العام الدراسي : 2018 / 2019

المستوى و الشعبة : 3 علوم تجريبية

الموضوع التحضيري (1)

التمرين الأول : الاحتمالات

التمرين الثاني : المتتاليات العددية

الموضوع التحضيري (1)

التمرين الأول :

I) صندوقين متماثلين U_1 ؛ U_2 بحيث :

يحوي الصندوق U_1 على ثلاث كريات حمراء مرقمة بالأرقام 0 ؛ 1 ؛ 1 وكريتين خضراوين مرقمتان بالرقمين 1؛ 2 . يحوي الصندوق U_2 على كريتين حمراوين مرقمتان بالرقمين 2 ؛ 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بالأرقام 0 ؛ 0 ؛ 1 . كل الكرات متماثلة لا يمكن التمييز بينها عند اللمس .

نسحب عشوائيا كرية واحدة من الصندوق U_1 ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الصندوق U_2 .

نعتبر الأحداث التالية :

- A " الحصول على نفس اللون "
- B " الحصول على اللونين "
- C " الحصول على كريتين حمراوتين على الأكثر "
- D " مجموع أرقام الكريات المسحوبة يساوي 3 "

1) احسب : $p(A)$ ؛ $p(B)$ ؛ $p(C)$ ؛ $p(D)$.

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بمجموع الأرقام المحصل عليها بعد كل سحب .

أ – عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي .

ب – احسب التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

II) نعتبر صندوق ثالث U_3 يحوي على كرية واحدة حمراء تحمل الرقم 2 وأربع كريات خضراء تحمل الأرقام 0 ؛ 1 ؛ 1 ؛ 1 . نختار عشوائيا صندوق ونسحب منه كرية واحدة .

1) ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة تحمل الرقم 0 .

2) ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة تحمل الرقم 0 من الصندوق U_2 .

3) علما أن الكرية المسحوبة تحمل الرقم 0 فما احتمال أن تكون من الصندوق U_2 .

III) يرمي لاعب حجر نرد غير مزيف سداسي الوجوه ويسحب عشوائيا كرية واحدة من أحد الصناديق الثلاث بالطرق التالية :

إذا كان الرقم الظاهر هو 1 أو 2 يسحب من الصندوق U_1 ؛ إذا كان الرقم الظاهر هو 3 أو 4 أو 5 يسحب من الصندوق U_2 وإذا كان الرقم الظاهر هو 6 يسحب من الصندوق U_3 .

1) ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة حمراء ؟ .

2) ما احتمال أن تحمل الكرية المسحوبة الرقم 2 ؟ .

التمرين الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ ب : $f(x)=\dfrac{7x}{2x+1}$

وليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ **(أنظر الشكل)**

1) أ - ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0,+\infty[$.

ب – بين أنه من أجل $x\in[0,3]$ فإن $f(x)\in[0,3]$

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ – باستخدام المنحني (C_f) و المستقيم $(\Delta): y=x$ مثل الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (u_n) دون حسابها.

ب – ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 3$.

ب – ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج – استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها .

