

**الطريقة 01:** لتكن $A$ النقطة ذات اللاحقة $z_A=-1+2i$ و $B$ النقطة ذات اللاحقة $z_B=3$

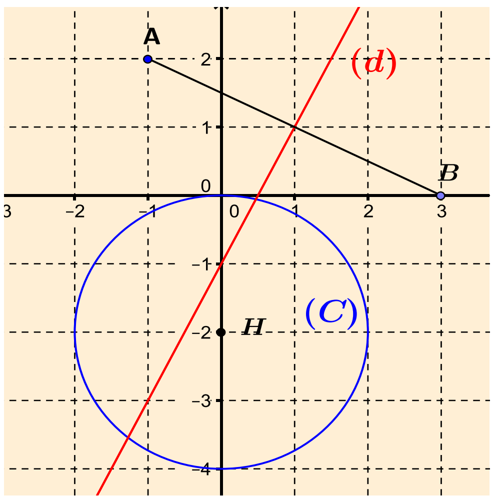
$|z+1-2i|=|z-3|$ تكافئ $|z-(-1+2i)|=|z-3|$ تكافئ $|z-z_A|=|z-z_B|$ تكافئ $AM=BM$.

وأخيرا مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ التي تحقق $|z+1-2i|=|z-3|$ هي محور القطعة المستقيمة $AB$.

**الطريقة 02 :**

$|z+1-2i|=|z-3|$ تكافئ $|x+iy+1-2i|=|x+iy-3|$ تكافئ $|(x+1)+(y-2)i|=|(x-3)+yi|$ تكافئ $\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$ بعد تربيع الطرفين والتبسيط نجد $8x-4y-4=0$ أي $y=2x-1$.

وأخيرا مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ التي تحقق $|z+1-2i|=|z-3|$ هي المستقيم $(d)$ الذي معادلته $y=2x-1$



**تمرين تطبيقي رقم 02:**

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O\,,\vec{u}\,,\vec{v}\right)$ . عين $(E)$ مجموعة النقط $M\left(x\,,y\right)$ من المستوي والتي لاحقتها $z$ بحيث : $z.\bar{z}+4(z+\bar{z})-1=0$

**الحل :**

$z=x+iy$ لاحقة النقطة $M\left(x\,,y\right)$.

$z.\bar{z}+4(z+\bar{z})-1=0$ تكافئ $x^2+y^2+4(2x)-1=0$ تكافئ $x^2+y^2+8x-1=0$ نكتبها على الشكل $(x+4)^2+y^2=17$.

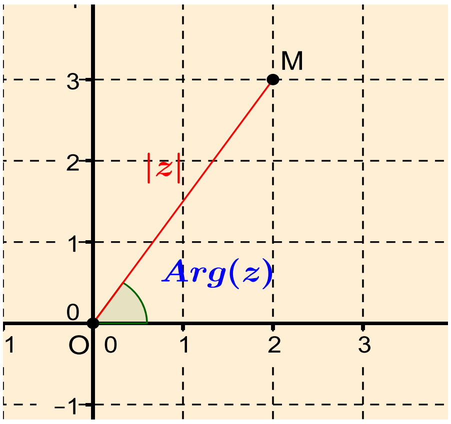
$(E)$ هي دائرة مركزها $\Omega(-4\,,0)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{17}$.

## عمدة عدد مركب غير معدوم :

**تعريف :**

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O\,,\vec{u}\,,\vec{v}\right)$ و ليكن $z$ عدد مركب غير معدوم صورته النقطة $M$. نسمي عمدة للعدد المركب $z$ كل قيس بالراديان للزاوية الموجهة $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$.

إذا كان العدد الحقيقي $\alpha$ هو أحد أقياس $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$ نكتب




$arg(z)=\alpha+2k\pi\ \ ,\ k\in\mathbb{Z}$ .

أو نكتب كذلك $arg(z)\equiv\alpha\ [2\pi]$.

**ملاحظة :**

$\alpha$ ليس وحيدا و العدد المركب المعدوم لا عمدة له.

**تمرين تطبيقي 01**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o;\vec{u}\,,\vec{v}\right)$.

أنشئ النقط $A,B,C,D,E$ صور الأعداد المركبة :

$z_1=2\ ;\ z_2=-3\ ;\ z_3=3i\ ;\ z_4=-1-i\ ;\ z_5=2-2i$ على الترتيب .

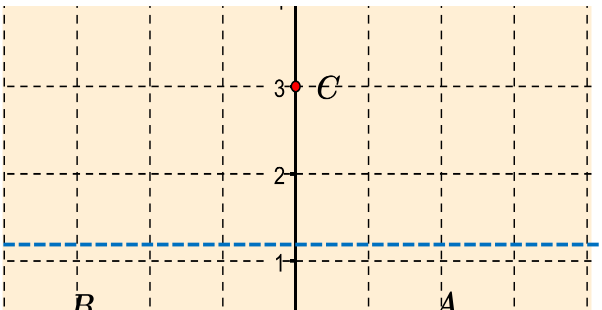
عين بقراءة بيانية الطويلة وعمدة كلا من هذه الأعداد المركبة.

**الحل :**

في المستوي المركب ننشئ النقط $A,B,C,D,E$ صور الأعداد المركبة :

$z_1=2\ ;\ z_2=-3\ ;\ z_3=3i\ ;\ z_4=-1-i\ ;\ z_5=2-2i$ على الترتيب :

$A(2,0)\ ;\ B(-3\,,0)\ ;\ C(0,\,3)\ ;D(-1\,,-1)\ ;E(2\,,-2)$



$OA=2$ و $(\vec{u},\overrightarrow{OA})=0$ إذن طويلة لعدد المركب $z_1=2$ هي $2$ و $0$ عمدة له.

$OB=3$ و $(\vec{u},\overrightarrow{OB})=\pi$ إذن طويلة لعدد المركب $z_2=3$ هي $3$ و $\pi$ عمدة له.

$OC=3$ و $(\vec{u},\overrightarrow{OC})=\frac{\pi}{2}$ إذن طويلة لعدد المركب $z_3=3i$ هي $3$ و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له

$OD=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ و $(\vec{u},\overrightarrow{OD})=\frac{5\pi}{4}$ إذن طويلة لعدد المركب $z_4=-1-i$ هي $\sqrt{2}$ و $\frac{5\pi}{4}$ عمدة له.

$OE=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ و $(\vec{u},\overrightarrow{OE})=\frac{-\pi}{4}$ إذن طويلة لعدد المركب $z_5=2-2i$ هي $2\sqrt{2}$ و $\frac{-\pi}{4}$ عمدة له

**تمرين تطبيقي 02:**

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ ، عين مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ والتي تحقق :

1) $\arg\left(z+3-2i\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ ، 2) $\arg(z-3i)=\frac{\pi}{6}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

3) $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ ، 4) $\arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

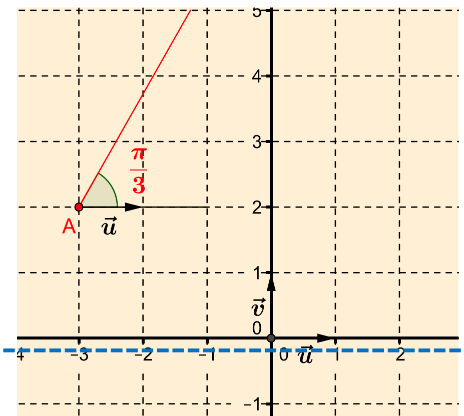
**الحل :**

1) $\arg\left(z+3-2i\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ تكافئ $\arg\left(z-\left(-3+2i\right)\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

لتكن $A$ النقطة ذات اللاحقة $-3+2i$.

$\arg\left(z+3-2i\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ تكافئ $\arg\left(z-z_A\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ تكافئ

$\left(\vec{u}\ ,\overrightarrow{AM}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$. $M$ تختلف عن $A$. إذن مجموعة النقط $M$ هي نصف المستقيم المفتوح طرفه النقطة $A$



**2)** $\arg(z-3i)=\frac{\pi}{6}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

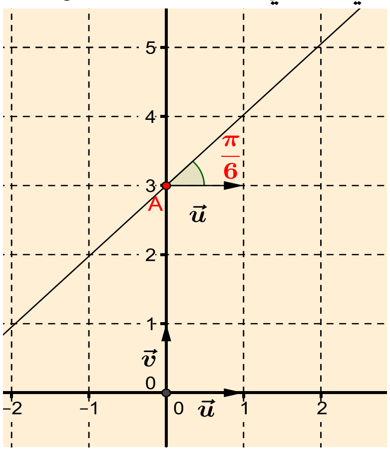
لتكن $A$ النقطة ذات اللاحقة $3i$.

$\arg(z-3i)=\frac{\pi}{6}+k\pi$ تكافئ $\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{6}+k\pi$ تكافئ

$(\vec{u}\ ,\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{6}+k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$ $M$ تختلف عن $A$

نفس المبدأ مثل التمرين السابق ولكن هنا لدينا $k\pi$ وليس $2k\pi$ وبالتالي الزاوية تأخذ $\frac{\pi}{6}$ أو

$\frac{7\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+\pi$ وهذا يعني نصفي مستقيمين مفتوحين متناظرين ( مستقيم باستثناء النقطة $A$).




**3)** $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ تكافئ $\arg\left(\frac{z-1}{z-(-1)}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

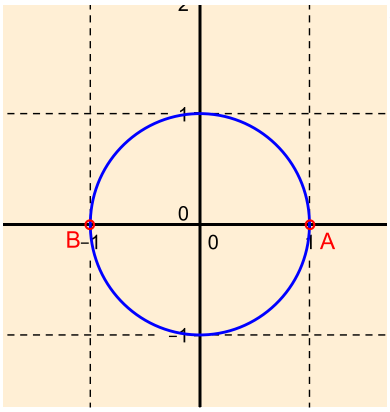
لتكن $A$ , $B$ نقطتان لاحقتاهما $z_B=-1\ ,\ z_A=1$.

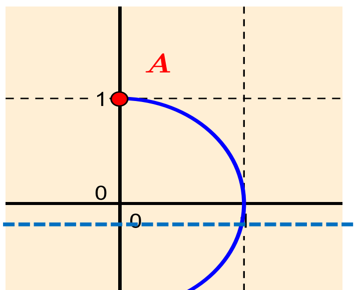
$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ تكافئ $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $(\overrightarrow{BM}\ ,\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{2}+k\pi$. مجموعة النقط هي

الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين $A$ و $B$.

(خواص المثلث القائم المرسوم داخل دائرة وتره قطر الدائرة)



4) $\arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ تكافئ $\arg\left(\frac{z-(-i)}{z-(i)}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

لتكن $A$ , $B$ نقطتان لاحقتاهما $z_B=-i$ , $z_A=i$.

$\arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ تكافئ $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

تكافئ $\left(\overrightarrow{AM}\ ,\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

مجموعة النقط هي نصف الدائرة الواقعة في الربعين الأول والرابع والتي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين $A$ و $B$.

## الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم :

**تعريف:** $z$ عدد مركب غيرمعدوم ، طويلته $|z|=r$ و $\alpha$ عمدة له أي $arg(z)\equiv\alpha[2\pi]$.

الشكل المثلثي للعدد المركب $z$ هو $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ . ونكتب إختصارا كذلك $z=[r\ ,\alpha]$

**ملاحظة :** إذا كان $z=x+iy$ فإن $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{x}{r}\\ \sin\alpha=\frac{y}{r}\end{cases}$

**تذكير:**

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

**تمرين تطبيقي :** أكتب على الشكل المثلثي الأعداد المركبة التالية :

1) $z=1+i$ ، 2) $z=\sqrt{3}+i$ ، 3) $z=-2+2i\sqrt{3}$ 4) $z=-\sqrt{3}-i$

**الحل :**

1) $z=1+i$ : لدينا $r=|1+i|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. إذا كانت $\alpha$ عمدة لـ $z$ فإن :

$\begin{cases}\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ومنه $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ إذن الشكل المثلثي للعدد المركب $z$ هو

$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ أو نكتب اختصارا $z=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$

2) $z=\sqrt{3}+i$ : لدينا $r=\left|\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{3+1}=2$.

إذا كانت $\alpha$ عمدة لـ $z$ فإن :

$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ومنـــه $\arg(z)\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$ إذن الشـــكل المثلثـــي للعـــدد المركـــب $z$ هـــو

$z=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ أو نكتب اختصارا $z=\left[2,\dfrac{\pi}{6}\right]$

3) $z=-2+2i\sqrt{3}$ : لـديـنا $r=\left|-2+2i\sqrt{3}\right|=\sqrt{4+12}=4$. إذا كـانـت $\alpha$ عمـدة لـ $z$

فإن :

$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{-2}{4}=\dfrac{-1}{2}\\ \sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنـه $\arg(z)\equiv\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$ إذن الشـكل المثلثي للعـدد المركـب $z$ هــو

$z=4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ أو نكتب اختصارا $z=\left[4,\dfrac{2\pi}{3}\right]$

4) $z=-\sqrt{3}-i$ : لدينا $r=\left|-\sqrt{3}-i\right|=\sqrt{3+1}=2$. إذا كانت $\alpha$ عمدة لـ $z$ فإن :

$\begin{cases}\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ومنـــه $\arg(z)\equiv\dfrac{7\pi}{6}[2\pi]$ إذن الشـــكل المثلثـــي للعـــدد المركـــب $z$ هـــو

$z=2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$ أو نكتب اختصارا $z=\left[2,\dfrac{7\pi}{6}\right]$.

**حالات خاصة :**

1) إذا كان العدد المركب $z$ حقيقيا أي : $z=a$ حيث $a\in\mathbb{R}^*$ نميز حالتين :

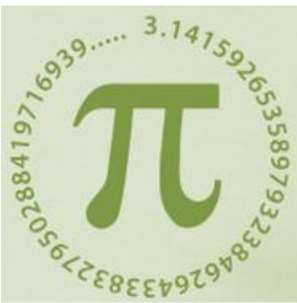
**حالة** $a>0$ : فإن $|z|=a$ و $\arg(z)=0+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ .

**حالة** $a<0$ : فإن $|z|=-a$ و $\arg(z)=\pi+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ .

**تمرين تطبيقي :** أوجد الشكل المثلثي لكل من :

$z_1=\sqrt{3}$ , $z_2=2011$ , $z_3=-3$ , $z_4=-2010$.

**الحل :**



$$z_1=\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(\cos 0+i\sin 0\right)$$
$$z_2=2011=2011\left(\cos 0+i\sin 0\right)$$
$$z_3=-3=3\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$$
$$z_4=-2010=2010\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$$

2) إذا كان العدد المركب $z$ تخيليا صرفا أي : $z=a\,i$ حيث $a\in\mathbb{R}^*$ نميز حالتين :

**حالة** $a>0$ : فإن $|z|=a$ و $\arg(z)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ .

**حالة** $a<0$ : فإن $|z|=-a$ و $\arg(z)=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ .

**تمرين تطبيقي :** أوجد الشكل المثلثي لكل من :

$z_1=\sqrt{3}i$ , $z_2=2011i$ , $z_3=-3i$ , $z_4=-2010i$ .

**الحل :**

$$z_1=\sqrt{3}i=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$z_2=2011i=2011\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$z_3=-3i=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$z_4=-2010i=2010\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

## خواص عمدة عدد مركب غير معدوم

1) $\arg(z\,z')\equiv\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$

2) $\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg(z)[2\pi]$

3) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg(z)-\arg(z')[2\pi]$

4) $\arg(z^n)\equiv n\arg(z)[2\pi]$ حيث $n$ عدد طبيعي غير معدوم.

5) $\arg(\bar{z})=-\arg(z)\ [2\pi]$

6) $\arg(-z)\equiv\arg(z)+\pi[2\pi]$

**تمرين تطبيقي 01:**

ليكن $z_1=2+2i$ و $z_2=1+i\sqrt{3}$ .

أكتب $z_1$ و $z_2$ على الشكل المثلثي.

هذا ال Arg
مانيش عارف إذا
Argent
وإلا Argentine

استنتج الشكل المثلثي لكل من : $z_1 \times z_2$ , $\frac{z_1}{z_2}$ , $\overline{z_1}$ , $-z_2$

**الحل :**

- $z_1 = 2+2i$ $\quad |z_1| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

نكتب $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

إذن الشكل المثلثي للعدد المركب $z_1 = 2+2i$ هو $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left[2\sqrt{2}\,,\frac{\pi}{4}\right]$.

- $z_2 = 1+i\sqrt{3}$ $\quad |z_2| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

نكتب $z_2 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

إذن الشكل المثلثي للعدد المركب $z_2 = 1+i\sqrt{3}$ هو $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \left[2,\frac{\pi}{3}\right]$

$$z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \times 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

- $$z_1 \times z_2 = \left(2\sqrt{2}\right)\times(2)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_1 \times z_2 = 4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right] = \left[4\sqrt{2}\,,\frac{7\pi}{12}\right]$$

- $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right] = \left[\sqrt{2}\,,-\frac{\pi}{12}\right]$$

- $$\overline{z_1} = 2\sqrt{2}\left(\cos-\frac{\pi}{4} + i\sin-\frac{\pi}{4}\right) = \left[2\sqrt{2}\,;-\frac{\pi}{4}\right]$$

- $$-z_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)\right]$$

$$-z_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \left[2\,,\frac{4\pi}{3}\right]$$

**تمرين تطبيقي 02:**

1) أكتب على الشكل المثلثي العدد المركب $Z=\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$.

2) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $Z=\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$.

3) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

**الحل :**

1) الشكل المثلثي العدد المركب $Z=\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$

نكتب $Z=\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$ على الشكل $Z=\frac{z_1}{z_2}$ حيث $z_1=1+i$ و $z_2=1+i\sqrt{3}$

نكتب كلا من $z_1$ و $z_2$ على الشكل المثلثي :

$z_1=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ومنه $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

$z_2=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ومنه $z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

إذن $Z=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$ ومنه الشكل

المثلثي للعدد المركب $Z=\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$ هو $Z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

2) الشكل الجبري للعدد $Z=\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$

$Z=\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}=\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\times\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}+\frac{1-\sqrt{3}}{4}i$ ومنه الشكل الجبري

$$Z=\frac{1+\sqrt{3}}{4}+\frac{1-\sqrt{3}}{4}i$$

3) لدينا $Z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$ و $Z=\frac{1+\sqrt{3}}{4}+\frac{1-\sqrt{3}}{4}i$

بالمطابقة نجد $\frac{1+\sqrt{3}}{4}+\frac{1-\sqrt{3}}{4}i=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

ومنه $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2+2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}+\frac{2-2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}i$

أي $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i$ ومنه $\begin{cases}\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\\ \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{cases}$

وأخيرا $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{cases}$

## الشكل الأسي لعدد مركب

من أجل كل θ من $\mathbb{R}$ : $\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$ وبالتالي من أجل كل عدد حقيقي $r$ موجب تماما : $r(\cos\theta+i\sin\theta)=r\,e^{i\theta}$.

**خواص :**

1) $e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$ ، 2) $\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$ ، 3) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$

**تمرين تطبيقي :**

1) أكتب الشكل الأسي لكل من : $z_2=2+2i\sqrt{3}$ , $z_1=-1-i$

2) أكتب الشكل الجبري لكل من : $z_1=6e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ، $z_2=5e^{i\frac{\pi}{2}}$

**الحل :**

1) $$z_1=-1-i=\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$z_2=2+2i\sqrt{3}=4\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=4e^{i\frac{\pi}{3}}$$

2) $$z_1=6e^{i\frac{5\pi}{6}}=6\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-3\sqrt{3}+3i$$

$$z_2=5e^{i\frac{\pi}{2}}=5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=5i$$

## دستور موافر:

$z$ عدد مركب طويلته $r$ و $\alpha$ عمدة له . من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم

لدينا $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$ أي $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$

**ملاحظة :** إذا كان $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ هو الشكل المثلثي للعدد المركب $z$ فإن الشكل المثلثي للعدد المركب $z^n$ هو $z^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$

**تمرين تطبيقي 01:** ليكن $z=\sqrt{3}+i$ أكتب على الشكل المثلثي كلا من : $z$ , $z^2$ , $z^5$ , $z^7$ .

**الحل :**

$z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ .

$$z^2=2^2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2=4\left(\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z^5=2^5\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^5=32\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

$$z^7=2^7\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^7=128\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

**تمرين تطبيقي 02 :**

ليكن : $z_3=4e^{-i\frac{\pi}{3}}$ , $z_2=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ , $z_1=3e^{i\frac{\pi}{4}}$ . أكتب على الشكل الأسي كلا من الأعداد :

$z_1z_2z_3$ , $\frac{z_1^3}{z_2z_3}$ , $(z_2)^4\times(z_3)^3$


**الحل :**

$$z_1z_2z_3=3e^{i\frac{\pi}{4}}\times2e^{i\frac{\pi}{6}}\times4e^{-i\frac{\pi}{3}}=24e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}=24e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\frac{z_1^3}{z_2z_3}=\frac{27e^{i\frac{3\pi}{4}}}{8e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}}=\frac{27e^{i\frac{3\pi}{4}}}{8e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}=\frac{27e^{i\frac{3\pi}{4}+i\frac{\pi}{6}}}{8}=\frac{27}{8}e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

$$(z_2)^4\times(z_3)^3=\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4\times\left(4e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^3=16e^{i\frac{4\pi}{6}}\times64e^{-i\frac{3\pi}{3}}=1024e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

**تمرين تطبيقي 03:** أكتب على الشكل المثلثي و الشكل الأسي العدد المركب

$z=-2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$.

**الحل :**

$z=-2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ غير مكتوب على الشكل المثلثي لأن $-2$ عدد حقيقي سالب.

نعلم أن $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ ومنه $\cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$ أي $-1 = e^{i\pi}$

لدينا $z = -2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ نكتبه على الشكل $z = 2(-1)\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

$$z = 2(-1)\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right) = 2e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{5}} = 2e^{i\frac{6\pi}{5}} = 2\left(\cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$$

**تمرين تطبيقي 04:** أكتب على الشكل المثلثي ما يلي :

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad , \quad z_2 = 2\left(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right) \quad , \quad z_3 = -2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

**الحل :**

1) بما أن $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ و $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

فإنّ $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ وبالتالي

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right]$$

2) بما أن $\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ و $\sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

فإنّ $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$ و $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$ .

وبالتالي $z_2 = 2\left(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \left[2, \frac{\pi}{6}\right]$

3) نكتب $-2$ على الشكل المثلثي فنجد $-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$

$$z_3 = -2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2(\cos\pi + i\sin\pi)\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \left[2, \frac{7\pi}{6}\right]$$

## التفسير الهندسي لطويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

لتكن $A$ , $B$ , $C$ ثلاث نقط مختلفة مثنى مثنى من المستوي المركب ، لواحقها $z_A$ , $z_B$ , $z_C$ على التوالي :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}[2\pi] \quad \text{و} \quad \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB}$$

| | | |
|---|---|---|
| إذا كان | $\arg\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ تساوي $\frac{\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$ و $\left\lvert\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right\rvert = 1$ | المثلث $ABC$ قائم متساوي الساقين |

| | | |
|---|---|---|
| إذا كان | $\arg\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ تساوي $\dfrac{\pi}{3}$ أو $-\dfrac{\pi}{3}$ و $\left\|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right\|=1$ | المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع |
| إذا كان | $\arg\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\theta$ و $\left\|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right\|=1$ | المثلث $ABC$ متساوي الساقين |
| إذا كان | $\arg\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ تساوي $\dfrac{\pi}{2}$ أو $-\dfrac{\pi}{2}$ و $\left\|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right\|=r$ | المثلث $ABC$ قائم . |
| إذا كان | $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$ | النقط $A\,;B\,;C$ في استقامية |

**تمرين تطبيقي 01 :**

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O\,,\vec{u}\,,\vec{v}\right)$، نعتبر النقط $A\,,B\,,C$ ثلاث نقط لواحقها $z_A=2-i\;,\;z_B=5+i\;,\;z_C=2i$ على الترتيب. أحسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ واستنتج طبيعة المثلث $ABC$.

**الحل :**

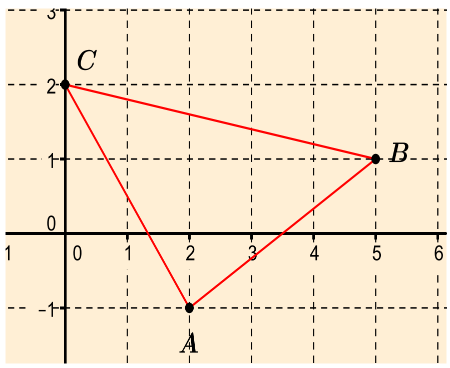
$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{2i-2+i}{5+i-2+i}=\frac{-2+3i}{3+2i}=\frac{2i^2+3i}{3+2i}=\frac{i(2i+3)}{3+2i}=i$$

خلعتي ABC حسبتها BAC مقلوبة

لدينا من جهة $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=|i|=1$ أي $\dfrac{AC}{AB}=1$ أي $AC=AB$

ومن جهة أخرى $\arg\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\arg i=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\;,k\in\mathbb{Z}$ أي $(AB)\perp(AC)$

ومنه المثلث $ABC$ قائم في النقطة $A$ و متساوي الساقين.



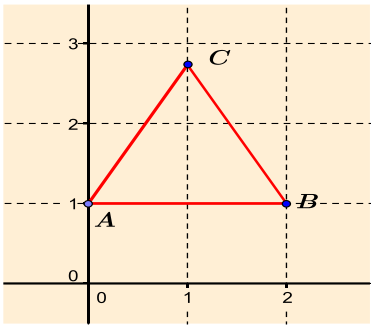

**تمرين تطبيقي 02 :**

$A\,,B\,,C$ ثلاث نقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\right)$، لواحقها على الترتيب $z_A=i$ ، $z_B=2+i$ ، $z_C=1+i\left(\sqrt{3}+1\right)$.

أحسب الطويلة وعمدة للعدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ واستنتج أن المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع.

**الحل :**

نبين أن $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$ و $\arg \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\arg \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ .




$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{(2+i)-(i)}{1+i\left(\sqrt{3}+1\right)-i} = \frac{2}{1+i\sqrt{3}} = \frac{2-2i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$$

ومنه $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$ أي $AB = AC$ .

إذا كانت $\theta$ هي عمدة لـ $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ فإن $\theta = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

أي $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$ ومنه المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع.

**تمرين تطبيقي 03:**

$A, B, C$ ثلاث نقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$، لواحقها على الترتيب $z_A = -4i$ ، $z_B = -2-2i$ ، $z_C = -1-3i$ .

أحسب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ واستنتج أن النقط $A, B, C$ في استقامية.

**الحل :**

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-2-2i+4i}{-1-3i+4i} = \frac{-2+2i}{-1+i} = \frac{2(-1+i)}{-1+i} = 2$$

وهوعدد حقيقي وبالتالي النقط $A, B, C$ في استقامية.

**تمرين تطبيقي 04:**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ ، الوحدة $2cm$ .

نعتبر النقط $A, B, C$ لواحقها على الترتيب: $z_A = 1+i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 2z_B$

أ) عين الشكل الجبري لكل من $z_B$ و $z_C$.

ب) علّم النقط $A, B, C$.

ت) بين أن النقط $A, B, C$ تنتمي إلى الدائرة $(\Gamma)$ التي مركزها $I$ ذات اللاحقة 3 وطول نصف قطرها $\sqrt{5}$.

ث) أحسب $\dfrac{z_C - z_I}{z_A - z_I}$ واستنتج طبيعة المثلث $IAC$ .

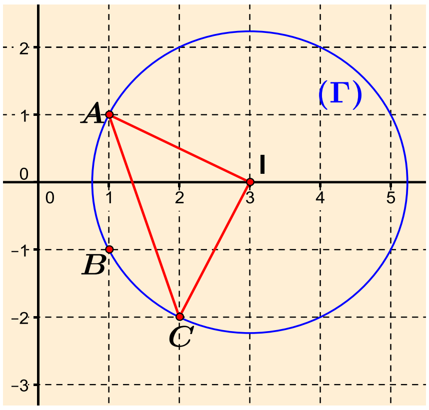
**الحل :**

$z_C = 2z_B = 2-2i$ ، $z_B = \overline{z_A} = 1-i$ ، $z_A = 1+i$

حتى نبين أن النقط $A$ , B , $C$ تنتمي إلى الدائرة $(\Gamma)$ التي مركزها $I$ ذات اللاحقة 3 وطول نصف قطرها $\sqrt{5}$ يكفي أن نبين $IA = IB = IC = \sqrt{5}$ ( أنصاف أقطار).

$$\frac{z_C - z_I}{z_A - z_I} = \frac{2-2i-3}{1+i-3} = \frac{-1-2i}{-2+i} = i$$

المثلث $IAC$ قائم في $I$ ومتساوي الساقين.




## الجذران التربيعيان لعدد مركب

**تعريف** : نقول أن العدد المركب $z$ هو جذرا تربيعيا للعدد $Z$ إذا وفقط إذا كان $z^2 = Z$
ولكل عدد مركب جذران تربيعيان متناظران.

**الحالة الأولى :** $Z$ عدد حقيقي موجب تماما : $Z \in \mathbb{R}_+^*$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $Z$ هما $\sqrt{Z}$ و $-\sqrt{Z}$ .

- الجذران التربيعيان للعدد 9 هما $\sqrt{9}$ و $-\sqrt{9}$ أي هما 3 و 3 - .
- الجذران التربيعيان للعدد 7 هما $\sqrt{7}$ و $-\sqrt{7}$ .

**الحالة الثانية :** $Z$ عدد حقيقي سالب تماما : $Z \in \mathbb{R}_-^*$

لدينا $Z = -(-Z) = i^2(-Z)$

ومنه الجذران التربيعيان للعدد المركب $Z$ هما $i\sqrt{-Z}$ و $-i\sqrt{-Z}$ .

- الجذران التربيعيان للعدد 9- هما $-i\sqrt{9}$ و $i\sqrt{9}$ أي هما $-3i$ و $3i$
- الجذران التربيعيان للعدد 7- هما $i\sqrt{7}$ و $-i\sqrt{7}$ .

**الحالة الثالثة :** $Z = a+ib$

نضع $z=x+iy$ ومنه $z^2=Z$ تكافئ $x^2-y^2+2xyi=a+ib$ وبالتالي $\begin{cases}x^2-y^2=a\\2xy=b\end{cases}$ لحل

هذه الجملة نضيف كذلك طويلة $z^2$ تساوي طويلة $Z$ وتصبح كالتالي : $\begin{cases}x^2-y^2=a\\x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\\2xy=b\end{cases}$

**تمرين تطبيقي 01:** أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z=3+4i$ .

**الحل :**

إذا كان $z=x+iy$ هو أحد الجذرين التربيعيين لـ $Z=3+4i$ فهو يحقق $z^2=Z$ .

نحل الجملة $\begin{cases}x^2-y^2=3\\x^2+y^2=\sqrt{9+16}=5\\2xy=4\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}2x^2=8\\x^2+y^2=5\\xy>0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x^2=4\\y^2=1\\xy>0\end{cases}$

بما أن $xy>0$ فهما من نفس الإشارة وبالتالي إذا كان $x=2$ فإن $y=1$ ويكون $z=2+i$ . وإذا كان $x=-2$ فإن $y=-1$ ويكون $z=-2-i$ . وأخيرا الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z=3+4i$ هما $-2-i$ و $2+i$ .

**تمرين تطبيقي 02:** أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z=6-8i$ .

**الحل :**

إذا كان $z=x+iy$ هو أحد الجذرين التربيعيين لـ $Z=8-6i$ فهو يحقق $z^2=Z$ .

نحل الجملة $\begin{cases}x^2-y^2=8\\x^2+y^2=\sqrt{36+64}=10\\2xy=-6\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}2x^2=18\\x^2+y^2=10\\xy<0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x^2=9\\y^2=1\\xy<0\end{cases}$

بما أن $xy<0$ فهما من إشارتين مختلفتين وبالتالي إذا كان $x=3$ فإن $y=-1$ ويكون $z=3-i$ . وإذا كان $x=-3$ فإن $y=1$ ويكون $z=-3+i$ . وأخيرا الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z=8-6i$ هما $3-i$ و $-3+i$ .

## المعادلات من الدرجة الثانية : $az^2+bz+c=0$

### أولا: المعاملات $a$ , $b$ , $c$ حقيقية

لتكن المعادلة ذات المجهول العدد المركب $z$ : $az^2+bz+c=0$ حيث $a$ , $b$ , $c$ حقيقية و $a\neq 0$ و $\Delta=b^2-4ac$ مميزها.

1) إذا كان $\Delta=0$ ، المعادلة $az^2+bz+c=0$ تقبل حلا حقيقيا مضاعفا هو $z=-\dfrac{b}{2a}$.

2) إذا كان $\Delta > 0$ ، المعادلة $az^2+bz+c=0$ تقبل حلين حقيقيين متمايزين هما :

$z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ , $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ .

$\sqrt{-\Delta}$ مانيش فاهمها

وقيلا راهو غالطين

3) إذا كان $\Delta < 0$ ، المعادلة $az^2+bz+c=0$ تقبل حلين مركبين مترافقين هما : $z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ , $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ .

**تمرين تطبيقي :**

حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول $z$ التالية :

2) $z^2-4z+4=0$ ، 2) $z^2-5z+6=0$ ، 3) $z^2+z+1=0$

**الحل :**

1) $z^2-4z+4=0$ . المميز $\Delta = 16-4(1)(4) = 16-16 = 0$ ومنه المعادلة $z^2-4z+4=0$ تقبل حلا حقيقيا مضاعفا هو $z = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$ . $S=\{2\}$

2) $z^2-5z+6=0$ . المميز $\Delta = 25-4(1)(6) = 25-24 = 1$ ومنه المعادلة $z^2-5z+6=0$ تقبل حلين حقيقيين متمايزين هما

$$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{2} = 3 \ , \quad z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{2} = 2$$

إذن $S=\{2\,,3\}$ .

3) $z^2+z+1=0$ . المميز $\Delta = 1-4(1)(1) = -3 = 3i^2$ ومنه المعادلة $z^2+z+1=0$ تقبل حلين مركبين مترافقين هما

$$z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \ , \quad z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

إذن $S = \left\{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i, -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ .

**ثانيا: المعاملات $a$ , $b$ , $c$ مركبة**

لتكن المعادلة ذات المجهول العدد المركب $z$ : $az^2+bz+c=0$ حيث $a, b, c$ أعداد مركبة و $a \neq 0$ . $\Delta = b^2-4ac$ مميزها.

1) إذا كان $\Delta = 0$ ، المعادلة $az^2+bz+c=0$ تقبل حلا مضاعفا هو $z = -\dfrac{b}{2a}$ .

2) إذا كان $\Delta \neq 0$ ، المعادلة $az^2+bz+c=0$ تقبل حلين متمايزين هما :

$z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ , $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ حيث $\delta$ هو أحد الجذرين التربيعيين للمميز $\Delta$ .

**تمرين تطبيقي 01:**

حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول $z$ التالية :

1) $z^2+(1-2i)z-3-i=0$ ، 2) $z^2+(7-4i)z+9-15i=0$ ،

3) $(2iz+3-i)^2+1=0$

**الحل :**

1) $z^2+(1-2i)z-3-i=0$ المميز

$$\Delta=(1-2i)^2-4(1)(-3-i)=1-4i-4+12+4i=9$$

المعادلة تقبل حلين متمايزين هما :

$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{-1+2i-3}{2}=-2+i\ \ ;\ \ z_2=\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{-1+2i+3}{2}=1+i$$

$$S=\{-2+i\ ;\ 1+i\}$$

2) $z^2+(7-4i)z+9-15i=0$ المميز $\Delta=(7-4i)^2-4(1)(9-15i)=-3+4i$

نحسب الجذرين التربيعيين للمميز $\Delta=-3+4i$

إذا كان $\delta=x+iy$ هو أحد الجذرين التربيعيين لـ $\Delta=-3+4i$ فهو يحقق $\delta^2=\Delta$ .

نحل الجملة $\begin{cases}x^2-y^2=-3\\ x^2+y^2=\sqrt{9+16}=5\\ 2xy=4\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}2x^2=2\\ x^2+y^2=5\\ xy>0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x^2=1\\ y^2=4\\ xy>0\end{cases}$

بما أن $xy>0$ فهما من نفس الإشارة وبالتالي إذا كان $x=1$ فإن $y=2$ ويكون $\delta=1+2i$ . وإذا كان $x=-1$ فإن $y=-2$ ويكون $\delta=-1-2i$ . وأخيرا الجذران التربيعيان للمميز $\Delta=-3+4i$ هما $\delta=1+2i$ و $\delta'=-1-2i$

للمعادلة $z^2+(7-4i)z+9-15i=0$ حلان متمايزان هما :

$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{-7+4i-1-2i}{2}=-4+i\ \ ,\ \ z_2=\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{-7+4i+1+2i}{2}=-3+3i$$

وأخيرا $S=\{-4+i\ ,-3+3i\}$ .

3) $(2iz+3-i)^2+1=0$ تكافئ $(2iz+3-i)^2=-1=i^2$ ومنه $(2iz+3-i)=i$ ........(1)

أو $(2iz+3-i)=-i$ ........(2)

نحل المعادلة $(2iz+3-i)=i$ ........(1) تكافئ $2iz=-3+2i$ تكافئ $z=\frac{-3+2i}{2i}=1+\frac{3}{2}i$ .

نحل المعادلة $(2iz+3-i)=-i$ ........(2) تكافئ $2iz=-3$ تكافئ $z=\frac{-3}{2i}=\frac{3}{2}i$ .

وأخيرا $S=\left\{1+\frac{3}{2}i\ ,\ \frac{3}{2}i\right\}$ .

**ملاحظة :** يمكن نشر الطرف الأول في المعادلة $(2iz+3-i)^2+1=0$ ثم نحل باستعمال المميز.

**تمرين تطبيقي 02:** ليكن $P$ كثير الحدود في $\mathbb{C}$ بحيث :

$P(z)=z^3-(1+4i)z^2+(6i-6)z+8+4i$

1) أحسب $P(2)$ وما ذا تستنتج ؟

2) أوجد الأعداد المركبة $a$ , $b$ , $c$ بحيث من أجل كل $z\in\mathbb{C}$ :

$P(z)=(z-2)(az^2+bz+c)$

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

**الحل :**

1) $P(2)=2^3-(1+4i)(2)^2+(6i-6)(2)+8+4i$

$=8-4-16i-12+12i+8+4i=0$

ومنه 2 هو جذر لكثير الحدود $P$ .

2) $P(z)=(z-2)(az^2+bz+c)=az^3+bz^2+cz-2az^2-2bz-2c$

$P(z)=az^3+(b-2a)z^2+(c-2b)z-2c$

بالمطابقة مع $P(z)=z^3-(1+4i)z^2+(6i-6)z+8+4i$ نجد

$\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-1-4i \\ c-2b=-6+6i \\ -2c=8+4i \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} a=1 \\ b=1-4i \\ c=-4-2i \end{cases}$ ومنه $P(z)=(z-2)\left[z^2+(1-4i)z-4-2i\right]$

من كوارث البشر

شخص تضعه في عينيك

فيعميك وشخص تضعه تحت

قدميك فيرفعك

3)

$P(z)=0$ تكافئ $(z-2)\left[z^2+(1-4i)z-4-2i\right]=0$

تكافئ: $z=2$ أو $z^2+(1-4i)z-4-2i=0$

نحسب المميز : $\Delta=(1-4i)^2-4(1)(-4-2i)=1$ . المعادلة $z^2+(1-4i)z-4-2i=0$ تقبل حلين متمايزين هما $z_1=\dfrac{-1+4i-1}{2}=-1+2i$ , $z_2=\dfrac{-1+4i+1}{2}=2i$

وأخيرا مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي : $S=\{2\,,2i\,,-1+2i\}$

**تمرين تطبيقي 03**

1) بين أن المعادلة $z^3+(3-2i)z^2-(1+6i)z+2i=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا $z_0$

2) أوجد بقية الحلول .

