Topologie Générale Elémentaire

Licence Mathématiques

Deuxième Année LMD

Semestre 3

El-Bachir Yallaoui

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Ferhat Abbas, Sétif 1

Préface

Ces notes de cours sont principalement destinées aux étudiants de la deuxième année (semestre 3) de Licence en mathématiques système **LMD** à l'université Ferhat Abbas de Sétif 1, Algérie. Le cours peut être fait durant une quinzaines de semaines à raison de 3 heurs de cours et 3 heures de travaux dirigés.
Ces notes ont pour objectif de donner les fondations élémentaires de bases en topologie générale nécessaires à toute formation en mathématiques. Ces notes sont absolument indispensables pour tout étudiant désirant de ce spécialiser en mathématiques. Ceci dit, elles n'ont aucune prétention d'être un recueil complet sur le sujet. J'espère, tout de même, qu'elles constituerons un support pédagogique efficace. Ces notes ne serons complètement profitables aux étudiants que si ces derniers assistent régulièrement aux cours magistraux, et préparent minutieusement les travaux dirigés. Je vous serais très reconnaissant de me signaler toute erreur que vous trouverez dans ces notes de cours.
On a introduit le sujet de topologie générale via les espaces métriques. Malgré que ces espaces sont un cas particulier des espaces topologiques, mais le fait que dans les cours d'analyses la majorités des espaces rencontrés sont Hausdorff, on a préféré introduire le sujet de cette manière.

Pré-requis
Tout étudiant voulant étudier la topologie générale doit, au préalable, connaître les notions de base d'une fonction d'une variable réelle (différentiation et intégration), les suites et les séries réelles. Nous conseillons les étudiants de revoir ces notions qui seront utiliser à travers tout le cours.

Préparation de l'ouvrage
On a utiliser les outils suivants pour la réalisation de cet ouvrage.

LaTeX : pour la production de cet ouvrage.

Geogebra : pour réaliser la majorité des graphes et figures.

Wikipedia : pour obtenir quelques graphes.

Dr. El-Bachir Yallaoui

1 Préliminaires

La topologie est une théorie mathématique relativement jeune : elle émerge (sous le nom d'analysis situs) au début du vingtième siècle dans les travaux de Hausdorff et de Tychonoff. Le besoin d'une telle théorie s'est déjà fait sentir à la fin du dix-neuvième siècle dans les travaux de Riemann et de Hilbert. Dans la recherche actuelle, la topologie joue un rôle fondamental aussi bien en Analyse Fonctionnelle qu'en Géométrie Différentielle ou encore en Topologie Algébrique. Ci-dessous, quelques grands noms de la Topologie :

- Henri Poincaré (1854-1912) ; (homotopie, cohomologie)
- David Hilbert (1862-1943) ; (bases de Hilbert, espaces de Hilbert)
- Maurice Fréchet (1878-1973) ; (convergence uniforme, convergence compacte)
- Stefan Banach (1892-1945) ; (fondateur de l'Analyse Fonctionnelle, espaces de Banach)

Ce cours n'est cependant qu'une introduction aux notions de base. Il contient le strict minimum pour celui qui souhaite poursuivre les études en mathématiques. Comme la topologie repose sur relativement peu de connaissances acquises, elle présente l'occasion idéale pour l'étudiant de combler d'éventuelles lacunes en logique ou en théorie des ensembles. C'est la raison pour laquelle la plupart des énoncés sont suivis d'une preuve complète.

1.1 Ensembles

Dans ce chapitre, nous voulons donner une révision des concepts d'ensembles et des fonctions que vous avez vus dans les cours précédents. Bien sûr, ce n'est pas un exposé complet de ce sujet, mais simplement une récollection des thèmes les plus importants. Nous allons supposer que le lecteur possède une familiarité avec l'idée d'un ensemble et ses sous-ensembles. En général, nous adoptons ce qui est souvent considéré comme l'approche naïve de ce sujet, en évitant la démarche logique rigoureuse.