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $v_n=\dfrac{u_n}{3-u_n}$

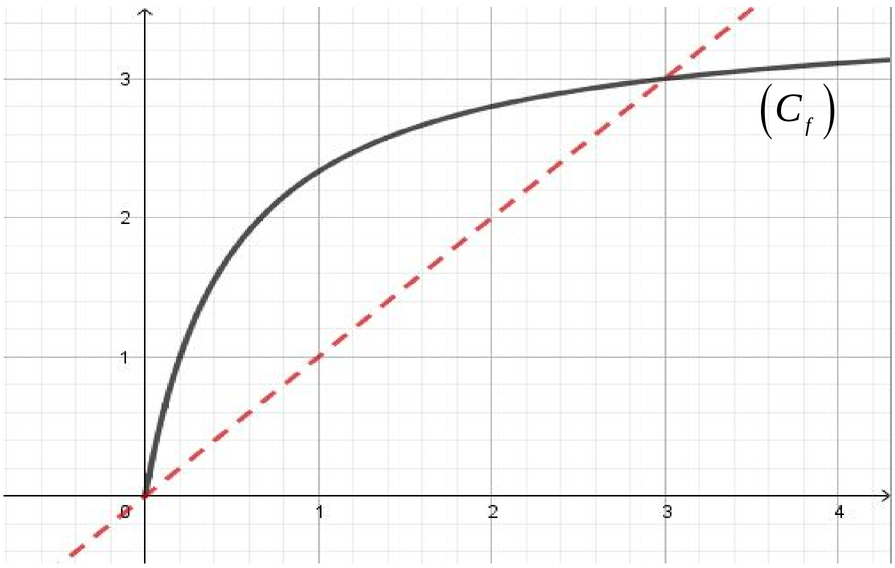
أ – برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب – اكتب عبارة v_n بدلالة n ؛ ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

5) أ - احسب بدلالة n المجاميع S_n ؛ S'_n ؛ S''_n حيث :

$$S_n=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+\dots+\frac{1}{v_n} \quad ; \quad S'_n=v_0^{\,2}+v_1^{\,2}+\dots+v_n^{\,2} \quad ; \quad S''_n=\frac{1}{v_0^{\,2}}+\frac{1}{v_1^{\,2}}+\dots+\frac{1}{v_n^{\,2}}$$

ب – احسب بدلالة n الجداء π_n حيث : $\pi_n=v_0\times v_1\times\dots+v_n$



بالتوفيق

التمرين الأول:

نسحب كرية واحدة من U_1 وكريتين من U_2

A " الحصول على نفس اللون "

- **حساب** $p(A)$:

تحقق الحدث A معناه :

(سحب كرية حمراء من U_1 وكريتين حمراء من U_2) أو (سحب كرية خضراء من U_1 وكريتين خضراوان من U_2)

$$p(A)=\left(\frac{C_3^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}\right)+\left(\frac{C_2^1}{C_5^1}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}\right)=\frac{9}{50}$$

- B **" الحصول على اللونين "**

- **حساب** $p(B)$:
- تحقق الحدث B معناه : (سحب كرية حمراء من U_1 وكريتين خضراء من U_2) أو (سحب كرية خضراء من U_1 وكريتين حمراوين من U_2)

$$p(B)=\left(\frac{C_3^1}{C_5^1}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}\right)+\left(\frac{C_2^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}\right)=\frac{11}{50}$$

- C **" الحصول على كريتين حمراوتين على الأكثر "**

- **حساب** $p(C)$:

معناه : الحصول على 2 كريات حمراء أو كرية حمراء أو 0 كرية حمراء .

تحقق الحدث C معناه :

(كرية حمراء من U_1 وكرية حمراء من U_2 وكرية خضراء من U_2) أو (كرية خضراء من U_1 وكريتين حمراوين من U_2) أو (كرية حمراء من U_1 وكريتين خضراء من U_2) أو (كرية خضراء من U_1 وكرية خضراء من U_2 وكرية حمراء من U_2) أو (كرية خضراء من U_1 وكريتين خضراء من U_2)

$$p(C)=\left(\frac{C_3^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^1\times C_3^1}{C_5^2}\right)+\left(\frac{C_2^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}\right)+\left(\frac{C_3^1}{C_5^1}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}\right)+\left(\frac{C_2^1}{C_5^1}\times\frac{C_3^1\times C_2^1}{C_5^2}\right)+\left(\frac{C_2^1}{C_5^1}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}\right)=\frac{47}{50}$$

- D " مجموع أرقام الكريات المسحوبة يساوي 3 "

تحقق الحدث D معناه :

(سحب كرية تحمل الرقم 0 من U_1 وكرية تحمل الرقم 2 من U_2 وكرية تحمل الرقم 1 من U_2)