**الحل :**

1) $z_0$ تخيلي صرف فهو يكتب على الشكل $z_0=ai$ حيث $a\in\mathbb{R}^*$ .

$z_0 = ai$ حل للمعادلة $z^3 + (3-2i)z^2 - (1+6i)z + 2i = 0$ يكافئ

$(ai)^3 + (3-2i)(ai)^2 - (1+6i)(ai) + 2i = 0$ بعد النشر نجد

$(-3a^2 + 6a) + (-a^3 + 2a^2 - a + 2)i = 0$ وهذا يكافئ $\begin{cases} -3a^2 + 6a = 0 \\ -a^3 + 2a^2 - a + 2 = 0 \end{cases}$

نحل المعادلة $-3a^2 + 6a = 0$ فنجد $a = 0$ أو $a = 2$ ، فقط الحل $a = 2$ يحقق المعادلة $-a^3 + 2a^2 - a + 2 = 0$ إذن الحل المشترك هو $a = 2$ ومنه $z_0 = 2i$ .

2) بقية الحلول :

بما أن $z_0 = 2i$ هو حل للمعادلة $z^3 + (3-2i)z^2 - (1+6i)z + 2i = 0$ فإننا نستطيع تحليل $z^3 + (3-2i)z^2 - (1+6i)z + 2i$ على الشكل

$$z^3 + (3-2i)z^2 - (1+6i)z + 2i = (z-2i)(az^2 + bz + c)$$

بعد النشر نجد $z^3 + (3-2i)z^2 - (1+6i)z + 2i = az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2ic$

بعد المطابقة نجد $a = 1$ , $b = 3$ , $c = -1$.

$z^3 + (3-2i)z^2 - (1+6i)z + 2i = 0$ تكافئ $(z-2i)(z^2 + 3z - 1) = 0$ تكافئ

$z = 2i$ أو $z^2 + 3z - 1 = 0$

حلول المعادلة $z^2 + 3z - 1 = 0$ هي $\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$ , $\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$

وتكون مجموعة حلول المعادلة $z^3 + (3-2i)z^2 - (1+6i)z + 2i = 0$ هي

$$\left. \frac{\sqrt{13}}{2} \right\}$$

قال الطبيب لوالدة الطفل المريض : إن ابنك يتصبب عرقا وزيادة ضربات القلب سنقوم ببعض التحاليل لمعرفة سبب ذلك . فقال الطفل السبب معروف هو أسئلة أستاذ الرياضيات وتمارينه المعقدة .

## الإنتقال من الشكل المثلثي إلى الشكل الجبري:

$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ هو شكل مثلثي معطى للعدد المركب $z$ . نكتب $z$ على الشكل الجبري

$z = x + iy$ حيث $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$

**تمرين تطبيقي :**

أكتب على الشكل الجبري كلا من $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ و $z_2 = 6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

**الحل :**

$$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}+i$$

$$z_2=6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=6\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

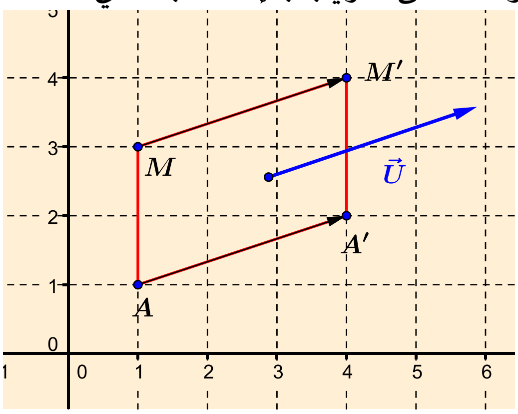
$$=6\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}$$

## التحويلات النقطية :

### 1)الإنسحاب :

الإنسسحاب الذي شعاعه $\vec{U}$ هو التحويل الذي يرفق بكل نقطة $M$ من المستوي النقطة $M'$ بحيث $\overrightarrow{MM'}=\vec{U}$

إذا كانت $A'$ و $M'$ صورتي النقطتين $A$ و $M$ على الترتيب بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{U}$ فإن $AMM'A'$ متوازي أضلاع.




### 2) الكتابة المركبة للإنسحاب :

الكتابة المركبة للإنسحاب الذي شعاعه $\vec{U}$ هي $z'=z+z_{\vec{U}}$

**تمرين تطبيقي :**

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط $D, C, B, A$ التي لواحقها على الترتيب $z_A=2+2i\ ,\ z_B=4+3i\ ,\ z_C=3i\ ,\ z_D=4+i$ والإنسحاب $t$ الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

1) ما هي الكتابة المركبة للإنسحاب $t$ ؟.
2) عين لاحقة النقطة $E$ صورة النقطة $C$ بالإنسحاب $t$.
3) عين لاحقة النقطة $F$ سابقة النقطة $D$ بالإنسحاب $t$.

**الحل :**

1) الكتابة المركبة للإنسحاب :

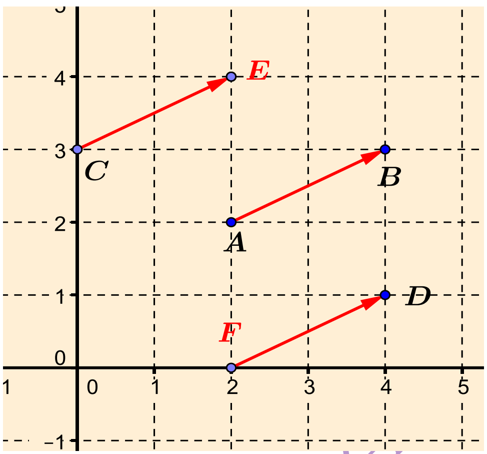
$$z' = z + z_{\overrightarrow{AB}} = z + z_B - z_A = z + 4 + 3i - 2 - 2i = z + 2 + i$$

2) لاحقة النقطة $E$ صورة النقطة $C$ بالإنسحاب $t$.

$$z_E = z_C + 2 + i = 3i + 2 + i = 2 + 4i$$

3) لاحقة النقطة $F$ سابقة النقطة $D$ بالإنسحاب $t$.

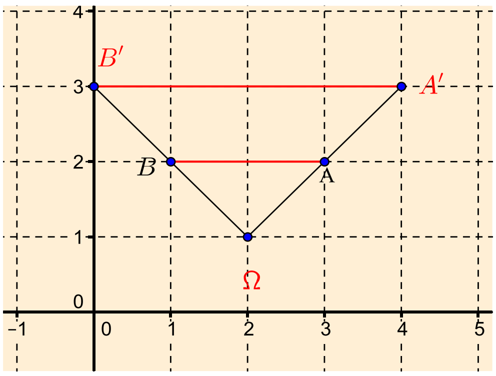
$z_D = z_F + 2 + i$ تكافئ $z_F = z_D - 2 - i = 4 + i - 2 - i = 2$




**2)التحاكي :**

التحاكي الذي مركزه $\Omega$ ونسبته $k$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$ هو التحويل الذي يرفق بكل نقطة $M$ من المستوي النقطة $M'$ بحيث : $\overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$

إذا كانت $A'$ و $M'$ صورتي النقطتين $A$ و $M$ على الترتيب التحاكي الذي مركزه $\Omega$ ونسبته $k$ فإن $\overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$ و $\overrightarrow{\Omega A'} = k.\overrightarrow{\Omega A}$




**الكتابة المركبة للتحاكي :**

لتكن $z$ لاحقة نقطة كيفية $M$ من المستوي ، $z'$ لاحقة $M'$ صورة $M$ بالتحاكي الذي مركزه $\Omega$ ونسبته $k$ : $\overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$ تكافئ $z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$

**تمرين تطبيقي 01:**

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$، نعتبر النقط $A, B, \Omega$ التي لواحقها على الترتيب $z_A = 1 + 2i$ , $z_B = 3 - i$ , $z_\Omega = 1 + 3i$. والتحاكي $h$ الذي مركزه $\Omega$ ونسبته $k = -2$

أستاذ الرياضيات وقع من على السلم فأنكسر فيه ضلع وزاوية وتعقّد من هذه الواقعة فأصبح شبه منحرف بعد أن كان مستقيما

1) ما هي الكتابة المركبة للتحاكي $h$ ؟.
2) عين لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $A$ بالتحاكي $h$.
3) عين لاحقة النقطة $D$ سابقة النقطة $B$ بالتحاكي $h$
4) ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$

**الحل :**

1) الكتابة المركبة للتحاكي $h$ :

$z'-z_\Omega=k(z-z_\Omega)$ تكافئ $z'-(1+3i)=-2(z-(1+3i))$

أي $z'=(1+3i)-2(z-(1+3i))=1+3i-2z+2+6i=-2z+3+9i$

وأخيرا الكتابة المركبة لهذا التحاكي هي : $z'=-2z+3+9i$

2) لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $A$ بالتحاكي $h$.

$z_C=-2z_A+3+9i=-2(1+2i)+3+9i=1+5i$

3) لاحقة النقطة $D$ سابقة النقطة $B$ بالتحاكي $h$.

$z_B=-2z_D+3+9i$ ومنه $z_D=\dfrac{z_B-3-9i}{-2}=\dfrac{3-i-3-9i}{-2}=5i$

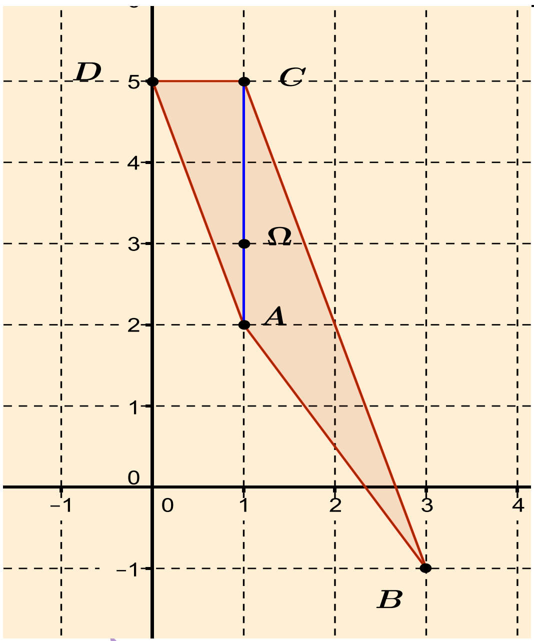
4) طبيعة الرباعي $ABCD$ :

بما أن $C$ هي صورة $A$ بهذا التحاكي فإن $\overrightarrow{\Omega C}=-2\overrightarrow{\Omega A}$

وبما أن $D$ هي صورة $B$ بهذا التحاكي فإن $\overrightarrow{\Omega B}=-2\overrightarrow{\Omega D}$

المستقيمان $(BC)$ و $(AD)$ متوازيان وبالتالي

الرباعي $ABCD$ هو شبه منحرف.




**تمرين تطبيقي 02 :**

$T$ تحويل نقطي كتابته المركبة هي $z'=-3(z+2-i)$.

1) بين أنه توجد نقطة صامدة (مضاعفة) $\Omega$ بالتحويل $T$ يطلب تحديد لاحقتها $z_\Omega$.
2) بين أن $z'-z_\Omega=-3(z-z_\Omega)$.
3) عين طبيعة والعناصر المميزة للتحويل $T$.

**الحل :**

1) $\Omega$ نقطة صامدة تكافئ $T(\Omega)=\Omega$ أي $z_\Omega=-3(z_\Omega+2-i)$ ومنه

$$z_\Omega=\frac{-6+3i}{4}=-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}i.$$

2) $z'-z_\Omega=-3(z-z_\Omega)$ تكافئ

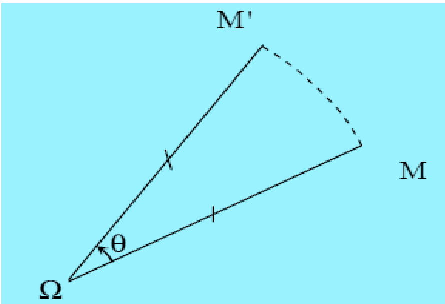
$$z'-z_\Omega=-3(z+2-i)+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}i=-3\left(z+2-i-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i\right)$$

$$=-3\left(z+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}i\right)=-3\left(z-\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}i\right)\right)=-3(z-z_\Omega)$$

3) $T$ هو التحاكي الذي لاحقة مركزه $z_\Omega=-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}i$ ونسبته $-3$.

**3) الدوران** : الدوران الذي مركزه $\Omega$ وزاويته $\theta$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بالنقطة $\Omega$ النقطة $\Omega$ نفسها ويرفق بكل نقطة $M$ من المستوي وتختلف عن $\Omega$ النقطة $M'$ بحيث :

$$\begin{cases}\Omega M'=\Omega M\\ (\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'})=\theta[2\pi]\end{cases}$$




إذا كانت $M'$ صورة $M$ فإن:

- $\Omega MM'$ مثلث قائم في $\Omega$ ومتساوي الساقين من أجل زاوية الدوران $\frac{\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$.
- $\Omega MM'$ مثلث متقايس الأضلاع من أجل زاوية الدوران $\frac{\pi}{3}$ أو $-\frac{\pi}{3}$.

**الكتابة المركبة للدوران :**

الكتابة المركبة للدوران الذي مركزه $\Omega$ وزاويته $\theta$ هي $z'-z_\Omega=e^{i\theta}(z-z_\Omega)$.

**تمرين تطبيقي:**

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط $A,B,\Omega$ التي لواحقها على الترتيب $z_A=1+2i$ , $z_B=3-i$ , $z_\Omega=1+3i$. والدوران $r$ الذي مركزه $\Omega$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

1) ما هي الكتابة المركبة للدوران $r$ ؟.

2) عين لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $A$ بالدوران $r$.

3) عين لاحقة النقطة $D$ سابقة النقطة $B$ بالدوران $r$.

**الحل :**

1) الكتابة المركبة للدوران $r$

$z'-z_\Omega=e^{i\theta}\left(z-z_\Omega\right)$ تكافئ $z'-(1+3i)=e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z-(1+3i)\right)=i(z-1-3i)$

$z'=iz-i+3+1+3i=iz+4+2i$

الكتابة المركبة لهذا الدوران $r$ هي $z'=iz+4+2i$

2) لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $A$ بالدوران $r$:

$z'=iz+4+2i$ تكافئ $z_C=iz_A+4+2i=i(1+2i)+4+2i=2+3i$

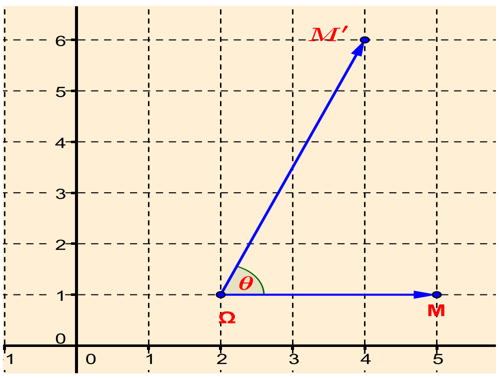
3) لاحقة النقطة $D$ سابقة النقطة $B$ بالدوران $r$:

$z'=iz+4+2i$ تكافئ $z_B=iz_D+4+2i$ ومنه

$$z_D=\frac{z_B-4-2i}{i}=\frac{3-i-4-2i}{i}=\frac{-1-3i}{i}=-3+i$$

## 3) التشابه المباشر

التشابه المباشر الذي مركزه $\Omega$ وزاويته $\theta$ ونسبته $k$ حيث $k\in\mathbb{R}^*_+\{-1\}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بالنقطة $\Omega$ النقطة $\Omega$ نفسها ويرفق بكل نقطة $M$ من المستوي وتختلف عن $\Omega$ النقطة $M'$ بحيث : $\begin{cases}\Omega M'=k\Omega M\\(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'})=\theta[2\pi]\end{cases}$




**الكتابة المركبة للتشابه المباشر:**

الكتابة المركبة التشابه المباشر الذي مركزه $\Omega$ وزاويته $\theta$ ونسبته $k$ هي $z'-z_\Omega=k\,e^{i\theta}\left(z-z_\Omega\right)$

**تمرين تطبيقي:**

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط $A$ , $B$ , $\Omega$ التي لواحقها على الترتيب $z_A=1+2i$ , $z_B=3-i$ , $z_\Omega=1+3i$. والتشابه المباشر $S$ الذي نسبته $k=2$ مركزه $\Omega$ وزاويته $\frac{3\pi}{2}$

1) ما هي الكتابة المركبة للتشابه المباشر $S$ ؟

2) عين لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $A$ بالتشابه المباشر $S$

3) عين لاحقة النقطة $D$ سابقة النقطة $B$ بالتشابه المباشر $S$

**الحل :**

1) الكتابة المركبة للتشابه المباشر $S$

$z'-z_\Omega=ke^{i\theta}(z-z_\Omega)$ تكافئ $z'-(1+3i)=2e^{i\frac{3\pi}{2}}(z-(1+3i))=-2i(z-1-3i)$

$z'=-2iz+2i-6+1+3i=-2iz-5+5i$

الكتابة المركبة لهذا للتشابه المباشر $S$ هي $z'=-2iz-5+5i$

2) لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $A$ بالتشابه المباشر $S$

$z'=iz+4+2i$ تكافئ $z_C=-2iz_A-5+5i=-2i(1+2i)-5+5i=-1+3i$

3) لاحقة النقطة $D$ سابقة النقطة $B$ بالتشابه المباشر $S$

$z'=iz+4+2i$ تكافئ $z_B=-2iz_D-5+5i$ ومنه

$$z_D=\frac{z_B+5-5i}{-2i}=\frac{3-i+5-5i}{-2i}=\frac{8-6i}{-2i}=3+4i$$

## 5) الأعداد المركبة والتحويلات النقطية :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

$T$ تحويل نقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M$ ذات اللاحقة $z$ النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ حيث : $z'=az+b$ حيث $a\neq 0$ ( $a$ حقيقي أو مركب).

إذاكانت النقطة $\Omega$ التي لاحقتها $z_\Omega$ نقطة صامدة (مضاعفة) بالتحويل $T$ فإنها تحقق $T(\Omega)=\Omega$

أي $z_\Omega=az_\Omega+b$ ومنه من أجل $a\neq 1$ فإن $z_\Omega=\dfrac{b}{1-a}$ و $\Omega$ وحيدة.

نلخص طبيعة التحويل والعناصر المميزة له في هذا الجدول :

| العدد $a$ | | طبيعة التحويل | العناصر المميزة | كتابة أخرى له |
|---|---|---|---|---|
| $a\in\mathbb{R}^*$ | $a=1$ | إنسحاب | لاحقة شعاعه $z_{\vec{u}}=b$ | $z'=z+z_{\vec{u}}$ |
| | $a\neq 1$ | تحاكي | نسبته $k=a$ ولاحقة مركزه هي | $z'-z_\Omega=k(z-z_\Omega)$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | $z_\Omega=\frac{b}{1-a}$ | |
| $a\in\mathbb{C}^*$ | $\lvert a\rvert=1$ | دوران | زاويته $Arg(a)$ ولاحقة مركزه هي $z_\Omega=\frac{b}{1-a}$ | $z'-z_\Omega=e^{i\theta}(z-z_\Omega)$ |
| | $\lvert a\rvert\neq1$ | تشابه مباشر | نسبته $k=\lvert a\rvert$ وزاويته $Arg(a)$ ولاحقة مركزه هي $z_\Omega=\frac{b}{1-a}$ | $z'-z_\Omega=ke^{i\theta}(z-z_\Omega)$ |

**تمرين تطبيقي**: المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

$T$ تحويل نقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M$ ذات اللاحقة $z$ النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ حيث : $z'=az+b$ بحيث :

1) $z'=z+3-2i$ ، 2) $z'=2z+5-i$ ، 3) $z'=iz+2+i$ ، 4) $z'=(1+i)z+2-i$.

عين طبيعة كل تحويل وحدد العناصر المميزة له.

**الحل :**

1) $z'=z+3-2i$ من الشكل $z'=az+b$ حيث $a=1$ ومنه $T$ هوانسحاب لاحقة شعاعه $z_{\vec{U}}=3-2i$.

2) $z'=2z+5-i$ من الشكل $z'=az+b$ حيث $a=2$ ومنه $T$ هوتحاكي نسبته 2 ولاحقة مركزه $z_\Omega=\frac{b}{1-a}=\frac{5-i}{1-2}=-5+i$.

3) $z'=iz+2+i$ من الشكل $z'=az+b$ حيث $a=i$ و $|a|=|i|=1$ ومنه $T$ هودوران زاويته $\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ و لاحقة مركزه $z_\Omega=\frac{b}{1-a}=\frac{2+i}{1-i}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$.

4) $z'=(1+i)z+2-i$ من الشكل $z'=az+b$ حيث $a=1+i$ و $|a|=|1+i|=\sqrt{2}$ ومنه $T$ هوتشابه مباشرنسبته $|a|=\sqrt{2}$ وزاويته $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$ و لاحقة مركزه .

$z_\Omega=\frac{b}{1-a}=1+2i$

## الصيغة المركبة لبعض التناظرات:

- التناظر بالنسبة للمحور $(Ox)$ صيغته المركبة هي $z'=\bar{z}$

- التناظر بالنسبة للمحور $(Oy)$ صيغته المركبة هي $z'=-\bar{z}$
- التناظربالنسبة للمبدأ $O$ صيغته المركبة هي $z'=-z$
- التناظر بالنسبة للمنصف الأول الذي معادلته $y=x$ صيغته المركبة هي $z'=i\bar{z}$ .

**طريقة :** لمعرفة طبيعة التحويل $f$ :

1. نبحث عن النقط الصامدة (النقط المضاعفة) إن وجدت.
2. إذا وجدت نقطة صامدة وحيدة $\Omega$ التي لاحقتها $\omega$ ، نعبر عن $z'-\omega$ بدلالة $z-\omega$ ثم نجد عبارة التحويل المعروفة.

# تطبيقات مباشرة محلولة

أربعة من علامات الإيمان:

حسن العفاف، والرضا بالكفاف، وحفظ اللسان، ومحبة الإخوان.


وأربعة من علامات النفاق:

قلة الديانة، وكثرة الخيانة، وغش الصديق، ونقض المواثيق.

# تمارين تدريبية محلولة

## المجموع والجداء

### التمرين رقم 01 :

أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة التالية:

1) $(5+3i)-2(2-7i)$    2) $(3-5i)-(1+2i)^2$    3) $(4+i)(3-i)(3+2i)$

### التمرين رقم 02 :

$z_1$ و $z_2$ عددان مركبان بحيث $z_1=1-2i$ و $z_2=-1+i\sqrt{3}$ .أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة التالية : $z_1+z_2$ , $z_1-z_2$ , $z_1 z_2$ , $(z_1)^2$

## حاصل القسمة :

### التمرين رقم 03 :

أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة التالية:

$$z_1=\frac{2-3i}{1+i}\ ;\ z_2=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\ ;\ z_3=\frac{1+i}{1-2i}+\frac{3+i}{2-i}$$

## طويلة عدد مركب

### التمرين رقم 04:

أحسب ( بدون آلة حاسبة) طويلة كلا من الأعداد المركبة التالية :

$$z_1=-2i\ ;\ z_2=\sqrt{3}-\sqrt{6}i\ ;\ z_3=\left(5-2i\sqrt{3}\right)(3-2i)\ ;\ z_4=\frac{1+4i}{2-3i}$$

الشيخ راه كبرمسكين
راه حاسب الآلة
الحاسبة فيها الطويلة

### التمرين رقم 05:

عين ( بدون آلة حاسبة)طويلة كلا من الأعداد المركبة التالية

$$z_1=\left(1+i\sqrt{3}\right)^4\ ;\ z_2=\left(\frac{1+2i}{3+4i}\right)^5\ ;\ z_3=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}{(1-i)^8}$$

### التمرين رقم 06:

أحسب ( بدون آلة حاسبة) طويلة كلا من الأعداد المركبة التالية :

$$z_1=(1+i)(\cos 17+i\sin 17)\ ;\ z_2=\frac{-3-3i}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}\ ;\ z_3=\frac{i^{1955}(1-2i)}{13\cos\frac{5\pi}{6}-13i\sin\frac{5\pi}{6}}$$

## مرافق عدد مركب

**التمرين رقم 07:**

أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الجبري:

$\overline{3i-2(2+5i)}$ ، $\overline{2i(4-i)(3+i)}$

منين اللي نقعد في الطاولة الأخيرة
كنت نسمع منافق ماهيش مرافق

**التمرين رقم 08:**

نضع $z_1 = 1-i$ و $z_2 = -3+2i$ . أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الجبري:

$iz_1 - 3\bar{z}_2$ ; $2i\bar{z}_1 + 3z_1 - \bar{z}_2$ ; $\overline{(1-i)(z_1+i) - i\bar{z}_1}$

**التمرين رقم 09:**

عين الأعداد المركبة التي مربعها يساوي مرافقها.

## طويلة ومرافق

**التمرين رقم 10:**

$z_1$ و $z_2$ عددان مركبان بحيث $|z_1| = |z_2| = 1$ و $1 + z_1 z_2 \neq 0$.

بين أن $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ هو عدد حقيقي.

**التمرين رقم 11: صحيح أم خاطئ**

أنا بلا ما نحل ران عارف
الصحيح هو juste والخطأ
هو Faux باينة بلا ما
نكسر راسي

1) $i^3 + i^2 + i + 1 = 0$

2) $(3+5i)(1-2i)(2-i)^2 = 35 - 55i$

3) $(i-1)^2$ حقيقي

4) مرافق $7i+5$ هو $7i-5$

5) $\dfrac{7-2i}{1-i} = \dfrac{9}{2} - \dfrac{5}{2}i$

6) $\dfrac{1+3i}{1-i} + \dfrac{2-i}{2+i} = -\dfrac{2}{5} + \dfrac{6}{5}i$

7) $\overline{(5+i)(2-3i)} = 13 - 13i$

8) إذا كان $z = 1+i$ فهو حل للمعادلة $2z - 3\bar{z} + 5 - 7i = 4 - 2i$

## المعادلات من الدرجة الأولى :

**التمرين رقم 12 :** حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية و اكتب الحل على الشكل الجبري

1) $(2+i)z = 7-i$ ، 2) $\dfrac{2}{3z-i} = -3+2i$ ، 3) $\dfrac{iz+2}{z-i} = 1+i$

## معادلات من الدرجة الأولى بالمرافق:

**التمرين رقم 13 :**

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية و اكتب الحل على الشكل الجبري

1) $(2+i)z = i\bar{z} - i - 3$ ، 2) $\dfrac{z+2i}{3\bar{z}-i} = -1-i$ ، 3) $z\bar{z} + 3(z-\bar{z}) - 10 + 6i = 0$

4) $i\bar{z} - 5i = \overline{(2i+5)z - 3i} + 5$

## حساب القوى الطبيعية للعدد المركب $i$

**التمرين رقم 14 :**

1. أحسب $i^3$ ; $i^4$ ; $i^5$ ; $i^6$ ; $i^7$ ; $i^8$ ; $i^9$ ; $i^{10}$ .
2. بين أنه إذا كان $n$ عددا طبيعيا غير معدوم و مضاعف للعدد 4 فإن $i^n = 1$ .
3. عين $i^n$ حسب قيم العدد الطبيعي $n$ غير المعدوم.
4. أحسب . $i^{2011} + i^{2012} + i^{2013}$
5. أحسب $(1+i)^{10}$ .

إذا كانت لك ذاكرة قوية ..وذكريات مريرة.. فأنت أشقى أهل الأرض

## عمدة عدد مركب :

**التمرين رقم 15 :**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. تُعطى النقط $A$ , $B$ , $C$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 1+i$ , $z_B = 1-i$ , $z_C = (1+\sqrt{3})i$ عين القيس الرئيسي للزاوية $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ .

**التمرين رقم 16 : صحيح أم خاطئ**

1) طويلة العدد المركب $\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{4}$ تساوي 1.

2) $\dfrac{\pi}{3}$ هي عمدة للعدد المركب $(1-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

3) عمدة $3-2i$ هي معاكسة لعمدة $3+2i$ .

4) $\dfrac{\pi}{2} - 5$ هي عمدة للعدد المركب $\sin 5 + i\cos 5$

5) $2013-\pi$ و $\dfrac{2013-\pi}{7\pi + 2012\sqrt{2} - 1433}$ لهما نفس العمدة .

## مجموعة النقط

**التمرين رقم 17:**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . $M(x,y)$ هي صورة العدد المركب $z$ حيث $z = x+iy$ نضع $Z = (1+i)z + 2\bar{z} - 3 + 4i$ .

1. أكتب $Z$ على الشكل الجبري.
2. عين $(\Delta_1)$ مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي حتى يكون $Z$ حقيقيا.

3. عين $(\Delta_2)$ مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي حتى يكون $Z$ تخيليا صرفا
4. أنشئ $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$.

**لا تعمل شيئا في السر تستحي منه في العلانية**

## التمرين رقم18:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$. $M(x,y)$ هي صورة العدد المركب $z$ حيث $z=x+iy$ . نضع $Z=z\bar{z}+6z-2i\bar{z}-15+6i$ .

1) أكتب $Z$ على الشكل الجبري.
2) عين $(\Delta)$ مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي حتى يكون $Z$ حقيقيا.
3) عين $(E)$ مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي حتى يكون $Z$ تخيليا صرفا
4) أنشئ $(\Delta)$ و $(E)$.

## التمرين رقم 19:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$. $M(x,y)$ هي صورة العدد المركب $z=x+iy$. نرفق بكل نقطة $M$ التي لاحقتها $z$ حيث $z\neq i$ أي $(x\,,y)\neq(0,1)$ النقطة $M'$ التي لاحقتها $Z$ حيث $Z=\dfrac{z+i}{z-i}$

1. أكتب $Z$ على الشكل الجبري.
2. عين $(\Delta)$ مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي حتى يكون $Z$ حقيقيا.
3. عين $(E)$ مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي حتى يكون $Z$ تخيليا صرفا
4. أنشئ $(\Delta)$ و $(E)$.

## التمرين رقم20 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$. عين ثم مثل مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $|z-3i|=2$ ، 2) $|\bar{z}-2+i|=1$ ، 3) $|z+3-i|=|z-2|$ ، 4) $|-iz+1-2i|=|z-4i|$

## التمرين رقم 21:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$ .

عين $E$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $\arg(z)\equiv-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ ، 2) $\arg(z)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ ، 3) $\arg(z)\equiv\dfrac{\pi}{6}[\pi]$ .

## التمرين رقم 22:

المستوي منسوب إلى معلم متعمد متجانس $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$. $z$ عدد مركب حيث $z=x+iy$.

نرفق بكل نقطة $M$ لاحقتها $z$ $(z\neq i)$ النقطة $M'$ لاحقتها $Z$ حيث $Z=\dfrac{z+1+i}{z-i}$ .

عين $(E)$ مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي حتى يكون $|Z|=1$ .

## ثلاث نقط من دائرة

**التمرين رقم 23 :**

$C, B, A$ نقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ لواحقها على الترتيب

$z_A=3+i$ ، $z_B=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ، $z_C=2-i\sqrt{2}$ .

بين أن النقط $C, B, A$ تنتمي إلى نفس الدائرة $(\Gamma)$ التي مركزها $H$ ذات اللاحقة 2 ويطلب تحديد طول نصف قطرها.

## ثلاث نقط في استقامية

**التمرين رقم 24:**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. $A, B, C$ نقط لواحقها على الترتيب :

$z_A=-1-3i$ , $z_B=2+3i$ , $z_C=1+i$

بين باستعمال الأعداد المركبة أن النقط $A, B, C$ في استقامية.

**التمرين رقم 25:**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. تعطى النقط $A, B, C$ التي لواحقها على الترتيب: $z_A=-2+i$ , $z_B=3+3i$ , $z_C=1+\dfrac{11}{5}i$.

أ) أحسب لاحقة كل من الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ ; $\overrightarrow{AB}$ .

ب) استنتج أن النقط $A, B, C$ في استقامية.

ت) أنشئ الشكل.

لوكان جاو 2 نقط نعرف
أنبيّنهم على استقامية

## متوازي أضلاع :

**التمرين رقم 26:**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. علّم النقط $A$ , $B$ , $C$ , $D$ التي لواحقها على الترتيب: $z_A=-2+i$ , $z_B=1+2i$ , $z_C=3-2i$ , $z_D=-3i$ .

بين أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

### البخيل والعدد الأولي

أحد البخلاء عندما تزوج سافر ليقضي شهر العسل لوحده ، سأله صهره وهو أستاذ رياضيات لماذا لا تأخذ زوجتك معك ؟ فرد البخيل وكان طالبا عنده : أنا عدد أولي الذي له قاسمين فقط هو أنا (1) ونفسي.

**التمرين رقم 27:**

علّم النقط $A$ , $B$ , $C$ التي لواحقها على الترتيب: $z_A=-1+i$ , $z_B=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ , $z_C=1+3i$

عين لاحقة النقطة $D$ حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

## مربـــــــع

**التمرين رقم 28:**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ . علّم النقط $A$ , $B$ , $C$ , $D$ التي لواحقها على الترتيب: $z_A=1+i$ , $z_B=-2i$ , $z_C=-3-i$ , $z_D=-2+2i$ .

بين أن الرباعي $ABCD$ هو مربع .

## مركز الثقل :

**التمرين رقم 29:**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. تُعطى النقط $A$ , $B$ , $C$ , $D$ التي لواحقها على الترتيب: $z_A=1+2i$ , $z_B=-1-4i$ , $z_C=-5i$ ، $z_D$ .

عين لاحقة النقطة $D$ حتى تكون $C$ مركز ثقل المثلث $ABD$ .

## مرجـــــــح 3 نقط

**التمرين رقم 30:**

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط $A$ , $B$ , $C$ التي لواحقها على الترتيب: $z_A=3+2i$ ، $z_B=-1+3i$ ، $z_C=-2-2i$

أوجد $z_G$ لاحقة النقطة $G$ مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-3),(C,5)\}$

**التمرين رقم 31:**

$A$ , $B$ , $C$ نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب $3i$ , $-3i$ , $2-3i$

1. عين لاحقة النقطة $G$ مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,2);(C,-2)\}$ .
2. عين مجموعة النقط $M$ من المستوي بحيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=4$

## إنشاء نقط إحداثياتها أعدادا صماء

**التمرين رقم 32 :**

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ علّم بدون أي حساب وبدون قيم تقريبية وباستعمال الطويلة فقط للنقط: $A$ , $B$ , $C$ التي لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ ، $z_B=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ ، $z_C=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

**التمرين رقم 33 :**

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O\,,\vec{u}\,,\vec{v}\right)$ علّم بدون أي حساب وبدون قيم تقريبية وباستعمال الطويلة فقط النقط: $C\,,B\,,A$ التي لواحقها على الترتيب:

$z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=2\sqrt{3}-2i$ ، $z_C=-\sqrt{3}+i$

## طبيعة مثلث باستعمال الطويلة

**التمرين رقم 34:**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O\,,\vec{u}\,,\vec{v}\right)$. تعطى النقط $A,B,C$ التي لواحقها على الترتيب. $z_A=-1+i$ , $z_B=3+i$ , $z_C=-1+5i$

ما هي طبيعة المثلث $ABC$ ؟.

## معادلات من الدرجة الثانية :

**التمرين رقم 35:** حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية

1) $z^2-5z+6=0$ ، 2) $z^2+2z+11=0$ ، 3) $z^2-\left(1+\sqrt{3}\right)z+\sqrt{3}=0$

**التمرين رقم 36 :**

1) أعط الشكل الجبري للعدد المركب $\left(2+3i\right)^2$ .

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2=5-12i$

**التمرين رقم 37:**

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2z\cos\alpha+1=0$ حيث $\alpha$ عدد حقيقي ثابت من المجال $\left]0\,,\pi\right[$ .

## معادلات تؤول إلى معادلة من الدرجة الثانية

**التمرين رقم 38 :**

حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

1) $|z|^2-5z+3=0$ ، 2) $z^3-3z^2+7z=0$ ، 3) $2-\dfrac{1}{z}=2z$ .

## معادلات من الدرجة الثالثة :

**التمرين رقم 39 :**

1) عين الأعداد الحقيقية $a\,,b\,,c$ بحيث من أجل كل عدد مركب $z$ لدينا :

$z^3+3z^2-3z-14=\left(z-2\right)\left(az^2+bz+c\right)$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3+3z^2-3z-14=0$

**التمرين رقم 40 :**

$P(z)$ كثير حدود في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ حيث : $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$

1) أحسب $P(-1)$.

2) عين الأعداد الحقيقية $a\ ;\ b\ ;\ c$ بحيث : $(z+1)(az^2+bz+c)$ .

3) حل المعادلة $P(z)=0$.

## معادلات من الدرجة الرابعة :

### التمرين رقم 41 :

أنشر $(z^2-3z+2)(z^2+z+3)$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^4-2z^3+2z^2-7z+6=0$

### التمرين رقم 42 :

الهدف من هذا التمرين هو حل المعادلة $(E)$ في $\mathbb{C}$ التالية : $z^4-2z^3+9z^2-8z+20=0$ .

1) بين أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية $a\ ,\ b\ ,\ c$ بحيث من أجل كل عدد مركب $z$ :
$z^4-2z^3+9z^2-8z+20=(z^2+4)(az^2+bz+c)$ .

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$ .

### التمرين رقم 43 : صحيح أم خاطئ

برّر ببرهان أو بمثال مضاد :

1) العدد $(1+i)^{256}$ هو عدد حقيقي.

2) الجزء الحقيقي للعدد المركب $\dfrac{1-3i}{4-3i}$ هو $\dfrac{1}{4}$ .

3) صورتا حلول المعادلة $z^2-3z+5=0$ متناظرتين بالنسبة إلى محور الفواصل.

4) مجموعة الأعداد المركبة $z$ المختلفة عن 4 بحيث يكون العدد $\dfrac{z-3i+1}{4-z}$ حقيقيا هي مجموعة لواحق النقط من المستقيم الذي معادلته $y=-0,6x+2,4$ .

5) مجموعة الأعداد المركبة $z$ المختلفة عن 4 بحيث يكون العدد $\dfrac{z-3i+1}{4-z}$ تخيليا صرفا هي مجموعة لواحق النقط من الدائرة التي مركزها $H$ التي لاحقتها $z_H=-5+3i$ وطول نصف قطرها يساوي 1 .

## الشكل المثلثي لعدد مركب غيرمعدوم :

### التمرين رقم 44 :

أكتب على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسي كل من الأعداد المركبة التالية :

1) $z_1=3+3i$ ، 2) $z_2=-\sqrt{6}-i\sqrt{2}$ ، 3) $z_3=-4\sqrt{3}+4i$ ، 4) $z_4=3\sqrt{3}-3i$

### التمرين رقم 45 :

أكتب على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسي كل من الأعداد المركبة التالية :

$z_3=(1+i\sqrt{3})(-1-i)$ , $z_2=\dfrac{i}{1+i}$ , $z_1=\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$

**التمرين رقم 46 :**

أكتب على الشكل المثلثي الأعداد المركبة التالية :

$$z_1=-4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad , \quad z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_3=4\left(\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}\right) \quad , \quad z_4=-4\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)$$

حكمة قوية
لا تجعل قلبك مثل النهر يشرب منه من يشاء و اجعل قلبك مثل البحر لا يشرب منه إلا الغارق فيه

**التمرين رقم 47:**

نضع $a=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ .

1) أحسب $a^2$ واكتب النتيجة على الشكل الجبري.

2) بين أن $a^2=4e^{i\frac{\pi}{4}}$ واستنتج الطويلة وعمدة للعدد المركب $a$ .