Appartenance

Soit X (univers) un ensemble et $A, B, \dots$ des sous ensembles de X. Pour tout sous-ensemble A de X et pour chaque point x dans X, on dénote par $x \in A$ pour indiquer que x est un élément de A (ou bien x appartient à A). De même, la notation $x \notin A$ signifie que x est un élément de X qui n'appartient pas à A.

Nous pouvons spécifier l'ensemble en énumérant ses éléments, comme dans l'ensemble des chiffres décimaux :

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

ou bien en sélectionnant les éléments d'un ensemble préalablement donné qui satisfait certaines conditions bien définies comme par exemple :

$$P = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ premier }\}$$

lu «l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tel que n est un nombre premier», où $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels :

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

On peut également indiquer la liste des éléments à l'aide d'une expression, comme dans l'ensemble

$$S = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$$

On dénote par $\varnothing$ l'ensemble vide qui est un ensemble ne contenant aucun élément. On dénote par $\{x\}$ le singleton, qui est un sous-ensemble ne contenant qu'un seul élément x. Si un ensemble S a un ou plusieurs éléments, on dit que l'ensemble S est non vide, et on le dénote par $S \neq \varnothing$.

Inclusion et égalité

Si A et B sont des sous-ensembles de X alors on dénote par $A \subseteq B$ pour indiquer que touts les éléments de A sont aussi des éléments de B, c.a.d si $x \in A$, alors $x \in B$. En termes logiques, la condition est que $x \in A$ seulement si $x \in B$, de sorte que $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$. On note que $\varnothing \subseteq A \subseteq X$, c.a.d que l'ensemble vide est un sous ensemble trivial de n'importe quel ensemble. De même on dénote par $B \supseteq A$ (B contient A), pour indiquer que $A \subseteq B$. Par exemple $\{1, 2\} \supseteq \{2\}$.
On dit que l'ensemble A est égale à l'ensemble B et le note $A = B$, si et seulement si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$. Par exemple $\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}$.
Si A n'est pas un sous-ensemble de B, on le note par $A \not\subseteq B$, et si A est différent de B on le note $A \neq B$. Si $A \subset B$ mais $A \neq B$ on le note par $A \subsetneq B$.

Proposition 1.1. *Soit X un ensemble et A, B, C des sous-ensembles de X , alors on a :*

1. *$A \subseteq A$.*
2. *Si $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$ alors $A \subseteq C$.*
3. *$A = B$ si et seulement si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.*

Union et intersection

L'union des deux ensembles A et B, dénotée par $A \cup B$, est l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à A **ou** B,

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \ \textbf{ou} \ \ x \in B\}$$

Noter que le mot "ou" dans la définition est inclusif, c.a.d. que x peut être un élément de A **et** B en même temps.

Exemple 1.2. Considérons les cas suivants :
(a) Si X est un univers et $A \subset X$, alors $A \cup X = X$ et $A \cup \varnothing = A$.
(b) Si $X = \mathbb{R}$, $A = (0, 1)$ et $B = (\frac{1}{3}, 5]$, alors $A \cup B = (0, 5]$.
(c) Si $X = \mathbb{R}^2, A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, 1) : x \in \mathbb{R}\}$, alors $A \cup B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y = 0, 1\}$

L'intersection des deux ensembles A et B, dénotée par $A \cap B$, est l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à A et B en même temps,

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \ \ \textbf{et} \ \ x \in B\}$$

Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Exemple 1.3. Considérons les cas suivants :
(a) Si X est un univers et $A \subset X$, alors $A \cap X = A$ et $A \cap \varnothing = \varnothing$.
(b) Si $X = \mathbb{R}$, $A = (0, 1)$ et $B = (\frac{1}{3}, 5]$, alors $A \cap B = (\frac{1}{3}, 1)$.
(c) Si $X = \mathbb{R}^2, A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, 1) : x \in \mathbb{R}\}$, alors $A \cap B = \varnothing$.

Proposition 1.4. *Soit X un univers, et $A, B, C \subseteq X$ alors on a :*

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Proposition 1.5. *Soit X un univers, et $A, B \subset X$ alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $A \subset B$.
2. $A \cap B = A$.
3. $A \cup B = B$.