أو(سحب كرية تحمل الرقم 1 من U_1 وكرية تحمل الرقم 0 من U_2 وكرية تحمل الرقم 2 من U_2)

أو (سحب كرية تحمل الرقم 2 من U_1 وكرية تحمل الرقم 0 من U_2 وكرية تحمل الرقم 1 من U_2)

$$\bullet p(D)=\left(\frac{C_1^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^1\times C_1^1}{C_5^2}\right)+\left(\frac{C_3^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^1\times C_2^1}{C_5^2}\right)+\left(\frac{C_1^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^1\times C_1^1}{C_5^2}\right)=\frac{16}{50}$$

2) المتغير العشوائي X يرفق بمجموع الأرقام المحصل عليها بعد كل سحب :

أ – تعريف قانون احتمال X ثم حساب أمله الرياضياتي :

X_i	0	1	2	3	4	5	6
$p(X=X_i)$	$\frac{1}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{16}{50}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{1}{50}$

$p(X=0)$:

(سحب كرية تحمل الرقم 0 من U_1 وكريتين تحملان الرقم 0 من U_2)

$$p(X=0)=\frac{C_1^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{50}$$

$p(X=1)$:

(سحب كرية تحمل الرقم 0 من U_1 وكرية تحمل الرقم 0 من U_2 وكرية تحمل الرقم 1 من U_2) أو

(كرية تحمل الرقم 1 من U_1 وكريتان تحملان الرقم 0 من U_2)

$$p(X=1)=\left(\frac{C_1^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^1\times C_1^1}{C_5^2}\right)+\left(\frac{C_3^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}\right)=\frac{5}{50}$$

$p(X=2)$:

(كرية تحمل الرقم 0 من U_1 وكرية تحمل الرقم 0 من U_2 وكرية تحمل الرقم 2 من U_2)

أو (كرية تحمل الرقم 1 من U_1 وكرية تحمل الرقم 0 من U_2وكرية تحمل الرقم 1 من U_2)

أو (كرية تحمل الرقم 2 من U_1 وكريتان تحملان الرقم 0 من U_2)

$$p(X=2)=\left(\frac{C_1^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^1\times C_2^1}{C_5^2}\right)+\left(\frac{C_3^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^1\times C_1^1}{C_5^2}\right)+\left(\frac{C_1^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}\right)=\frac{11}{50}$$

: $p(X=3)$

(كرية تحمل الرقم 0 من U_1 وكرية تحمل الرقم 1 من U_2 وكرية تحمل الرقم 2 من U_2)

أو (كرية تحمل الرقم 1 من U_1 وكرية تحمل الرقم 0 من U_2وكرية تحمل الرقم 2 من U_2)

أو (كرية تحمل الرقم 2 من U_1 وكرية تحمل الرقم 0 من U_2 وكرية تحمل الرقم 1 من U_2)

$$p(X=3)=\left(\frac{C_1^1}{C_5^1}\times\frac{C_1^1\times C_2^1}{C_5^2}\right)+\left(\frac{C_3^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^1\times C_2^1}{C_5^2}\right)+\left(\frac{C_1^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^1\times C_1^1}{C_5^2}\right)=\frac{16}{50}$$

: $p(X=4)$

(كرية تحمل الرقم 0 من U_1 وكريتان تحملان الرقم 2 من U_2)

أو (كرية تحمل الرقم 1 من U_1 وكرية تحمل الرقم 1 من U_2وكرية تحمل الرقم 2 من U_2)

أو (كرية تحمل الرقم 2 من U_1 وكرية تحمل الرقم 0 من U_2 وكرية تحمل الرقم 2 من U_2)

$$p(X=4)=\left(\frac{C_1^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}\right)+\left(\frac{C_3^1}{C_5^1}\times\frac{C_1^1\times C_2^1}{C_5^2}\right)+\left(\frac{C_1^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^1\times C_2^1}{C_5^2}\right)=\frac{11}{50}$$