3) استنتج القيم المضبوطة لكل من $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$

**التمرين رقم 48 :**

عين الشكل المثلثي للعدد المركب $z=(1+i)\left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)$

## الإنتقال من الشكل المثلثي إلى الشكل الجبري

**التمرين رقم 49 :**

أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة التالية : $z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ،

$$z_1=4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$z_3=8\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right) \quad ، \quad z_2=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

**التمرين رقم 50** أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة التالية :

$$z_4=2e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad ، \quad z_2=8e^{i\frac{7\pi}{6}} \quad ، \quad z_1=4e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad ، \quad z_0=6e^{i\frac{\pi}{3}}$$

## الإنتقال من الشكل الجبري إلى الشكل الأسي

**التمرين رقم 51** اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة التالية :

1) $z_0=-3-3i$ ، 2) $z_1=-2\sqrt{3}+2i$ ، 3) $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ ، 4) $z_3=-2i$

## تمرين متعدد الإختيارات

**التمرين رقم 52** في كل سؤال يوجد جواب واحد فقط صحيح، عينه بدون تبرير

$A$ و $B$ نقطتان لاحقتاهما على الترتيب $z_1=1-i\sqrt{3}$ و $z_2=-\sqrt{3}+i$

| | الجواب أ | الجواب ب | الجواب ج |
|---|---|---|---|
| السؤال رقم 01: طويلة $z_1$ وعمدته هما | 2 و $\frac{\pi}{3}$ | $\sqrt{2}$ و $-\frac{\pi}{3}$ | 2 و $-\frac{\pi}{3}$ |
| السؤال رقم 02: الشكل الجبري لـ $\frac{z_1}{z_2}$ | $\frac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}$ |
| السؤال رقم 03: عمدة $\frac{z_2}{z_1}$ هي | $-\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| السؤال رقم 04: مجموعة النقط $M$ من المستوى ذات اللاحقة $z$ والتي تحقق $\|z-z_1\|=2$ هي | المستقيم $(AB)$ | الدائرة ذات المركز $A$ | نصف المستقيم الذي مبدؤه $A$ |
| السؤال رقم 05: مجموعة النقط $M$ من المستوى ذات اللاحقة $z$ والتي تحقق $\arg z \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ هي | المستقيم $(AB)$ | الدائرة ذات المركز $O$ | نصف مستقيم مستثنى من مبدئه |
| السؤال رقم 06: المعادلة $z^2-4z+7=0$ | ليس لها حلول | تقبل حلين هما $2-\sqrt{3}$ و $2+\sqrt{3}$ | تقبل حلين هما $2-i\sqrt{3}$ و $2+i\sqrt{3}$ |

## طبيعة مثلث باستعمال العمدة والعبارة $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$

**التمرين رقم 53:** في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-1$ ، $z_B=2+i\sqrt{3}$ ، $z_C=2-i\sqrt{3}$ ، $z_D=3$

1) عين الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ واستنتج طبيعة المثلث $ABC$.

2) عين الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}$ واستنتج طبيعة المثلث $DAC$.

**التمرين رقم 54 :** في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-2+3i$ ، $z_B=1-i$ ، $z_C=4+3i$. عين الطويلة للعدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ واستنتج طبيعة المثلث $ABC$.

**التمرين رقم 55 :** في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط ، نعتبر النقط $A$ , $B$ , $C$ التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=-1+2i$ , $z_B=2+2i$ , $z_C=2+5i$

- عين الطويلة وعمدة للعدد المركب $\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ واستنتج طبيعة المثلث $ABC$.

**التمرين رقم 56:** في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط $A$ , $B$ , $C$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-1+i$ , $z_B=3+3i$ , $z_C=1+5i$

- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ واستنتج طبيعة المثلث $ABC$.

**التمرين رقم 57 :**

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط $A$ , $B$ , $C$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-2-i$ , $z_B=1+2i$ , $z_C=2+3i$

- أكتب على الشكل الجبري للعدد المركب $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ واستنتج أن النقط $A$ , $B$ , $C$ في استقامية.

## التحويلات النقطية

**التمرين رقم 58 :** عين طبيعة كل تحويل من التحويلات النقطية التالية مع ذكر العناصر المميزة لكل منها.

1) $f_1:z\mapsto z-2+5i$ ، 2) $f_2:z\mapsto iz+5+i$ ، 3) $f_3:z\mapsto 2z+6-4i$ .

## حيلة شرعية

ذهب تلميذ بليد إلى محل بيع الفاكهة المجاور لبيته،وقال للبائع:من فضلك زن لي 5 كيلو موز و3 كيلو تفاح و 6 كيلو برتقال.فقام التاجر بوزن ما طلبه التلميذ ووضعه في كيس كبير،فسأله التلميذ:كم يكون وزن الكيس الكبير؟
فقال التاجر:14 كيلو غرام.قال التلميذ:حسناً،إحتفظ بكيس الفاكهة لك،فلا أريده،فقد كانت مسألة حسابية في كتاب الرياضيات ولم أكن أعرف الجواب.

# حلول التمارين التدريبية

**حل التمرين رقم 01 :**

1) $(5+3i)-2(2-7i)=5+3i-4+14i=1+17i$

2) $(3-5i)-(1+2i)^2=3-5i-1-4i-4i^2=2-9i+4=6-9i$

3) $(4+i)(3-i)(3+2i)=(12-4i+3i-i^2)(3+2i)$

$=(13-i)(3+2i)=39+26i-3i-2i^2=41+23i$

**حل التمرين رقم 02 :**

$z_1+z_2=1-2i-1+i\sqrt{3}=\left(-2+\sqrt{3}\right)i$ ،

$z_1-z_2=1-2i+1-i\sqrt{3}=2-\left(2+\sqrt{3}\right)i$

$z_1z_2=(1-2i)\left(-1+i\sqrt{3}\right)=-1+i\sqrt{3}+2i-2i^2\sqrt{3}=\left(-1+2\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)i$

$(z_1)^2=(1-2i)^2=1-4i+4i^2=1-4i-4=-3-4i$

**حل التمرين رقم 03 :**

$$z_1=\frac{2-3i}{1+i}=\frac{2-3i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{2-2i-3i-3}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$$

$$z_2=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\times\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}=\frac{3-2\sqrt{3}i-1}{3+1}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_3=\frac{1+i}{1-2i}+\frac{3+i}{2-i}=\frac{1+i}{1-2i}\times\frac{1+2i}{1+2i}+\frac{3+i}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i}=\frac{1+2i+i-2}{1+4}+\frac{6+3i+2i-1}{4+1}$$

$$z_3=\frac{-1+3i}{5}+\frac{5+5i}{5}=\frac{4}{5}+\frac{8}{5}i$$

**حل التمرين رقم 04:**

$|z_1|=|-2i|=\sqrt{0+4}=\sqrt{4}=2$

$|z_2|=\left|\sqrt{3}-\sqrt{6}i\right|=\sqrt{3+6}=\sqrt{9}=3$

$|z_3|=\left|\left(5-2i\sqrt{3}\right)(3-2i)\right|=\left|\left(5-2i\sqrt{3}\right)\right|\left|(3-2i)\right|$

$=\left(\sqrt{25+12}\right)\left(\sqrt{9+4}\right)=\sqrt{37}\times\sqrt{13}=\sqrt{481}$

$$|z_4|=\left|\frac{1+4i}{2-3i}\right|=\frac{|1+4i|}{|2-3i|}=\frac{\sqrt{1+16}}{\sqrt{4+9}}=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{13}}=\sqrt{\frac{17}{13}}.$$

**حل التمرين رقم 05:**

$$|z_1|=\left(\left|1+i\sqrt{3}\right|\right)^4=\left(\sqrt{1+3}\right)^4=2^4=16$$

$$|z_2|=\left(\frac{|1+2i|}{|3+4i|}\right)^5=\frac{\left(\sqrt{1+4}\right)^5}{\left(\sqrt{9+16}\right)^5}=\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^5=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^5=\frac{1}{25\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{125}$$

$$|z_3|=\frac{\left(\left|1+i\sqrt{3}\right|\right)^4}{\left(|1-i|\right)^8}=\frac{\left(\sqrt{1+3}\right)^4}{\left(\sqrt{1+1}\right)^8}=\frac{2^4}{\left(\sqrt{2}\right)^8}=\frac{16}{16}=1$$

**حل التمرين رقم 06:**

$$|z_1|=|(1+i)||(\cos 17+i\sin 17)|=\sqrt{1+1}\times\sqrt{\cos^2 17+\sin^2 17}=\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$$

$$|z_2|=\frac{|-3-3i|}{\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|}=\frac{\sqrt{9+9}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$|z_3|=\frac{|i^{1955}||(1-2i)|}{\left|13\cos\frac{5\pi}{6}-13i\sin\frac{5\pi}{6}\right|}=\frac{1\times\sqrt{5}}{13\sqrt{\left(\cos^2\frac{5\pi}{6}+\sin^2\frac{5\pi}{6}\right)}}=\frac{\sqrt{5}}{13}$$

**حل التمرين رقم 07:**

$$\overline{3i-2(2+5i)}=\overline{3i-4-10i}=\overline{-4-7i}=-4+7i$$

$$\overline{2i(4-i)(3+i)}=\overline{(8i+2)(3+i)}=\overline{24i-8+6+2i}=\overline{-2+26i}=-2-26i$$

$$\overline{(1+2i)^2+(1-i)^2}=\overline{1+4i-4+1-2i-1}=\overline{-3+2i}=-3-2i$$

**حل التمرين رقم 08:**

$$iz_1-3\overline{z_2}=i(1-i)-3(-3-2i)=i+1+9+6i=10+7i$$

$$2i\overline{z_1}+3z_1-\overline{z_2}=2i(1+i)+3(1-i)-(-3-2i)=4+i$$

$$\overline{(1-i)(z_1+i)-i\overline{z_1}}=\overline{(1-i)}\,\overline{(z_1+i)}-\overline{i\overline{z_1}}=(1+i)\left(\overline{z_1}-i\right)+iz_1$$

$$=(1+i)(1+i-i)+i(1-i)=1+i+i+1=2+2i$$

**حل التمرين رقم 09:**

ليكن العدد المركب $z=a+ib$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان.

المطلوب هو إيجاد الأعداد المركبة التي تحقق $z^2=\overline{z}$ .

$z^2=\overline{z}$ تكافئ $(a+ib)^2=a-ib$ . ننشر فنجد $a^2-b^2+2iab=a-ib$ ومنه
$\begin{cases}a^2-b^2=a\\2ab=-b\end{cases}$ .

$\begin{cases}a^2-b^2=a\\2ab=-b\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}a^2-b^2=a\\(2a+1)b=0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}a^2-b^2=a\\b=0\end{cases}$ أو $\begin{cases}a^2-b^2=a\\2a+1=0\end{cases}$ .

- $\begin{cases}a^2-b^2=a\\b=0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$ أو $\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$ أي $z=0$ أو $z=1$ .

- $\begin{cases}a^2-b^2=a\\2a+1=0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}a^2-b^2=a\\a=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=b^2\\a=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ أي $\begin{cases}\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=b^2\\a=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$\begin{cases}b^2=\dfrac{3}{4}\\a=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

وهذه الأخيرة تكافئ $\begin{cases}b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\a=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ أو $\begin{cases}b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\a=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ وبالتالي $z=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ أو $z=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .

وفي النهاية الأعداد المركبة التي مربعها يساوي مرافقها هي :

$z=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ , $z=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ , $z=1$ , $z=0$ .

## حل التمرين رقم 10:

طريقة : $Z$ حقيقي معناه $Z=\overline{Z}$

نعلم أن $|z_1|=1$ معناه كذلك $z_1\overline{z_1}=1$ أي $\overline{z_1}=\dfrac{1}{z_1}$ . وبالمثل $|z_2|=1$ معناه كذلك $z_2\overline{z_2}=1$ أي

$$Z=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=\frac{\dfrac{1}{\overline{z_1}}+\dfrac{1}{\overline{z_2}}}{1+\dfrac{1}{\overline{z_1}}\dfrac{1}{\overline{z_2}}}=\frac{\dfrac{\overline{z_2}+\overline{z_1}}{\overline{z_2}\,\overline{z_1}}}{\dfrac{\overline{z_2}\,\overline{z_1}+1}{\overline{z_2}\,\overline{z_1}}}=\frac{\overline{z_2}+\overline{z_1}}{\overline{z_2}\,\overline{z_1}+1}=\overline{Z}\,.\,z_2=\frac{1}{\overline{z_2}}$$

ومنه $Z=\overline{Z}$ وبالتالي $Z$ حقيقي.

## حل التمرين رقم 11:

1) **صحيح** : لأن $i^3+i^2+i+1=i\times i^2-1+i+1=-i-1+i+1=0$ .

2) صحيح : لأن $(3+5i)(1-2i)(2-i)^2=(13-i)(3-4i)=35-55i$

3) خاطئ : لأن $(i-1)^2=-2i$ وهو تخيلي صرف.

4) خاطئ : لأن مرافق $7i+5$ هو $5-7i$ .

5) خاطئ : لأن $\frac{7-2i}{1-i}=\frac{9}{2}+\frac{5}{2}i$

6) صحيح : لأن $\frac{1+3i}{1-i}+\frac{2-i}{2+i}=-1+2i+\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i=-\frac{2}{5}+\frac{6}{5}i$

7) خاطئ : لأن $\overline{(5+i)(2-3i)}=\overline{13-13i}=13+13i$

8) صحيح : لأن $2(1+i)-3(1-i)+5-7i=4-2i$

**حل التمرين رقم 12:**

1) $(2+i)z=7-i$ تكافئ $z=\frac{7-i}{2+i}=\frac{(7-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{13}{5}-\frac{9}{5}i$ .

**وأخيرا مجموعة حلول المعادلة** $(2+i)z=7-i$ **هي** $\left\{\frac{13}{5}-\frac{9}{5}i\right\}$

2) $\frac{2}{3z-i}=-3+2i$ تكون هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان $3z-i\neq 0$ أي $z\neq\frac{1}{3}i$.

من أجل $z\neq\frac{1}{3}i$ فإن $\frac{2}{3z-i}=-3+2i$ تكافئ $(-3+2i)(3z-i)=2$ تكافئ

$-9z+3i+6iz+2=2$ تكافئ $(-9+6i)z=-3i$ أي

$z=\frac{-3i}{-9+6i}=\frac{-i}{-3+2i}=\frac{-i(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}=-\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$ .

**وأخيرا مجموعة حلول المعادلة** $\frac{2}{3z-i}=-3+2i$ **هي** $\left\{-\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i\right\}$

3) $\frac{iz+2}{z-i}=1+i$ معرفة من أجل $z\neq i$ .

من أجل كل عدد مركب $z\neq i$ فإن $\frac{iz+2}{z-i}=1+i$ تكافئ $iz+2=(1+i)(z-i)$

تكافئ $iz+2=z-i+iz+1$ تكافئ $z=1+i$

**وأخيرا مجموعة حلول المعادلة** $\frac{iz+2}{z-i}=1+i$ **هي** $\{1+i\}$ .

**حل التمرين رقم 13 :**

**1)** $(2+i)z=i\bar{z}-i-3$ . نضع $z=x+yi$ و منه $\bar{z}=x-yi$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

إذن المعادلة $(2+i)z=i\bar{z}-i-3$ تكافئ $(2+i)(x+yi)=i(x-yi)-i-3$

تكافئ $2x-y+i(x+2y)=(y-3)+i(x-1)$ **تكافئ** $\begin{cases}2x-y=y-3\\ x+2y=x-1\end{cases}$ **تكافئ** $x=-2$ و

$y=-\frac{1}{2}$ أي $z=-2-\frac{1}{2}i$ .

**إذن مجموعة حلول المعادلة** $(2+i)z=i\bar{z}-i-3$ **هي** $S=\left\{-2-\frac{1}{2}i\right\}$

**2)** $\frac{z+2i}{3\bar{z}-i}=-1-i$ **معرفة من أجل** $3\bar{z}-i\neq 0$ أي $\bar{z}\neq\frac{1}{3}i$ أي $z\neq-\frac{1}{3}i$ .

من أجل $z\neq-\frac{1}{3}i$ ، نضع $z=x+yi$ و منه $\bar{z}=x-yi$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ فإن

$\frac{z+2i}{3\bar{z}-i}=-1-i$ تكافئ $z+2i=(-1-i)(3\bar{z}-i)$ أي

$x+iy+2i=(-1-i)(3(x-iy)-i)$ بعد النشر والتبسيط نجد

$x+(y+2)i=(-3x-3y-1)+(-3x+3y+1)i$ أي $\begin{cases}x=-3x-3y-1\\ y+2=-3x+3y+1\end{cases}$ ومنه

$x=-\frac{5}{17}$ و $y=\frac{1}{17}$ أي $z=-\frac{5}{17}+\frac{1}{17}i$ . **إذن مجموعة حلول المعادلة** $\frac{z+2i}{3\bar{z}-i}=-1-i$ **هي**

$S=\left\{-\frac{5}{17}+\frac{1}{17}i\right\}$ .

**3)** $z\bar{z}+3(z-\bar{z})-10+6i=0$ نضع $z=x+yi$ و منه $\bar{z}=x-yi$ حيث

$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ . $z\bar{z}+3(z-\bar{z})-10+6i=0$ تكافئ

$(x+iy)(x-iy)+3(x+iy-x+iy)-10+6i=0$ تكافئ

نحصل على $x^2+y^2+6iy=10-6i$ $\begin{cases}x^2+y^2=10\\ 6y=-6\end{cases}$ أي $\begin{cases}x^2=9\\ y=-1\end{cases}$

ومنه $y=-1$ و ($x=3$ أو $x=-3$). وأخيرا $z=-3-i$ أو $z=3-i$

**إذن مجموعة حلول المعادلة** $z\bar{z}+3(z-\bar{z})-10+6i=0$ **هي** $S=\{-3-i\ ;\ 3-i\}$ .

**4)** $i\bar{z}-5i=\overline{(2i+5)z-3i}+5$ **تكافئ** $i\bar{z}-5i=(5-2i)\bar{z}+3i+5$ **تكافئ**

$i\bar{z}-(5-2i)\bar{z}=3i+5i+5$ **تكافئ** $(i-5+2i)\bar{z}=8i+5$ **ومنه**

$\bar{z}=\frac{5+8i}{-5+3i}=\frac{(5+8i)(-5-3i)}{(-5+3i)(-5-3i)}=-\frac{1}{34}-\frac{55}{34}i$ أي

$z=-\frac{1}{34}+\frac{55}{34}i$

**حل التمرين رقم 14 :**

1) $i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$ ; $i^4 = i^2 \times i^2 = 1$ ; $i^5 = i^4 \times i = i$

$i^6 = i^5 \times i = i^2 = -1$ ; $i^7 = i^6 \times i = -i$ ; $i^8 = \left(i^2\right)^4 = (-1)^4 = 1$

$i^9 = i^8 \times i = i$ ; $i^{10} = i^9 \times i = i^2 = -1$

2) إذا كان $n$ مضاعف للعدد 4 فإنه يكتب على الشكل $n = 4k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ وبالتالي

$i^n = i^{4k} = \left(i^4\right)^k = (1)^k = 1$

3)

- إذا كان $n = 4k$ فإن $i^n = i^{4k} = \left(i^4\right)^k = (1)^k = 1$.
- إذا كان $n = 4k+1$ فإن $i^n = i^{4k+1} = i^{4k} \times i^1 = 1 \times i = i$.
- إذا كان $n = 4k+2$ فإن $i^n = i^{4k+2} = i^{4k} \times i^2 = 1 \times i^2 = -1$.
- إذا كان $n = 4k+3$ فإن $i^n = i^{4k+3} = i^{4k} \times i^3 = 1 \times i^3 = -i$.

4) حساب $i^{2011} + i^{2012} + i^{2013}$. لدينا:

$2011 = 4 \times 502 + 3$ من الشكل $4k+3$ إذن $i^{2011} = -i$

$2012 = 4 \times 503$ من الشكل $4k$ إذن $i^{2012} = 1$

$2013 = 4 \times 503 + 1$ من الشكل $4k+1$ إذن $i^{2013} = i$

وبالتالي : $i^{2011} + i^{2012} + i^{2013} = -i + 1 + i = 1$

**ملاحظة :** يمكن حساب $i^{2011} + i^{2012} + i^{2013}$ بالطريقة التالية :

$$i^{2011} = i(i^{2010}) = i\left(i^2\right)^{1005} = i(-1)^{1005} = i(-1) = -i$$

$$i^{2012} = \left(i^2\right)^{1006} = (-1)^{1006} = 1$$

$$i^{2013} = i(i^{2012}) = i\left(i^2\right)^{1006} = i(1) = i$$

إذن $i^{2011} + i^{2012} + i^{2013} = -i + 1 + i = 1$.

5) $(1+i)^{10} = \left[(1+i)^2\right]^5 = (1+2i-1)^5 = (2i)^5 = 32i^5 = 32i$

**حل التمرين رقم 15 :**

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \arg\frac{i + i\sqrt{3} - 1 - i}{1 - i - 1 - i} = \arg\frac{-1 + i\sqrt{3}}{-2i} = \arg\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

و $-\frac{5\pi}{6}$ هي عمدة للعدد المركب $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ إذن $-\frac{5\pi}{6}$ هو قيس رئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

## حل التمرين رقم 16:

1) **خاطئ** : لأن $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2=\left|\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{4}\right|^2$ .

2) **خاطئ** : لأن الكتابة $\left(1-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ ليست شكل أسي باعتبار العدد الحقيقي $\left(1-\sqrt{2}\right)$ سالب تماما.

3) **صحيح** : من الدرس عددان مركبان مترافقان لهما عمدتان متعاكستان.

4) **صحيح** : لأن $\sin 5+i\cos 5=\cos\left(\frac{\pi}{2}-5\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-5\right)$ .

5) **صحيح** : من الدرس رأينا أنه من أجل كل عدد حقيقي $k$ موجب تماما ومن أجل كل عدد مركب غير معدوم $z$ فإن $z$ و $kz$ لهما نفس العمدة.

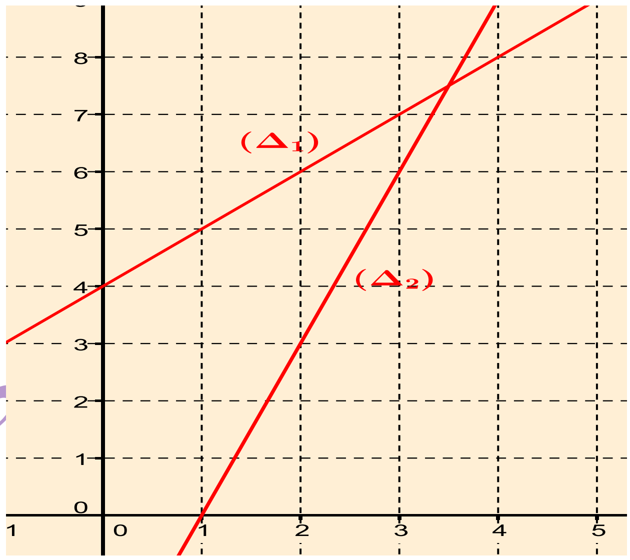
## حل التمرين رقم 17:

1) $Z=(1+i)z+2\bar{z}-3+4i=(1+i)(x+iy)+2(x-iy)-3+4i$ بعد النشر والتبسيط نجد $Z=3x-y-3+i(x-y+4)$

2) يكون $Z$ حقيقيا إذا وفقط إذا كان $x-y+4=0$ وبالتالي $(\Delta_1)$ مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي حتى يكون $Z$ حقيقيا هي المستقيم الذي معادلته $x-y+4=0$.

3) يكون $Z$ تخيليا صرفا إذا وفقط إذا كان $3x-y-3=0$ وبالتالي $(\Delta_2)$ مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي حتى يكون $Z$ تخيليا صرفا هي المستقيم الذي معادلته $3x-y-3=0$.

4) إنشاء $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$.




## حل التمرين رقم 18 :

1) $Z=z\bar{z}+6z-2i\bar{z}-15+6i$ تكافئ

$$Z=(x+iy)(x-iy)+6(x+iy)-2i(x-iy)-15+6i$$

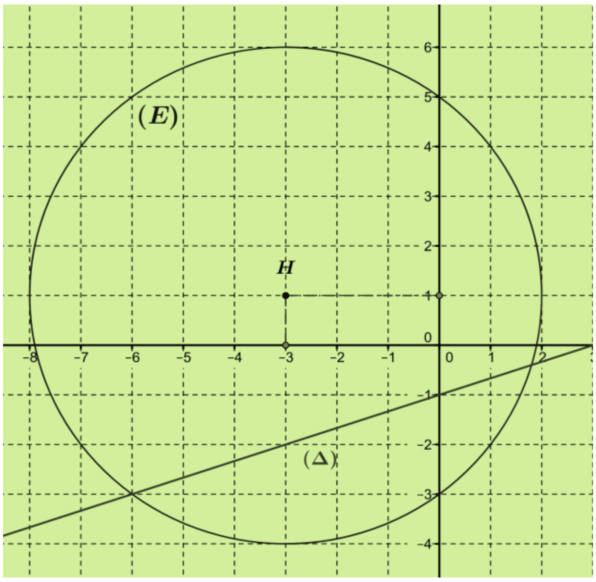
بعد النشر والتبسيط نجد $Z=x^2+y^2+6x-2y-15+(-2x+6y+6)i$

2) يكون $Z$ حقيقيا إذا وفقط إذا كان $-2x+6y+6=0$ أي $-x+3y+3=0$ وبالتالي $(\Delta)$ مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي حتى يكون $Z$ حقيقيا هي المستقيم الذي معادلته $-x+3y+3=0$.

3) يكون $Z$ تخيليا صرفا إذا وفقط إذا كان $x^2+y^2+6x-2y-15=0$ نكتبها على الشكل : $(x+3)^2+(y-1)^2=25$ وبالتالي $(E)$ مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي حتى يكون $Z$ تخيليا صرفا

هي الدائرة ذات المعادلة $(x+3)^2+(y-1)^2=25$ مركزها النقطة $H(-3\,,\,1)$ وطول نصف قطرها 5 .

إنشاء $(\Delta)$ و $(E)$.




حل التمرين رقم 19:

1) الشكل الجبري للعدد المركب $Z$ من أجل $z\neq i$ : $Z=\dfrac{z+i}{z-i}=\dfrac{x+iy+i}{x+iy-i}=\dfrac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i}$

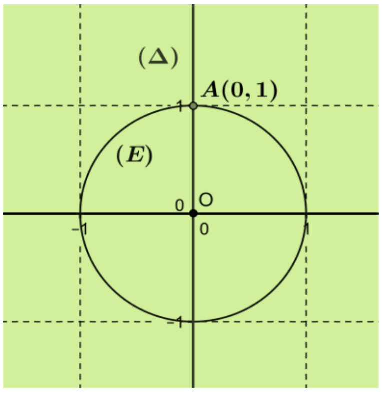
إذن $Z=\dfrac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i}\times\dfrac{x-(y-1)i}{x-(y-1)i}=\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}+\dfrac{2x}{x^2+(y-1)^2}i$

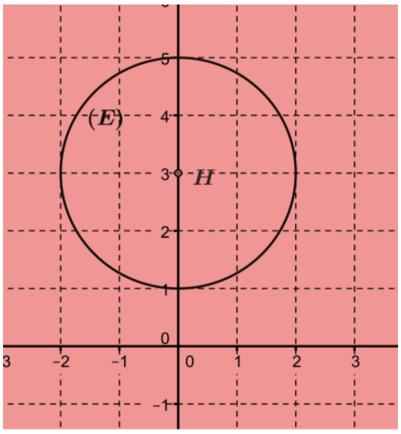
2) يكون $Z$ حقيقيا إذا وفقط إذا كان $2x=0$ و $(x\,,\,y)\neq(0,1)$ وبالتالي $(\Delta)$ مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي حتى يكون $Z$ حقيقيا هي المستقيم الذي معادلته $x=0$ باستثناء النقطة $A(0,1)$ .

3) يكون $Z$ تخيليا صرفا إذا وفقط إذا كان $x^2+y^2-1=0$ و $(x\,,\,y)\neq(0,1)$

وبالتالي $(E)$ مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي حتى يكون $Z$ تخيليا صرفا هي الدائرة ذات

المعادلة $x^2+y^2-1=0$ مركزها النقطة $O(0\,,0)$ وطول نصف قطرها 1 باستثناء النقطة $A(0,1)$ .




**حل التمرين رقم 20 :**

2) $|z-3i|=2$

**الطريقة 01 :** لتكن $H$ النقطة التي لاحقتها $z_H=3i$ .

$|z-3i|=2$ تكافئ $|z-(3i)|=2$ تكافئ $|z-z_H|=2$

تكافئ $HM=2$ إذن مجموعة النقط $M$ هي دائرة مركزها $H$ وطول نصف قطرها 2.

**الطريقة 02 :** $|z-3i|=2$ تكافئ $|x+iy-3i|=2$ تكافئ $|x+(y-3)i|=2$ تكافئ

$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2$ وبتربيع الطرفين نحصل على $x^2+(y-3)^2=4$ .

وأخيرا مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ التي تحقق $|z-3i|=2$ هي الدائرة $(E)$ التي مركزها $H(0,3)$ وطول نصف قطرها 2.

3) $|\bar{z}-2+i|=1$

**الطريقة الأولى:** $|\bar{z}-2+i|=1$ **تكافئ** $\left|\overline{\bar{z}-2+i}\right|=\bar{1}$ **تكافئ** $|z-2-i|=1$

لتكن $H$ النقطة التي لاحقتها $z_H=2+i$ .

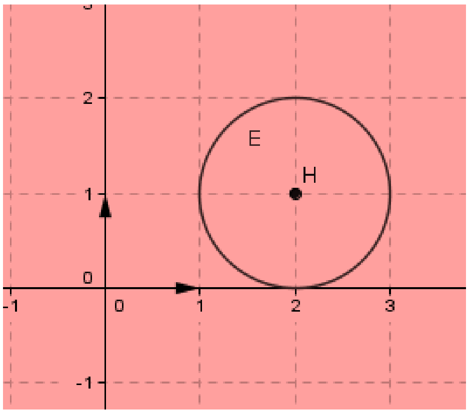
$|z-2-i|=1$ تكافئ $|z-(2+i)|=1$ تكافئ $|z-z_H|=1$ تكافئ $HM=1$ وهي دائرة مركزها $H$ وطول نصف

قطرها 1.

**الطريقة الثانية** $|\bar{z}-2+i|=1$ تكافئ $|x-iy-2+i|=1$ تكافئ $|(x-2)+(-y+1)i|=1$ تكافئ

$\sqrt{(x-2)^2+(-y+1)^2}=1$ وبتربيع الطرفين نحصل على $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ .

وأخيرا مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ التي تحقق $|\bar{z}-2+i|=1$ هي الدائرة $(E)$ التي مركزها $H(2,1)$ وطول نصف قطرها 1.




3) $|z+3-i|=|z-2|$

**الطريقة 01:** لتكن $A$ النقطة ذات اللاحقة $z_A=-3+i$ و $B$ النقطة ذات اللاحقة $z_B=2$

$|z+3-i|=|z-2|$ تكافئ $|z-(-3+i)|=|z-2|$ تكافئ $|z-z_A|=|z-z_B|$ تكافئ $AM=BM$.

وأخيرا مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ التي تحقق $|z+3-i|=|z-2|$ هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

**الطريقة 02 :**

$|z+3-i|=|z-2|$ تكافئ $|x+iy+3-i|=|x+iy-2|$ تكافئ

$|(x+3)+(y-1)i|=|(x-2)+yi|$ تكافئ

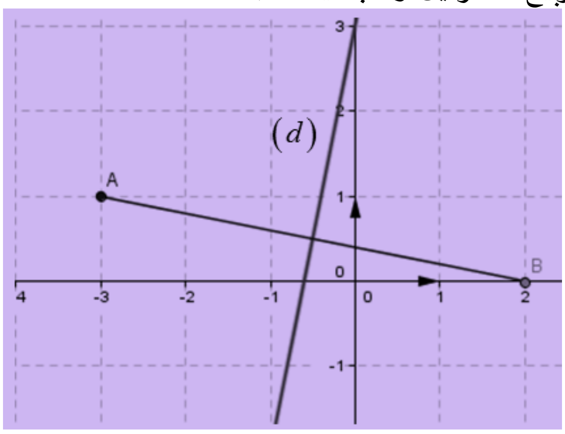
$\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ بعد تربيع الطرفين والتبسيط نجد

$10x-2y+6=0$ أي $y=5x+3$.

وأخيرا مجموعة النقط $M$

ذات اللاحقة $z$ التي تحقق $|z+3-i|=|z-2|$ هي

المستقيم $(d)$ الذي معادلته $y=5x+3$




4) $|-iz+1-2i|=|z-4i|$

$|-iz+1-2i|=|z-4i|$ تكافئ $\left|-i\left(z+\dfrac{1-2i}{-i}\right)\right|=|z-4i|$ تكافئ $|-i||z+2+i|=|z-4i|$

تكافئ $|z+2+i|=|z-4i|$ لأن $|-i|=1$ .

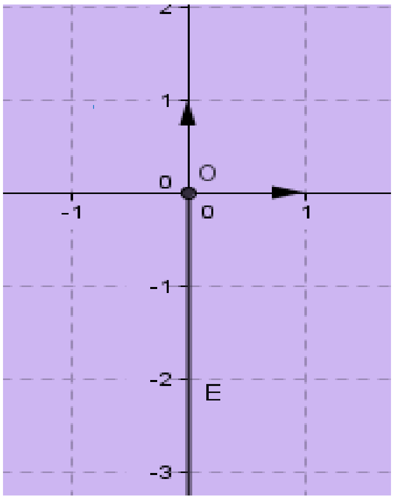
لتكن $A$ النقطة ذات اللاحقة $z_A=-2-i$ و $B$ النقطة ذات اللاحقة $z_B=4i$

$|z+2+i|=|z-4i|$ تكافئ $|z-(-2-i)|=|z-4i|$ تكافئ $|z-z_A|=|z-z_B|$ تكافئ

$AM=BM$.

وأخيرا مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ التي تحقق $|z-4i|=|-iz+1-2i|$ هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$ .

**حل التمرين رقم 21:**

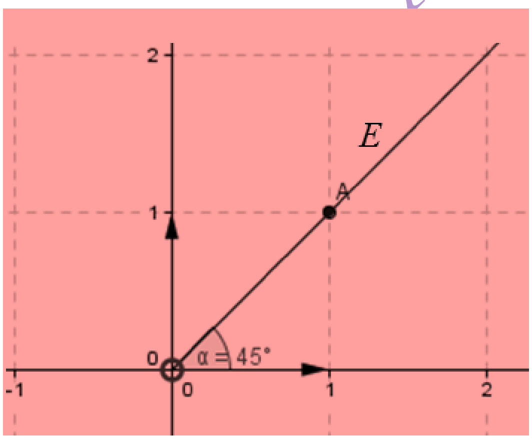



1) إذا كانت $M$ النقطة ذات اللاحقة $z$ ،

القول أن $-\frac{\pi}{2}$ عمدة لـ $z$ تعني أن النقطة $M$ تختلف عن $O$ وأن أحد الأقياس بالراديان لـ $(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM})$ هي $-\frac{\pi}{2}$. $(E)$ هي إذن نصف مستقيم أي الجزء من **محور التراتيب** التي تكون فيها تراتيب نقطه **سالبة تماما.**

2) $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

إذا كانت $M$ النقطة ذات اللاحقة $z$ ، القول أن $\frac{\pi}{4}$ عمدة لـ $z$ تعني أن النقطة $M$ تختلف عن $O$ وأن أحد الأقياس بالراديان لـ $(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM})$ هي $\frac{\pi}{4}$. $(E)$ هي إذن نصف **المستقيم المفتوح** مبدؤه $O$ ويشمل النقطة $A(1,1)$ .




3) $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{6}[\pi]$

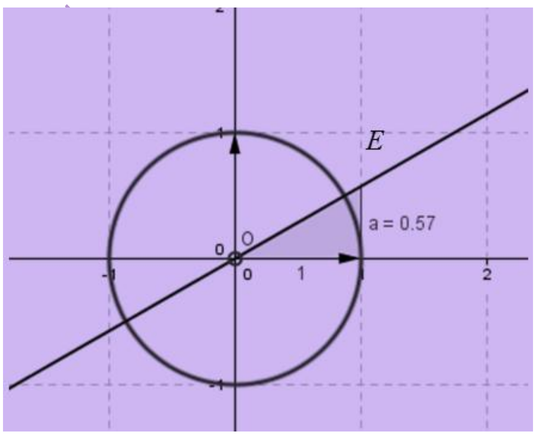
$\arg(z)\equiv\frac{\pi}{6}[\pi]$ تعني $z$ غير معدوم ( $M$ تختلف عن $O$)

و أن $\frac{\pi}{6}$ أو $\frac{\pi}{6}+\pi$ هي عمدة لـ $z$ .

إذن $(E)$ هي المستقيم الذي يمر من $O$

وميله $a=\tan\frac{\pi}{6}$ أي $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

وهو مستقيم معادلته $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ باستثناء النقطة $O$ .



## حل التمرين رقم 22 :

من أجل $(z \neq i)$ لدينا $|Z| = \left|\dfrac{z+1+i}{z-i}\right| = \dfrac{|x+yi+1+i|}{|x+yi-i|} = \dfrac{\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$

ومنه $|Z|=1$ تكافئ $\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$ ومنه $(x+1)^2+(y+1)^2 = x^2+(y-1)^2$ أي $2x+4y+1=0$.

وأخيرا $(E)$ هي مستقيم معادلته $2x+4y+1=0$.

## حل التمرين رقم 23 :

النقط $A, B, C$ تنتمي إلى نفس الدائرة $(\Gamma)$ التي مركزها $H$ معناه $AH = BH = CH$.

لدينا $AH = |z_H - z_A| = |2-3-i| = |-1-i| = \sqrt{2}$

$$BH = |z_H - z_B| = \left|2 - \frac{4-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i\right| = \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{6}{4}} = \sqrt{2}$$

$$CH = |z_H - z_C| = \left|2-2+i\sqrt{2}\right| = \left|i\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$$

ومنه النقط $A, B, C$ تنتمي إلى نفس الدائرة $(\Gamma)$ التي مركزها $H$ ذات اللاحقة 2 و طول نصف قطرها هو $\sqrt{2}$

## حل التمرين رقم 24:

حتى نبين أن النقط $A, B, C$ في استقامية ، نبين أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا أي يوجد عدد حقيقي $k$ بحيث $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ أو باستعمال الأعداد المركبة : $z_C - z_A = k(z_B - z_A)$

$z_C - z_A = 1+i-(-1-3i) = 2+4i$ و $z_B - z_A = 2+3i-(-1-3i) = 3+6i$

ومنه $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{2+4i}{3+6i} = \dfrac{2(1+2i)}{3(1+2i)} = \dfrac{2}{3}$ أي يوجد $k = \dfrac{2}{3}$ بحيث $z_C - z_A = k(z_B - z_A)$

ومنه النقط $A, B, C$ في استقامية .

## حل التمرين رقم 25:

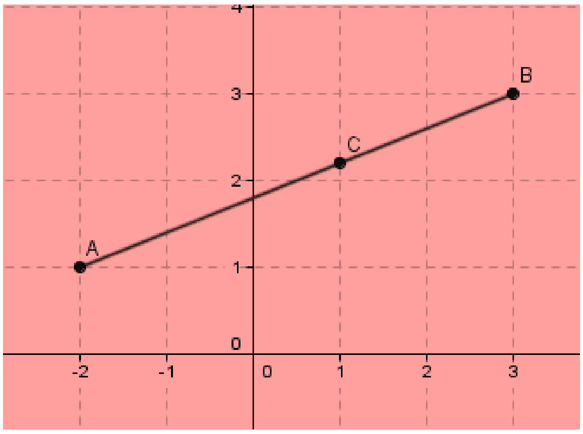
أ) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3+3i+2-i = 5+2i$

$$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = 1+\frac{11}{5}i+2-i = 3+\frac{6}{5}i$$

**ب) لدينا** $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{3+\frac{6}{5}i}{5+2i} = \dfrac{3}{5}$ ومنه $z_C - z_A = \dfrac{3}{5}(z_B - z_A)$ أي $\overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ أي

**الشعاعان** $\overrightarrow{AC}$ ; $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا وبالتالي النقط $A, B, C$ في استقامية.