Différence et complément

La différence A moins B, dénotée $A \setminus B$, qui est l'ensemble de tous les éléments appartenant à A mais pas à B

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \ \textbf{et} \ x \notin B\}$$

et la différence symétrique de A et B est

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Exemple 1.6. Considérons les ensembles suivants :
(a) Si X est un univers et $A \subset X$, alors $A \setminus \varnothing = A$ et $A \setminus X = \varnothing$.
(b) Si $X = \mathbb{R}$, $A = (0, 1)$ et $B = (\frac{1}{3}, 5]$, alors $A \setminus B = (0, \frac{1}{3}]$.
(c) Si $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, 1) : x \in \mathbb{R}\}$, alors $A \setminus B = A$.

Le complément de A, dénoté par $X \setminus A$ ou bien A^c, est l'ensemble de tous les éléments n'appartenant pas à A.

$$X \setminus A = A^c = \{x \in X : x \notin A\}$$

Les notations suivantes $A^c, \overline{A}, A'$, et $\tilde{A}$ sont également utilisées dans la littérature. Il est évident que le complément du complément est l'ensemble lui même c.a.d.

$$X \setminus (X \setminus A) = A.$$

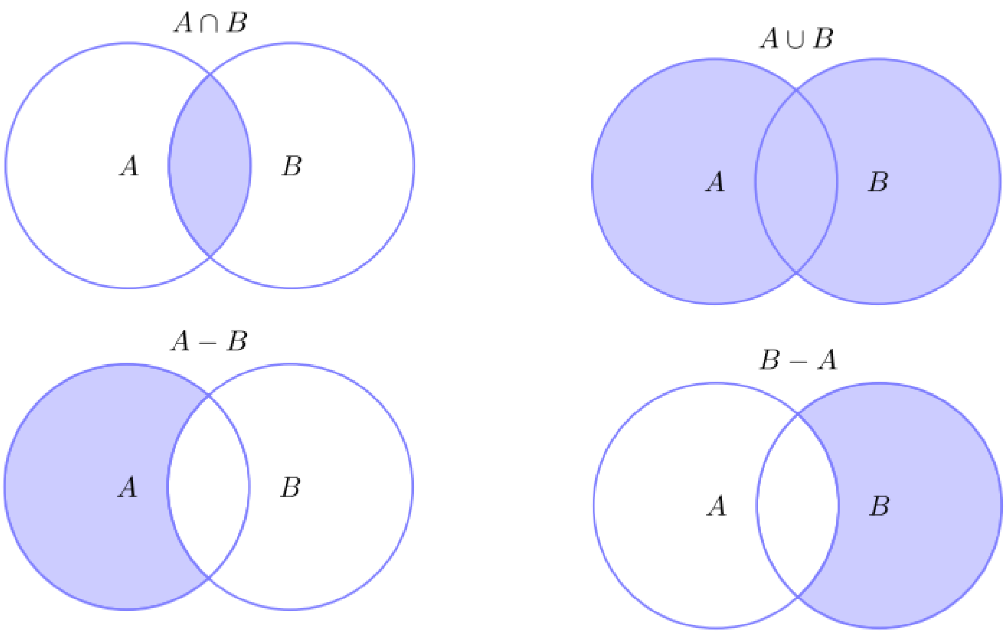


FIGURE 1.1 – Opérations sur les ensembles

Proposition 1.7 (Lois de DeMorgan). *Soit X un ensemble quelconque et $A, B \subseteq X$, alors on a :*

(a) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

(b) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

Démonstration. Montrons seulement la partie (a). Soit $x \in X \setminus (A \cup B)$ alors $x \notin (A \cup B)$, donc $x \notin A$ et $x \notin B$, c.a.d. que $x \in X \setminus A$ et $x \in X \setminus B$, alors $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.
Maintenant si $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$, alors $x \in (X \setminus A)$ et $x \in (X \setminus B)$, c.a.d. que $x \notin A$ et $x \notin B$, donc $x \notin (A \cup B)$ qui est équivalent à $x \in X \setminus (A \cup B)$. ■