: $p(X=5)$

(كرية تحمل الرقم 1 من U_1 وكريتين تحملان الرقم 2 من U_2) أو

(كرية تحمل الرقم 2 من U_1 وكرية تحمل الرقم 1 من U_2 وكرية تحمل الرقم 2 من U_2)

$$p(X=5)=\left(\frac{C_3^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}\right)+\left(\frac{C_1^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^1\times C_1^1}{C_5^2}\right)=\frac{5}{50}$$

: $p(X=6)$

(كرية تحمل الرقم 2 من U_1 وكريتين تحملان الرقم 2 من U_2)

$$p(X=6)=\left(\frac{C_1^1}{C_5^1}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}\right)=\frac{1}{50}$$

أ - **حساب الأمل الرياضياتي** $E(X)$:

$$\bullet E(X)=\sum_{i=0}^{i=6}X_i\times p(X_i)$$

$$=\left(0\times\frac{1}{50}\right)+\left(1\times\frac{1}{50}\right)+\left(2\times\frac{11}{50}\right)+\left(3\times\frac{16}{50}\right)+\left(4\times\frac{11}{50}\right)+\left(5\times\frac{5}{50}\right)+\left(6\times\frac{1}{50}\right)$$

$$=\frac{1+22+48+44+25+6}{50}$$

$$\boxed{E(X)=2,92}$$

ب – حساب التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X :

● التباين $V(X)$:

$$\bullet V(X)=\sum_{i=0}^{i=6}\left(X_i^{2}\times p(X_i)\right)-\left(E(X)\right)^2$$

$$=\left(\left(0^2\times\frac{1}{50}\right)+\left(1^2\times\frac{1}{50}\right)+\left(2^2\times\frac{11}{50}\right)+\left(3^2\times\frac{16}{50}\right)+\left(4^2\times\frac{11}{50}\right)+\left(5^2\times\frac{5}{50}\right)+\left(6^2\times\frac{1}{50}\right)\right)-(2{,}92)^2$$

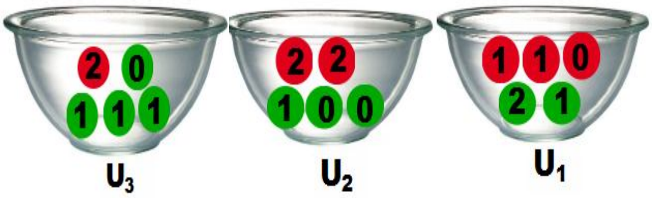
$$=\frac{1+44+144+176+125+36}{50}-8{,}5264$$

$$\boxed{V(X)=1{,}99}$$

● الانحراف المعياري $\sigma(X)$:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1{,}99}=1{,}41$$

II) نختار عشوائيا صندوق ونسحب منه كرية واحدة .



1) حساب احتمال أن تكون الكرية المسحوبة تحمل الرقم 0 :

F " الكرية المسحوبة تحمل الرقم 0 "

$$\bullet p(F)=p(F\cap U_1)+p(F\cap U_2)+p(F\cap U_3)$$

$$=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\right)$$

$$\boxed{p(F)=\frac{4}{15}}$$

2) حساب احتمال أن تكون الكرية المسحوبة تحمل الرقم 0 من الصندوق U_2 :

$$\bullet p(F\cap U_2)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$$

3) حساب احتمال أن تكون الكرية المسحوبة من الصندوق U_2 علما أنها تحمل الرقم 0 :

$$\bullet p_F(U_2)=\frac{p(F\cap U_2)}{P(F)}=\frac{2}{15}\times\frac{15}{4}=\frac{1}{2}$$

III)

1) حساب احتمال أن تكون الكرية المسحوبة حمراء :