**ت)** الشكل :




### حل التمرين رقم 26:

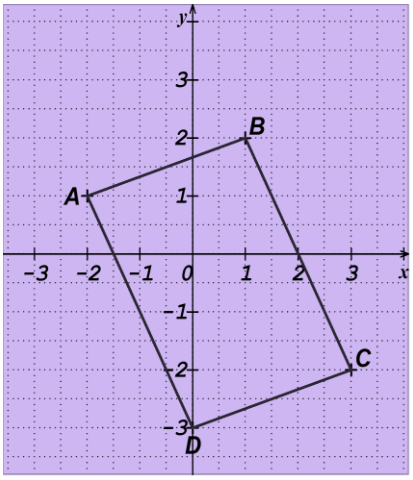
**الطريقة الأولى :** $ABCD$ متوازي الأضلاع نبين أنّ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

أي $z_B - z_A = z_C - z_D$

$$z_B - z_A = (1+2i) - (-2+i) = 3+i$$

$$z_C - z_D = (3-2i) - (-3i) = 3+i$$

ومنه $z_B - z_A = z_C - z_D$ وبالتالي $ABCD$ متوازي الأضلاع



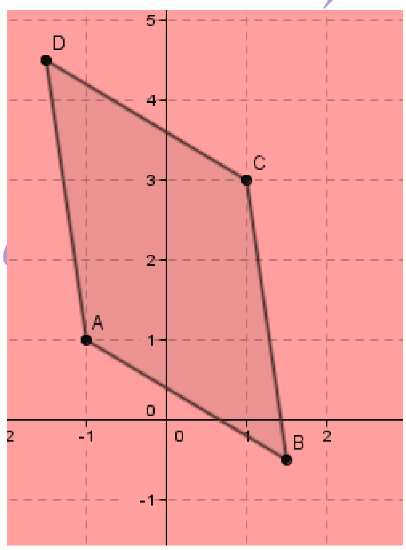

**الطريقة الثانية :** نبين أن $[AC]$ و $[BD]$ لهما نفس المنتصف $E$ :

لاحقة منتصف $[AC]$ هي $\dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{-2+i+3-2i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

لاحقة منتصف $[BD]$ هي $\dfrac{z_B + z_D}{2} = \dfrac{1+2i-3i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

ومنه $[AC]$ و $[BD]$ لهما نفس المنتصف $E$ ذات اللاحقة $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

### حل التمرين رقم 27:




$ABCD$ متوازي الأضلاع معناه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

أي $z_B - z_A = z_C - z_D$.

$$z_B - z_A = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right) - (-1+i) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$$

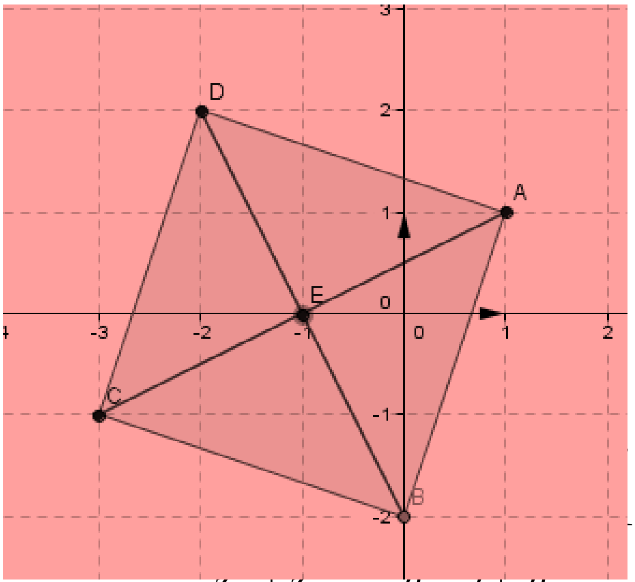
$$z_C - z_D = (1+3i) - z_D$$

ومنه $z_B - z_A = z_C - z_D$ تكافئ $\dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}i = (1+3i) - z_D$

ومنه $z_D = 1+3i - \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}i = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{2}i$

### حل التمرين رقم 28:

يكون الرباعي $ABCD$ هو مربعا إذا كان قطراه متناصفان ( أي يتقاطعان في منتصفهما)، متقايسان ومتعامدان.




$z_B = -2i \ , z_A = 1+i$

لاحقة منتصف $[AC]$ :

لاحقة منتصف $[BD]$ : $\frac{z_B + z_D}{2} = \frac{-2i - 2 + 2i}{2} = -1$

ومنه $[AC]$ و $[BD]$ يتقاطعان في منتصفهما $E$ ذات اللاحقة $-1$ .

$\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = \frac{-2+4i}{-4-2i} = -i$ ونفسر هذه النتيجة بأن عمدة $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}$ هي قيس للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$ وبما أن $-\frac{\pi}{2}$ هي عمدة للعدد المركب $-i$ نستنتج أن الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$ متعامدان وبالتالي القطران في الرباعي $ABCD$ متعامدان.

لدينا سابقا $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = -i$ ومنه $\left|\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right| = |-i| = 1$ ومنه $|z_D - z_B| = |z_C - z_A|$ أي

$BD = AC$ وبالتالي القطران في الرباعي $ABCD$ متقايسان .

وأخيرا الرباعي $ABCD$ قطراه متناصفان ( أي متقاطعان في منتصفهما)، متقايسان ومتعامدان.

إذن الرباعي $ABCD$ مربع

**حل التمرين رقم 29:**

$C$ مركز ثقل المثلث $ABD$ معناه $z_C = \frac{z_A + z_B + z_D}{3}$ ومنه

$z_D = 3z_C - z_A - z_B = 3(-5i) - (1+2i) - (-1-4i) = -13i$

**حل التمرين رقم 30:**

$z_C = -2-2i$ ، $z_B = -1+3i$ ، $z_A = 3+2i$

لدينا مجموع المعاملات غير معدوم: $2-3+5 \neq 0$ إذن $G$ موجود.

$$z_G=\frac{2z_A-3z_B+5z_C}{2-3+5}=\frac{2(3+2i)-3(-1+3i)+5(-2-2i)}{4}=-\frac{1}{4}-\frac{15}{4}i$$

**حل التمرين رقم 31:**

1) $z_G=\frac{z_A+2z_B-2z_C}{1+2-2}=\frac{3i-6i-4+6i}{1}=-4+3i$

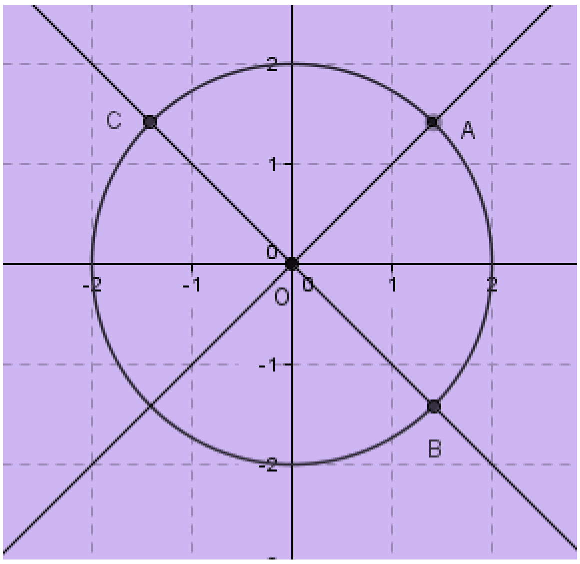
2) $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=4$ تكافئ $\left\|(1+2-2)\overrightarrow{MG}\right\|=4$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=4$ إذن

مجموعة النقط المطلوبة هي الدائرة التي مركزها النقطة $G(-4,3)$ وطول نصف قطرها 4 .

**حل التمرين رقم 32 :**

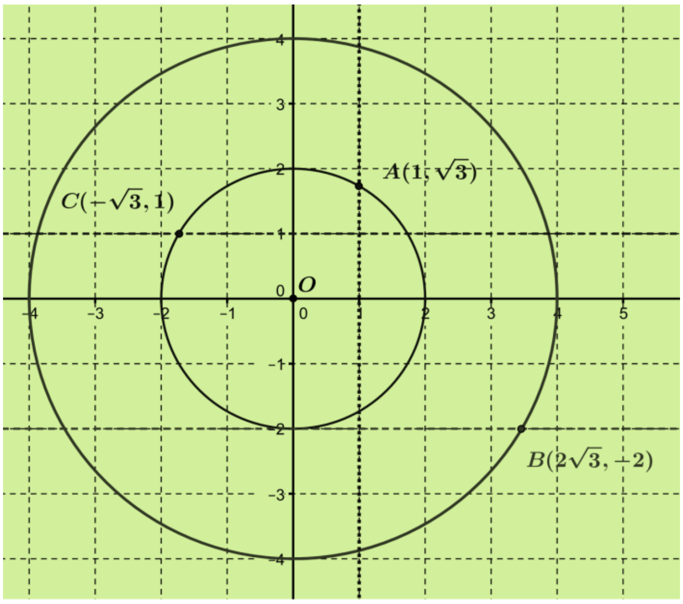
لدينا $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2$ إذن النقط $A$ , $B$ , $C$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $O$ وطول نصف قطرها 2 .

- لدينا $z_A=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ الجزء الحقيقي يساوي الجزء التخيلي أي $\mathrm{Re}(z_A)=\mathrm{Im}(z_A)=\sqrt{2}$ إذن النقطة $A$ تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته $y=x$ وتقع $A$ في الربع الأول لأن $\mathrm{Re}(z_A)>0$ , $\mathrm{Im}(z_A)>0$
- لدينا $z_B=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ الجزء الحقيقي معاكس الجزء التخيلي أي $\mathrm{Re}(z_B)=-\mathrm{Im}(z_B)$ إذن النقطة $B$ تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته $y=-x$ وتقع $B$ في الربع الرابع لأن $\mathrm{Re}(z_B)>0$ , $\mathrm{Im}(z_B)<0$
- لدينا $z_C=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ الجزء الحقيقي معاكس الجزء التخيلي أي $\mathrm{Re}(z_C)=-\mathrm{Im}(z_C)$ إذن النقطة $C$ تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته $y=-x$ وتقع $C$ في الربع الثاني لأن $\mathrm{Re}(z_C)<0$ , $\mathrm{Im}(z_C)>0$



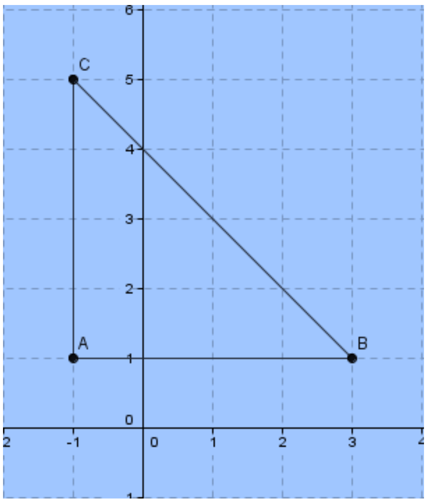
**حل التمرين رقم 33 :**

- لدينا $z_A=1+i\sqrt{3}$ و $|z_A|=2$ إذن النقطة $A$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $O$ وطول نصف قطرها 2 وفاصلتها تساوي 1 إذن فهي نقطة تقاطع هذه الدائرة مع المستقيم العمودي الذي معادلته $x=1$ ، وتقع $A$ في الربع الأول لأن $\text{Re}(z_A)>0\,,\,\text{Im}(z_A)>0$




- لدينا $z_B=2\sqrt{3}-2i$ و $|z_B|=\sqrt{12+4}=4$ إذن النقطة $B$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $O$ وطول نصف قطرها 4 وترتيبها تساوي $-2$ إذن فهي نقطة تقاطع هذه الدائرة مع المستقيم الأفقي الذي معادلته $y=-2$ ، وتقع $B$ في الربع الرابع لأن $\text{Re}(z_B)>0\,,\,\text{Im}(z_B)<0$
- لدينا $z_C=-\sqrt{3}+i$ و $|z_C|=2$ إذن النقطة $C$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $O$ وطول نصف قطرها 2 وترتيبها تساوي 1 إذن فهي نقطة تقاطع هذه الدائرة مع المستقيم الأفقي الذي معادلته $y=1$ ، وتقع $C$ في الربع الثاني لأن $\text{Re}(z_C)<0\,,\,\text{Im}(z_C)>0$

**حل التمرين رقم 34:**




نحسب الأطوال : $AB=|z_B-z_A|=|3+i+1-i|=4$

$AC=|z_C-z_A|=|-1+5i+1-i|=|4i|=4$

$BC=|z_C-z_B|=|-1+5i-3-i|$

$=|-4+4i|=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$

لدينا من جهة $AB=AC$ ومن جهة أخرى $AB^2+AC^2=BC^2$

إذن المثلث $ABC$ قائم في $A$ ومتساوي الساقين.

**حل التمرين رقم 35 :**

1) $z^2-5z+6=0$ نحسب المميز $\Delta=25-4(1)(6)=1$ المعادلة تقبل حلين حقيقيين هما

$z_2=\dfrac{5+1}{2}=3$ , $z_1=\dfrac{5-1}{2}=2$ إذن $S=\{2\ ,\ 3\}$ .

2) $z^2+2z+11=0$ نحسب المميز $\Delta=4-4(1)(11)=-40=40i^2$ المعادلة تقبل حلين

مركبين مترافقين هما $z_1=\dfrac{-2-i\sqrt{40}}{2}=\dfrac{-2-2i\sqrt{10}}{2}=-1-i\sqrt{10}$

$z_2=\dfrac{-2+i\sqrt{40}}{2}=\dfrac{-2+2i\sqrt{10}}{2}=-1+i\sqrt{10}$ إذن

$S=\left\{-1-i\sqrt{10}\ ,\ -1+i\sqrt{10}\right\}$

3) $z^2-\left(1+\sqrt{3}\right)z+\sqrt{3}=0$ نحسب المميز $\Delta=\left(1+\sqrt{3}\right)^2-4\sqrt{3}=4-2\sqrt{3}$ المعادلة

تقبل حلين حقيقيين : لاحظ أن مجموع الحلين يساوي $1+\sqrt{3}$ وجداؤهما يساوي $\sqrt{3}$ إذن

هما $z_2=1$ , $z_1=\sqrt{3}$ فتكون $S=\left\{1,\sqrt{3}\right\}$

**حل التمرين رقم 36 :**

1) $(2+3i)^2=4-9+12i=-5+12i$

2) $z^2=5-12i$ تكافئ $z^2=(-1)(-5+12i)=i^2(2+3i)^2$ تكافئ $z^2-i^2(2+3i)^2=0$

$\left[z-i(2+3i)\right]\left[z+i(2+3i)\right]=0$ ، إما $z-i(2+3i)=0$ أو

$z+i(2+3i)=0$

إذن $z=i(2+3i)=-3+2i$ أو $z=-i(2+3i)=3-2i$ وأخيرا $S=\{-3+2i\ ,3-2i\}$

**حل التمرين رقم 37 :**

$z^2-2z\cos\alpha+1=0$ ، نحسب المميز

$\Delta=(2\cos\alpha)^2-4=4\cos^2\alpha-4=4\left(\cos^2\alpha-1\right)=-4\sin^2\alpha=4i^2\sin\alpha$

للمعادلة حلين مركبين مترافقين هما : $z_1=\dfrac{2\cos\alpha-2i\sin\alpha}{2}=\cos\alpha-i\sin\alpha$ و

$z_2=\dfrac{2\cos\alpha+2i\sin\alpha}{2}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ إذن $S=\{\cos\alpha-i\sin\alpha,\cos\alpha+i\sin\alpha\}$

**حل التمرين رقم 38 :**

1) نضع $z=x+iy$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ . المعادلة $|z|^2-5z+3=0$ تصبح على الشكل

$x^2+y^2-5(x+iy)+3=0$ أي $x^2+y^2-5x-5yi+3=0$

$x^2+y^2-5x-5yi+3=0$ تكافئ $\begin{cases}5y=0\\x^2+y^2-5x+3=0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}y=0\\x^2-5x+3=0\end{cases}$

نحل المعادلة $x^2-5x+3=0$ فنجد $x_2=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ ، $x_1=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$ .

وأخيرا المعادلة $|z|^2-5z+3=0$ تقبل حلين حقيقيين هما: $z_1=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$ و

$z_2=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$

2) $z^3-3z^2+7z=0$ تكافئ $z(z^2-3z+7)=0$ إما $z=0$ أو $z^2-3z+7=0$ نحل هذه المعادلة باستعمال المميز نجد $z_1=\frac{3+i\sqrt{19}}{2}$ ، $z_2=\frac{3-i\sqrt{19}}{2}$ .

وأخيرا حلول المعادلة $z^3-3z^2+7z=0$ هي $z_1=\frac{3+i\sqrt{19}}{2}$ ، $z_2=\frac{3-i\sqrt{19}}{2}$ ، $0$ .

3) $2-\frac{1}{z}=2z$ تكافئ $\frac{2z^2-2z+1}{z}=0$ تكافئ $2z^2-2z+1=0$ نحل هذه المعادلة نجد

$z_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ و $z_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ .

**حل التمرين رقم 39 :**

1) $z^3+3z^2-3z-14=(z-2)(az^2+bz+c)$

ننشر ونبسط ونطابق $(z-2)(az^2+bz+c)=az^3+(b-2a)z^2+(c-2b)z-2c$

فنجد $-2c=-14$ ، $c-2b=-3$ ، $b-2a=3$ ، $a=1$ أي $c=7$ ، $b=5$ ، $a=1$ .

ويكون $z^3+3z^2-3z-14=(z-2)(z^2+5z+7)$

2) $z^3+3z^2-3z-14=0$ تكافئ $(z-2)(z^2+5z+7)=0$ ومنه إما $z-2=0$ أي $z=2$ أو $z^2+5z+7=0$ نحل هذه المعادلة الأخيرة بالمميز نجد

$\Delta=25-4(1)(7)=-3=3i^2$ وللمعادلة حلين مركبين مترافقين هما

$z_2=\frac{-5+i\sqrt{3}}{2}=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_1=\frac{-5-i\sqrt{3}}{2}=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ وأخيرا مجموعة حلول

المعادلة $z^3+3z^2-3z-14=0$ هي $\left\{2,-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

**حل التمرين رقم 40 :**

1) $P(-1)=0$ .

2) $P(z)=(z+1)(az^2+bz+c)=az^3+(b+a)z^2+(c+b)z+c$ نطابق فنجد

فنجد $c=7$ ، $c+b=3$ ، $b+a=-3$ ، $a=1$ أي $c=7$ ، $b=-4$ ، $a=1$ .

ويكون $P(z)=(z+1)(z^2-4z+7)$

3) $P(z)=0$ يكافئ $(z+1)(z^2-4z+7)=0$ إما $z=-1$ او $z^2-4z+7=0$ عند

حل هذه الأخيرة نجد $z_1=2-i\sqrt{3}\ ,\ z_2=2+i\sqrt{3}$

وأخيرا مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي $\{-1,2-i\sqrt{3}\ ,\ 2+i\sqrt{3}\}$

## حل التمرين رقم 41 :

$$(z^2+z+3)(z^2-3z+2)=z^4-2z^3+2z^2-7z+6$$

$z^4-2z^3+2z^2-7z+6=0$ تكافئ $(z^2+z+3)(z^2-3z+2)=0$ إما $z^2-3z+2=0$ أو

$z^2+z+3=0$ عند حل المعادلتين نجد مجموعة حلول المعادلة $z^4-2z^3+2z^2-7z+6=0$

هي $S=\left\{1\,;\,2\,;\,-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{11}\,;\,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{11}\right\}$

## حل التمرين رقم 42 :

1) من أجل كل عدد مركب $z$ :

$$(z^2+4)(az^2+bz+c)=az^4+bz^3+(4a+c)z^2+4bz+4c$$

بالمطابقة نجد $c=5\ ,\ b=-2\ ,\ a=1$ . أي

$$z^4-2z^3+9z^2-8z+20=(z^2+4)(z^2-2z+5)$$

2) $z^4-2z^3+9z^2-8z+20=0$ تكافئ $(z^2+4)(z^2-2z+5)=0$ تكافئ

$(z^2+4=0)$ أو $(z^2-2z+5)=0$

- المعادلة $(z^2+4=0)$ تكافئ $z^2=-4=4i^2$ ومنه $z=2i$ أو $z=-2i$ .
- المعادلة $(z^2-2z+5=0)$ مميزها $\Delta=4-20=-16=16i^2$ . المعادلة تقبل حلين مترافقين هما $1+2i$ و $1-2i$

وأخيرا المعادلة $z^4-2z^3+9z^2-8z+20=0$ تقبل في $\mathbb{C}$ أربعة حلول :

$S=\{-2i\ ,\ 2i\ ,\ 1-2i\ ,\ 1+2i\}$ .

## حل التمرين رقم 43: صحيح أم خاطئ

1) **صحيح** : لأن

$$(1+i)^{256}=\left[(1+i)^2\right]^{128}=(2i)^{128}=2^{128}\times\left[i^2\right]^{64}=2^{128}\times(-1)^{64}=2^{128}$$

2) **خاطئ** : لأن $\frac{1-3i}{4-3i}=\frac{(1-3i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{13}{25}-\frac{9}{25}i$

3) **صحيح** : لأن المعادلة $z^2-3z+5=0$ مميزها سالب فتقبل حلين مركبين مترافقين

4) **صحيح** : لأن $\frac{z-3i+1}{4-z}=-\frac{x^2+y^2-3x-3y-4}{(4-x)^2+y^2}+\frac{3x+5y-12}{(4-x)^2+y^2}i$

يكون حقيقيا من أجل $\begin{cases}3x+5y-12=0\\(x,y)\neq(4,0)\end{cases}$ أي $3x+5y-12=0$ أو $y=-0,6x+2,4$

5) **خاطئ** : لأن $\dfrac{z-3i+1}{4-z}=-\dfrac{x^2+y^2-3x-3y-4}{(4-x)^2+y^2}+\dfrac{3x+5y-12}{(4-x)^2+y^2}i$

يكون تخيليا صرفا من أجل $\begin{cases}x^2+y^2-3x-3y-4=0\\(x,y)\neq(4,0)\end{cases}$ وتُكتب على الشكل

$\begin{cases}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{17}{2}\\(x,y)\neq(4,0)\end{cases}$ إذن مجموعة النقط هي دائرة مركزها $F\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{\dfrac{17}{2}}$ ما عدا $A(4,0)$

**حل التمرين رقم 44 :**

5) $z_1=3+3i$ : $r=|3+3i|=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$

إذا كانت $\alpha$ عمدة لـ $z_1$ فإن :

$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ومنه $\arg(z_1)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

إذن الشكل المثلثي للعدد المركب $z_1$ هو $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ والشكل الأسي هو

$z_1=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) $z_2=-\sqrt{6}-i\sqrt{2}$ :

$r=\left|-\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right|=\sqrt{6+2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

إذا كانت $\alpha$ عمدة لـ $z_2$ فإن :

$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ومنه $\arg(z_2)\equiv\pi+\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$ أي $\arg(z_2)\equiv\dfrac{7\pi}{6}[2\pi]$ إذن

الشكل المثلثي للعدد المركب $z_2$ هو $z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$ والشكل الأسي هو

$z_2=2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}$ .

3) $z_3=-4\sqrt{3}+4i$

$$r=\left|-4\sqrt{3}+4i\right|=\sqrt{48+16}=\sqrt{64}=8$$

إذا كانت $\alpha$ عمدة لـ $z_3$ فإن :

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{-4\sqrt{3}}{8}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

ومنــه $\arg(z_3)\equiv\pi-\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$ أي $\arg(z_3)\equiv\dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$ إذن

الشكل المثلثي للعدد المركب $z_3$ هو $z_3=8\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$ والشكل الأسي هو $z_3=8e^{i\frac{5\pi}{6}}$

4) $z_4=3\sqrt{3}-3i$

$$r=\left|3\sqrt{3}-3i\right|=\sqrt{27+9}=\sqrt{36}=6$$

إذا كانت $\alpha$ عمدة لـ $z_4$ فإن :

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{3\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-3}{6}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

ومنـه $\arg(z_4)\equiv-\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$ إذن الشـكل المثلثي للعـدد المركـب $z_4$

هو $z_4=6\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)\right)$ والشكل الأسي هو $z_4=6e^{i\frac{-\pi}{6}}$ .

## حل التمرين رقم 45 :

نستعمل الخواص التي درسناها سابقا : $arg(z z')\equiv arg(z)+arg(z')[2\pi]$

7) $arg\left(\dfrac{1}{z}\right)\equiv-arg(z)[2\pi]$ ، $arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)\equiv arg(z)-arg(z')[2\pi]$

- $z_1=\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$ :

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\quad,\quad 1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)$$

وبالتالي

$$z_1=\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)\right]$$

$$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

• $z_2=\dfrac{i}{1+i}$

$$i=1\times\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\quad,\quad 1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

وبالتالي
$$z_2=\frac{i}{1+i}=\frac{1\times\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

• $z_3=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\right)$

$$-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\quad,\quad 1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

وبالتالي
$$z_3=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\right)=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{4}\right)\right]=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right]=2\sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{4}}$$

## حل التمرين رقم 46 :

1) $z_1=-4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ غير مكتوب على الشكل المثلثي لأن $-4$ عدد حقيقي سالب.

نكتب العدد $-4$ على الشكل المثلثي $-4=4\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$ :

أي $z_1=-4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\left[4\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)\right]\left[\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$z_1=4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

2) $z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

بما أن $\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$ و $\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$

$$z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

3) $z_3=4\left(\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}\right)$

بما أن $\cos(\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ و $\sin(\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

أي $\sin\frac{\pi}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{6}$ ، $\cos\frac{\pi}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$

أي $z_3=4\left(\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}\right)=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$$z_3=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

(4 $z_4=-4\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

$$z_4=-4\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)=4(\cos\pi+i\sin\pi)\left[\cos\left(\frac{-\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{5}\right)\right]$$

$$z_4=4\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)\right]=4\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$$

## حل التمرين رقم 47:

(1 $a^2=2+\sqrt{2}+2i\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}-2+\sqrt{2}$

إذن $a^2=2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$.

(2 $a^2=2\sqrt{2}(1+i)=2\sqrt{2}\times\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=4e^{i\frac{\pi}{4}}$ .طويلة $a^2$ هي 4 وبالتالي طويلة $a$ هي 2 .

عمدة $a^2$ هي $\frac{\pi}{4}$ وبالتالي عمدة $a$ هي $\frac{\pi}{8}$ .

(3 الشكل المثلثي للعدد المركب $a$ هو $a=2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ وشكله الجبري هو

$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ، $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ومنه $a=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

## حل التمرين رقم 48 :

نضع $z_1=1+i$ ونضع $z_2=\frac{\sqrt{3}+i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$

$$z_1=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$|z_2|=\sqrt{\frac{3}{16}+\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{4}{16}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ و $z_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ .

باستعمال خواص الطويلة والعمدة نجد $|z|=|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|=\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\arg(z)\equiv \arg(z_1)+\arg(z_2)[2\pi]$ أي $\arg(z)\equiv \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}[2\pi]$ أي $\arg(z)\equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$

وأخيرا الشكل المثلثي للعدد المركب $z=(1+i)\left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)$ هو $z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

**حل التمرين رقم 49 :**

(1 $z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]=1+\sqrt{3i}$

(2 $z_1=4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=4\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$$z_1=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-2\sqrt{3}+2i$$

(3 $z_2=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=4\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$$z_2=4\left[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]=-2+2i\sqrt{3}$$

(4 $z_3=8\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=8\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$$z_3=8\left[-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]=-4-4i\sqrt{3}$$

**حل التمرين رقم 50 :**

$$z_0=6e^{i\frac{\pi}{3}}=6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=6\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3+3i\sqrt{3}$$

$$z_1=4e^{i\frac{2\pi}{3}}=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2+2i\sqrt{3}$$

$$z_2=8e^{i\frac{7\pi}{6}}=8\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-4\sqrt{3}-4i$$

$$z_4=2e^{-i\frac{\pi}{4}}=2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$$

**حل التمرين رقم 51 :**

$$z_0=3(-1-i)=3\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$z_1=-2\sqrt{3}+2i=4\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=4e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

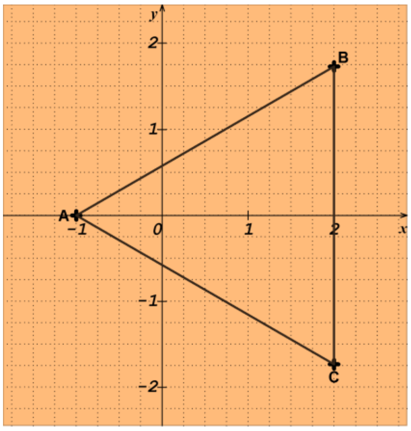
$$z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i=\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_3=-2i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

**حل التمرين رقم 52 :**

| السؤال رقم 01 | السؤال رقم 02 | السؤال رقم 03 | السؤال رقم 04 | السؤال رقم 05 | السؤال رقم 06 |
|---|---|---|---|---|---|
| ج | ب | أ | ب | ج | ج |

**حل التمرين رقم 53 :**




1) $\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\dfrac{-1-2+i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}-2+i\sqrt{3}}=\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)=\arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

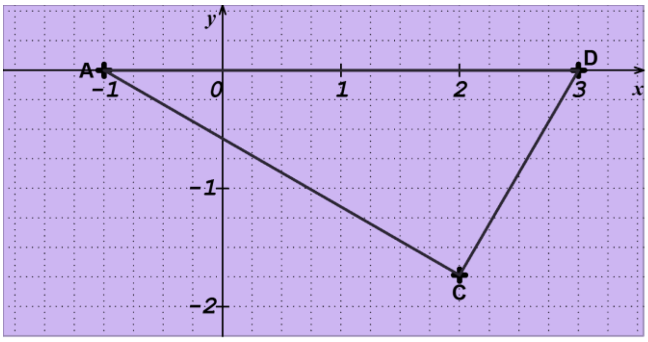
و $\left|\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right|=\left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$ أي $AC=BC$

والمثلث $ABC$ متقايس الأضلاع

2) $\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_C}=\dfrac{-1-2+i\sqrt{3}}{3-2+i\sqrt{3}}=\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=i\sqrt{3}$

$\arg\left(\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_C}\right)=\arg i\sqrt{3}\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ و $\left|\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_C}\right|=\left|i\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}$ أي $AC=DC\sqrt{3}$

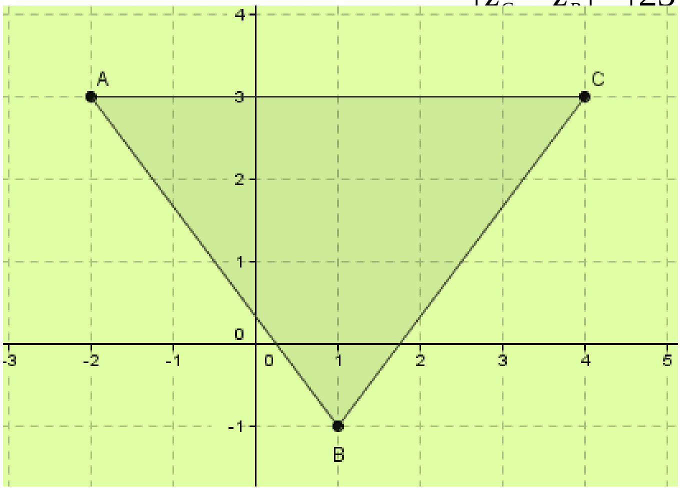
المثلث $DAC$ قائم في النقطة $C$ .



**حل التمرين رقم 54:**

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{-2+3i-1+i}{4+3i-1+i}=\frac{-3+4i}{3+4i}=\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i$$

و $\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=\left|\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i\right|=1$ أي $AB=BC$ ومنه المثلث $ABC$ متساوي الساقين.

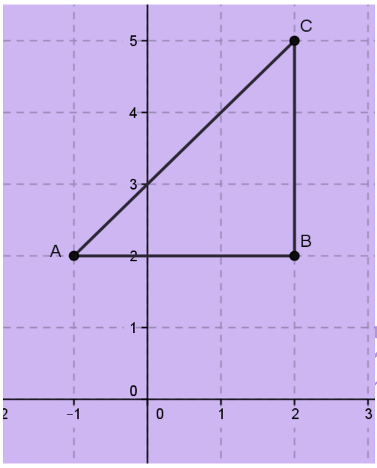



**حل التمرين رقم 55 :**

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{-1+2i-2-2i}{2+5i-2-2i}=\frac{-3}{3i}=i$$

$\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ و $\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=|i|=1$ أي $AB=BC$

المثلث $ABC$ قائم في النقطة $B$ ومتساوي الساقين.

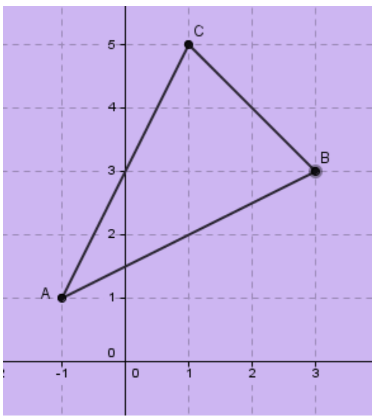



**حل التمرين رقم 56 :**

$$\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{-1+i-3-3i}{-1+i-1-5i}=\frac{-4-2i}{-2-4i}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$$

و $\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{9}{25}}=1$ أي $AB=BC$

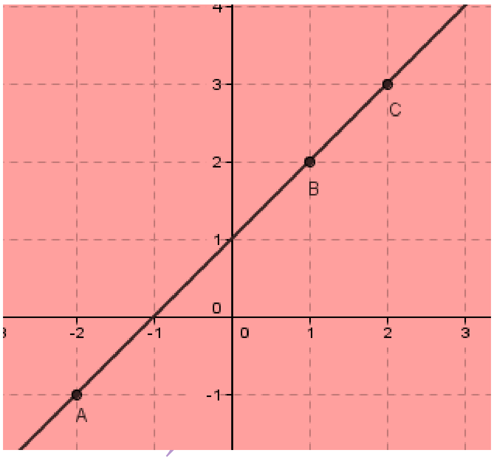
إذن المثلث $ABC$ متساوي الساقين.



حل التمرين رقم 57 :

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{-2-i-1-2i}{-2-i-2-3i} = \frac{-3-3i}{-4-4i} = \frac{-3(1+i)}{-4(1+i)} = \frac{3}{4}$$

$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ يساوي عدد حقيقي إذن النقط $A$ , $B$ , $C$ في استقامية.



# استعد للبكالوريا

## تمارين محلولة


- كاين عندك الأعداد المركبة ؟
- كاين
- أعطيني كيلو أعداد مركبة وماتنساش الحل وخلطلي شوي شوي شكل جبري ، شكل أسي واخطارلي الشكل المثلثي ما يكونش يابس صح عمي الـ BAC

# تمارين نموذجية للبكالوريا

**التمرين رقم 01:**

$P$ كثير حدد معرف في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كما يلي :

$.P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63.$

1) بين أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية $c;b;a$ يطلب تعيينها بحيث من أجل كل عدد مركب $z$ لدينا : $P(z)=\left(z^2+3\right)\left(az^2+bz+c\right)$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

3) المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ .

أنشئ النقط $A, B, C, D$ التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=i\sqrt{3}$ ، $z_B=-i\sqrt{3}$ ، $z_C=3+2i\sqrt{3}$ ، $z_D=\overline{z_C}$.

بين أن هذه النقط الأربعة تنتمي إلى نفس الدائرة يُطلب تحديد مركزها وطول نصف قطرها .

4) لتكن النقطة $E$ نظيرة النقطة $D$ بالنسبة إلى $O$. ما هي طبيعة المثلث $BEC$ ؟

**التمرين رقم 02:**

1) نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $C$ كثير الحدود $P(z)=z^3-12z^2+48z-128$

أ) بين أن $P(z)$ يكتب على الشكل $P(z)=(z-8)(\alpha z^2+\beta z+\gamma)$ حيث $\alpha, \beta, \gamma$ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

ب) حل في $C$ المعادلة $P(z)=0$ .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس ، نعتبر النقط $A, B, C$ التي لواحقها على الترتيب هي : $z_A=2-2\sqrt{3}i$ , $z_B=2+2\sqrt{3}i$ , $z_C=8$

أ) أحسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $z_A=2-2\sqrt{3}i$ . علّم النقط $A, B, C$.

ب) أحسب $Z=\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ ثم عين الطويلة وعمدة لـ $Z$ ، واستنتج طبيعة المثلث $ABC$

ت) عين إحداثيي النقطة $D$ مرجح الجملة $\left\{\left(A,|z_A|\right),\left(B,|z_B|\right),\left(C,|z_C|\right)\right\}$ ثم علم النقطة $D$ .

ج) عين مجموعة النقط $E$ للنقط $M$ من المستوي بحيث :

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$.

**التمرين رقم 03:**

$Z$ عدد مركب بحيث : $Z=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}$.

1 ) أكتب العدد المركب $Z$ على الشكل الجبري .

2 ) أكتب العدد المركب $Z$ على الشكل المثلثي و الأسي.

3 ) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

**التمرين رقم 04 :**

من أجل كل عدد مركب $z$ حيث $z\neq -1$ نضع $Z=\frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$.

$z=x+iy$ و $Z=X+iY$ حيث $x;y;X;Y$ أعداد حقيقية.

1) عبر عن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب $Z$ بدلالة $x$ و $y$.

2) عين $(E)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ حتى يكون $Z$ حقيقيا.

3) عين $(F)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ حتى يكون $Z$ تخيليا صرفا.

**التمرين رقم 05:**

نعتبر الأعداد المركبة $z_n$ بحيث : $z_0=1$ و $z_{n+1}=\left(1+i\sqrt{3}\right)z_n$ حيث $n$ عدد طبيعي .

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{u}\,\vec{v}\right)$ نضع $M_n$ النقطة التي لاحقتها $z_n$

(الوحدة : $1\ cm$).

1) أحسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $1+i\sqrt{3}$.

2) أعط الشكل الجبري والشكل المثلثي لكل من $z_1$ ، $z_2$ ، $z_3$ و أنشئ النقط $M_1, M_2, M_3$ .

3) أحسب العدد المركب $\frac{z_2-z_1}{z_1}$ واستنتج طبيعة المثلث $OM_1M_2$.

4) أحسب $d_0=|z_1-z_0|$ ، $d_1=|z_2-z_1|$ ، $d_2=|z_3-z_2|$ وأعط تفسيرا هندسيا لهذه الأعداد.

5) نضع : $d_n=|z_{n+1}-z_n|$

أ) بين أن المتتالية ذات الحد العام $(d_n)$ هي متتالية هندسية أساسها 2.

ب) بين أن طول الخط المنكسر الذي يربط بين النقط $M_0$ ، $M_1$ ، $M_2$ ،.........., $M_n$ يساوي $\sqrt{3}\left(2^n-1\right)$

ت) إبتداء من أي قيمة للعدد الطبيعي $n$ يكون هذا الطول أكبر من $1\,km$ ؟

**التمرين رقم 06:**

$A, B, C, D$ نقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o;\vec{u},\vec{v}\right)$، لواحقها على الترتيب $z_A=2+3i\sqrt{3}$ ، $z_B=-i\frac{\sqrt{3}}{3}$ ، $z_C=-4-3i\sqrt{3}$ ، $z_D=-2+i\frac{\sqrt{3}}{3}$

1) بين أن الرباعي $ABCD$ هو متوازي الأضلاع.

2) بين أن $\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A}$ تخيلي صرف.

3) استنتج طبيعة متوازي الأضلاع $ABCD$.