Collections d'ensemble

Un ensemble étant un objet mathématique, il peut être considéré comme un élément d'un autre ensemble. Lorsque l'on considère un ensemble dont les éléments sont des ensembles, on le réfère comme une collection d'ensembles, et on le désigne avec une lettre de script comme $\mathscr{A}$ ou $\mathscr{B}$. (Parfois les ensembles d'ensembles sont appelés familles d'ensembles.)
Par exemple, chaque étudiant à l'université peut être considérée comme un objet mathématique. On note S l'ensemble de tous les élèves, soit :

$$S = \{s : s \text{ est un étudiant à UFAS }\}.$$

De même, chacun des cours offerts à l'université peut être considéré comme un autre objet mathématique. L'ensemble des cours est noté

$$C = \{c : c \text{ est un cours à UFAS }\}.$$

Pour chaque cours $c \in C$, soit E_c l'ensemble des étudiants inscrits à ce cours :

$$E_c = \{s \in S : s \text{ est inscrit dans le cours } c\}.$$

La collection $\mathscr{E}$ de ces ensembles d'élèves inscrits est donc :

$$\mathscr{E} = \{E_c : c \in C\}.$$

$\mathscr{E}$ est un ensemble d'ensembles. Ses éléments sont les ensembles de la forme E_c, pour un certain cours $c \in C$. Ces ensembles ont à leur tour des éléments, qui sont des étudiants à l'université.
Il se peut qu'aucun étudiant ne soit inscrit dans un cours spécifique c. Dans ce cas, $E_c = \varnothing$. Si cela est le cas pour deux cours différents, c et d, alors $E_c = E_d = \varnothing$. Par conséquent, il peut arriver que $E_c = E_d$ dans $\mathscr{E}$, même si $c \neq d$ dans C.
Pour un ensemble donné A, la collection de tous les sous-ensembles $B \subset A$ est appelé l'ensemble des parties de A, et est noté $\mathscr{P}(A)$:

$$\mathscr{P}(A) = \{B : B \subset A\}.$$

Par exemple, l'ensemble des parties $\mathscr{P}(\{a,b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$. En général, si A contient n éléments, alors $\mathscr{P}(A)$ contient 2^n éléments, c'est la raison pour laquelle $\mathscr{P}(A)$ est quelquefois appelé ensemble puissance de A.

Unions et intersections arbitraires

On définit maintenant l'union et l'intersection d'une collection arbitraire d'ensembles. Soit X un ensemble quelconque, et supposons que I soit un autre ensemble tel que pour chaque $i \in I$ on ait $A_i \subset X$; l'ensemble I est souvent appelé ensemble index, et on se réfère à la collection des sous-ensembles comme $\{A_i : i \in I\}$. On définit

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in X : x \in A_i \text{ pour au moins une valeur } i \in I\}$$
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in X : x \in A_i \text{ pour toute valeur de } i \in I\}$$

Évidemment, si $I = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ alors on utilisera la notation

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

Exemple 1.8. Considérons les familles d'ensembles suivantes :
(a) Si $A_i = [0, \frac{1}{i})$ alors $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$
(b) Si $A_i = (0, i)$ alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (0, \infty)$

Théorème 1.9 (Lois de De Morgan)**.** *Si X est un ensemble et $\{A_i : i \in I\}$ est une collection de sous-ensembles de X, alors :*
(a) $X \setminus (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I}(X \setminus A_i)$
(b) $X \setminus (\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I}(X \setminus A_i)$

Produit cartésien

Si X et Y sont deux ensembles quelconques, on définit produit cartésien de ces deux ensembles comme
$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

C'est donc l'ensemble des paires ordonnées (x, y), ou $x \in X$ et $y \in Y$.Le terme «ordonnées» est utilisé pour différentier $X \times Y$ et $Y \times X$.
De la même manière, si $X_1, \ldots, X_n$ sont des ensembles, alors on définit leurs produit

cartésien comme,

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in X_i, i = 1, \ldots, n\}$$

1.2 Fonctions

Domaine, codomaine et graphe

Définition 1.10. Soient X et Y deux ensembles non vides. Formellement, une **fonction** ou **application** $f : X \to Y$ est un sous-ensemble f de $X \times Y$ avec la propriété que pour tout $x \in X$, il existe un unique élément $y \in Y$ tel que $(x, y) \in f$. L'ensemble X est appelé le domaine de f et l'ensemble Y le codomaine de f.