النرد متوازن ومنه احتمال ظهور أي وجه يساوي : $\frac{1}{6}$

● ظهور الرقم 1 أو 2 نسحب من الصندوق U_1 وعليه $p(U_1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

● ظهور الرقم 3 أو 4 أو 5 نسحب من الصندوق U_2 وعليه $p(U_2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

● ظهور الرقم 6 نسحب من الصندوق U_3 وعليه $p(U_3)=\frac{1}{6}$

باستعمال دستور الاحتمالات الكلية نجد :

$$\begin{aligned}\bullet\, p(R) &= p(R\cap U_1)+p(R\cap U_2)+p(R\cap U_3)\\ &= p(U_1)\times p_{U1}(R)+p(U_2)\times p_{U2}(R)+p(U_3)\times p_{U3}(R)\\ &= \left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{p(R)=\frac{13}{30}}$$

2) حساب احتمال أن تحمل الكرية المسحوبة الرقم 2 :

نسمي G الحدث " الكرية المسحوبة الرقم 2 "

باستعمال دستور الاحتمالات الكلية نجد :

$$\begin{aligned}\bullet\, p(G) &= p(G\cap U_1)+p(G\cap U_2)+p(G\cap U_3)\\ &= p(U_1)\times p_{U_1}(G)+p(U_2)\times p_{U_2}(G)+p(U_3)\times p_{U_3}(G)\\ &= \left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{p(G)=\frac{3}{10}}$$

التمرين الثاني :

f معرفة على $[0,+\infty[$ ب : $f(x)=\frac{7x}{2x+1}$

1) أ - دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0,+\infty[$:

f قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ ولدينا : $f'(x)=\frac{7(1)-2(0)}{(2x+1)^2}=\frac{7}{(2x+1)^2}$

$f'(x)\succ 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

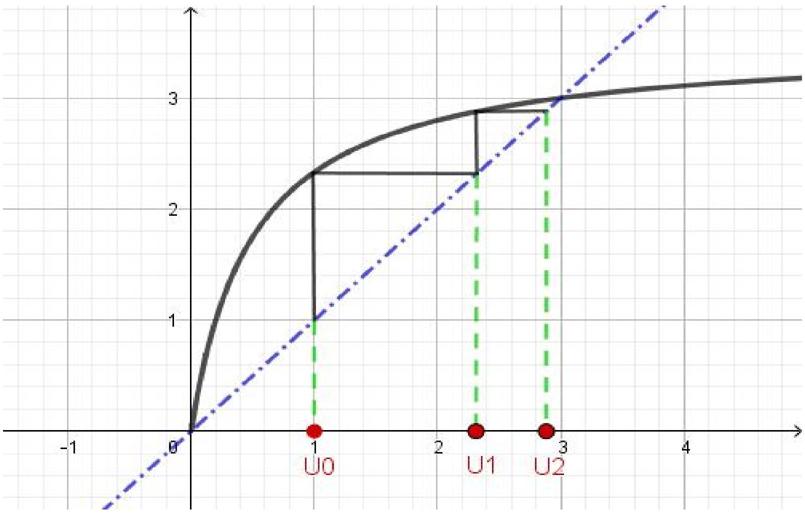
ب – إثبات أنه من أجل $x\in[0,3]$ فإن $f(x)\in[0,3]$:

لدينا $0\le x\le 3$ وبما أن f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ فإن : $f(0)\le f(x)\le f(3)$ ومنه $0\le f(x)\le 3$

ومنه $f(x)\in[0,3]$.

2) (u_n) معرفة ب : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ – باستخدام المنحني (C_f) و المستقيم $(\Delta): y=x$ تمثيل الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (u_n) دون حسابها.