## التمرين رقم07:

**أجب بصحيح أو خاطئ مع التعليل**

ليكن العدد المركب $z = -3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ .

1) $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

2) $|z| = 3$

3) الشكل المثلثي للعدد المركب $(-z)$ هو: $-z = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

4) $z = 3\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$

5) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$

## التمرين رقم 08:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط $A$ , $B$ , $C$ التي لواحقها على الترتيب هي : $z_A = 2$ , $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ , $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.


**أولا :**

أ) أعط الشكل الأسي لكل من $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ , $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

ب) أنشئ النقط $A$ , $B$ , $C$.

ت) عين طبيعة الرباعي $OBAC$.

ج) عين وانشئ مجموعة النقط $(D)$ للنقط $M$ ذات اللاحقة $z$ من المستوي بحيث : $|z| = |z - 2|$.

**ثانيا :**

بكل نقطة $M$ ذات اللاحقة $z$ حيث $z \neq z_A$ نرفق النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z' = \dfrac{-4}{z-2}$.

1) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z = \dfrac{-4}{z-2}$.

ب) استنتج النقط المرفقة بالنقطتين $B$ و $C$ .

ت) عين وانشئ النقطة $G$ مركز ثقل المثلث $OAB$.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد مركب $z$ المختلف عن 2 ، $|z'-2|=\frac{2|z|}{|z-2|}$.

ب) نفرض أن $M$ تنتمي إلى $(D)$ ($(D)$ المجموعة المعرفة في الفقرة الأولى).

بين أن النقطة $M'$ المرفقة بالنقطة $M$ تنتمي إلى دائرة $(\Gamma)$ التي يطلب تعيين مركزها وطول نصف قطرها .

أنشئ $(\Gamma)$.

**التمرين رقم 09:**

1) أنشر $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ ثم حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية :

$z^2-\left(1+\sqrt{2}\right)z+\sqrt{2}=0$.

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلتين :

أ) $z+\frac{1}{z}=1$ ، ب) $z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}$ .

3) ليكن $P(z)=z^4-\left(1+\sqrt{2}\right)z^3+\left(2+\sqrt{2}\right)z^2-\left(1+\sqrt{2}\right)z+1=0$ حيث $z$ عدد مركب .

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد مركب $z$ غير معدوم لدينا :

$$\frac{P(z)}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(1+\sqrt{2}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)+\sqrt{2}$$

ب) استنتج مما سبق حلول المعادلة $P(z)=0$.

**التمرين رقم 10:**

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $C$ المعادلة التالية : $z^2-\left(1+i(1-\sqrt{3})\right)z+i+\sqrt{3}=0$

1) بين أن المعادلة تقبل حلا تخيليا صرفا $z_0$ يطلب تحديده.

2) استنتج الحل الثاني للمعادلة.

3) لتكن النقط $A$ و $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب هي : $z_A=1+i$ و $z_B=i$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$

أ) أكتب $z_A$ و $z_B$ و $z_C$ على الشكل المثلثي .

ب) حدد قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right)$ واستنتج طبيعة المثلث $ABC$

ج) عين مجموعة النقط $M$ التي لاحقتها $z$ بحيث : $|z-1+i\sqrt{3}|=|z-1-i|$.

**التمرين رقم 11:**

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ الوحدة، $2\,cm$ نعتبرالنقط $M_0,M_1,M_2,M_3$ التي لواحقها على الترتيب الأعداد المركبة التالية

$$z_0=4\ ;\ z_1=\frac{1+i}{2}z_0\ ;z_2=\frac{1+i}{2}z_1\ ;z_3=\frac{1+i}{2}z_2 .$$

1) عين الشكل الجبري ثم الشكل المثلثي لكل من $z_0\ ;\ z_1\ ;z_2\ ;z_3$

2) أنشئ النقط $M_0,M_1,M_2,M_3$ .

3) نضع : $d_0=\left|z_0-z_1\right|\ ;d_1=\left|z_1-z_2\right|\ ;d_2=\left|z_2-z_3\right|$ فسر هندسيا كلا من الأعداد $d_0\ ;\ d_1\ ;d_2$

4) بين أن $d_0\ ;\ d_1\ ;d_2$ في هذا الترتيب تشكل حدود متعاقبة من متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها

5) أحسب طول الخط المنكسر $M_0M_1M_2M_3$ .

**التمرين رقم 12 : إختيار من متعدد**

يوجد في كل سؤال جواب واحد فقط صحيح. عين هذا الجواب الصحيح بدون تبرير.

1) حل المعادلة $2z+\overline{z}=9+i$ هو:

أ) $3$ ، ب) $i$ ، ت) $3+i$

2) $z$ عدد مركب. $\left|z+i\right|$ تساوي :

أ) $\left|z\right|+1$ ، ب) $\left|z-1\right|$ ، ت) $\left|i\overline{z}+1\right|$

3) $z$ عدد مركب غير معدوم عمدته $\theta$. عمدة العدد المركب $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\overline{z}}$ هي :

أ) $-\frac{\pi}{3}+\theta$ ، ب) $\frac{2\pi}{3}+\theta$ ، ت) $\frac{2\pi}{3}-\theta$

4) $n$ عدد طبيعي .يكون العدد المركب $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ تخيليا صرفا إذا وفقط إذا كان :

أ) $n=3$ ، ب) $n=3+6k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ، ت) $n=6k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

5) $A$ و $B$ نقطتان لاحقتاهما على الترتيب هما $i$ و $-1$. مجموعة النقط $M$ التي لاحقتها $z=x+iy$ والتي تحقق $\left|z-i\right|=\left|z+1\right|$ هي :

أ) المستقيم $\left(AB\right)$ ، ب) الدائرة التي قطرها $\left[AB\right]$ ، ت) المستقيم العمودي على $\left(AB\right)$ المار من المبدأ $O$

6) $\Omega$ النقطة ذات اللاحقة $1-i$. مجموعة النقط $M$ التي لاحقتها $z=x+iy$ والتي تحقق $\left|z-1+i\right|=\left|3-4i\right|$ معادلتها هي :

أ) $y=-x+1$ ، ب) $\left(x-1\right)^2+y^2=\sqrt{5}$ ، ت) $z=1-i+5e^{i\theta}$ حيث $\theta\in\mathbb{R}$

7) $A$ و $B$ نقطتان لاحقتاهما على الترتيب هما $4$ و $3i$. لاحقة النقطة $C$ بحيث يكون المثلث $ABC$ متساوي الساقين مع $\left(\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ هي :

أ) $1-4i$ ، ب) $-3i$ ، ت) $7+4i$

8) مجموعة حلول المعادلة $\dfrac{z-2}{z-1}=z$ في $\mathbb{C}$ هي :

أ) $\{1-i\}$ ، ب) مجموعة خالية ، ت) $\{1-i\ ,\ 1+i\}$


**التمرين رقم 13:** إختيار من متعدد

في كل سؤال توجد 4 تأكيدات: واحدة فقط صحيحة عينها مع التعليل

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O\,,\vec{u}\,,\vec{v}\right)$.

1) $n$ عدد طبيعي ، يكون العدد المركب $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ تخيليا صرفا إذا وفقط إذا كان $n$ يكتب على الشكل :

أ) $n=6k+1$ ، ب) $n=6k+2$ ، ت) $n=6k+3$ ، ج) $n=6k$.

2) $A$ و $B$ نقطتان لاحقتاهما على الترتيب: $z_A=i$ ، $z_B=\sqrt{3}$. أحد أقياس الزاوية $\left(\vec{u}\ ,\overrightarrow{AB}\right)$ هو :

أ) $-\dfrac{5\pi}{6}$ ، ب) $\dfrac{\pi}{6}$ ، ت) $\dfrac{47\pi}{6}$ ، ج) $\dfrac{5\pi}{6}$.

3) لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $B$ بالدوران الذي مركزه $A$ وزاويته $\dfrac{\pi}{3}$ هي :

أ) $z_C=-i$ ، ب) $z_C=2i$ ، ت) $z_C=\sqrt{3}+i$ ، ج) $z_C=\sqrt{3}+2i$

4) مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z=x+iy$ والتي تحقق $|z-1|=|z+i|$ هي المستقيم الذي معادلته :

أ) $y=x-1$ ، ب) $y=-x$ ، ت) $y=-x+1$ ، ج) $y=x$

**التمرين رقم 14 :**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O\,,\vec{u}\,,\vec{v}\right)$.

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

2) نعتبر النقطتين $A$ , $B$ التي لا حقتاهما على الترتيب $z_A=4\sqrt{3}-4i$ و $z_B=4\sqrt{3}+4i$.

أ) أكتب $z_A$ و $z_B$ على الشكل الأسي.

ب) أحسب الأطوال $OA$, $OB$, $AB$ واستنتج طبيعة المثلث $OAB$.

3) لتكن النقطة $C$ التي لاحقتها $z_C=-\sqrt{3}+i$ ، وليكن الدوران $r$ الذي مركزه $O$ وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ . عين اللاحقة $z_D$ للنقطة $D$ صورة $C$ بالدوران $r$.

4) نسمي $G$ مرجح الجملة المثقلة $\{(O,-1),(D,+1),(B,+1)\}$

أ) تحقق من وجود $G$ وبين أن لاحقتها $z_G=4\sqrt{3}+6i$.

ب) علّم النقط $A$ , $B$ , $C$ , $D$ , $G$ في شكل .

ت) بين أن الرباعي $OBGD$ متوازي أضلاع.

5) ما هي طبيعة المثلث $AGC$؟


**التمرين رقم 15:**

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

$A$ ، $B$ ، $I$ نقط من المستوي لواحقها على الترتيب :

$z_A=3+2i$ ، $z_B=-3$ ، $z_I=1-2i$ .

1 ) علم النقط السابقة في المعلم ثم نكمل في بقية التمرين.

2 ) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $Z=\frac{z_I-z_A}{z_I-z_B}$. ما هي طبيعة المثلث $IAB$ ؟.

3 ) أحسب اللاحقة $Z_C$ للنقطة $C$ ، صورة النقطة $I$ بالتحاكي الذي مركزه $A$ ونسبته 2.

4 ) لتكن النقطة $D$ مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C;1)\}$ أحسب اللاحقة $z_D$ للنقطة $D$.

5 ) بين أن $ABCD$ مربع.

6 ) عين وانشئ $(\Gamma_1)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي بحيث :

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

7 ) لتكن $(\Gamma_2)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$

- بين أن النقطة $B$ تنتمي إلى $(\Gamma_2)$.
- عين وانشئ $(\Gamma_2)$.

**التمرين رقم 16:**

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، تعطى النقط $A$; $B$; $C$; $I$

التي لواحقها على الترتيب $z_A=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$; $z_B=1-i$; $z_C=\frac{z_A}{z_B}$; $z_I=1$

1) عين الطويلة وعمدة لكل من $z_A$ و $z_B$ .

2) أكتب $z_C$ على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي.

3) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

4) ما هي طبيعة المثلث $0IB$.

5) $r$ الدوران الذي مركزه $O$ وزاويته $\frac{\pi}{12}$. أوجد صورة كلا من النقطتين $I$ و $B$ بهذا الدوران.

6) استنتج طبيعة المثلث $OAC$.

**التمرين رقم 17:**

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$، تعطى النقط $A; B; C; P$ والشعاع $\vec{W}$ التي لواحقها على الترتيب

$$z_A = \frac{3}{2} + 6i \; ; z_B = \frac{3}{2} - 6i \; ; z_C = -3 - \frac{1}{4}i \; ; z_P = 3 + 2i \; ; z_{\vec{W}} = -1 + \frac{5}{2}i$$

- $h$ هو التحاكي الذي مركزه $C$ ونسبته $-\frac{1}{3}$.
- $t$ الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{W}$.
- $r$ الدوران الذي مركزه النقطة $A$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

1 ) أحسب لاحقة كلا من النقط: $S = r(P)\; ; R = h(P)\; ; Q = t(B)$

2) بين أن المثلث $PQR$ قائم متساوي الساقين.

استنتج طبيعة الرباعي $PQRS$.

**التمرين رقم 18:**

المستوي المركب $(P)$ منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1) عين $(C)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي $(P)$ التي لاحقتها $z$ والتي تحقق :

$$\left|\left(1 - i\sqrt{3}\right)z - \sqrt{3} - i\right| = 4$$

2) عين الكتابة المركبة للتشابه المباشر $S$ الذي يحول النقطة $A$ التي لاحقتها $i$ إلى $O$ مبدأ الإحداثيين ويحول النقطة $B$ التي لاحقتها $\sqrt{3}$ إلى النقطة $B'$ التي لاحقتها $-4i$ . عين مركز ونسبة وزاوية هذا التشابه.

3) باستعمال نتائج السؤال الثاني أوجد المجموعة $(C)$ المعرفة في السؤال الأول .

**التمرين رقم 19:**

1) حل في $C$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

حيث $z_1$ هو الحل الذي جزؤه التخيلي موجب و $z_2$ هو الحل الآخر .

2) أ) أكتب على الشكل المثلثي كل من $z_1$ و $z_2$ .

نعرف ناكل بطريقتين
مختلفتين بالحليب وبالشاي

ب) عين الطويلة وعمدة للعدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ .

3) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ الوحدة : $1cm$.

نعتبر النقطة $M_1$ التي لاحقتها $\sqrt{2}(1+i)$ ، النقطة $M_2$ التي لاحقتها $\sqrt{2}(1-i)$ ، النقطة $A$ التي لاحقتها $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

أ) عين لاحقة النقطة $M_3$ ، صورة $M_2$ بالتحاكي $h$ الذي مركزه $A$ ونسبته $-3$ .

ب) عين لاحقة النقطة $M_4$ ، صورة $M_2$ بالدوران $h$ الذي مركزه $O$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ .

ت) أنشئ في نفس المعلم النقط $A$ ، $M_1$ ، $M_2$ ، $M_3$ ، $M_4$ .

ث) أحسب $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$

ج ) لتكن النقطة $I$ منتصف $\left[M_3M_4\right]$ و $M_5$ نظيرة $M_1$ بالنسبة إلى $I$ . بين أن النقط $M_1$ ، $M_3$ ، $M_5$ ، $M_4$ تشكل مربعا .

**التمرين رقم 20: إختيار من متعدد**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$. تُعطى النقط $A, B, C$ التي لواحقها على الترتيب هي : $z_C = -1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ، $z_A = \frac{7+3i}{5-2i}$

$\theta$ عدد حقيقي كيفي .

**في كل سؤال ، يوجد إقتراح واحد فقط صحيح من بين الإقتراحات الأربعة أ ، ب ، ت ،ج :**

1) الشكل الجبري للعدد $z_A$ هو :

أ) $\frac{7}{5} - \frac{3}{2}i$ ، ب) $\frac{29}{21} - \frac{29}{21}i$ ، ت) $1+i$ ، ج) $\frac{10}{3}$.

2) الشكل الأسي للعدد $z_C$ هو :

أ) $2e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ، ب) $-e^{i\sqrt{3}}$ ، ت) $-2e^{-\frac{i\pi}{3}}$ ، ج) $\sqrt{2}e^{\frac{2i\pi}{3}}$

3) لاحقة $B'$ صورة النقطة $B$ بالدوران الذي مركزه $I$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$ هي

أ) $1+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، ب) $-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، ت) $1+i$ ، ج) $1+\frac{1}{2}i$

4) $\arg\left(\frac{i - z_B}{z_C - z_A}\right)$ هو قيس الزاوية :

أ) $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BJ}\right)$ ، ب) $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BJ}\right)$ ، ت) $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BI}\right)$ ، ج) $\left(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{AC}\right)$

5) أحد حلي المعادلة $4z^2-4z+2=0$ هو :

أ) $1+i$ ، ب) $\overline{z_B}$ ، ت) $\frac{1+i}{4}$ ، ج) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

6) مجموعة النقط $M$ التي لاحقتها $z$ بحيث $|z-1|=\left|z-\frac{1+i}{2}\right|$ هي :

أ) الدائرة التي مركزها $B$ وطول نصف قطرها 1.

ب) محور القطعة المستقيمة $[BI]$.

ت) المستقيم $(BI)$.

ج) المستقيم $(BI)$ باستثناء النقطة $I$.

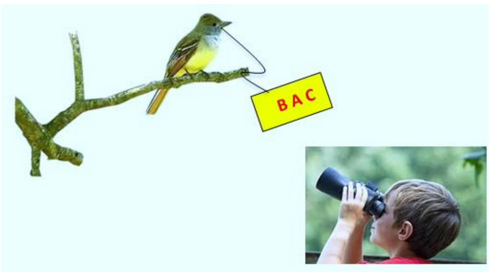
7) العدد المركب $\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$ يساوي :

أ) $0$ ، ب) $1$ ، ت) $\cos^2\theta$ ، ج) $\frac{e^{-2i\theta}}{2}$

8) التحويل النقطي في المستوي الذي كتابته المركبة $z'=\frac{\sqrt{3}}{2}(z-z_C)+z_C$ هو :

أ) دوران ، ب) تحاكي ، ت) إنسحاب ، ج) تناظر.

## التمرين رقم 21:




المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

تُعطى النقط $A$ ، $B$ ، $C$ التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=-\sqrt{3}+i$ ، $z_C=-2i$.

1) أنشئ النقط $A$ ، $B$ ، $C$.

2) أكتب على الشكل المثلثي كلا من $z_A$ ، $z_B$ ، $z_C$.

3) ليكن $z_0$ عدد مركب بحيث $z_0=1+i$. أكتب على الشكل الجبري كلا من :

$m=z_A\times z_0;n=z_B\times z_0;p=z_C\times z_0$.

4) أكتب على الشكل المثلثي العدد المركب $z_0$.

5) إستنتج الشكل المثلثي لكل من الأعداد المركبة $m;n;p$.

6) أنشئ النقط $M;N;P$ التي لواحقها على الترتيب $m;n;p$.

7) أحسب الأطوال $AB;BC;CA$ و ما هي طبيعة المثلث $ABC$ ؟

8 ) بين ان النقط $A,B,C$ و النقط $M,N,P$ تنتمي إلى دائرتين $(C_1)$ و $(C_2)$ مختلفتين مركزاهما المبدأ $O$

**التمرين رقم 22 :**

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O\,,\vec{u}\,,\vec{v}\right)$. الوحدة $1cm$.

نعتبر النقط $A\,,B\,,S\,,\Omega$ التي لواحقها على الترتيب هي :

$$z_\Omega=-2+2i\;,\;z_S=-5+5i\;,\;z_B=-4+2i\;,\;z_A=-2+4i$$

1) أوجد الشكل المثلثي لكل من $z_B\times z_A\;;\;z_\Omega\times z_S$.

2) نسمي $C$ و $D$ النقطتان بحيث $\overrightarrow{SC}=3\overrightarrow{SA}$ و $\overrightarrow{SD}=3\overrightarrow{SB}$.

بين أن لاحقة النقطة $C$ هي $z_C=4+2i$ و لاحقة النقطة $D$ هي $z_D=-2-4i$

3) بين أن النقط $A\,,B\,,C\,,D$ تنتمي إلى دائرة مركزها $O$ يطلب تعيين طول نصف قطرها.

4) أ) عين مجموعة النقط $M$ من المستوي التي لاحقتها $z$ والتي تحقق $|z+2-4i|=|z+4-2i|$.

ب)بين أن المستقيم $(S\Omega)$ هو محور القطعة المستقيمة $[AB]$

5) لتكن $H$ منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$. عين $arg\left(\dfrac{z_\Omega-z_H}{z_D-z_B}\right)$ واستنتج قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{BD}\,,\overrightarrow{H\Omega}\right)$.

**التمرين رقم 23**

إختر الجواب الصحيح من بين الإجابات المقترحة :

1) أحد حلي المعادلة $z^2-6\bar{z}+13=0$ هو :

أ) $3+2i$ ، ب) $3-2i$ ، ت) $-3+2i\sqrt{10}$ ، ث) $2i$ .

2) $A$ و $B$ نقطتان لاحقتاهما على الترتيب هما $z_A=1-i$ ، $z_B=4+i$.

لاحقة النقطة $C$ حتى يكون المثلث $ABC$ قائم في $B$ ومتساوي الساقين هي :

أ) $z_C=-1+2i$ ، ب) $z_C=3-4i$ ، ت) $z_C=2+4i$ ، ث) $z_C=6-2i$.

3) مجموعة النقط $M$ التي لاحقتها $z$ بحيث : $|z-1+3i|=|z-5+i|$ هي المستقيم الذي معادلته هي :

أ) $y=-x+1$ ، ب) $y=-2x+4$ ، ت) $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{7}{2}$ ، ث) $y=2x-8$.

4) $h$ التحاكي الذي مركزه النقطة $\Omega(-2+i)$ والذي يرفق بالنقطة $A(7+4i)$ النقطة $B(1+2i)$ . $k$ نسبة هذا التحاكي هي :

أ) $k=\dfrac{1}{3}$ ، ب) $k=\dfrac{1}{2}$ ، ت) $k=-\dfrac{1}{2}$ ، ث) $k=3$.

5) $A$ و $B$ نقطتان لاحقتاهما على الترتيب هما $z_A=1$ ، $z_B=-1-2i$.

مجموعة النقط $M$ التي لاحقتها $z$ بحيث يكون $\dfrac{z-1}{z+1+2i}$ تخيليا صرفا هي:

أ) المستقيم $(AB)$ ، ب) القطعة المستقيمة $[AB]$ ، ت) الدائرة التي قطرها $[AB]$

، ث) المستقيم العمودي على $(AB)$ والمار من المبدأ .

**6)** المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{u}\ \vec{v})$.النقطة $A(4+i)$ هي صورة النقطة $B(1+3i)$ بـ :

أ) الإنسحاب الذي شعاعه $3\vec{u}-2\vec{v}$ ، ب) الدوران الذي مركزه $\Omega(2)$ وزاويته $-\dfrac{\pi}{2}$

**ب)** التحاكي الذي مركزه $\Omega(2+2i)$ و نسبته $-2$ ، ث) الإنسحاب الذي شعاعه $-3\vec{u}+2\vec{v}$

## التمرين رقم 24

$P$ كثير حدود معرف في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كما يلي :

$.P(z)=z^4-10z^3+38z^2-90z+261.$

**1)** ليكن $\alpha$ عدد حقيقي . أحسب $P(\alpha i)$ واكتبه على الشكل الجبري.

**2)** استنتج أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلين تخيليين صرفا.

**3)** بين أنه يوجد حقيقيين $b\,;a$ يطلب تعيينهما بحيث من أجل كل عدد مركب $z$ لدينا :

$$P(z)=\left(z^2+9\right)\left(z^2+az+b\right)$$

**4)** حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ .

**5)** المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

أنشئ النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ التي لواحقها على الترتيب : $a=3i$ ، $b=-3i$ ، $c=5+2i$ ، $d=5-2i$ .

عين لاحقة النقطة $G$ مركز ثقل النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ .

**6)** عين $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي بحيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=10$ ثم أنشئ $(\Gamma)$.

## التمرين رقم 25

نعتبر كثير الحدود $P$ المعرف بـ $^3-6z^2+12z-16$

**1)** أحسب $P(4)$ .

**2)** حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ .

**3)** المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

**4)** تُعطى النقط $A$ ، $B$ ، $C$ التي لواحقها على الترتيب : $a=4$ ، $b=1+i\sqrt{3}$ ، $c=1-i\sqrt{3}$.

أ) أنشئ النقط $A$ ، $B$ ، $C$ .

ب) بين أن المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع.

**5)** $R$ الدوران الذي مركزه $O$ وقياس زاويته $\frac{\pi}{3}$ . $T$ الإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OB}$.

$K$ النقطة التي لاحقتها $k=-\sqrt{3}+i$.

أوجد لاحقتي النقطتين $F$ و $G$ صورتي النقطة $K$ بالدوران $R$ و الإنسحاب $T$ على الترتيب.

بين أن المستقيمين $(OC)$ و $(OF)$ متعامدان.

## التمرين رقم 26 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$

**1)** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ .

**2)** نعتبر النقط $A$ ذات اللاحقة $z_A=\sqrt{3}-i$ والنقطة $B$ ذات اللاحقة $z_B=\sqrt{3}+i$

والنقطة $C$ منتصف $[OB]$ ذات اللاحقة $z_C$ .

أ) عين الشكل الأسي لكل من $z_A\,;\,z_B$ و $z_C$ .

ب) علّم النقط $A\,;\,B$ و $C$ .

ج) بين أن المثلث $OAB$ متقايس الأضلاع.

**3)** لتكن النقطة $D$ صورة $C$ بالدوران $r$ الذي مركزه $O$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ .

ولتكن النقطة $E$ صورة $D$ بالإنسحاب $t$ الذي شعاعه $2\vec{v}$ .

أ) أوجد $z_D$ ثم بين أن لاحقة النقطة $E$ هي $z_E=\frac{1}{2}\left[1+i\left(4-\sqrt{3}\right)\right]$ .

ب) تحقق من أن $OE=BE=\sqrt{5-2\sqrt{3}}$ .

## التمرين رقم 27 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ . ولتكن $(C)$ الدائرة التي مركزها $O$

وطول نصف قطرها 1 . نعتبر النقطة $A$ من الدائرة $(C)$ لاحقتها $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

**1)** أ)عين اللاحقة $z_B$ للنقطة $B$ صورة $A$ بالدوران $r$ الذي مركزه $O$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ .

ب) عين اللاحقة $z_C$ للنقطة $C$ صورة $B$ بالدوران $r$ الذي مركزه $O$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ .

**2)** أ) تحقق من أن الدائرة $(C)$ محيطة بالمثلث $ABC$ . أنشئ النقط $A\,;\,B\,;\,C$ .

ب) ما هي طبيعة المثلث $ABC$ ؟

**3)** ليكن $h$ التحاكي الذي مركزه $O$ ونسبته $-2$ .

أ) أكمل الشكل بإنشاء النقط $P$ ; $Q$ و $R$ صور $A$ ; $B$ و $C$ على الترتيب بالتحاكي $h$.

ب) ما هي طبيعة المثلث $PQR$ ؟

**4)** أ) أعط الصيغة المركبة للتحاكي $h$ .

ب) أحسب $z_A+z_B+z_C$ واستنتج أن $A$ هي منتصف $[QR]$ .

ج) ماذا يمثل المستقيم $(QR)$ بالنسبة إلى الدائرة $(C)$ ؟

**التمرين رقم 28 :**

اختر الجواب الصحيح مع التبرير

| | | الجواب (أ) | الجواب (ب) | الجواب (ج) |
|---|---|---|---|---|
| السؤال رقم 01 | عمدة العدد المركب $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ هي | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{7\pi}{12}$ | $-\frac{\pi}{12}$ |
| السؤال رقم 02 | لدينا $z_A=1-i$ و $z_B=2i$ و $z_C=-2$ . لاحقة النقطة $D$ حتى يكون $ABCD$ متوازي أضلاع هي: | $z_D=3+i$ | $z_D=-3+3i$ | $z_D=-1-3i$ |
| السؤال رقم 03 | من أجل كل عدد مركب $z$ حيث $(z-i)(\overline{z}+i)$ | هو عدد حقيقي | هو عدد مركب تخيلي صرف | لا هو حقيقي ولا تخيلي صرف |
| السؤال رقم 04 | ليكن $z_A=2-i$ مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $\|z-2+i\|=\|z+1-2i\|$ | هي مستقيم يشمل النقطة $A$ | هي مستقيم لا يشمل النقطة $A$ | هي دائرة مركزها $A$ |
| السؤال رقم 05 | لدينا $z_A=5+5i$ و $z_B=2+i$ و $z_C=6+2i$ . المثلث $ABC$ هو: | مثلث متقايس الأضلاع | مثلث قائم | مثلث كيفي |

## التمرين رقم 29

يوجد جواب واحد فقط صحيح من بين الإجابات المقترحة . عين هذا الجواب الصحيح.

**1)** الشكل الجبري للعدد المركب $(1+i)^2\left(2-2i\sqrt{3}\right)$ هو :

أ) $4\sqrt{3}-4i$ ، ب) $4\sqrt{3}+4i$ ، ج) $-4\sqrt{3}+4i$ ، د) $4+4i\sqrt{3}$ .

**2)** الشكل المثلثي للعدد المركب $\dfrac{(1+i)^2}{\left(2-2i\sqrt{3}\right)}$ هو :

أ) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ ، ب) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$

ج) $\frac{1}{4}\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$ ، د) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ .

**3)** الشكل الأسي للعدد المركب $(1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)$ هو :

أ) $e^{i\frac{7\pi}{12}}$ ، ب) $2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ ، ج) $2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ ، د) $e^{i\frac{5\pi}{12}}$ .

4) $e^{i\frac{2\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{3}}$ يساوي :

أ) $i\sqrt{3}$ ، ب) $1$ ، ج) $e^{i\pi}$ ، د) $i$ .

## التمرين رقم30

**1)** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+13=0$ .

المستوى المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O\,,\vec{u}\,,\vec{v}\right)$

نعتبر النقط $A$ , $B$ , $C$ لواحقها على الترتيب $z_A=3-2i$ , $z_B=3+2i$ , $z_C=4i$ .

**2)** أنشئ الشكل وعلّم النقط $A$ , $B$ , $C$.

**3)** بين أن $OABC$ متوازي أضلاع.

**4)** عين لاحقة $G$ ، مركز متوازي الأضلاع $OABC$ .

**5)** عين مجموعة النقط $M$ من المستوي بحيث $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$ .

**6)** لتكن $M$ نقطة من المستقيم $(AB)$ . وليكن $\beta$ الجزء التخيلي للاحقة النقطة $M$.

ولتكن النقطة $N$ صورة النقطة $M$ بالدوران الذي مركزه $G$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ .

أ) بين أن لاحقة $N$ هي $\frac{5}{2}-\beta+\frac{5}{2}i$ .

ب) كيف يمكن اختيار $\beta$ حتى تكون $N$ تنتمي إلى المستقيم $(BC)$ ؟.

## التمرين رقم 31

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O ,\vec{u} ,\vec{v}\right)$

نعتبر الأعداد المركبة التالية $z_1=1+i$ , $z_2=2\left(-1+i\right)$ , $z_3=-3-i$ .

**1)** أ) أحسب $z_1^{2010}$

ب) عين العدد الطبيعي $n$ حتى يكون $z_2^{n}$ حقيقيا وموجب تماما.

**2)** نعتبر النقط $A$ , $B$ , $C$ التي لواحقها على الترتيب $z_1$ , $z_2$ , $z_3$ .

أ) $\alpha$ عدد حقيقي . عين $\alpha$ حتى تقبل الجملة $\left\{(A , \alpha) ,(B , 1) ,(C , 1)\right\}$ مرجحا $G_\alpha$ .

ب) عين مجموعة النقط $G_\alpha$ عندما $\alpha$ تمسح $\mathbb{R}-\{-2\}$ .

**3)** نعتبر الدوران $r$ الذي يحول النقطة $A$ إلى $B$ والنقطة $B$ إلى $C$ .

أ) عين العناصر المميزة للدوران $r$ .

ب) عين لاحقة النقطة $A'$ صورة النقطة $A$ بالدوران $r$ .

## التمرين رقم 32

نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، كثير الحدود $P\left(z\right)=z^4+17z^2-28z+260$ حيث $z$ عدد مركب.

**1)** عين العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث $P\left(z\right)=\left(z^2+az+b\right)\left(z^2+4z+20\right)$ .

**2)** حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P\left(z\right)=0$ .

**3)** أ) علّم في معلم متعامد ومتجانس $\left(O ;\vec{u} ,\vec{v}\right)$ النقط $A$ , $B$ , $C$ و $D$ التي لواحقها على الترتيب $z_A=-2+4i$ ; $z_B=-2-4i$ ; $z_C=2+3i$ ; $z_D=2-3i$ .

ب) عين العدد المركب $z$ الذي يحقق $\dfrac{z-z_C}{z-z_A}=i$ ثم علّم النقطة $M$ صورة $z$ .

**4)** أ) فسر هندسيا $\left|\dfrac{z-z_C}{z-z_A}\right|$ و $arg\left(\dfrac{z-z_C}{z-z_A}\right)$

ب) ما هي طبيعة المثلث $ACM$ .

ج) عين لاحقة $E$ حتى يكون $AMCE$ مربعا.

## التمرين رقم 33

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O ;\vec{u} ,\vec{v}\right)$

**1)** أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+8\sqrt{3}z+64=0$ .

ب) أكتب حلي هذه المعادلة على الشكل الأسي.

**2)** نعتبر النقطة $A$ ذات اللاحقة $z_A=-4\sqrt{3}-4i$ والنقطة $B$ ذات اللاحقة $z_B=-4\sqrt{3}+4i$

ما هي طبيعة المثلث $OAB$ .

**3)** لتكن النقطة $C$ ذات اللاحقة $z_C=\sqrt{3}+i$ ، ولتكن النقطة $D$ صورة $C$ بالدوران $r$ الذي مركزه $O$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$ . أوجد $z_D$ لاحقة النقطة $D$ .

**4)** نسمي $G$ مرجح الجملة المثقلة $\{(O\,;-1),(B\,;1),(D\,;1)\}$ .

أ) بين أن لاحقة النقطة $G$ هي $z_G=-4\sqrt{3}+6i$ .

ب) علّم النقط $A\,;B\,;C\,;D\,;G$ .

ج) بين أن الرباعي $OBGD$ متوازي أضلاع.

**5)** أثبت أن $\frac{z_C-z_G}{z_A-z_G}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ واستنتج طبيعة المثلث $AGC$ .

## التمرين رقم 34

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$

نعتبر النقط $A,\,B\,,C$ صور الأعداد المركبة التالية على الترتيب

$$z_C=\sqrt{3}+i\ \ ;\ z_B=-\sqrt{3}+i\ \ ;z_A=-2i$$

**1)** أ) اكتب $z_A\,;z_B\,;z_C$ على الشكل الأسي

ب) استنتج مركز وطول نصف قطر الدائرة $(C)$ التي تشمل النقط $A,\,B\,,C$ .

ج) علم النقط $A,\,B\,,C$ ثم أرسم الدائرة $(C)$

**2)** أ) اكتب العدد $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي .

ب) استنتج طبيعة المثلث $ABC$

**3)** ليكن $r$ الدوران الذي مركزه $A$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$

أ) بين أن النقطة $O'$ ذات اللاحقة $-\sqrt{3}-i$ صورة النقطة $O$ بالدوران $r$

ب) بين أن $[O'C]$ قطرا للدائرة $(C)$ .

ج) انشئ $(C')$ صورة الدائرة $(C)$ بالدوران $r$.

د) تحقق أن الدائرتين $(C)$ و $(C')$ تشتركان في النقطتين $A$ و $B$ .

**4)** أ) عين $(E)$ مجموعة النقط $M$ صورة $z$ بحيث : $|z|=|z+\sqrt{3}+i|$

ب) بين أن النقطتين $A$ و $B$ تنتميان إلى $(E)$.

## التمرين رقم 35

**1)** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-18z+82=0$ .

**2)** نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ ، النقط $A$ , $B$ , $C$ التي لواحقها على الترتيب هي:
$z_A = 9+i$ ; $z_B = 9-i$ ; $z_C = 11-i$ .

أ) أحسب $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ ثم استنتج أن المثلث $ABC$ قائم الزاوية في $B$ ومتساوي الساقين.

ب) أوجد الشكل المثلثي للعدد المركب $4(1-i)$ .

ج) بين أن $(z_C - z_A)(z_C - z_B) = 4(1-i)$ ثم استنتج أن $AC \times BC = 4\sqrt{2}$

**3)** لتكن $z$ لاحقة النقطة $M$ و $z'$ لاحقة النقطة $M'$ صورة $M$ بالدوران $r$ الذي مركزه $B$ وزاويته $\dfrac{3\pi}{2}$ .

بين أن $z' = -iz + 10 + 8i$ ثم تحقق من أنّ لاحقة النقطة $C'$ صورة النقطة $C$ بالدوران $r$ هي $z_{C'} = 9-3i$ .

## التمرين رقم 36

**1)** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 2z + 2 = 0$ .

**2)** نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ ، النقط $A$ , $B$ , $C$ , $D$ التي لواحقها على الترتيب هي:
$z_A = 1+i$ ; $z_B = \overline{z_A}$ ; $z_C = 2z_B$ ; $z_D = 3$ .

علّم النقط $A$ , $B$ , $C$ , $D$ ثم أتمم الشكل في بقية التمرين .

**3)** بين أن النقط $A$ , $B$ , $C$ تنتمي إلى دائرة مركزها $D$ ويطلب تحديدطول نصف قطرها.

**4)** أحسب $\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3}$ واستنتج طبيعة المثلث $DAC$ .

**5)** ليكن $h$ التحاكي الذي مركزه $D$ ونسبته 2 .وليكن الدوران $r$ الذي مركزه $D$ وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$ .

لتكن $C'$ صورة النقطة $C$ بالتحاكي $h$ و $C''$ صورة النقطة $C'$ بالدوران $r$

بين أن المستقيمين $(AC)$ و $(C'C'')$ متعامدان.

## التمرين رقم37

**1)** عين العددين المركبين $z_1$ و $z_2$ بحيث $\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 9-2i \\ 3z_1 - z_2 = 8+8i \end{cases}$ .

**2)** نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ ، النقط $A$ ; $B$ ; $\Omega$ التي لواحقها على الترتيب $z_A = 3+2i$ ; $z_B = -3$ ; $z_\Omega = 1-2i$ .

أ) أثبت أن $z_B - z_\Omega = i\left(z_A - z_\Omega\right)$ .

ب) عين طبيعة المثلث $\Omega AB$ .

3) ليكن $h$ التحاكي الذي مركزه النقطة $A$ ونسبته $2$ .

أ) عين الكتابة المركبة للتحاكي $h$ .

ب) عين $z_C$ لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $\Omega$ بالتحاكي $h$ .

ج) عين $z_D$ لاحقة النقطة $D$ مرجح الجملة $\left\{(A\ ,1)\ ;\ (B\ ,-1)\ ;\ (C\ ,1)\right\}$ .

د) بين أن $ABCD$ مربع.

4) لتكن $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تحقق $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}$

أ) تحقق أن النقطة $B$ تنتمي إلى المجموعة $(E)$، ثم عين طبيعة $(E)$ وحدد عناصرها المميزة.

ب) أنشئ المجموعة $(E)$.

## التمرين رقم38

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود

$P(z) = z^3 - (8+3i)z^2 + (25+24i)z - 75i$ .

1) أحسب $P(3i)$ وما ذا تستنتج؟

2) عين العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث من أجل كل عدد مركب $z$ :

$P(z) = (z-3i)\left(z^2 + az + b\right)$ .

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$ .

4) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O\ ;\vec{u}\ ,\vec{v}\right)$، النقط

$A\ ;B\ ;C\ ;D$ التي لواحقها على الترتيب

$z_A = -1+2i\ \ ;\ z_B = 4+3i\ \ ;\ z_C = 3i\ ;\ z_D = 4-3i$ .

أ) مثل النقط $A\ ;B\ ;C\ ;D$ .

ب) أحسب $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ و $\dfrac{z_C - z_B}{z_D - z_B}$

ج) استنتج طبيعة المثلثين $ACD$ و $BCD$ .

د) بين أن النقط $A\ ;B\ ;C\ ;D$ تنتمي إلى دائرة $(\Gamma)$ يطلب تعيين مركزها وطول نصف قطرها.

5) ليكن $t$ الإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AD}$ . أوجد $z_E$ لاحقة النقطة $E$ صورة النقطة $C$ بالإنسحاب $t$ .

## التمرين رقم39

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية : $z^2 - 2z + 4 = 0$ .

2) استنتج حلي المعادلة التالية : $\left(\bar{z}+2+2i\sqrt{3}\right)^2-2\bar{z}-4i\sqrt{3}=0$ حيث $\bar{z}$ مرافق $z$ .

3) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط $A\ ;B\ ;C\ ;D$ التي لواحقها على الترتيب هي :

$z_A=-1+i\sqrt{3}\ ;z_B=-1+3i\sqrt{3}\ ;z_C=-1+i\sqrt{3}\ ;z_D=-1-i\sqrt{3}$ .

أ) ما هي طبيعة المثلث $ABD$ ؟.

ب) حدد العبارة المركبة للتشابه $S$ الذي مركزه $B$ وزاويته $-\frac{\pi}{6}$ ونسبته $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

ج)عين $z_E$ لاحقة النقطة $E$ صورة النقطة $C$ بالتشابه $S$ .

د) أحسب العدد المركب $\frac{z_B-z_E}{z_A-z_E}$ واستنتج طبيعة الرباعي $ABED$ .

**التمرين رقم40**

نعتبر العدد المركب $z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$ .

نضع $S=z+z^2+z^4$ و $T=z^3+z^5+z^6$ .

1) بين أنه من أجل كل عدد صحيح $k$ : $z^k=z^{k-7}$ .

2) بين أن $\overline{T}=S$ .

3) بين أن $Im\left(S\right)>0$ .

4) أحسب $S+T$ و $ST$ .

5) استنتج $S$ و $T$ .

**التمرين رقم41**

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ .

$z$ و $z'$ عددان مركبان بحيث $z'=\left|z\right|^2+4iz-5-4i$ .

1) عين $\left(E\right)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ بحيث يكون $z'$ حقيقيا.

2) عين $\left(E'\right)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ بحيث يكون $z'$ تخيلي صرف.

3) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية $z'=1$ . نرمز بـ $z_1$ إلى الحل الذي جزؤه التخيلي سالب و $z_2$ إلى الحل الآخر.

4) نعتبر النقطتين $A$ و $B$ لاحقتاهما على الترتيب $z_A=1-i$ و $z_B=1+5i$ ولتكن النقطة $C$ نظيرة النقطة $A$ بالنسبة إلى المبدأ $O$ . عين $z_C$ لاحقة $C$ و $z_G$ لاحقة $G$ مركز ثقل المثلث $ABC$ .

5) عين مركز التشابه $S$ الذي نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ويحول $B$ إلى $C$ .

# حلول التمارين النموذجية للبكالوريا

## حل التمرين رقم 01 :

$$P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63.$$

1 ) $(z^2+3)(az^2+bz+c)=az^4+bz^3+(3a+c)z^2+3bz+3c$ بالمطابقة نجد :

$a=1 ; b=-6 ; c=21$ ومنه $P(z)=(z^2+3)(z^2-6z+21)$.

2 ) $P(z)=0$ يكافئ : $(z^2+3=0)$ أو $(z^2-6z+21=0)$

- حلا المعادلة $(z^2+3=0)$ هما $i\sqrt{3}$ و $-i\sqrt{3}$
- حلا المعادلة $(z^2-6z+21=0)$ هما $3+2i\sqrt{3}$ و $3-2i\sqrt{3}$

وأخيرا حلول المعادلة $P(z)=0$ هي : $i\sqrt{3}$ ، $-i\sqrt{3}$ ، $3+2i\sqrt{3}$ و $3-2i\sqrt{3}$.

3) نبين أن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها $I(3,0)$

$AI^2=|3-i\sqrt{3}|^2=9+3=12$ ، $BI^2=|3+i\sqrt{3}|^2=9+3=12$

$CI^2=|2i\sqrt{3}|^2=12$ ، $DI^2=|-2i\sqrt{3}|^2=12$

نستنتج أن: $AI=BI=CI=DI=2\sqrt{3}$

وهذا يعني أن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها $I(3,0)$

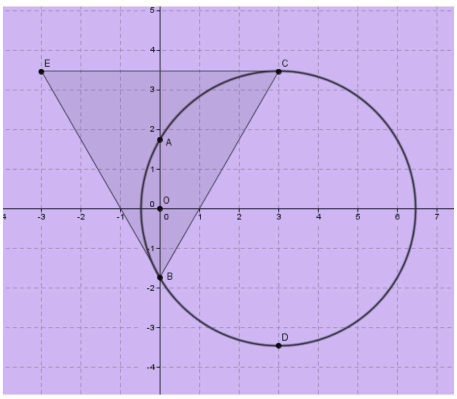
وطول نصف قطرها $2\sqrt{3}$.

4 ) بما أن النقطة $E$ نظيرة النقطة $D$ بالنسبة إلى $O$ فإن: $z_E=-z_D=-3+2i\sqrt{3}$

نحسب أطوال القطع المستقيمة : $BE$ ; $EC$ ; $BC$

$$BE=|z_E-z_B|=|-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}|=|-3+3i\sqrt{3}|=\sqrt{36}=6$$

$$EC=|z_C-z_E|=|3+2i\sqrt{3}+3-2i\sqrt{3}|=6$$



$$BC=|z_C-z_B|=|3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}|=|3+3i\sqrt{3}|=\sqrt{36}=6$$

وبالتالي $BE=EC=BC$

ومنه المثلث $BEC$ متقايس الأضلاع.

**حل التمرين رقم 02:**

1) أ) بما أن $P(8)=0$ فإن 8 هو جذر لكثير الحدود $P$ فهو إذن يُحلّل على الشكل التالي :

$$P(z)=(z-8)(\alpha z^2+\beta z+\lambda)$$

بعد النشر والتبسيط نجد : $\alpha=1$ , $\beta=-4$ , $\gamma=16$ وبالتالي

$$P(z)=(z-8)(z^2-4z+16)$$

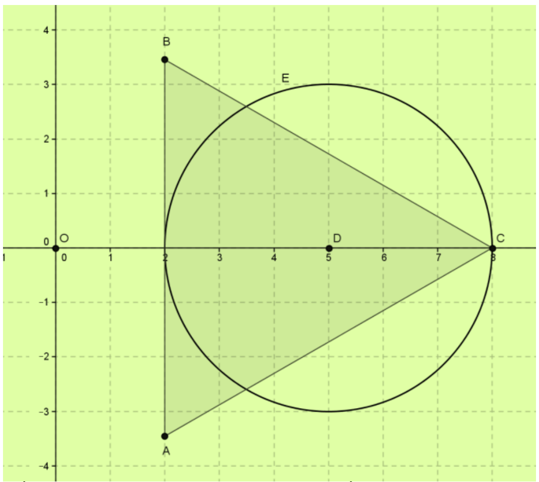
ب) $P(z)=0$ يكافئ $z=8$ أو $z^2-4z+16=0$ .

حلا المعادلة $z^2-4z+16=0$ هما : $z_1=2-2i\sqrt{3}$ ، $z_2=2+2i\sqrt{3}$.

مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي $\{8\,;\,2-2i\sqrt{3}\,;\,2+2i\sqrt{3}\}$ .

2) أ) $|z_A|=|2-2i\sqrt{3}|=4$ ، $z_A=4\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

ونستنتج أن $-\frac{\pi}{3}$ هي عمدة للعدد المركب $z_A=2-2i\sqrt{3}$.




ب) $Z=\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{2-2i\sqrt{3}-8}{2+2i\sqrt{3}-8}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $|Z|=1$ و $\frac{\pi}{3}$ عمدة للعدد المركب $Z$

ومنه المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع .

ت) لدينا : $|z_A|=4$ , $|z_B|=4$ , $|z_C|=8$ ، $D$ مرجح الجملة $\{(A,4),(B,4),(C,8)\}$

أو كذلك $D$ مرجح الجملة $\{(A,1),(B,1),(C,2)\}$.

ويكون لدينا : $z_D=\frac{z_A+z_B+2z_C}{4}=5$ ومنه $D(5,0)$ .

ج) بما أن $D$ مرجح الجملة $\{(A,1),(B,1),(C,2)\}$ فإن $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MD}$

ومن أجل كل نقطة $M$ لدينا :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$$

وبالتالي $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$

يكافئ $\left\|4\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right\|$ أو $\left\|\overrightarrow{MD}\right\|=\frac{1}{4}\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right\|$

ولكن $\frac{1}{4}\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right\|=3$ ومنه مجموعة النقط $(E)$ هي الدائرة التي مركزها $D$ وطول نصف قطرها 3.

**حل التمرين رقم 03:**

1) $$Z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-1+i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

2) لدينا من جهة : $$-1+i\sqrt{3}=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

ولدينا من جهة أخرى $$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

**نستنتج :**

$$Z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$Z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

3) نطابق بين الشكل الجبري والشكل المثلثي : $$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

نساوي بين الجزئين الحقيقيين والجزئين التخيليين فنجد :

$$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{و} \quad \sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

نشوة النجاح في الـBAC

**حل التمرين رقم 04 :**

1) $$Z=\frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}=\frac{2+x-iy}{1+x-iy}=\frac{(2+x)-iy}{(1+x)-iy}\times\frac{(1+x)+iy}{(1+x)+iy}$$

$$X=\frac{x^2+y^2+3x+2}{(1+x)^2+y^2}\quad ;\quad Y=\frac{y}{(1+x)^2+y^2}$$

2) يكون $Z$ حقيقيا إذا كان $\begin{cases} y=0 \\ (x,y)\neq(-1,0)\end{cases}$ هي محور الفواصل باستثناء النقطة $(E)$ $A(-1,0)$.

3) $Z$ تخيليا صرفا إذا كان $\begin{cases} x^2+y^2+3x+2=0 \\ (x,y)\neq(-1,0) \end{cases}$ أي $\begin{cases} \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4} \\ x,y \neq -1,0 \end{cases}$ هي $(F)$

دائرة مركزها النقطة $\omega\left(-\frac{3}{2};0\right)$ وطول نصف قطرها $\frac{1}{2}$ باستثناء النقطة $A(-1,0)$.

**حل التمرين رقم 05 :**

1) $r=\left|1+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1+3}=2$ ، نرمز بـ $\theta$ إلى عمدة هذا العدد فيكون لدينا :

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ و $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$ .

2) $z_1=\left(1+i\sqrt{3}\right)z_0=1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

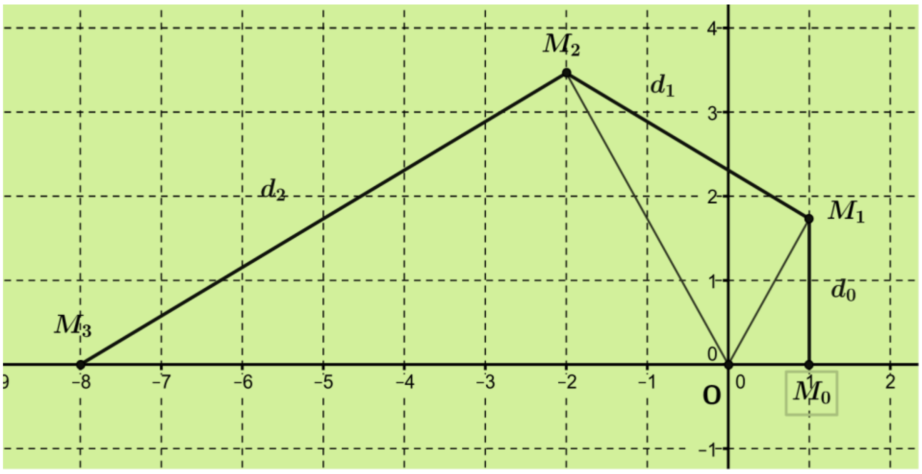
$z_2=\left(1+i\sqrt{3}\right)z_1=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2=-2+2i\sqrt{3}=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$z_3=\left(1+i\sqrt{3}\right)z_2=\left(1+i\sqrt{3}\right)^3=-8=8\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$

3) $\frac{z_2-z_1}{z_1}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=i\sqrt{3}$.

$\left(\overline{OM},\overline{M_1M_2}\right)=\arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_1-z_0}\right)+2k\pi=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ , k\in\mathbb{Z}$ ومنه المثلث $OM_1M_2$

قائم في $M_1$.




4)

$d_0=\left|z_1-z_0\right|=\left|i\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}$ وهي المسافة $M_0M_1$

$d_1=\left|z_2-z_1\right|=\left|-3+i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$ وهي المسافة $M_1M_2$ .

$d_2=\left|z_3-z_2\right|=\left|-6-2i\sqrt{3}\right|=4\sqrt{3}$ وهي المسافة $M_2M_3$ .

5) أ) $d_{n+1}=\left|z_{n+2}-z_{n+1}\right|=\left|\left(1+i\sqrt{3}\right)z_{n+1}-\left(1+i\sqrt{3}\right)z_n\right|=\left|1+i\sqrt{3}\right|\left|z_{n+1}-z_n\right|=2d_n$

أي المتتالية $(d_n)$ هي متتالية هندسية أساسها 2.

ب) الطول $M_0$ , $M_1$ , $M_2$ ,.........., $M_n$ يساوي $d_0 \; +d_1 \; +d_2 \; +.......d_{n-1}$

وهو مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية وبالتالي :

$$S=d_0 \; +d_1 \; +d_2 \; +.......d_{n-1} \; =d_0\times\frac{2^n-1}{2-1}=\sqrt{3}\left(2^n-1\right)$$

ت) الوحدة المعطاة هي $1\,cm$ ومنه $1km$ يوافق $100000\;cm$

$S>10^5$ يعني $\sqrt{3}\left(2^n-1\right)>10^5$ أي $\left(2^n-1\right)>\frac{10^5}{\sqrt{3}}$ تكافئ $2^n>1+\frac{10^5}{\sqrt{3}}$

وهذا يكافئ $n\ln 2>\ln\left(1+\frac{10^5}{\sqrt{3}}\right)$ أي $n>\frac{\ln\left(1+\frac{10^5}{\sqrt{3}}\right)}{\ln 2}$ ، لدينا $\frac{\ln\left(1+\frac{10^5}{\sqrt{3}}\right)}{\ln 2}\approx 15{,}8$

وأخيرا ابتداءا من $n=16$ يكون الطول أكبر من $1km$ .

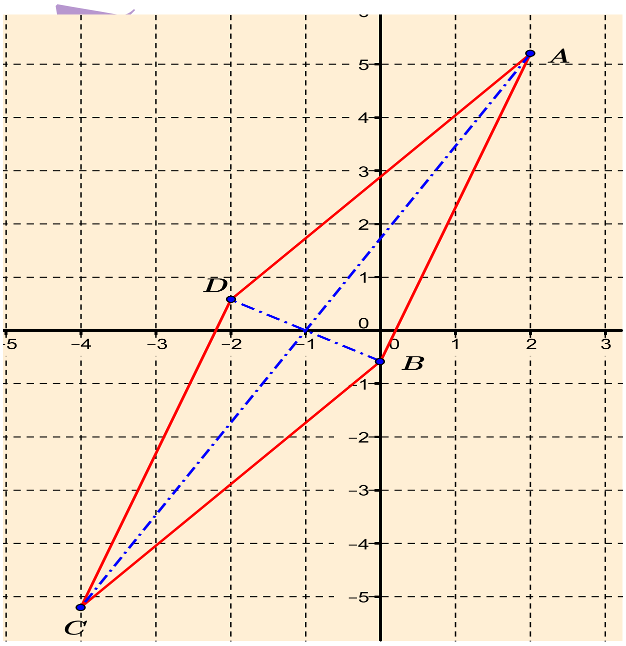
## حل التمرين رقم 06:

1) $ABCD$ متوازي الأضلاع معناه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

$$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=-i\frac{\sqrt{3}}{3}-2-3i\sqrt{3}=-2-i\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$z_{\overrightarrow{DC}}=z_C-z_D=-4-3i\sqrt{3}+2-i\frac{\sqrt{3}}{3}=-2-i\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

ومنه $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{DC}}$ أي $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ إذن $ABCD$ هو متوازي الأضلاع



2)

$$\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = \frac{-2 + i\frac{\sqrt{3}}{3} - \left(-i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{-4 - 3i\sqrt{3} - \left(2 + 3i\sqrt{3}\right)} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{9 + 9i\sqrt{3}} = \frac{-i\sqrt{3}}{9}$$

$\arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$، أي أن $(AC) \perp (BD)$ .

وبالتالي الشكل $ABCD$ معين ( القطران متعامدان)

## حل التمرين رقم 07:

1) **خاطئ لأن الكتابة** $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ليست شكل مثلثي ، لأن الشكل المثلثي يكون على الصيغة $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $r > 0$ .

2) **صحيح**

3) **صحيح** $-z = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ هو الشكل المثلثي للعدد المركب $(-z)$ حيث

$$|-z| = 3$$

$$\arg(-z) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$$

الهزيمة والندم

4) **صحيح** : يمكن كتابة $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ على الشكل

$$z = 3\left(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$z = 3\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

5) **صحيح** : لأنه نعلم أنه إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ فإن $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right)$ إذن لدينا $z = 3\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

ومنه $\frac{1}{z} = \frac{1}{3}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)$ أي $\frac{1}{z} = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ لأن

$-\frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ .

**حل التمرين رقم 08:**

**اولا :**

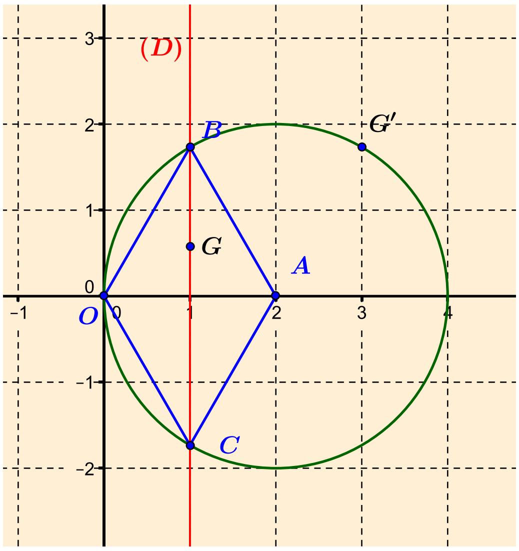
أ)لدينا $z_B=1+i\sqrt{3}$ ، $|z_B|=|1+i\sqrt{3}|=\sqrt{1+3}=2$ ومنه $z_B=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب) وبما أن $z_C=\overline{z_B}$ فإن $z_C=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ت) لدينا $z_A-z_C=2-1+i\sqrt{3}=z_B$ ومنه $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CA}$

إذن $OBAC$ متوازي أضلاع.

ولدينا من جهة أخرى $|z_B|=|z_C|$ أي $OB=OC$.




$OBAC$ متوازي أضلاع وفيه ضلعين متتابعين لهما نفس الطول فهو إذن معين.

ج) تعيين وإنشاء مجموعة النقط $(D)$ بحيث : $|z|=|z-2|$.

$M\in(D)$ تكافئ $|z|=|z-2|$ أي $OM=AM$ وهذا يكافئ أن النقطة $M$ تنتمي إلى محور القطعة المستقيمة $[OA]$.

مجموعة النقط $(D)$ للنقط $M$ بحيث : $|z|=|z-2|$ هي محور القطعة المستقيمة $[OA]$.

**ثانيا :**

1)أ) نحل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z=\frac{-4}{z-2}$.

من أجل $z\neq z_A$ ، $z=\frac{-4}{z-2}$ تكافئ $z(z-2)=-4$ أي $z^2-2z+4=0$

نحل هذه المعادلة فنجد $z_B=1+i\sqrt{3}$ ، $z_C=1-i\sqrt{3}$ .

ب) نستنتج أن النقطتين المرفقتين بالنقطتين $B$ و $C$ هما $B$ و $C$ .

ت) اللاحقة $z_G$ لمركز ثقل المثلث $OAB$ هي : $z_G=\frac{1}{3}(z_0+z_A+z_B)=1+i\frac{\sqrt{3}}{3}$

ومنه $z_{G'}=\frac{-4}{z_G-2}=\frac{-4}{1+i\frac{\sqrt{3}}{3}-2}=3+i\sqrt{3}$

2) أ) نبين أنه من أجل كل عدد مركب $z$ المختلف عن 2 ، $|z'-2|=\dfrac{2|z|}{|z-2|}$.

$$|z'-2|=\left|\frac{-4}{z-2}-2\right|=\left|\frac{-4-2z+4}{z-2}\right|=\left|\frac{-2z}{z-2}\right|=\frac{2|z|}{|z-2|}$$

ب) $M\in(D)$ تكافئ $|z|=|z-2|$ وتكافئ $\dfrac{|z|}{|z-2|}=1$ وحسب ما سبق كذلك تكافئ $\dfrac{|z'-2|}{2}=1$

أي $|z'-2|=2$ أو $AM'=2$ أي $M'$ تنتمي إلى دائرة مركزها $A$ وطول نصف قطرها 2.

**حل التمرين رقم 09:**

1) $\left(1-\sqrt{2}\right)^2=1-2\sqrt{2}+2=3-2\sqrt{2}$

للمعادلة $\Delta=\left(1+\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{2}=1-2\sqrt{2}+2=\left(1-\sqrt{2}\right)^2$

حلان متمايزان هما: $z_1=1$ أو $z_2=\sqrt{2}$ .

2) أ) $z+\dfrac{1}{z}=1$ تكافئ $z^2+1=z$ أي $z^2-z+1=0$ هذه المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين

هما : $z'=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ أ و $z''=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$

ب) $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ تكافئ $z^2+1=\sqrt{2}z$ أي $z^2-\sqrt{2}z+1=0$ هذه المعادلة تقبل حلين مركبين

مترافقين هما : $z_3=\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$ أو $z_4=\dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$

3) أ) $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2-\left(1+\sqrt{2}\right)\left(z+\dfrac{1}{z}\right)+\sqrt{2}=\left(\dfrac{z^2+1}{z}\right)^2-\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\dfrac{z^2+1}{z}\right)+\sqrt{2}$

$$\frac{\left(z^4+2z^2+1\right)-\left(1+\sqrt{2}\right)\left(z^2+1\right)z+\sqrt{2}z^2}{z^2}$$

$$\frac{z^4-\left(1+\sqrt{2}\right)z^3+\left(2+\sqrt{2}\right)z^2-\left(1+\sqrt{2}\right)z+1}{z^2}=\frac{P(z)}{z^2}$$

ب) أولا 0 ليس حلا للمعادلة $P(z)=0$ لأن $P(0)\neq 0$ .

$P(z)=0$ تكافئ $\dfrac{P(z)}{z^2}=0$ أي $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2-\left(1+\sqrt{2}\right)\left(z+\dfrac{1}{z}\right)+\sqrt{2}=0$

بوضع $Z=z+\dfrac{1}{z}$ يكون $Z$ هو حل للمعادلة $Z^2-\left(1+\sqrt{2}\right)Z+\sqrt{2}=0$ فحسب ما سبق

نجد $Z=1$ أو $Z=\sqrt{2}$ أي $z+\dfrac{1}{z}=1$ أو $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$ إذن حلول المعادلة $P(z)=0$ هي :

$\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ أو $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ و $\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$ أو $\dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$

**حل التمرين رقم 10:**

1) نضع $z_0=\alpha i$ حيث $\alpha$ عدد حقيقي غير معدوم

المعادلة $z^2-\left(1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)z+i+\sqrt{3}=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا $z_0=\alpha i$ معناه:

$z_0{}^2-\left(1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)z_0+i+\sqrt{3}=0$ أي $(\alpha i)^2-\left(1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)(\alpha i)+i+\sqrt{3}=0$

نحصل على $\alpha=1$ أو $\alpha=-\sqrt{3}-i$ حل مرفوض لأن $\alpha$ عدد حقيقي وبالتالي $z_0=i$ .

2) استنتاج الحل الثاني للمعادلة وليكن $z_1$ ، نعلم أن

$z_0+z_1=\dfrac{\left(1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)}{1}=1+i-i\sqrt{3}$ أي $z_1=1+i-i\sqrt{3}-i=1-i\sqrt{3}$ إذن

$S=\left\{i\ ,1-i\sqrt{3}\right\}$.

3) لدينا $z_A=1+i$ و $z_B=i$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

أ) $z_A=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ و $z_B=1\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$ و

$z_C=2\left(\cos\dfrac{-\pi}{3}+i\sin\dfrac{-\pi}{3}\right)$

ب) قيس الزاوية $\left(\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AC}\right)$ هو $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)$

$\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{1-i\sqrt{3}-1-i}{i-1-i}=\left(\sqrt{3}+1\right)i$ و بالتالي $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ حيث

$k\in\mathbb{Z}$ والمثلث $ABC$ قائم في النقطة $A$ .

ج) مجموعة النقط $M$ التي لاحقتها $z=x+iy$ بحيث : $\left|z-1+i\sqrt{3}\right|=\left|z-1-i\right|$ .

$\left|x+iy-1+i\sqrt{3}\right|=\left|x+iy-1-i\right|$ أي $\left|(x-1)+i\left(y+\sqrt{3}\right)\right|=\left|(x-1)+i(y-1)\right|$

ومنه $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2}$

وأخيرا نحصل على $y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ إذن مجموعة النقط $M$ التي لاحقتها $z=x+iy$ بحيث :

$\left|z-1+i\sqrt{3}\right|=\left|z-1-i\right|$ هي مستقيم معادلته $y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

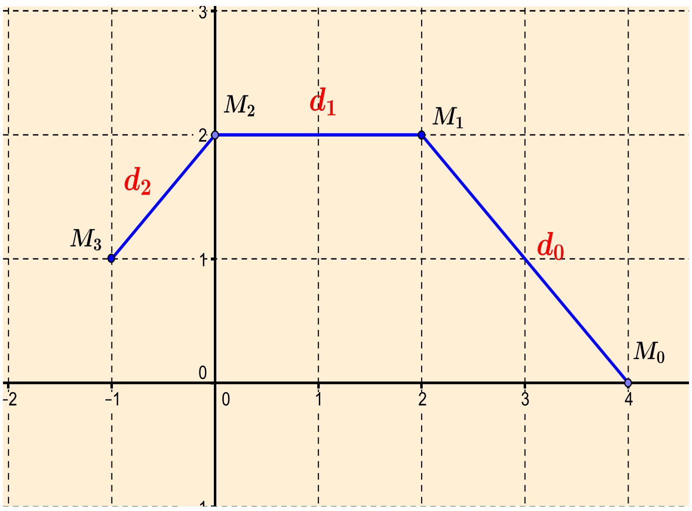
**حل التمرين رقم 11:**

1) لدينا : $z_0=4\ ;z_1=2+2i\ \ ;z_2=2i\ ;z_3=-1+i$

$$z_0 = 4 = 4(\cos 0 + i\sin 0) \quad ; \quad z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \quad ; \quad z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

2) إنشاء النقط :




3) $d_0 = |z_0 - z_1| = M_1M_0 \; ; d_1 = |z_1 - z_2| = M_2M_1 \; ; d_2 = |z_2 - z_3| = M_3M_2$

4)
$$d_0 = |z_0 - z_1| = |4 - 2 - 2i| = |2 - 2i| = 2\sqrt{2}$$
$$d_1 = |z_1 - z_2| = |2 + 2i - 2i| = |2| = 2$$
$$d_2 = |z_2 - z_3| = |2i - (1+i)| = |1+i| = \sqrt{2}$$

و نلاحظ : $\dfrac{d_1}{d_0} = \dfrac{d_2}{d_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$d_0 \; ; \; d_1 \; ; d_2$ في هذا الترتيب تشكل حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5) طول الخط المنكسر $M_0M_1M_2M_3$ هو $L = M_0M_1M_2M_3$

إذن $L = M_0M_1 + M_1M_2 + M_2M_3$ أي $L = d_0 + d_1 + d_2 = 2 + 3\sqrt{2}$

وبما أن وحدة المعلم المعطاة هي $2\,cm$ فإن $L = 4 + 6\sqrt{2}\,cm$

**حل التمرين رقم 12:**

| السؤال رقم | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الجواب رقم | ت | ت | ب | ب | ت | ت | أ | ت |

**حل التمرين رقم 13:**

1) **التأكيدة** ت) $n = 6k + 3$ **هي الصحيحة** : التعليل

$\left(\sqrt{3} + i\right)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}} = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$ يكون تخيليا صرف إذا كان.

$\cos\frac{n\pi}{6} = 0$ تكافئ $\frac{n\pi}{6} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ومنه $n = 6k + 3$.

2) التأكيدة ت) $\frac{47\pi}{6}$ هي الصحيحة : التعليل

مع العلم أن $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) = \arg(\sqrt{3} - i) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\frac{47\pi}{6} = \frac{48\pi - \pi}{6} = 8\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2(4)\pi$.

3) التأكيدة ج) $z_C = \sqrt{3} + 2i$ هي الصحيحة . التعليل :

$z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$ ومنه

$z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A) + z_A = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} - i) + i = \sqrt{3} + 2i$.

4) التأكيدة ب) $y = -x$ هي الصحيحة . التعليل :

$|z - 1| = |z + i|$ تكافئ $|z - z_D| = |z - z_E|$ حيث $z_D = 1$ ، $z_E = -i$.

$|z - z_D| = |z - z_E|$ تكافئ $MD = ME$ إذن $y = -x$.

**حل التمرين رقم 14:**

1) نحل المعادلة $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$ باستعمال المميز نجد

$\Delta = 64 \times 3 - 64 \times 4 = -64 = 64i^2$ والمعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين :

$S = \{4\sqrt{3} - 4i \; ; \; 4\sqrt{3} + 4i\}$

2) أ) $z_A = 4\sqrt{3} - 4i$ ، $|z_A| = 8$ نستطيع الكتابة $z_A = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 8e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_B = 4\sqrt{3} + 4i$ ، $|z_B| = 8$ نستطيع الكتابة $z_A = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$

ب) لدينا $OA = |z_A| = 8$ ، $OB = |z_B| = 8$ ، $AB = |z_B - z_A| = |8i| = 8$

إذن المثلث $OAB$ متقايس الأضلاع.

3) $z_D = (-\sqrt{3} + i)e^{-i\frac{\pi}{3}} = (-\sqrt{3} + i)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2i$

4) أ) مجموع المعاملات يساوي 1 وهو غير معدوم إذن النقطة $G$ موجودة. بالتعريف لدينا :

$-\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ تكافئ $z_G = \frac{-z_O + z_D + z_B}{-1+1+1} = 4\sqrt{3} + 6i$

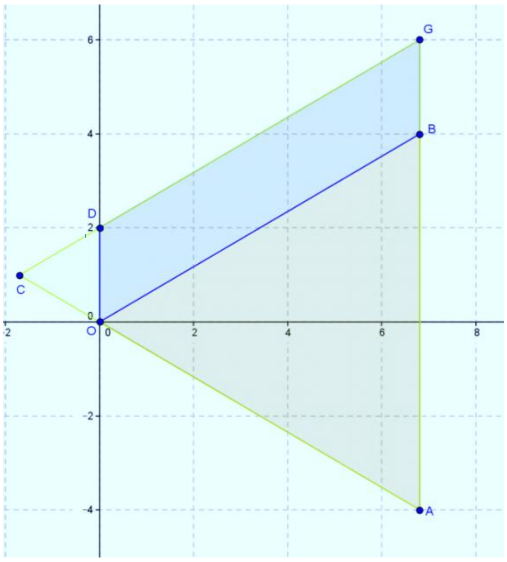
ب) لتعليم $A$ و $B$ نستعمل الدائرة التي مركزها $O$ وطول نصف قطرها 8. ولتعليم $C$ و $D$ نستعمل الدائرة التي مركزها $O$ وطول نصف قطرها 2.

ت) لدينا $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{OD}$

ومنه $OBGD$ متوازي أضلاع.

5) نجد بسرعة $GA = CA = CG = 10$

وبالتالي $ACG$ متقايس الأضلاع.



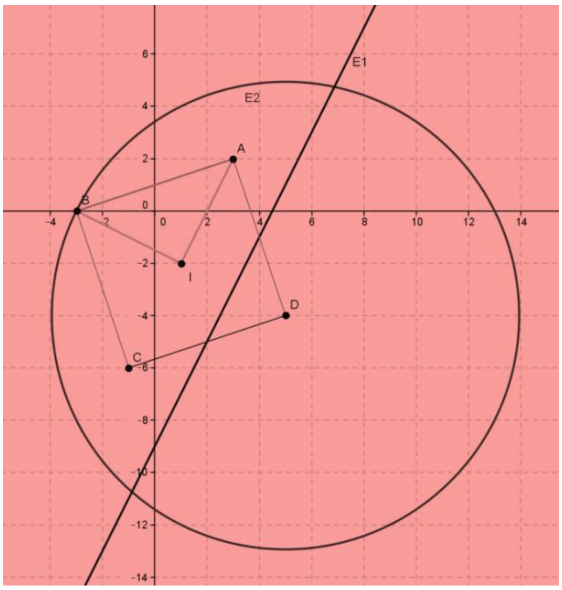

## حل التمرين رقم 15:

2 ) $Z = \dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B} = \dfrac{(1-2i)-(3+2i)}{(1-2i-(-3)} = \dfrac{-2-4i}{4-2i} = -i$

لدينا من جهة : $\dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B} = -i$ وبالتالي : $\left|\dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B}\right| = \dfrac{AI}{BI} = |-i| = 1$ أي $AI = BI$

ولدينا من جهة أخرى : $\dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B} = -i$ وبالتالي : $\arg\left(\dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B}\right) = \arg -i = -\dfrac{\pi}{2}$ أي

$\overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{IB}$




إذن المثلث $IAB$ قائم في $I$ ومتساوي الساقين .

3 ) لاحقة النقطة $C$

$C$ صورة $I$ بالتحاكي الذي مركزه $A$ ونسبته 2 معناه $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ أي

$z_C - z_A = 2(z_I - z_A)$

ومنه $z_C = z_A + 2(z_I - z_A)$ أي $z_C = 3+2i+2(1-2i-3-2i) = -1-6i$.

4 ) النقطة $D$ مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$ معناه $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

أي $(z_A - z_D) - (z_B - z_D) + (z_C - z_D) = 0$ ومنه $-z_D + z_A - z_B + z_C = 0$

إذن $z_D = z_A - z_B + z_C = 3+2i+3-1-6i = 5-4i$

5 ) طبيعة $ABCD$ .

لاحقة $\overrightarrow{AB}$ هي $z_B - z_A = -3-3-2i = -6-2i$

لاحقة $\overrightarrow{DC}$ هي $z_C - z_D = -1-6i-5+4i = -6-2i$ ومنه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ إذن $ABCD$ متوازي الأضلاع. بالإضافة إلى ذلك :

لاحقة $\overrightarrow{AD}$ هي $z_D - z_A = 5-4i-3-2i = 2-6i$

بما أن $i^2 = -1$ يمكن كتابة $z_D - z_A = 2-6i$ على الشكل

$z_D - z_A = i(-6-2i) = i(z_B - z_A)$

أي $z_D - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A)$ وهذا يعني أن النقطة $D$ هي صورة النقطة $B$ بالدوران الذي مركزه $A$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$. وأخيرا $ABCD$ متوازي الأضلاع فيه ضلعان متتاليان متقايسان ومتعامدان فهو إذن مربع.

6 ) $(\Gamma_1)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|$

لدينا : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$ لأن $D$ مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$

وكذلك $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MJ}$ حيث $J$ هو منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$ إذن :

$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MD}\right\| = \frac{1}{2}\left\|2\overrightarrow{MJ}\right\|$ أي $\left\|\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{MJ}\right\|$

ولدينا لاحقة $J$ هي : $z_J = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{3+2i-1-6i}{2} = 1-2i = z_I$ إذن $I$ هي منتصف $[AC]$

$\left\|\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{MJ}\right\|$ تكافئ إذن $MD = MI$ وأخيرا مجموعة النقط $(\Gamma_1)$ هي محور القطعة المستقيمة $[ID]$.

7 ) $B$ تنتمي إلى $(\Gamma_2)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}$

نعوض $M$ بالنقطة $B$ فنجد في الطرف الأول : $\left\|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BD}\right\|$

لأن $ABCD$ مربع فهو متوازي أضلاع. ولكن

$\left\|\overrightarrow{BD}\right\| = |z_D - z_B| = |5-4i+3| = |8-4i| = 4\sqrt{5}$

ومنه $B$ تنتمي إلى $(\Gamma_2)$.

- تعيين $(\Gamma_2)$: $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MD}\right\|=MD=4\sqrt{5}$ لأن $D$ مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$ وبالتالي $(\Gamma_2)$ هي الدائرة التي مركزها $D$ وطول نصف قطرها $4\sqrt{5}$.

**حل التمرين رقم 16 :**

1) $|z_A|=\left|\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{6+2}}{2}=\sqrt{2}$ و $|z_B|=|1-i|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ . لتكن $\alpha$

عمدة $z_A$ : لدينا $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$ ومنه $\alpha=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

لتكن $\theta$ عمدة $z_B$ : لدينا $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $\theta=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$. حيث $k\in\mathbb{Z}$

.

2) $$z_C=\frac{z_A}{z_B}=\frac{\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}}{1-i}=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\arg(z_C)=\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)=\arg(z_A)-\arg(z_B)=-\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{12}+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

$|z_C|=\left|\dfrac{z_A}{z_B}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ ومنه $z_C=\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}$ .


2) نطابق بين الشكل الجبري والشكل المثلثي للعدد $z_C$ :

$z_C=\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}$ و $z_C=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\,\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

فنجد

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\quad,\quad\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3) طبيعة المثلث $OIB$: قائم في $I$.

4) لتكن $I'$ و $B'$ صورتي $I$ و $B$ بالدوران الذي مركزه $O$ وزاويته $\dfrac{\pi}{12}$. لدينا إذن:

$z_{I'}-z_O=e^{i\frac{\pi}{12}}(z_I-z_O)$ أي $z_{I'}=z_I e^{i\frac{\pi}{12}}=e^{i\frac{\pi}{12}}=z_C$

أي $z_{B'}-z_O=e^{i\frac{\pi}{12}}(z_B-z_O)$

ومنه $z_{B'}=z_Be^{i\frac{\pi}{12}}=(1-i)e^{i\frac{\pi}{12}}=(1-i)\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

$z_{B'}=\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=z_A$

5) استنتاج طبيعة المثلث $OAC$

وجدنا في السؤال السابق صورة $I$ هي $C$ وكذلك صورة $B$ هي $A$ بالدوران $r$ الذي مركزه $O$ وزاويته $\frac{\pi}{12}$. إذن صورة المثلث $OIB$ القائم في $I$ هي المثلث $OCA$. المثلث $OCA$ قائم في $C$

**حل التمرين رقم 17:**

1) الصيغة المركبة للإنسحاب $t$ الذي شعاعه $\overrightarrow{W}$ هي : $z'=z+z_{\overrightarrow{W}}$

$Q=t(B)$ معناه $z_Q=z_B+z_{\overrightarrow{W}}$ أي $z_Q=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i$.

2) الصيغة المركبة للتحاكي $h$ الذي مركزه $\omega$ ونسبته $k$ هي : $z'-z_\omega=k(z-z_\omega)$

$R=h(P)$ معناه $z_R-z_C=-\frac{1}{3}(z_P-z_C)$ ومنه $z_R=z_C-\frac{1}{3}(z_P-z_C)=-5-i$

3) الصيغة المركبة للدوران $r$ الذي مركزه $\omega$ وزاويته $\theta$ هي : $z'-z_\omega=e^{i\theta}(z-z_\omega)$

$S=r(P)$ معناه $z_S-z_A=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_P-z_A)$ أي $z_S=z_A-i(z_P-z_A)=-\frac{5}{2}+\frac{9}{2}i$

4) حتى نبين أن المثلث $PQR$ قائم ومتساوي الساقين. يكفي أن نبين أن النقطة $R$ هي صورة النقطة $P$ بالدوران الذي مركزه $Q$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وحتى نبين ذلك نبين :

$z_R-z_Q=i(z_P-z_Q)$

لدينا من جهة : $z_P-z_Q=\frac{5}{2}+\frac{11}{2}i$ و منه $i(z_P-z_Q)=i\left(\frac{5}{2}+\frac{11}{2}i\right)=-\frac{11}{2}+\frac{5}{2}i$

ولدينا من جهة أخرى : $z_R-z_Q=-\frac{11}{2}+\frac{5}{2}i$

إذن $z_R-z_Q=i(z_P-z_Q)$ وبالتالي المثلث $PQR$ قائم في $Q$ متساوي الساقين .