Bien que la définition ci-dessus d'une fonction soit donnée purement en termes de la théorie des ensembles, elle n'est généralement pas pratique. Toutefois elle met en évidence l'importance du domaine et du codomaine comme des parties intrinsèques de la définition de f.
Moins formellement, nous pensons généralement d'une fonction $f : X \to Y$ comme une correspondance qui associe a tout élément $x \in X$, un élément unique $y = f(x) \in Y$.
Le **graphe** de f est le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par :

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y | x \in X\}.$$

On note la fonction par :

$$\begin{array}{rcl} f : X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

- X est le domaine de définition de f.
- Y est le codomaine (ensemble d'arrivée) de f.
- L'élément $y = f(x) \in Y$ est l'image de x par f.
- L'élément x est la pré-image (ou antécédent ou image réciproque) de y par f.

Exemple 1.11.

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$ est une fonction dont le domaine est $\mathbb{R}$ et dont $\mathrm{Im}(f) = [1, \infty)$.

(b) La relation définie pour tout x dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ +1 & x \geq 0 \end{cases}.$$

n 'est pas une fonction car $f(0) = \pm 1$. Cependant si on change la définition de telle sorte que

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1 & x \geq 0 \end{cases}$$

la relation devient une fonction.

(c) Si X et Y sont des ensembles non vides, $y_0 \in Y$ et $f(x) = y_0$ pour tout x dans X. $f : X \longrightarrow Y$ est la fonction **constante** dont le domaine est X et $\mathrm{Im}(f) = \{y_0\}$.

(d) Soit X un ensemble non vide et $A \subset X$, on définit la fonction **caractéristique** (ou fonction **indicatrice**) de A par $1_A : A \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

Propriétés

1. $1_\varnothing(x) = 0$.

2. $1_X(x) = 1$.

3. $1_{X \setminus A}(x) = 1 - 1_A(x)$.

4. $1_{A \cap B}(x) = \min\{1_A, 1_B\} = 1_A(x) 1_B(x)$.

5. $1_{A \cup B}(x) = \max\{1_A, 1_B\} = 1_A + 1_B - 1_A(x) 1_B(x)$.

6. $1_{A \triangle B}(x) \ = 1_A(x) + 1_B(x) - 2 \times 1_A(x) 1_B(x)$.

Image directe et image réciproque

Définition 1.12. Soient $f : A \to B$ une fonction, $S \subset A$ et $T \subset B$, alors on a :

(a) $f(S) = \{f(s) : s \in S\} \subset B$ et on l'appelle l'image directe de S par f.

(b) $f^{-1}(T) = \{a \in A : f(a) \in T\} \subset A$ et on l'appelle l'image réciproque de T par f.

(c) $f(A)$ est appelée l'image de f et notée $\mathrm{Im}\ f$.

Si f est définie comme précédemment alors on a :

- $S \subset f^{-1}(f(S))$ pour tout $S \subset A$.
- $f(f^{-1}(T)) \subset T$ pour tout $T \subset B$.

Exemple 1.13. Si $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est définie par $f(x) = x^2$, alors on a

$$\begin{aligned} f(\{2\}) &= \{4\} \\ f^{-1}[f(\{2\})] &= \{-2, 2\} \text{ on voit donc que } S = \{2\} \subset f^{-1}(f(S)) \\ f^{-1}(\{0, 1, 2\}) &= \{0, \pm 1\} \\ f[f^{-1}(\{0, 1, 2\})] &= \{0, 1\} \text{ on voit donc que } f(f^{-1}(T)) \subset T = \{0, 1, 2\} \end{aligned}$$

Remarque. Dans l'exemple précédent on a $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Souvent on écrira par abus de notation $f^{-1}(0) = 0$.