ب – وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها :

نلاحظ أن $u_0\le u_1\le u_2$ وعليه يظهر أن المتتالية (u_n) متزايدة وتتقارب شيئا فشيئا نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

3) أ- برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 3$:

نضع : $0\le u_n\le 3.........p(n)$

- **نبرهن أن $p(n)$ صحيحة من أجل $n=0$:**

لدينا : $0\le u_0=1\le 3$ ومنه $p(0)$ صحيحة .... **(1)**

- نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونبرهن أن $p(n+1)$:

أي نفرض أن $0 \le u_n \le 3$ ونبرهن أن $0 \le u_{n+1} \le 3$

لدينا فرضا $0 \le u_n \le 3$ وبما أن f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ فإن $f(0) \le f(u_n) \le f(3)$ أي

$0 \le f(u_n) \le 3$

ومنه $0 \le u_{n+1} \le 3$ ومنه $p(n+1)$ صحيحة ....**(2)**

من **(1)** و **(2)** نستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $p(n)$ صحيحة .

ب – دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ وهو من إشارة $f(x) - x$

$$f(x) - x = \frac{7x}{2x+1} - x = \frac{-2x^2 + 6x}{2x+1} = \frac{2x(-x+3)}{2x+1}$$

$2x \ge 0$ و $2x+1 \succ 0$ ومنه إشارة $f(x)-x$ من إشارة $-x+3$

من أجل كل $x \in [0,3]$ فإن $-x+3 \ge 0$ ومنه $f(x) - x \ge 0$

ومنه من أجل $u_n \in [0,3]$ فإن $u_{n+1} - u_n \ge 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة .

ج – استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم حساب نهايتها :

لدينا مما سبق (u_n) متزايدة ومحدودة من أعلى $(u_n \le 3)$ فهي متقاربة .

- **حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

بما أن (u_n) متقاربة فإنه يوجد $l \in \mathbb{R}$ بحيث : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ وكذلك $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$

ومنه $\frac{7l}{2l+1} = l$ تكافيء $2l^2 + l = 7l$ تكافيء $2l^2 - 6l = 0$ تكافيء $2l(l-3) = 0$

ومنه $l = 3$ أو $l = 0$ (مرفوض)

ومنه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3}$

4) (v_n) **معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب :** $v_n = \frac{u_n}{3 - u_n}$

أ – إثبات أن المتتالية (v_n) هندسية ؛ تعيين أساسها وحدها الأول :

$$\bullet \frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}}{3-u_{n+1}}\times\frac{3-u_n}{u_n}=\frac{\frac{7u_n}{2u_n+1}}{3-\frac{7u_n}{2u_n+1}}\times\frac{3-u_n}{u_n}$$

$$=\frac{\frac{7u_n}{2u_n+1}}{\frac{6u_n+3-7u_n}{2u_n+1}}\times\frac{3-u_n}{u_n}=\frac{7u_n}{\cancel{2u_n+1}}\times\frac{\cancel{2u_n+1}}{\cancel{3-u_n}}\times\frac{\cancel{3-u_n}}{u_n}$$

$$\boxed{\frac{v_{n+1}}{v_n}=7}$$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $q=7$ وحدها الأول v_0 حيث $v_0=\frac{u_0}{3-u_0}=\frac{1}{2}$

ب – كتابة عبارة v_n بدلالة n ؛ ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

(v_n) هندسية ومنه $v_n=v_0\times q^n$ وعليه : $\boxed{v_n=\frac{7^n}{2}}$

•استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

لدينا $v_n=\frac{u_n}{3-u_n}$ ومنه $-u_nv_n+3v_n=u_n$ تكافيء $u_n+u_nv_n=3v_n$ ومنه $\boxed{u_n=\frac{3v_n}{1+v_n}}$

5) أ - حساب بدلالة n المجاميع : S_n ؛ S'_n ؛ S''_n حيث : $S_n=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+...+\frac{1}{v_n}$ ؛

$S'_n=v_0^2+v_1^2+....+v_n^2$ ؛ $S''_n=\frac{1}{v_0^2}+\frac{1}{v_1^2}+...+\frac{1}{v_n^2}$