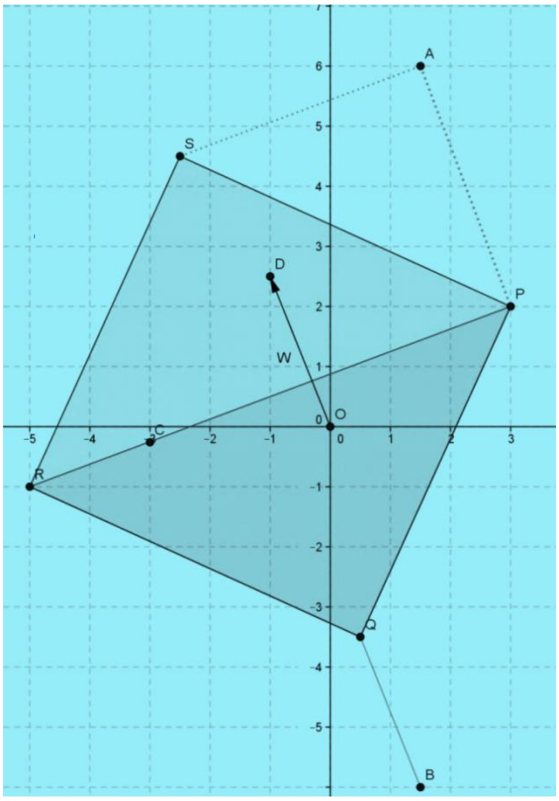
لاحقة الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ هي $z_Q-z_P=-\frac{5}{2}-\frac{11}{2}i$

و لاحقة الشعاع $\overrightarrow{SR}$ هي

$z_{\overrightarrow{SR}}=z_R-z_S=-\frac{5}{2}-\frac{11}{2}i$

أي $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ ومنه الرباعي $PQRS$ متوازي الأضلاع بالإضافة للنتائج السابقة :

$QP=QR$ و $QP\perp QR$ إذن هو مربع.




**حل التمرين رقم 18:**

1) المساواة $\left|\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\sqrt{3}-i\right|=4$ تُكتب بعد إخراج $1-i\sqrt{3}$ كعامل مشترك كما يلي

$\left|\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(z-\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}\right)\right|=4$ وبما أن $\left|1-i\sqrt{3}\right|=2$ و $\sqrt{3}+i=i\left(1-i\sqrt{3}\right)$ فإنّ

$\left|\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(z-\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}}\right)\right|=4$ تكافئ $2\left|z-i\right|=4$ أي $\left|z-i\right|=2$ .

$\left|z-i\right|=2$ أي مجموعة النقط $M$ هي دائرة $(C)$ مركزها النقطة $A$ وطول نصف قطرها 2

2) الكتابة المركبة للتشابه تكون من الشكل : $z'=az+b$ نعين العددين المركبين $a$ و $b$ وذلك

بحل الجملة : $\begin{cases} z_O=az_A+b \\ z_{B'}=az_B+b \end{cases}$ فنحصل على : $a=1-i\sqrt{3}$ و $b=-\sqrt{3}-1$

ومنه الكتابة المركبة للتشابه $S$ هي : $z'=\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\sqrt{3}-i$ نسبته $k=\left|1-i\sqrt{3}\right|=2$

وزاويته $\arg(1-i\sqrt{3})$ أي $\theta\equiv-\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ ومركزه $\Omega$ هي النقطة الصامدة لاحقتها $z_\Omega$ التي تحقق

$z_\Omega=\left(1-i\sqrt{3}\right)z_\Omega-\sqrt{3}-i$ ومنه $z_\Omega=\dfrac{1}{3}\left(-\sqrt{3}+3i\right)$

3) لدينا : $z'=\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\sqrt{3}-i$

المساواة في السؤال الأول : $\left|\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\sqrt{3}-i\right|=4$ تكتب على الشكل $|z'|=4$ أي

$OM'=4$

وهذا يعني أن مجموعة النقط $M'$ هي الدائرة $(C')$ مركزها $O$ وطول نصف قطرها $4$.

هذه الدائرة $(C')$ هي صورة $(C)$ بالتشابه $S$ ، مركزها $O$ صورة مركز الدائرة $(C)$ أي

$S(A)=O$ و نصف قطرها $R'=|k|\times R$ أي طول نصف قطرها $2\times 2=4$ .

**حل التمرين رقم 19:**

1) حل المعادلة $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$

المميز $\Delta=-8=8i^2$ ، حلا المعادلة هما $z_1=\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_2=\sqrt{2}(1-i)$

2) أ) $z_1=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ ، $z_2=2(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4})$

ب) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2=\frac{|z_1|^2}{|z_1|^2}=1$ ، $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2=2arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=2\left(arg\,z_1-arg\,z_2\right)\equiv\pi[2\pi]$

3) أ) لدينا $z_A=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $z_2=\sqrt{2}(1-i)$ هي لاحقة $M_2$ ، ولتكن $z_3$ لاحقة $M_3$.

$M_3$ ، صورة $M_2$ بالتحاكي $h$ الذي مركزه $A$ ونسبته $-3$ تعني : $\overrightarrow{AM_3}=-3\overrightarrow{AM_2}$ أي

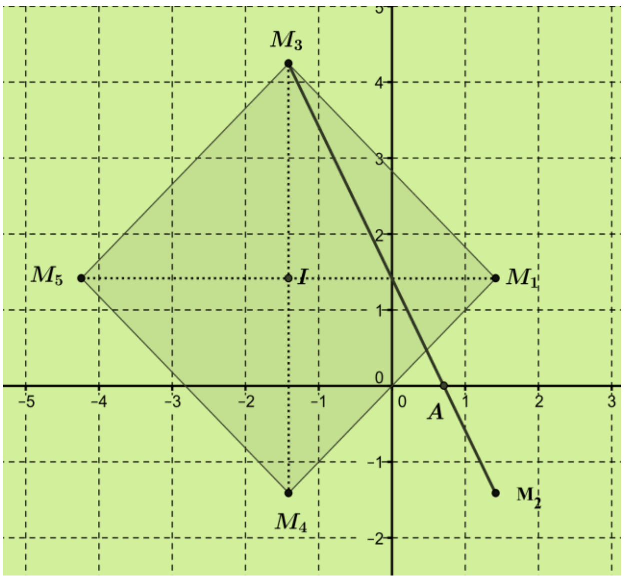
$z_3-z_A=-3\left(z_2-z_A\right)$ أي $z_3-\frac{\sqrt{2}}{2}=-3\left(z_2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ومنه $z_3=-\sqrt{2}+3i\sqrt{2}$ .

ب) لتكن $z_4$ لاحقة $M_4$ .

$M_4$ صورة $M_2$ بالدوران $h$ الذي مركزه $O$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ تعني : $z_4=e^{-\frac{\pi}{2}}z_2$

أي $z_4=-i\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ .

ت)



ث) $\dfrac{z_3-z_1}{z_4-z_1}=\dfrac{-\sqrt{2}+3i\sqrt{2}-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{-i\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}(-1+i)}{2\sqrt{2}(-1-i)}=-i$

ج) بما أن النقطة $I$ منتصف $[M_3M_4]$ و $M_5$ نظيرة $M_1$ بالنسبة إلى $I$ فإن قطري الرباعي $M_1M_3M_5M_4$ يتقاطعان في منتصفهما وهذا يعني أن الرباعي متوازي الأضلاع

ولكن وجدنا سابقا $\dfrac{z_3-z_1}{z_4-z_1}=-i$ ومنه $\left|\dfrac{z_3-z_1}{z_4-z_1}\right|=|-i|=1$ أي $|z_3-z_1|=|z_4-z_1|$ وهذا يعني $M_1M_3=M_1M_4$ إذن هذا الرباعي له ضلعان متجاوران متقايسان فهو معين هذا من جهة

ومن جهة أخرى $arg\left(\dfrac{z_3-z_1}{z_4-z_1}\right)=arg(-i)\equiv-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ وهذا يعني أن $(M_1M_3)\perp(M_1M_4)$

هذا المعين له ضلعان متعامدان إذن هو مربع

**حل التمرين رقم 20:**

1) الإقتراح الصحيح هو الإقتراح : ت ) الشكل الجبري للعدد $z_A$ هو: $1+i$

لأن : $z_A=\dfrac{7+3i}{5-2i}=\dfrac{(7+3i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}=\dfrac{29+29i}{29}=1+i$

2) الإقتراح الصحيح هو الإقتراح : أ ) الشكل الأسي للعدد $z_C$ هو: $z_C=2e^{\frac{2i\pi}{3}}$

لأن : لدينا : $z_C=-1+i\sqrt{3}$ و $|z_C|=2$ و

$z_C=-1+i\sqrt{3}=2\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ .

3) الإقتراح الصحيح هو الإقتراح : أ) لاحقة النقطة $B'$ هي $z_{B'}=1+\dfrac{i\sqrt{2}}{2}$

لأن: $z_I=1$ و $z'-1=e^{-i\frac{\pi}{4}}(z-1)$ أي $z_{B'}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i-1\right)+1$ ومنه

$z_{B'}=1+\dfrac{i\sqrt{2}}{2}$

4) الإقتراح الصحيح هو الإقتراح : أ) $\arg\left(\dfrac{i-z_B}{z_C-z_A}\right)$ هو قيس الزاوية $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BJ})$

لأن : $arg\left(\dfrac{i-z_B}{z_C-z_A}\right)\equiv(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BJ})[2\pi]$ أي $arg\left(\dfrac{z_j-z_B}{z_C-z_A}\right)[2\pi]\equiv arg\left(\dfrac{i-z_B}{z_C-z_A}\right)$

5) الإقتراح الصحيح هو الإقتراح : ب) $\overline{z_B}$

لدينا : $4z^2-4z+2=0$ ، المميز $\Delta=16-32=-16=16i^2$ للمعادلة حلان مركبان مترافقان

هما $z_1=\frac{1-i}{2}=\frac{4-4i}{8}$ و $z_B=\frac{1+i}{2}=\overline{z_1}=z_2$

6) الإقتراح الصحيح هو الإقتراح : ب) محور القطعة المستقيمة $[BI]$.

مجموعة النقط $M$ التي لاحقتها $z$ بحيث $\left|z-1\right|=\left|z-\frac{1+i}{2}\right|$ هي : محور القطعة المستقيمة $[BI]$

لأن : $\left|z-\frac{1+i}{2}\right|=\left|z-1\right|$ تكافئ $\left|z-z_B\right|=\left|z-z_I\right|$ وهذا يكافئ $MI=MB$

7) الإقتراح الصحيح هو الإقتراح : ب)

نعلم أن $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ ، $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

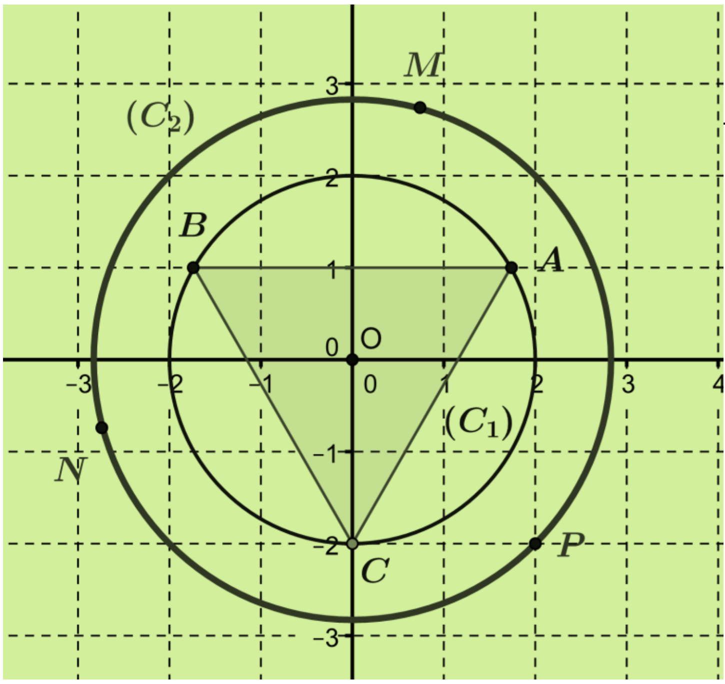
ومنه $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$

8) الإقتراح الصحيح هو الإقتراح : ب) تحاكي .

لأن : $z'=\frac{\sqrt{3}}{2}(z-z_C)+z_C$ يكافئ $z'-z_C=\frac{\sqrt{3}}{2}(z-z_C)$ أي $\overrightarrow{CM'}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{CM}$

تحاكي مركزه $C$ ونسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**حل التمرين رقم 21:**




1) $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=-\sqrt{3}+i$ ، $-2i$

2) $z_A=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$z_B=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$z_C=2\left(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2}\right)$.

3) الشكل الجبري لـ : $m=z_A\times z_0; n=z_B\times z_0; p=z_C\times z_0$.

$$m=z_A\times z_0=\left(\sqrt{3}+i\right)(1+i)=\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)$$
$$n=z_B\times z_0=\left(-\sqrt{3}+i\right)(1+i)=\left(-\sqrt{3}-1\right)+i\left(-\sqrt{3}+1\right)$$
$$p=z_C\times z_0=(-2i)(1+i)=2-2i$$

4) الشكل المثلثي للعدد $z_0$.

$z_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

5) الشكل المثلثي لكل من $m;n;p$.

لدينا سابقا : $m=z_A\times z_0;n=z_B\times z_0;p=z_C\times z_0$

$$m=z_A\times z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$
$$n=z_B\times z_0=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$$
$$p=z_C\times z_0=2\left(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2}\right)\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\cos\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$$

6) الشكل

7) حساب الأطوال $AB\ ;\ BC\ ;\ CA$

$$AB=|z_B-z_A|=\left|-2\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$$
$$BC=|z_C-z_B|=\left|-3i+\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$$
$$CA=|z_A-z_C|=\left|3i+\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$$

ومنه المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع.

كن في حياة الناس
كحبة سكر ، حتى وإن
اختفيت ...... تركت
طعما جميلا

8) بما أن $OA=|z_A|=\left|\sqrt{3}+i\right|=2$ ، $OB=|z_B|=\left|-\sqrt{3}+i\right|=2$ ، $OC=|z_C|=|-2i|=2$ فإنّ النقط $C,B,A$ تنتمي إلى الدائرة $(C_1)$ التي مركزها $O$ وطول نصف قطرها 2 .

بما أن $OM=|z_M|=\left|\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)\right|=2\sqrt{2}$ و $ON=|z_N|=2\sqrt{2}$

و $OP=2\sqrt{2}$.فإن النقط $P,N,M$ تنتمي إلى الدائرة $(C_2)$ التي مركزها $O$ وطول نصف قطرها $2\sqrt{2}$

**حل التمرين رقم 22:**

1) $z_B\times z_A=(-4+2i)(-2+4i)=-20i$

إذن $z_B \times z_A = 20\left(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}\right)$

$z_\Omega \times z_S = (-2+2i)(-5+5i) = -20i$ ومنه $z_\Omega \times z_S = 20\left(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}\right)$

2) $\overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SA}$ تكافئ $z_C - z_S = 3(z_A - z_S)$ ومنه $z_C = 3z_A - 2z_S = 4+2i$

$\overrightarrow{SD} = 3\overrightarrow{SB}$ تكافئ $z_D - z_S = 3(z_B - z_S)$ ومنه $z_D = 3z_B - 2z_S = -2-4i$

3) نتحقق بسهولة أن $OA = OB = OC = OD = |z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = \sqrt{20}$

ومنه النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ تنتمي إلى دائرة مركزها $O$ و طول نصف قطرها $\sqrt{20}$.

4) أ) $|z+2-4i| = |z+4-2i|$ تكافئ $|z-(-2+4i)| = |z-(-4+2i)|$ تكافئ

$|z-z_A| = |z-z_B|$ ومجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$

ب) لدينا $\overrightarrow{S\Omega}(3,-3)$ و $\overrightarrow{AB}(-2,-2)$ متعامدان لان الجداء السلمي لهما يساوي صفر هذا من جهة و من جهة اخرى $I(-3,3)$ تنتمي إلى المستقيم $(S\Omega)$. ومنه $(S\Omega)$ هو محور القطعة المستقيمة $[AB]$

5) لتكن النقطة $H(1,3)$ منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$ ونكتب $z_H = 1+3i$

$$\frac{z_\Omega - z_H}{z_D - z_B} = \frac{-2+2i-1-3i}{-2-4i+4-2i} = \frac{-3-i}{2-6i} = -\frac{1}{2}i$$ ومنه $arg\left(\frac{z_\Omega - z_H}{z_D - z_B}\right)$

$$arg\left(\frac{z_\Omega - z_H}{z_D - z_B}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}$$

$$arg\left(\frac{z_\Omega - z_H}{z_D - z_B}\right) = \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{H\Omega}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}$$

## حل التمرين رقم 23:

1) الجواب الصحيح هو ت) $-3+2i\sqrt{10}$

2) الجواب الصحيح هو ث) $z_C = 6-2i$.

3) الجواب الصحيح هو ب) $y = -2x+4$

4) الجواب الصحيح هو أ) $k = \frac{1}{3}$

5) الجواب الصحيح هو ت) الدائرة التي قطرها $[AB]$

6) الجواب الصحيح هو أ) الإنسحاب الذي شعاعه $3\vec{u} - 2\vec{v}$

## حل التمرين رقم 24:

1) $P(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261.$ ومنه

$P(\alpha i)=(\alpha i)^4-10(\alpha i)^3+38(\alpha i)^2-90(\alpha i)+261$

$P(\alpha i)=\alpha^4-38\alpha^2+261+i(10\alpha^3-90\alpha)$

2) $P(\alpha i)=0$ معناه $\begin{cases}10\alpha^3-90\alpha=0\\ \alpha^4-38\alpha^2+261=0\end{cases}$

نحل المعادلة $10\alpha^3-90\alpha=0$ فنجد $\alpha=0$ أو $\alpha=3$ أو $\alpha=-3$ .

فقط القيمتين $\alpha=3$ و $\alpha=-3$ يحققان المعادلة الثانية $\alpha^4-38\alpha^2+261=0$ .

ومنه المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلين تخيليين صرفا هما $3i$ و $-3i$ .

3) بما أن $3i$ و $-3i$ جذرين لـ $P$ و $(z-3i)(z+3i)=z^2+9$

فإن $P(z)$ يحلل على الشكل $P(z)=(z^2+9)(z^2+az+b)$ ننشر ونبسط ونرتب فنجد :

$(z^2+9)(z^2+az+b)=P(z)=z^4+az^3+(b+9)z^2+9az+9b$

بالمطابقة نجد $a=-10$ و $b=29$ ومنه $P(z)=(z^2+9)(z^2-10z+29)$ .

4) $P(z)=0$ تكافئ $(z^2+9)=0$ أو $(z^2-10z+29)=0$.

- $(z^2+9)=0$ تكافئ $z^2=-9=9i^2$ ومنه $z=3i$ أو $z=-3i$ .
- $(z^2-10z+29)=0$ مميزها $\Delta=-16=16i^2$

ومنه المعادلة $(z^2-10z+29)=0$ تقبل حلين مركبين مترافقين هما $5+2i$ و $5-2i$ .

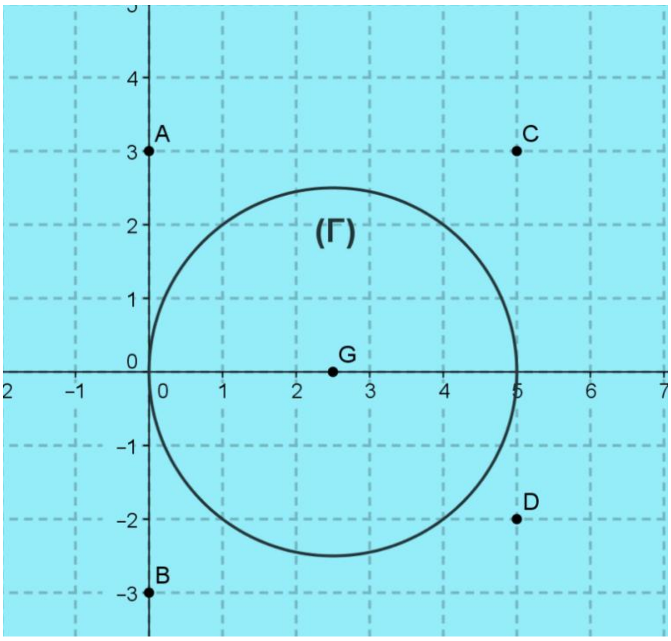
وأخيرا المعادلة $P(z)=0$ تقبل 4 حلول هي : $3i$ ، $-3i$ ، $5+2i$ ، $5-2i$ .

5) لاحقة النقطة $G$ :

$z_G=\dfrac{a+b+c+d}{4}=\dfrac{3i-3i+2i+5+5-2i}{4}=\dfrac{5}{2}$ .

6) $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=10$ تكافئ $\left\|4\overrightarrow{MG}\right\|=10$ أي $4MG=10$

ومنه $MG=\dfrac{5}{2}$ وبالتالي $(\Gamma)$ هي دائرة مركزها النقطة $G$ وطول نصف قطرها $OG=\dfrac{5}{2}$ .



حل التمرين رقم 25:

1) $P(4)=0$ ومنه 4 جذر لكثير الحدود.

2) بما أن 4 جذر لـ $P$ فإنه يوجد كثير حدود من الدرجة الثانية بحيث من أجل كل عدد مركب $z$

لدينا : $P(z)=(z-4)(az^2+bz+c)$ بعد النشر والتبسيط نجد

$$P(z)=az^3+(b-4a)z^2+(c-4b)z-4c$$

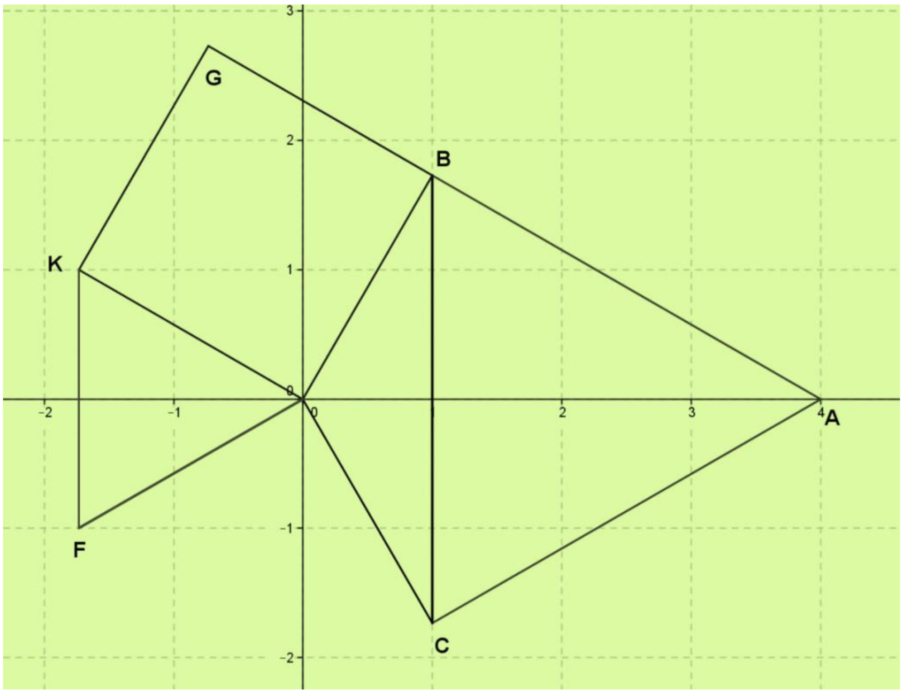
بالمطابقة نجد $a=1;b=-2,c=4$ ويكون $P(z)=(z-4)(z^2-2z+4)$

$P(z)=0$ معناه $(z-4)(z^2-2z+4)=0$ أي $(z-4)=0$ أو $(z^2-2z+4)=0$

$(z-4)=0$ من أجل $z=4$.

$(z^2-2z+4)=0$ مميزها $\Delta=-12=12i^2$ فهي تقبل حلين مركبين مترافقين هما $1-i\sqrt{3}$ و $1+i\sqrt{3}$

وأخيرا المعادلة $P(z)=0$ تقبل ثلاثة حلول هي 4 ، $1-i\sqrt{3}$ و $1+i\sqrt{3}$.




3) طبيعة المثلث $ABC$.

$\frac{c-a}{b-a}=\frac{1-i\sqrt{3}-4}{1+i\sqrt{3}-4}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ونستنتج أن $c-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$ أي النقطة $C$ هي صورة النقطة $B$ بالدوران الذي مركزه النقطة $A$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$ وبالتالي المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع.

4) $F$ صورة $K$ بالدوران $R$ الذي مركزه $O$ وقيس زاويته $\frac{\pi}{3}$.

$z_F-z_O=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_K-z_O)$ ومنه $z_F=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\sqrt{3}+i\right)=-\sqrt{3}-i$.

$G$ صورة $K$ بالإنسحاب $T$ الذي شعاعه $\overrightarrow{OB}$.

$$z_G = z_K + z_{\overline{OB}} = -\sqrt{3}+i+1+i\sqrt{3} = \left(1-\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$$

(5

لدينا : $\frac{z_F}{z_C} = \frac{-\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}} = -i$ أي $z_F = -iz_C$ وهذا يعني أن النقطة $F$ هي صورة النقطة $C$ بالدوران الذي مركزه $O$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ، وبالتالي $(OC)$ و $(OF)$ متعامدان.

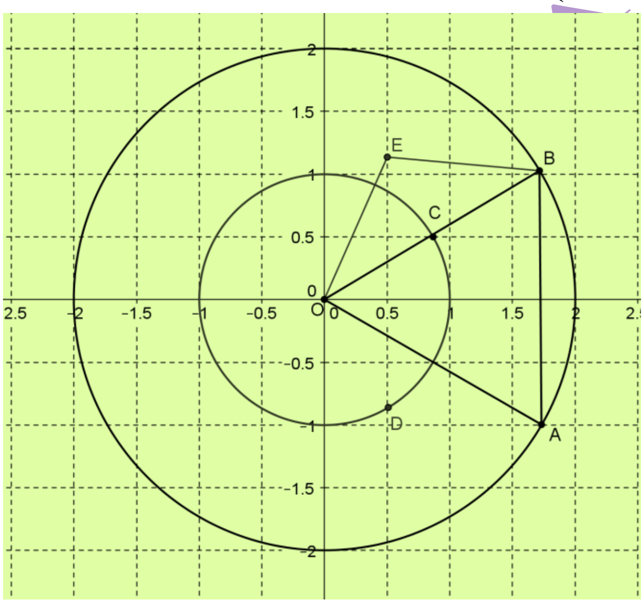
**حل التمرين رقم 26**

1) حل المعادلة $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ : $\Delta = 12-16=-4=4i^2$ للمعادلة حلان مركبان مترافقان هما $z_1 = \frac{2\sqrt{3}-2i}{2} = \sqrt{3}-i$ و $z_2 = \frac{2\sqrt{3}+2i}{2} = \sqrt{3}+i$ .

2) أ) $z_A = \sqrt{3}-i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$$z_B = \sqrt{3}+i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_C = \frac{z_O+z_B}{2} = \frac{z_B}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$




ب) لإنشاء النقط المطلوبة ، نستعمل الطويلات والأجزاء الحقيقية للواحق النقط.

النقطتان $A$ و $B$ تقعان على الدائرة ذات المركز $O$ وطول نصف قطرها 2 فاصلة كلا منهما موجبة وترتيبة $A$ تساوي $-1$ و ترتيبة $B$ تساوي 1 .

النقطة $C$ تقع على الدائرة التي مركزها $O$ وطول نصف قطرها 1 فاصلتها موجبة وترتيبتها تساوي $\frac{1}{2}$ .

ج) نحسب أطوال المثلث $AOB$ :

- $OA=|z_A-z_O|=|z_A|=\left|2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right|=2$
- $OB=|z_B-z_O|=|z_B|=\left|2e^{i\frac{\pi}{6}}\right|=2$
- $AB=|z_B-z_A|=|2i|=2$

إذن $OA=OB=AB$ وبالتالي المثلث $OAB$ متقايس الأضلاع .

**3)** أ) $z_D-z_O=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_C-z_O)$ ومنه $z_D=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_E-z_D=2i$ ومنه $z_E=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+2i=\frac{1}{2}\left[1+4i-i\sqrt{3}\right]=\frac{1}{2}\left[1+i\left(4-\sqrt{3}\right)\right]$ .

ب) $OE=BE=\sqrt{5-2\sqrt{3}}$ نتحقق حسابيا وبسهولة أن

$$OE=|z_E-z_O|=\left|\frac{1+i\left(4-\sqrt{3}\right)}{2}\right|=\sqrt{5-2\sqrt{3}}$$

و $$BE=|z_E-z_B|=\left|\frac{1+i\left(4-\sqrt{3}\right)}{2}-\sqrt{3}-i\right|=\sqrt{5-2\sqrt{3}}$$

## حل التمرين رقم 27

**1)** أ) العبارة المركبة للدوران $r$ الذي مركزه $O$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ هي $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z$ ومنه

$$z_B=e^{i\frac{2\pi}{3}}z_A=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times e^{i\frac{\pi}{3}}=e^{i\pi}=-1$$

ب) $z_C=e^{i\frac{2\pi}{3}}z_B=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times e^{i\pi}=e^{i\frac{5\pi}{3}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}=\overline{z_A}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

نستنتج أن $A$ و $C$ متناظرتان بالنسبة لمحور الأعداد الحقيقية.

**2)** أ) لدينا $|z_A|=|z_B|=|z_C|=1$ أي $OA=OB=OC=1$ وهذا يعني أن النقط $A\ ;B\ ;C$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $O$ وطول نصف قطرها 1 أي إلى الدائرة $(C)$ .

ب) طبيعة المثلث $ABC$:

من السؤال 1) $B$ صورة $A$ بالدوران $r$ الذي مركزه $O$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ نستنتج أن

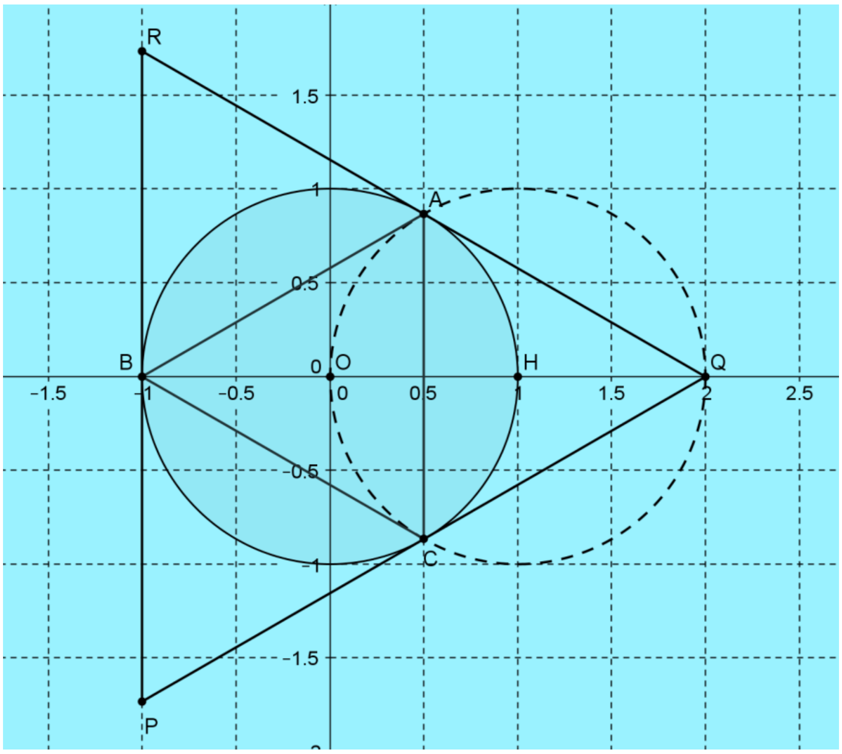
$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{2\pi}{3}$

وكذلك $C$ صورة $B$ بالدوران $r$ الذي مركزه $O$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ نستنتج $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})=\frac{2\pi}{3}$ .

باستعمال علاقة شال نستنتج أن $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA})=\frac{2\pi}{3}$.

المثلثات $OAB$ و $OBC$ و $OCA$ مثلثات متساوية الساقين رأسها $O$ و $\frac{2\pi}{3}$ هي قيس زاوية الرأس $O$ ومنه الزاويتين الباقيتين متقايستين وقيسهما $\frac{\pi}{3}$. ومنه المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع.

**3)** أ) الشكل




ب) المثلثان $PQR$ و $ABC$ متحاكيان ومنه المثلث $PQR$ متقايس الأضلاع كذلك.

**4)** أ) الصيغة المركبة للتحاكي $h$ هي : $z'=-2z$ .

ب) $z_A+z_B+z_C=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

$z_A+z_B+z_C=0$ معناه $z_A=-z_B-z_C$ ولكن $z_Q=-2z_B$ أي $-z_B=\frac{1}{2}z_Q$ ولدينا

كذلك $z_R=-2z_C$ أي $-z_C=\frac{1}{2}z_R$ إذن $z_A=-z_B-z_C=\frac{1}{2}z_Q+\frac{1}{2}z_R=\frac{z_Q+z_R}{2}$

وهذا يعني أن $A$ هي منتصف $[QR]$.

ج) من تعريف التحاكي تكون النقط $O,P$ و $A$ في استقامية. المستقيم $(PA)$ هو محور المثلث $PQR$ وهو ارتفاع كذلك ومنه $(OA)$ عمودي على $(QR)$.

وأخيرا المستقيم $(QR)$ هو مماس للدائرة $(C)$ في النقطة $A$.

## حل التمرين رقم 28

**السؤال رقم 01 : الجواب الصحيح هو (أ) :**

**التبرير:** لدينا $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$

$arg\left(1+i\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad ,k\in\mathbb{Z}$ و $arg\left(1+i\right)=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad ,k\in\mathbb{Z}$.

ومنه $arg\, z=arg\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

**السؤال رقم 02 : الجواب الصحيح هو (ج) :**

**التبرير:** $ABCD$ متوازي أضلاع معناه $z_{\overline{AB}}=z_{\overline{DC}}$ أي $z_B-z_A=z_C-z_D$

$z_D=z_C-z_B+z_A$

$z_D=z_C-z_B+z_A=-2-2i+1-i=-1-3i$.

**السؤال رقم 03 : الجواب الصحيح هو (أ) :**

**التبرير:** $(z-i)\left(\overline{z}+i\right)$ هو جداء عددين مركبين مترافقين فهو عدد حقيقي.

**السؤال رقم 04 : الجواب الصحيح هو (ب) :**

**التبرير:**

$|z-2+i|=|z+1-2i|$ تكافئ $|z-z_A|=|z-z_B|$ حيث $z_A=2-i$ و $z_B=-1+2i$

مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق $|z-z_A|=|z-z_B|$ هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$ إذن هي مستقيم لا يشمل النقطة $A$ .

**السؤال رقم 05 :الجواب الصحيح هو (ج) :**

**التبرير :** لدينا $AB=|z_B-z_A|=|2+i-5-5i|=|-3+4i|=5$

$$AC=|z_C-z_A|=|6+2i-5-5i|=|1-3i|=\sqrt{10}$$

$BC=|z_C-z_B|=|6+2i-2-i|=|4+i|=\sqrt{17}$ المثلث $ABC$ كيفي.

**حل التمرين رقم 29**

**1) الجواب الصحيح هو (ب) لأن :**

$$(1+i)^2\left(2-2i\sqrt{3}\right)=(1+2i-1)(2-2i\sqrt{3})=4\sqrt{3}+4i.$$

**2) الجواب الصحيح هو (أ) لأن :**

$$arg\left(\frac{(1+i)^2}{2-2i\sqrt{3}}\right)=2arg(1+i)-arg\left(2-2i\sqrt{3}\right)=2\left(\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$$

**3) الجواب الصحيح هو (ج) لأن :**

$$\left|(1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)\right|=\sqrt{2}\times 2=2\sqrt{2}$$

$$arg\left((1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)\right)=arg(1+i)+arg\left(1+i\sqrt{3}\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{7\pi}{12}$$

إذن $(1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)=2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

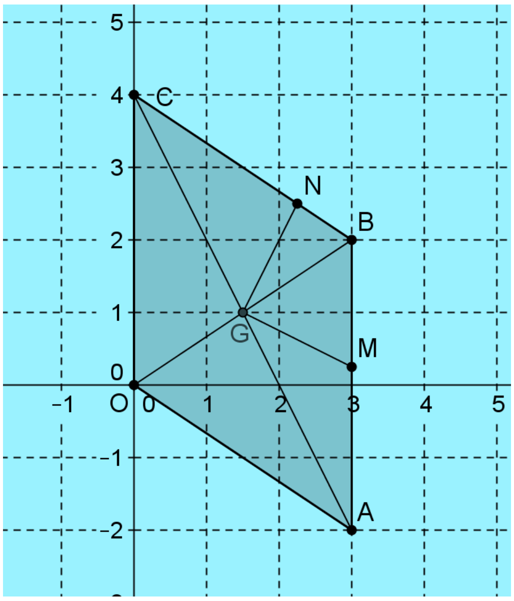
**4) الجواب الصحيح هو (أ) لأن :**

$$e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{2\pi}{3}}=cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}+cos\frac{2\pi}{3}+i\,sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=i\sqrt{3}$$

## حل التمرين رقم 30

**1)** $z^2-6z+13=0$ تكافئ $(z-3)^2-9+13=0$ أي $(z-3)^2=-4$ أي $(z-3)^2=4i^2$ ومنه للمعادلة $z^2-6z+13=0$ حلين مركبين مترافقين هما $3+2i$ و $3-2i$ .

**2)** الشكل :




**3)** لدينا $\overrightarrow{OC}(0,4)$ و $\overrightarrow{AB}(0,4)$ إذن $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$ ومنه $OABC$ متوازي أضلاع.

**4)** $G$ مركز متوازي الأضلاع $OABC$ هو منتصف $[OB]$ إذن $z_G=\dfrac{z_O+z_B}{2}=\dfrac{3}{2}+i$ أي $G\left(\dfrac{3}{2},1\right)$

**5)** $G$ مركز ثقل متوازي الأضلاع $OABC$ أي $\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$ تكافئ $\left\|4\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right\|=12$ أي

$\left\|4\overrightarrow{GM}\right\|=12$ تكافئ $GM=3$ . مجموعة النقط $M$ من المستوي بحيث

$\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$ هي الدائرة التي مركزها $G$ وطول نصف قطرها 3 .

**6)** أ) لدينا إذن $z_M=3+\beta i$ . $N$ صورة النقطة $M$ بالدوران الذي مركزه $G$ وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$ معناه $z_N-z_G=i\left(z_M-z_G\right)$ تكافئ

$$z_N=\frac{3}{2}+i+i\left(3+\beta i-\frac{3}{2}-i\right)=\frac{3}{2}+i+3i-\beta-\frac{3}{2}i+1=\frac{5}{2}-\beta+\frac{5}{2}i$$

ب) معادلة المستقيم $(BC)$ : $y=-\frac{2}{3}x+4$ .

$N\in(BC)$ تكافئ $\frac{5}{2}=-\frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}-\beta\right)+4$ ومنه $\beta=\frac{1}{4}$ .