Exemple 1.14. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = 2x + 1$, alors on a

$$\begin{aligned} f([0, 2]) &= [1, 5] \\ f((1, \infty)) &= (3, \infty) \\ f^{-1}([-1, 7)) &= [-1, 3) \end{aligned}$$

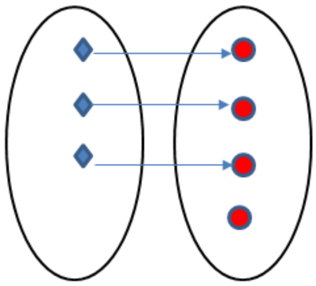
Fonctions injectives, surjectives et bijectives

Définition 1.15. Considérons la fonction $f : X \longrightarrow Y$.

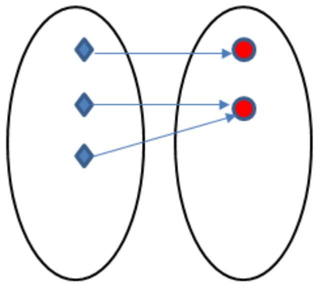
(a) f est dite **injective** si tout élément de Y a au plus une pré-image.
Autrement dit, si $x_1 \neq x_2$ implique $f(x_1) \neq f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in X$.
Autrement dit, si $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 \neq x_2$ pour tout $x_1, x_2 \in X$.

(b) f est dite **surjective** si tout élément de Y a au moins une pré-image.
Autrement dit, pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$.
Autrement dit, si $\text{Im}(f) = f(X) = Y$.

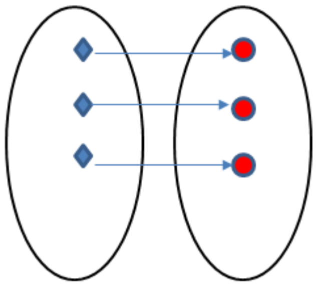
(c) f est dite **bijective**, tout élément de Y possède une et une seule pré-image.
Autrement dit, pour tout $y \in Y$ il existe un unique $x \in X$ tel que $y = f(x)$.
Autrement dit, f est à la fois injective et surjective.



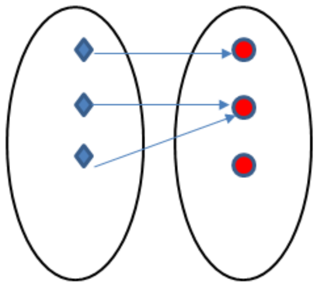
Fonction injective
qui n'est pas surjective



Fonction surjective
qui n'est pas injective



Fonction bijective



Fonction qui est
ni injective ni surjective

Exemple 1.16. Quelques exemples :

(1) La fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n^2$ est injective mais n'est pas surjective car il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 5$.
On a alors $\mathrm{Im}(f) =$ l'ensemble des carrés dans $\mathbb{N} = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$.

(2) La fonction $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n^2$ n'est ni injective ni surjective car $f(-5) = f(5) = 25$ et il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 5$.

(3) La fonction $f : \mathbb{R}+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est injective mais pas surjective car $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}+ \neq \mathbb{R}$.

(4) La fonction $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $id(x) = x$ est la fonction identité. Elle est bijective.

(5) Si X est un ensemble et $A \subset X$. La fonction injection canonique $i : A \hookrightarrow X$ définie par $i(a) = a$ pour tout $a \in A$ est toujours injective mais n'est pas surjective, sauf si $A = X$. Quand $A = X$ l'injection canonique $i(x)$ deviens la fonction identité $id(x)$ qui est bijective.

(6) La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\pi_1(x, y) = x$ est la fonction projection. Cette fonction est surjective mais n'est pas injective, car on a par exemple $\pi_1(x, 1) = x = \pi_1(x, 2)$.

(7) La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ définie par $f(x) = \arctan x$ est bijective.

(8) La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x$ n'est ni injective ni surjective.
Si on considère $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$, f devient surjective mais pas injective.
Si on considère $f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$, f devient injective mais pas surjective.
Si on considère $f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, +1]$, alors f devient bijective.

Fonction composée

Si $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$, alors la composée de $g \circ f : A \longrightarrow C$ est définie par

$$(g \circ f)(a) = g[f(a)]$$

pour tout a de A. Par exemple, si $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sin x$, alors $(g \circ f)(x) = \sin\left(x^2\right)$ et $(f \circ g)(x) = (\sin x)^2$.
La composition de fonctions est une opération associative.