• حساب المجموع S_n :

$S_n=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+...+\frac{1}{v_n}$ تكافيء $S_n=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_0\times q}+...+\frac{1}{v_0\times q^n}$

تكافيء

$$S_n=\frac{1}{v_0}+\left(\frac{1}{v_0}\times\frac{1}{q}\right)+\left(\frac{1}{v_0}\times\left(\frac{1}{q}\right)^2\right)+...+\left(\frac{1}{v_0}\times\left(\frac{1}{q}\right)^n\right)$$

نضع $\frac{1}{v_0}=w_0$ و $\frac{1}{q}=q'$ نجد $S_n=w_0+w_0\times q'+w_0\times q'^2+...+w_0\times(q')^n$

أي $S_n=w_0+w_1+w_2+...+w_n$

ومنه S_n هو مجموع $(n+1)$ حدا متعاقبا لمتتالية هندسية حدها الأول $\frac{1}{v_0}=w_0$ وأساسها $\frac{1}{q}=q'$

$$S_n = w_0 \times \frac{1-(q')^{n+1}}{1-q'}$$

$S_n = w_0 \times \frac{1-(q')^{n+1}}{1-q'}$ تكافيء $S_n = \frac{1}{v_0} \times \frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{q}}$ ومنه : $\boxed{S_n = \frac{7}{3}\left(7^{n+1}-1\right)}$

حساب المجموع S_n' :

$S_n' = v_0^{\ 2} + v_1^{\ 2} + \dots + v_n^{\ 2}$ تكافيء $S_n' = v_0^{\ 2} + (v_0 \times q)^2 + (v_0 \times q^2)^2 \dots + (v_0 \times q^n)^2$

تكافيء $S_n' = v_0^{\ 2} + (v_0^{\ 2} \times q^2) + \left(v_0^{\ 2} \times (q^2)^2\right) \dots + \left(v_0^{\ 2} \times (q^n)^2\right)$

بوضع : $w_0' = v_0^{\ 2}$ و $q'' = q^2$ نجد

$$S_n' = w_0' + (w_0' \times q'') + (w_0' \times q''^2) \dots + \left(w_0' \times (q'')^n\right)$$

ومنه $S_n' = w_0' + w_1' + w_2' + \dots + w_n'^{\,n}$

ومنه S_n' هو مجموع $(n+1)$ حدا متعاقبا لمتتالية هندسية حدها الأول $w_0' = v_0^{\ 2}$ وأساسها $q'' = q^2$

ومنه $S_n' = w_0' \times \frac{1-(q'')^{n+1}}{1-q''}$ تكافيء $S_n' = v_0^{\ 2} \times \frac{1-(q^2)^{n+1}}{1-q^2}$ ومنه $S_n' = \frac{49}{192}\left(1-(49)^{n+1}\right)$

نجد : $\boxed{S_n' = \frac{1}{192}\left(49-(49)^{n+2}\right)}$

ب – حساب بدلالة n الجداء π_n حيث :

$\pi_n = v_0 \times v_1 \times \dots + v_n$ تكافيء $\pi_n = v_0 \times (v_0 \times q) \times (v_0 \times q^2) \times \dots \times (v_0 \times q^n)$

تكافيء $\pi_n = \underbrace{(v_0 \times v_0 \times \dots \times v_0)}_{(n+1)\text{ مرة}} \times (q \times q^2 \times \dots \times q^n)$ تكافيء $\pi_n = v_0^{\,n+1} \times q^{1+2+3+\dots+n}$

تكافيء $\pi_n = v_0^{\,n+1} \times q^{n \times \left(\frac{1+n}{2}\right)}$ ومنه نجد : $\boxed{\pi_n = \frac{7^{\frac{n+n^2}{2}}}{2^{n+1}}}$

بالتوفيق والنجاح في بكالوريا جوان 2019

لاتنسونا بخالص دعائكم