في هذه الحالة ( حالة $\beta=\frac{1}{4}$ ) تكون $N\left(\frac{9}{4};\frac{5}{2}\right)$ ; $M\left(3;\frac{1}{4}\right)$

**حل التمرين رقم 31**

1) أ) حساب $z_1^{2010}$

$z_1=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ومنه $z_1^{2010}=\left(\sqrt{2}\right)^{2010}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2010}$

أي $z_1^{2010}=2^{1005}\left(\cos 2010\times\frac{\pi}{4}+i\sin 2010\times\frac{\pi}{4}\right)$

إذن $z_1^{2010}=2^{1005}\left(\cos\left(502\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(502\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)=2^{1005}(i)=2^{1005}i$

ب) تعيين العدد الطبيعي $n$ حتى يكون $z_2^{\,n}$ حقيقيا وموجب تماما.

$$z_2=2(-1+i)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z_2^{\,n}=\left(2\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{3n\pi}{4}+i\sin\frac{3n\pi}{4}\right)$$

$z_2^{\,n}$ حقيقي موجب تماما تكافئ $\begin{cases}\sin\frac{3n\pi}{4}=0\\ \cos\frac{3n\pi}{4}>0\end{cases}$ تكافئ $\frac{3n\pi}{4}=2k\pi$ أي $3n=8k$ مع $k\in\mathbb{N}$ .

8 أولي مع 3 و 8 يقسم $3n$ فحسب مبرهنة غوص فإن $n$ مضاعف لـ 8 .

2) أ) تعيين $\alpha$ : حتى تقبل الجملة $\{(A,\alpha),(B,1),(C,1)\}$ مرجحا يجب أن يكون $\alpha+1+1\neq0$ أي $\alpha\in\mathbb{R}-\{-2\}$ .

ب) تعيين مجموعة النقط $G_\alpha$ عندما $\alpha$ تمسح $\mathbb{R}-\{2\}$ .

لدينا $z_{G_\alpha}=\frac{\alpha z_1+z_2+z_3}{\alpha+2}=\frac{\alpha(1+i)+2(-1+i)+(-3-i)}{\alpha+2}=\frac{\alpha-5}{\alpha+2}+\frac{\alpha+1}{\alpha+2}i$

أي $G_\alpha\left(\frac{\alpha-5}{\alpha+2};\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)$ أي $\begin{cases}x_G=\frac{\alpha-5}{\alpha+2}\\ y_G=\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\end{cases}$ ومنه $x_G-7y_G+6=0$ . إذن مجموعة

النقط $G_\alpha$ عندما $\alpha$ تمسح $\mathbb{R}-\{-2\}$ هي المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $x-7y+6=0$ .

3) أ) تعيين العناصر المميزة للدوران $r$ .

الصيغة المركبة للدوران هي $z'=az+b$ حيث $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ و $|a|=1$ .

نعبر عن الدوران $r$ الذي يحول النقطة $A$ إلى $B$ والنقطة $B$ إلى $C$ بالجملة $\begin{cases}r(A)=B\\ r(B)=C\end{cases}$

وهذا يكافئ $\begin{cases}z_2=az_1+b\\ z_3=az_2+b\end{cases}$ ومنه $z_3-z_2=a(z_2-z_1)$ أي $a=\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}=i$ و $b=-1+i$

إذن الصيغة المركبة للدوران $r$ هي $z'=iz-1+i$.

زاوية الدوران $r$ هي $arg(i)$ أي $\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $z_\Omega=\frac{-1+i}{1-i}=-1$ .

ب) تعيين لاحقة النقطة $A'$ صورة النقطة $A$ بالدوران $r$ . نكتب $r(A)=A'$

$$z_{A'}=iz_A-1+i=i(1+i)-1+i=-2+2i$$

**حل التمرين رقم 32**

1) تعيين العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث $P(z)=(z^2+az+b)(z^2+4z+20)$ .

عند نشر $(z^2+az+b)(z^2+4z+20)$ نجد

$z^4+(a+4)z^3+(4a+b+20)z^2+(20a+4b)z+20b$ بالمطابقة نجد

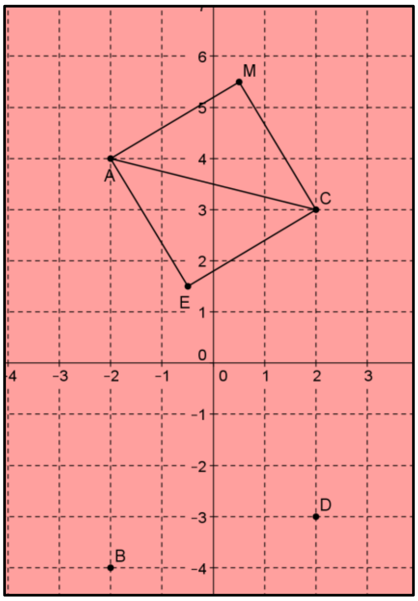
$a=-4\ ;\ b=13$ وبالتالي $P(z)=(z^2-4z+13)(z^2+4z+20)$

2) نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ .

$P(z)=0$ تكافئ $z^2-4z+13=0$ أو $z^2+4z+20=0$ نحل المعادلتين فنجد :

$.z_1=2-3i\ ;\ z_2=2+3i\ ;z_3=-2-4i\ ;z_4=-2+4i$

3) تعليم النقط




ب) تعيين العدد المركب $z$ الذي يحقق $\frac{z-z_C}{z-z_A}=i$ ثم تعليم النقطة $M$ صورة $z$ .

$\frac{z-z_C}{z-z_A}=i$ تكافؤ $i\left(z-z_A\right)=z-z_C$ ومنه

$z=\frac{z_C-iz_A}{1-i}=\frac{2+3i-i\left(-2+4i\right)}{1-i}=\frac{1}{2}+\frac{11}{2}i$ وبالتالي $M\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{11}{2}\right)$ .

4) أ) التفسير الهندسي لكل من $\left|\frac{z-z_C}{z-z_A}\right|$ و $arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_A}\right)$

$\left|\frac{z-z_C}{z-z_A}\right|=\frac{MC}{MA}$ .

$$arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_A}\right)=arg\left(z-z_C\right)-arg\left(z-z_A\right)$$

$$=\left(\vec{u},\overrightarrow{MC}\right)-\left(\vec{u},\overrightarrow{MA}\right)=\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}\right)$$

$arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_A}\right)$ تمثل الزاوية $\left(\overrightarrow{MA}\ ,\ \overrightarrow{MC}\right)$ .

ب) طبيعة المثلث $ACM$ .

وجدنا سابقا $\frac{z-z_C}{z-z_A}=i$ وبالتالي $\left|\frac{z-z_C}{z-z_A}\right|=\frac{MC}{MA}=|i|=1$ و كذلك

$arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_A}\right)=arg(i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z}$ ومنه المثلث $ACM$ قائم في $M$ ومتساوي الساقين.

ج) تعيين لاحقة $E$ حتى يكون $AMCE$ مربعا.

لدينا المثلث $ACM$ قائم في $M$ ومتساوي الساقين، فيكون $AMCE$ مربعا إذا كان $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CE}$

أي $z_A-z_M=z_E-z_C$ ومنه $z_E=z_A-z_M+z_C$ وبالتالي

$$z_E=-2+4i-\frac{1}{2}-\frac{11}{2}i+2+3i=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$$

**حل التمرين رقم 33**

1) أ) حل المعادلة $z^2+8\sqrt{3}z+64=0$ .

المميز $\Delta=-64=64i^2=(8i)^2$ المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما $z_1=-4\sqrt{3}-4i$ و $z_2=-4\sqrt{3}+4i$ .

ب) كتابة حلي هذه المعادلة على الشكل الأسي.

$z_1=-4\sqrt{3}-4i=8e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و $z_2=-4\sqrt{3}+4i=\overline{z_1}=8e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ .

2) طبيعة المثلث $OAB$ .

$\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=\frac{z_B}{z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $\left|\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\right|=\left|\frac{z_B}{z_A}\right|=\frac{8}{8}=1$ أي $\frac{OB}{OA}=1$ أي $OA=OB$

$arg\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ أي $\overline{\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right)}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ وبالتالي المثلث $OAB$ متقايس الأضلاع.

3) تعيين $z_D$ لاحقة النقطة $D$ .

لدينا بشكل عام العبارة المركبة للدوران هي $z'-z_\Omega=e^{i\theta}(z-z_\Omega)$ وبالتالي

$z_D-z_O=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C-z_O)$ إذن $z_D=e^{i\frac{\pi}{3}}z_C=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)=2i$ .

**4)** أ) نبين أن لاحقة النقطة $G$ هي $z_G=-4\sqrt{3}+6i$ .

$$z_G=\frac{-z_O+z_B+z_D}{-1+1+1}=z_B+z_D=-4\sqrt{3}+4i+2i=-4\sqrt{3}+6i$$

ب) تعليم النقط $A\ ;B\ ;C\ ;D\ ;G$ .

ج) نبين ان الرباعي $OBGD$ متوازي أضلاع.

$OBGD$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DG}$ أي $z_B-z_O=z_G-z_D$

$z_B-z_O=z_B=-4\sqrt{3}+4i$ و $z_G-z_D=-4\sqrt{3}+6i-2i=-4\sqrt{3}+4i$ إذن

$z_B-z_O=z_G-z_D$ ومنه $OBGD$ متوازي أضلاع.

**5)** إثبات أن $\frac{z_C-z_G}{z_A-z_G}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

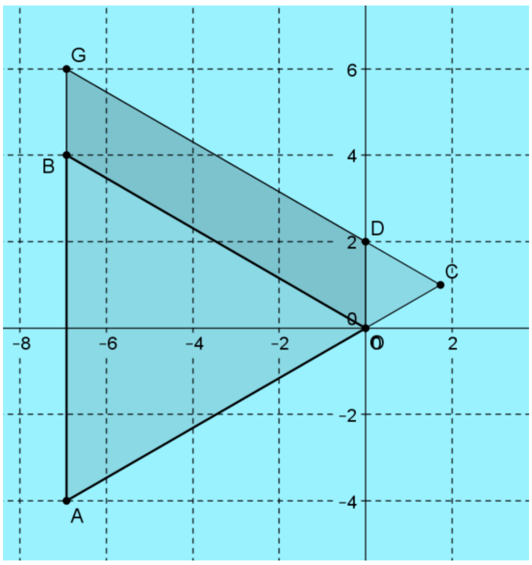
$$\frac{z_C-z_G}{z_A-z_G}=\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)-\left(-4\sqrt{3}+6i\right)}{\left(-4\sqrt{3}-4i\right)-\left(-4\sqrt{3}+6i\right)}=\frac{5\sqrt{3}-5i}{-10i}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

استنتاج طبيعة المثلث $AGC$

لدينا $\left|\frac{z_C-z_G}{z_A-z_G}\right|=\frac{CG}{AG}=\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$ ومنه $CG=AG$ .

$$arg\frac{z_C-z_G}{z_A-z_G}=arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

نستنتج أن المثلث $AGC$ متقايس الأضلاع.



## حل التمرين رقم 34

1) الشكل الأسي :

أ) $z_A=-2i=2\left(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2}\right)=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

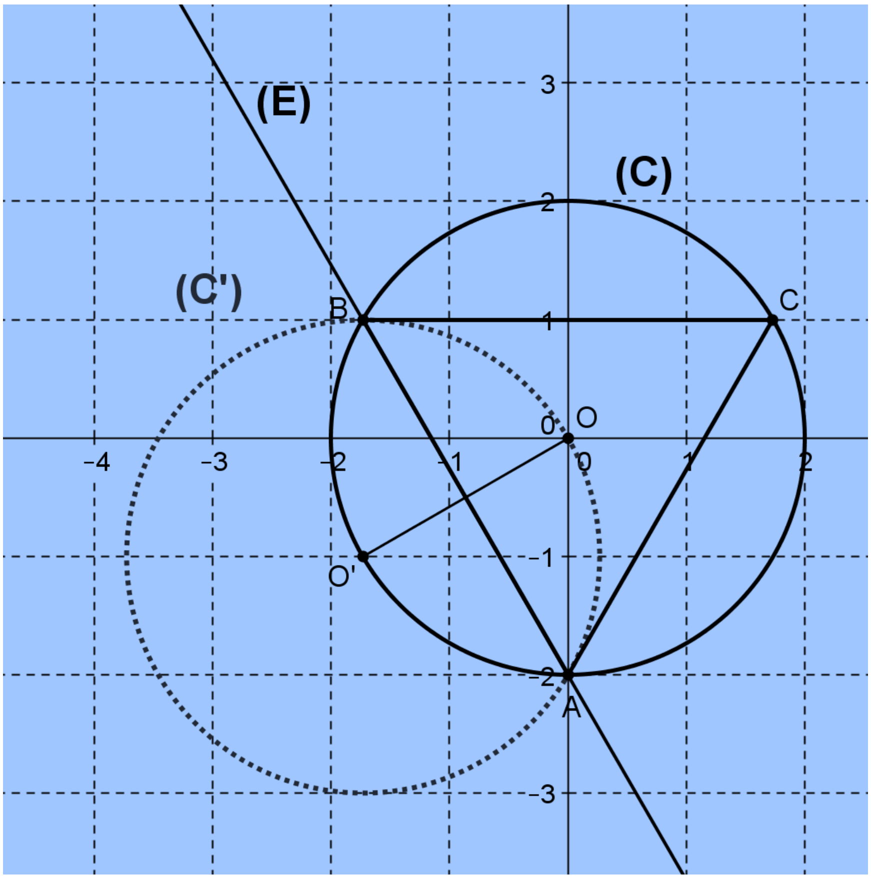
$z_B=-\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z_C=\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

ب) لدينا $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2$ أي $OA=OB=OC$

معناه النقط $A,B,C$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $O$ و طول نصف قطرها 2

ج) تعليم النقط $A,B,C$. رسم الدائرة



**2)** أ) الشكل الجبري والأسي للعدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ،

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ب) استنتاج طبيعة المثلث $ABC$

لدينا $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ومنه $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right| = 1$ أي $AC = AB$ هذا من جهة ومن جهة ثانية $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ أي $arg \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \;; k \in \mathbb{Z}$ وبالتالي المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع.

**3)** أ) لدينا $z_{O'} - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_O - z_A\right)$ ومنه

$$z_{O'} = z_A - e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_A\right) = -2i - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)(-2i) = -2i + i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} - i \text{ .}$$

ب) نبين أن $[O'C]$ قطرا للدائرة $(C)$ .

لدينا $z_{O'} + z_C = -\sqrt{3} - i + \sqrt{3} + i = 0$ وبالتالي النقطتان $O'$ و $C$ متناظرتان بالنسبة إلى $O$ مركز الدائرة $(C)$ فهما متقابلتان قطريا .

ج) رسم $(C')$ .

د) بما أن $A$ تنتمي إلى $(C)$ و هي مركز الدوران $r$ فهي تنتمي إلى $(C')$. و $C$ نقطة من $(C)$ صورتها وفق $r$ هي $B$ إذن $B$ تنتمي $(C')$ علما أن $B$ نقطة من $(C)$.

**4)** أ) $|z| = \left|z + \sqrt{3} + i\right|$ معناه $|z - z_O| = \left|z - \left(\sqrt{3} - i\right)\right|$ أي $|z - z_O| = |z - z_{O'}|$ أي محور القطعة المستقيمة $(E)$ $[OO']$

ب) لدينا $OA = OA' = 2$ و $OB = O'B = 2$ وبالتالي النقطتان $A$ و $B$ نقطتان من محور القطعة المستقيمة $[OO']$ أي من $(E)$.

**حل التمرين رقم 35**

**1)** نحل المعادلة $z^2 - 18z + 82 = 0$ .

$\Delta=-4=\left(2i^{2}\right)$.للمعادلة حلين مركبين مترافقين هما $z_1=9+i$ و $z_2=9-i$

**2)** أ) حساب $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ : $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{11-i-9+i}{9+i-9+i}=\frac{2}{2i}=-i$

استنتاج طبيعة المثلث $ABC$:

لدينا $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=-i$ ومنه $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv arg\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}[2\pi]$ أي $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv arg(-i)[2\pi]$

ومنه $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv\frac{3\pi}{2}[2\pi]$ إذن $(BA)\perp(BC)$ أي المثلث $ABC$ قائم الزاوية في $B$ هذا

من جهة ومن جهة أخرى لدينا $\left|\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right|=|-i|=1$ أي $BC=BA$ وبالتالي المثلث $ABC$ قائم الزاوية في $B$ ومتساوي الساقين.

ب) حساب الشكل المثلثي للعدد المركب $4(1-i)$ : $4(1-i)=4\sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{4}+i\,sin\frac{7\pi}{4}\right)$

ج) نبين أن $(z_C-z_A)(z_C-z_B)=4(1-i)$ :

$$(z_C-z_A)(z_C-z_B)=(11-i-9-i)(11-i-9+i)=2(2-2i)=4(1-i)$$

استنتاج $AC\times BC=4\sqrt{2}$ : لدينا $(z_C-z_A)(z_C-z_B)=4(1-i)$ ومنه $|(z_C-z_A)(z_C-z_B)|=|4(1-i)|$ أي $AC\times BC=4\sqrt{2}$.

**3)** نبين أن $z'=-iz+10+8i$

لدينا $z'-z_B=e^{i\frac{3\pi}{2}}(z-z_B)$ ومنه $z'=e^{i\frac{3\pi}{2}}(z-z_B)+z_B$ وبالتالي $z'=-i(z-9+i)+9-i$ أي $z'=-iz+10+8i$

نبين أن $z_{C'}=9-3i$ :

$r(C)=C'$ معناه $z_{C'}=-iz_C+10+8i=-i(11-i)+10+8i=9-3i$ .

**حل التمرين رقم 36**

**1)** نحل المعادلة $z^2-2z+2=0$ .

المميز $\Delta=-4=4i^2=(2i)^2$ المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما $z_2=1-i$ و $z_1=1+i$

**2)** تعليم النقط

**3)** لدينا $AD=|z_D-z_A|=|3-1-i|=|2-i|=\sqrt{5}$ و

$$BD=|z_D-z_B|=|3-1+i|=|2+i|=\sqrt{5}$$

$$DC=|z_C-z_D|=|2-2i-3|=|-1-2i|=\sqrt{5}$$

ومنه $AD=BD=DC=\sqrt{5}$ وبالتالي النقط $A$ , $B$ , $C$ تنتمي إلى دائرة مركزها $D$ وطول نصف قطرها $\sqrt{5}$ .

**4)** حساب $\dfrac{z_C-3}{z_A-3}$ واستنتاج طبيعة المثلث $DAC$.

$\dfrac{z_C-3}{z_A-3}=\dfrac{2-2i-3}{1+i-3}=\dfrac{-1-2i}{-2+i}=i$ أي $\dfrac{z_C-z_D}{z_A-z_D}=i$ وبالتالي $z_C-z_D=i(z_A-z_D)$ أي

$z_C-z_D=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A-z_D)$ وهذا يعني أن $C$ هي صورة $A$ بالدوران الذي مركزه $D$ وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$ .

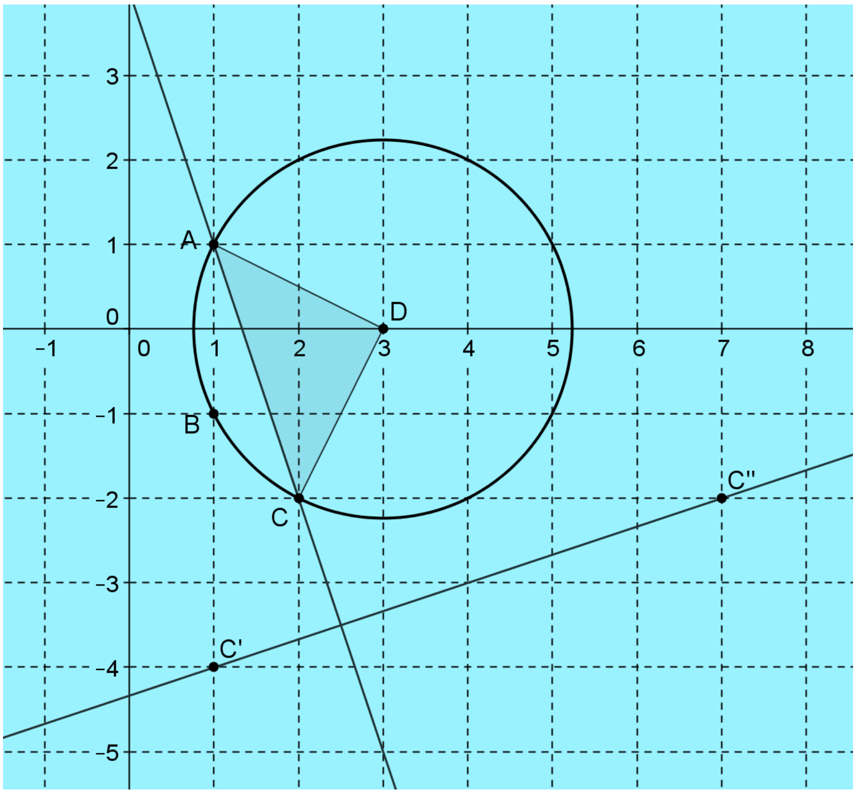
وبالتالي المثلث $DAC$ قائم في $D$ ومتساوي الساقين .

**5)** أ) الكتابة المركبة للتحاكي $h$ الذي مركزه $D$ ونسبته $2$ هي $z'-z_D=2(z-z_D)$ أي $z'=2z-3$ .

- حساب $z_{C'}$ : $C'$ صورة النقطة $C$ بالتحاكي $h$ ومنه $z_{C'}=2z_C-3=2(2-2i)-3=4-4i-3=1-4i$ إذن $z_{C'}=1-4i$ أي $C'(1,-4)$ .

**ب)** الكتابة المركبة للدوران $r$ الذي مركزه $D$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ هي $z'-z_D=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_D)$ أي $z'-z_D=i(z-z_D)$ ومنه $z'=iz-3i+3$ .

- حساب $z_{C''}$ : $C''$ صورة النقطة $C'$ بالدوران $r$ الذي مركزه $D$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ .
$z_{C''}=iz_{C'}-3i+3=i(1-4i)-3i+3=7-2i$ إذن $z_{C''}=7-2i$ أي $C''(7,-2)$
- لدينا $\overrightarrow{AC}(1\ ;\ -3)$ و $\overrightarrow{C'C''}(6\ ;\ 2)$ ومنه $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{C'C''}=6-6=0$ ومنه المستقيمان $(AC)$ و $(C'C')$ متعامدان.




**حل التمرين رقم 37**

**1)** تعيين العددين المركبين $z_1$ و $z_2$ بحيث $\begin{cases}2z_1+3z_2=9-2i\\3z_1-z_2=8+8i\end{cases}$ .

$\begin{cases}2z_1+3z_2=9-2i\\3z_1-z_2=8+8i\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}2z_1+3z_2=9-2i\\9z_1-3z_2=24+24i\end{cases}$ بالجمع طرف لطرف نجد

$11z_1=33+22i$ ومنه $z_1=3+2i$ وبعد التعويض نجد $z_2=1-2i$

**2)** أ) أثبات أن $z_B-z_\Omega=i(z_A-z_\Omega)$ .

لدينا من جهة $z_B - z_\Omega = -3-1+2i = -4+2i$ ومن جهة أخرى

$i(z_A - z_\Omega) = i(3+2i-1+2i) = i(2+4i) = -4+2i$

و بالتالي $z_B - z_\Omega = i(z_A - z_\Omega)$.

ب) طبيعة المثلث $\Omega AB$

لدينا $z_B - z_\Omega = i(z_A - z_\Omega)$ أي $\dfrac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = i$ وبالتالي $\left|\dfrac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega}\right| = \dfrac{\Omega B}{\Omega A} = |i| = 1$ أي

$\Omega A = \Omega B$ ولدينا كذلك $arg\dfrac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}\right) = arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ ومنه المثلث $\Omega AB$

قائم في $\Omega$ ومتساوي الساقين.

**3)** أ) تعيين الكتابة المركبة للتحاكي $h$ .

$z' - z_A = 2(z - z_A)$ ومنه $z' = 2z - 3 - 2i$ وهي الكتابة المركبة للتحاكي $h$ .

ب) تعيين $z_C$ لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $\Omega$ بالتحاكي $h$ .

$z_C = 2z_\Omega - 3 - 2i$ ومنه $z_C = 2(1-2i) - 3 - 2i = -1-6i$

ج) تعيين $z_D$ لاحقة النقطة $D$ مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$ .

$$z_D = \frac{z_A - z_B + z_C}{1-1+1} = \frac{3+2i+3-1-6i}{1} = 5-4i$$

د) نبين أن $ABCD$ مربع.

يكفي أن نبين أن القطرين $[AC]$ و $[BD]$ متقايسين ومتعامدين ولهما نفس المنتصف.

$$BD = |z_D - z_B| = |5-4i+3| = |8-4i| = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$$
$$AC = |z_C - z_A| = |-1-6i-3-2i| = |-4-8i| = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$$

ومنه القطران متقايسان

لدينا $\overrightarrow{BD}(8,-4)$ و $\overrightarrow{AC}(-4,-8)$ ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -32+32 = 0$ ومنه القطران

متعامدان.

لدينا $\frac{z_B+z_D}{2}=\frac{-3+5-4i}{2}=1-2i$ و $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{3+2i-1-6i}{2}=1-2i$ ومنه

القطران متناصفان وأخيرا $ABCD$ مربع.

**4)** أ) نتحقق أن النقطة $B$ تنتمي إلى المجموعة $(E)$، ثم نعين طبيعة $(E)$ ونحدد عناصرها المميزة.

لدينا $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$ تكافئ $MD=4\sqrt{5}$ .

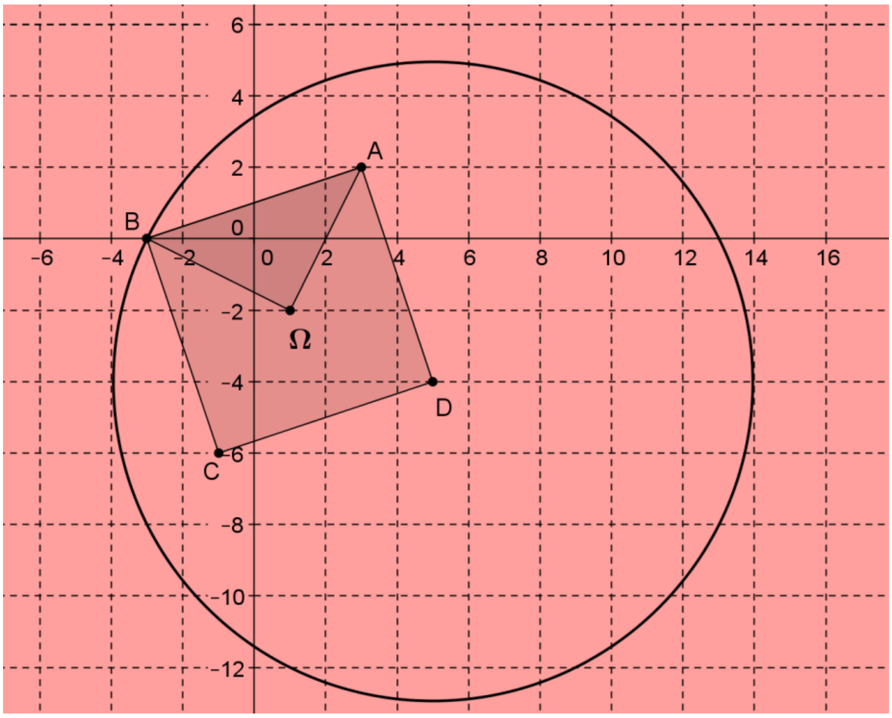
$B$ تنتمي إلى المجموعة $(E)$ معناه $BD=4\sqrt{5}$ .

$BD=|z_D-z_B|=|5-4i+3|=|8-4i|=4\sqrt{5}$ ومنه النقطة $B$ تنتمي إلى المجموعة $(E)$.

طبيعة $(E)$ وتحديد عناصرها المميزة.

$(E)$ دائرة مركزها $D$ وطول نصف قطرها $4\sqrt{5}$ .

ب) أنشاء المجموعة $(E)$.




**حل التمرين رقم 38**

**1)** $P(3i)=(3i)^3-(8+3i)(3i)^2+(25+24i)(3i)-75i$

$$P(3i)=27i^3-(8+3i)(-9)+(25+24i)(3i)-75i=0$$

$P(3i)=-27i+72+27i+75i-72-75i=0$ ومنه $3i$ هو جذر لكثير الحدود $P(z)$ .

**2)** $P(z)=(z-3i)(z^2+az+b)$

$$P(z)=(z-3i)(z^2+az+b)=z^3+(a-3i)z^2+(b-3ai)z-3bi$$

بالمطابقة نجد $\begin{cases} a-3i=-8-3i \\ b-3ai=25+24i \\ -3bi=-75i \end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases} a=-8 \\ b=25 \end{cases}$ إذن

$P(z)=(z-3i)(z^2-8z+25)$ .

**3)** $P(z)=0$ تكافئ $z-3i=0$ أو $z^2-8z+25=0$ .

نحل المعادلة $z-3i=0$ فنجد $z=3i$ ونحل المعادلة $z^2-8z+25=0$ فنجد $z=4-3i$ و $z=4+3i$

إذن مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي $S=\{3i\ ;\ 4-3i\ ;\ 4+3i\}$ .

**4)** أ) تمثيل النقط $A\ ;\ B\ ;\ C\ ;\ D$

ب) نجد بسهولة $\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\dfrac{1}{5}i$ و $\dfrac{z_C-z_B}{z_D-z_B}=-\dfrac{2}{3}i$

ج) استنتاج طبيعة المثلثين $ACD$ و $BCD$ .

- لدينا $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_A}\right|=\left|\dfrac{1}{5}i\right|=\dfrac{1}{5}$ أي $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{1}{5}$ و

$arg\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=arg\dfrac{1}{5}i=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ أي

$(\overrightarrow{AD}\ ,\overrightarrow{AC})=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ ومنه المثلث $ACD$ قائم الزاوية في $A$ .

- لدينا $\left|\dfrac{z_C - z_B}{z_D - z_B}\right| = \left|-\dfrac{2}{3}i\right| = \dfrac{2}{3}$ أي $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{2}{3}$

أي $arg\,\dfrac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = arg\left(-\dfrac{2}{3}i\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

$\left(\overrightarrow{BD}\ ,\ \overrightarrow{BC}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ ومنه المثلث $BCD$ قائم الزاوية في $B$ .

د) بما أن المثلث $ACD$ قائم الزاوية في $A$ فإنه محيط بدائرة $(\Gamma)$ أحد أقطارها $[CD]$ وبما أن المثلث $BCD$ قائم الزاوية في $B$ فإنه محيط بدائرة أحد أقطارها $[CD]$ أي الدائرة $(\Gamma)$ وبالتالي النقط $A\ ;\ B\ ;\ C\ ;D$ تنتمي إلى دائرة $(\Gamma)$ مركزها $H$ منتصف $[CD]$ أي

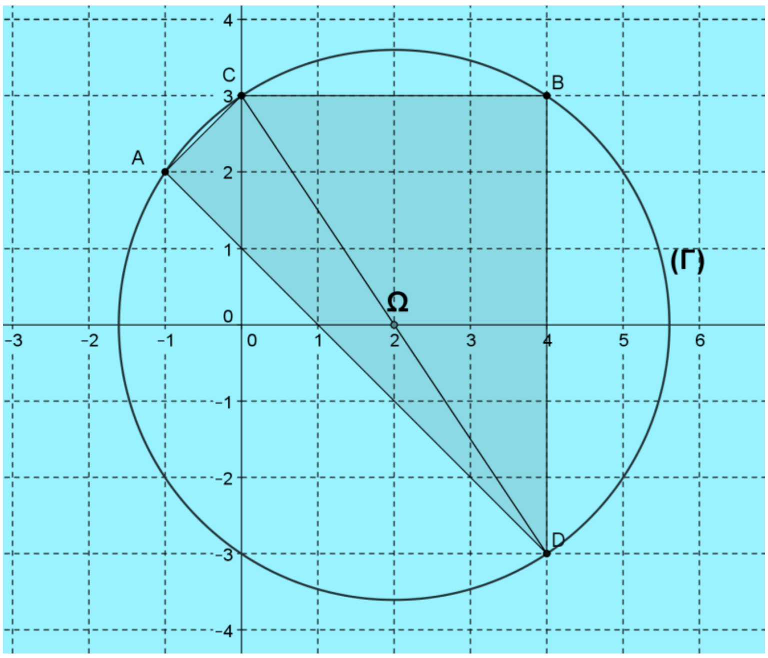
$z_H = \dfrac{z_C + z_D}{2} = \dfrac{3i + 4 - 3i}{2} = 2$ وطول نصف قطرها $r$ حيث

$$r = \frac{CD}{2} = \frac{|z_D - z_C|}{2} = \frac{|4-3i-3i|}{2} = \frac{|4-6i|}{2} = \frac{\sqrt{52}}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}$$

5) $E$ صورة النقطة $C$ بالإنسحاب $t$ الذي شعاعه $\overrightarrow{AD}$ معناه $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$ أي

$z_D - z_A = z_E - z_C$

أي $z_E = z_D - z_A + z_C$ ومنه $z_E = 4 - 3i + 1 - 2i + 3i = 5 - 2i$



## حل التمرين رقم 39

**1)** نحل المعادلة $z^2-2z+4=0$ :

$\Delta=4-16=-12=12i^2=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$ . للمعادلة حلان مركبان مترافقان هما

$z=\dfrac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}\ ;\ z'=\dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$ .

**2)** استنتاج حلي المعادلة التالية : $\left(\bar{z}+2+2i\sqrt{3}\right)^2-2\bar{z}-4i\sqrt{3}=0$

نضع $Z=\bar{z}+2+2i\sqrt{3}$ ومنه $\bar{z}=Z-2-2i\sqrt{3}$ وتصبح المعادلة

$\left(\bar{z}+2+2i\sqrt{3}\right)^2-2\bar{z}-4i\sqrt{3}=0$ على الشكل $Z^2-2\left(Z-2-2i\sqrt{3}\right)-4i\sqrt{3}=0$

أي $Z^2-2Z+4=0$ فحسب ما سبق نجد

$Z=1-i\sqrt{3}$ و $Z'=1+i\sqrt{3}$ ومنه $\bar{z}=-1-3i\sqrt{3}$ أو $\bar{z}=-1-i\sqrt{3}$ . وأخيرا المعادلة

$\left(\bar{z}+2+2i\sqrt{3}\right)^2-2\bar{z}-4i\sqrt{3}=0$ تقبل حلين مركبين هما $z=-1+3i\sqrt{3}$

و $z=-1+i\sqrt{3}$ .

**3)** أ) طبيعة المثلث $ABD$ : لدينا $AB=\left|z_B-z_A\right|=2\sqrt{3}$ و $AD=\left|z_D-z_A\right|=2\sqrt{3}$

ومنه المثلث $ABD$ متقايس الساقين.

ب) العبارة المركبة للتشابه $S$ الذي مركزه $B$ وزاويته $-\dfrac{\pi}{6}$ ونسبته $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ هي :

$z'-z_B=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}\left(z-z_B\right)$ وبعد التبسيط نجد $z'=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right)z-3-\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$

ج)تعيين $z_E$ لاحقة النقطة $E$ صورة النقطة $C$ بالتشابه $S$ .

$z_E=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right)z_C-3-\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$ أي $z_E=-3+i\sqrt{3}$

د) حساب العدد المركب $\dfrac{z_B-z_E}{z_A-z_E}$ واستنتاج طبيعة الرباعي $ABED$ .

نجد بعد التبسيط أن $\dfrac{z_B-z_E}{z_A-z_E}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه المثلث $ABE$ متقايس الأضلاع.

الرباعي $ABED$ معين.

**حل التمرين رقم 40**

1) لدينا $z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$ باستعمال دستور موافر

$$z^{k-7}=\left(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\right)^{k-7}=\cos\frac{2(k-7)\pi}{7}+i\sin\frac{2(k-7)\pi}{7}$$

$$z^{k-7}=\cos\left(\frac{2k\pi}{7}-2\pi\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{7}-2\pi\right)=\cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{7}\right)$$

وأخيرا : $z^{k-7}=\left(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\right)^{k}=z^{k}$

2) نبين أن $\overline{T}=S$

لدينا $T=z^3+z^5+z^6$ ومنه $\overline{T}=\overline{z^3+z^5+z^6}=\overline{z^3}+\overline{z^5}+\overline{z^6}$.

بما أن $z^k=z^{k-7}$ فإن $\overline{z^k}=\overline{z^{k-7}}=z^{7-k}$ أي

$\overline{z^3}=z^{7-3}=z^4\ ;\ \overline{z^5}=z^{7-5}=z^2\ ;\ \overline{z^6}=z^{7-6}=z$ وبالتالي

$\overline{T}=\overline{z^3}+\overline{z^5}+\overline{z^6}=z^4+z^2+z=S$.

3) نبين أن $Im(S)>0$ .

لدينا $Im(S)=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}$

بما أن $\frac{2\pi}{7}\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ فإن $\sin\frac{2\pi}{7}>0$ و $\sin\frac{\pi}{7}<\sin\frac{4\pi}{7}$ وبالتالي $Im(S)>0$

4) حساب $S+T$ و $ST$ .

لدينا $S+T=z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=z\frac{1-z^6}{1-z}$

بما أن $z^{k}=z^{k-7}$ فإن $z^{7}=1$ وبالتالي $z^{6}\times z=1$ أي $z^{6}=\frac{1}{z}$ ومنه

$S+T=z\frac{1-z^{6}}{1-z}=z\frac{1-\frac{1}{z}}{1-z}=-1$ وأخيرا $S+T=-1$ .

لدينا

$$ST=\left(z+z^{2}+z^{4}\right)\left(z^{3}+z^{5}+z^{6}\right)=z^{4}+z^{6}+z^{7}+z^{5}+z^{7}+z^{8}+z^{7}+z^{9}+z^{10}$$

بما أن $z^{7}=1$ فإن $z^{8}=z^{7}\times z=z\ ;z^{9}=z^{8}\times z=z^{2}\ ;z^{10}=z^{9}\times z=z^{3}$ وبالتالي

$ST=3+S+T=3-1=2$ .

**5)** استنتاج $S$ و $T$ .

نحل الجملة $\begin{cases}S+T=-1\\ ST=2\end{cases}$ أو نحل المعادلة $x^{2}-(S+T)x+ST=0$ فنجد

$\{S\ ;T\}=\left\{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\ ;-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i\right\}$ وحسب ما سبق بينا أن $Im(S)>0$ وبالتالي

$S=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$ و $T=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i$

## حل التمرين رقم 41

نضع $z=x+iy$ ومنه $z'=x^2+y^2-4y-5+4(x-1)i$ .

**1)** تعيين $(E)$ : يكون $z'$ حقيقيا من أجل $4(x-1)=0$ أي $x=1$ . إذن $(E)$ هي المستقيم الذي معادلته $x=1$ .

**2)** تعيين $(E')$ :

يكون $z'$ تخيلي صرف من أجل $x^{2}+y^{2}-4y-5=0$ أي $x^{2}+(y-2)^{2}=9$ . إذن $(E')$ الدائرة التي مركزها $\Omega(0,2)$ وطول نصف قطرها 3 .

**3)** حل المعادلة $z'=1$ .

$z'=1$ تكافئ $x^2+y^2-4y-5+4(x-1)i=1$ تكافئ $\begin{cases} x^2+y^2-4y-5=1 \\ 4(x-1)=0 \end{cases}$ أي

$\begin{cases} y^2-4y-5=0 \\ x=1 \end{cases}$ ومنه $(x,y)=(1,-1)$ أو $(x,y)=(1,5)$ ومنه $z_1=1-i$ و

$z_2=1+5i$

4) تعيين $z_C$ : $z_C=-z_A=-1+i$

تعيين $z_G$ لاحقة $G$ مركز ثقل المثلث $ABC$ : $z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}i$ .

5) العبارة المركبة للتشابه $S$ الذي نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ومركزه $\Omega$ :

$z'-z_\Omega=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}(z-z_\Omega)$ وبالتالي $z'-z_\Omega=(-1+i)(z-z_\Omega)$

بما أن $S(B)=C$ فإن $z_C-z_\Omega=(-1+i)(z_B-z_\Omega)$ وبالتالي $z_\Omega=1+3i$