Proposition 1.17. *Si $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ et $h : C \longrightarrow D$, sont des fonction alors,*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Le prochain théorème nous donnes quelques propriétés d'une fonction f avec les opérateurs $\cup, \cap$ et $\setminus$.

Théorème 1.18. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $A, B \subset X$ et $\{A_i : i \in I\}$ est une collection de sous-ensembles de X alors :*

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

(c) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$

(d) *Si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$*

(e) $f(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) = \bigcup\limits_{i \in I} f(A_i)$

(f) $f(\bigcap\limits_{i \in I} A_i) \subset \bigcap\limits_{i \in I} f(A_i)$

Démonstration. La démonstration est laissée au lecteur comme un exercice. ■

Soit $f : A \longrightarrow B$ et $S \subset A$ est un sous-ensemble du domaine, on peut définir la **restriction** de f sur S comme la fonction $f|_S : S \longrightarrow B$ avec $(f|_S)(x) = f(x)$ pour tout $x \in S$. Le graphe de la restriction est donné par

$$\Gamma_f \cap (S \times B)$$

qui est un sous-ensemble de $S \times B$, où $\Gamma_f \subset A \times B$.

Les relations réciproques

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un fonction. En général, la **relation réciproque** (ou relation inverse) $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ de la fonction f n'est pas une fonction. Mais si f est une fonction bijective, alors la relation réciproque f^{-1} est une fonction bijective appelée **bijection réciproque** (ou bijection inverse). Soit $y \in Y$, alors par surjectivité il existe x dans X avec $f(x) = y$; par injectivité, cet x est unique. Donc, on peut définir $f^{-1}(y) = x$ pour l'unique x avec $f(x) = y$.
Attention. $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$.
Le prochain théorème nous donnes quelques propriétés d'une relation réciproque f^{-1} avec les opérateurs $\cup, \cap$ et $\setminus$.

Théorème 1.19. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $A, B \subset Y$ et $\{B_i : i \in I\}$ est une collection de sous-ensembles de Y alors :*

(a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}A) \cup f^{-1}B)$

(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}A) \cap f^{-1}B)$

(c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}A) \setminus f^{-1}B)$

(d) *Si $A \subset B$ alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$*

(e) $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

(f) $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

Définition 1.20. Pour tout ensemble S, la fonction d'identité sur S, notée par $\mathrm{Id}_S : S \to S$ est la fonction définie par $\mathrm{Id}_S(s) = s$ pour tout $s \in S$.
Il est facile de vérifier que si nous avons une fonction $f : A \to B$ alors

$$f \circ \mathrm{Id}_A = f = \mathrm{Id}_B \circ f.$$

Définition 1.21. Supposons $f : A \to B$ et $g : B \to A$ sont deux fonctions telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Alors on dit que f est une fonction réciproque droite de g et que g est une fonction réciproque gauche de f.

Le théorème suivant est fondamental.

Théorème 1.22. *Si $f : A \to B$ et $g : B \to A$ sont deux fonctions telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ alors f est injective et g est surjective. Donc toute fonction qui admet une réciproque à gauche est injective et toute fonction qui admet une réciproque à droite doit être surjective.*

Démonstration. $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ est équivalent à $g(f(a)) = a$ pour tout $a \in A$.
f **is injective :** Supposons que $a, a' \in A$ et $f(a) = f(a') \in B$. Alors on

$$g(f(a)) = g(f(a')) \Leftrightarrow (g \circ f)(a) = (g \circ f)(a') \Leftrightarrow \mathrm{Id}_A(a) = \mathrm{Id}_A(a') \Leftrightarrow a = a'$$

d'où f est injective.
g **is surjective :** Soit $a \in A$, alors $f(a) \in B$ et $g(f(a)) = a$. Donc $a \in g(B) = \text{ Im } (g)$ pour tout $a \in A$, qui montre que $A = \text{ Im } (g)$ donc g est surjective. ■

L'exemple suivant montre que les réciproques gauches (droites) ne sont pas nécessairement uniques.

Exemple 1.23. Soit $A = \{1, 2\}$ et $B = \{a, b, c\}$. On défini $f_1, f_2 : A \to B$ par $f_1(1) = a, f_1(2) = c, f_2(1) = b, f_2(2) = c$. On défini $g_1, g_2 : B \to A$ par $g_1(a) = g_1(b) = 1, g_1(c) = 2$ et $g_2(a) = 1, g_2(b) = g_2(c) = 2$. Alors il est facile de montrer que $g_1 \circ f_1 = \mathrm{Id}_A = g_1 \circ f_2$ donc g_1 possède deux réciproques droites distinctes f_1 et f_2. De plus puisque g_1 n'est pas injective, elle n'a pas de réciproque gauche.
De même on peut vérifier que, $g_2 \circ f_1 = \mathrm{Id}_A = g_1 \circ f_1$ donc f_1 possède deux réciproques gauches distinctes g_1 et g_2. De plus puisque f_1 n'est pas surjective, elle ne possède pas de réciproque droite.

De cet exemple, on peut conclure que même si elles existent, les réciproques ne sont pas nécessairement uniques. Cependant, nous allons maintenant voir que quand une fonction a la fois une réciproque gauche et une réciproque droite, alors ces réciproques doivent être les mêmes.

Proposition 1.24. *Si $f : A \to B$ est une fonction possédant une fonction réciproque à gauche $h : B \to A$ et une fonction réciproque à droite $g : B \to A$, alors $h = g$.*

Démonstration. Par hypothèse on a $h \circ f = \mathrm{Id}_A$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. En utilisant la propriété d'associativité des composées on :

$$h = h \circ \mathrm{Id}_B = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = \mathrm{Id}_A \circ g = g.$$

Donc h et g sont les mêmes. Puisque cet argument est vrai pour n'importe quelle réciproque droite g de f, tout réciproque à droite de f doit être égale à g. Puisque cet argument est vrai pour n'importe quelle réciproque gauche h de f, tout réciproque gauche de f doit être égale à h. Donc tous les réciproques de f sont égaux. ■

On fini par donner une caractérisation complète de l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité en fonction des réciproques.

Théorème 1.25. *Soit $f : A \to B$ une fonction, alors on a :*

(a) *f est injective si et seulement s'il existe $g : B \to A$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$.*

(b) *f est surjective si et seulement s'il existe $h : A \to B$ telle que $f \circ h = \mathrm{Id}_B$.*

(c) *f est bijective si et seulement s'il existe $g : B \to A$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. Dans ce cas la fonction réciproque est unique et on la note par $g = f^{-1}$.*

Démonstration.

(a) $(\Leftarrow)$ découle du théorème (1.22).
$(\Rightarrow)$ Supposons que $f : A \to B$ est injective. Soit $a_0 \in A$ un point fixe et on défini la fonction $g : B \to A$ telle que

$$g(b) = \begin{cases} a \text{ si } b \in \text{ Im }(f) \text{ et } f(a) = b \\ a_0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Si $b \in \text{ Im }(f)$ et $f(a) = b$, on a $(g \circ f)(a) = g[f(a)] = g(b) = a$. Sinon on a $(g \circ f)(a_0) = g[f(a_0)] = a_0$. Cela montre que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Donc g est une réciproque gauche de f.

(b) $(\Leftarrow)$ découle du théorème (1.22).
$(\Rightarrow)$ Supposons que $f : A \to B$ est surjective. Alors pour tout $b \in B$, $f^{-1}(\{b\}) \neq \varnothing$ dans A. On choisi $h : B \to A$ de telle sort que $h(b)$ est une des valeur de $f^{-1}(\{b\})$. Don on aura $(f \circ h)(b) = f[f^{-1}(b)] = b$ pour tout $b \in B$. Cela montre que h est une réciproque droite de f.

(c) $(\Rightarrow)$ Supposons que f est bijective. D'après (a) et (b) ci-dessus on peut conclure que f admet une réciproque gauche h et une réciproque droite g. Par proposition (1.24) on a $h = g$. Il existe donc une fonction $g : B \to A$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_B$.

$(\Leftarrow)$ Notons qu'une fonction réciproque de f à gauche et à droite simultanément est une fonction $g : B \to A$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_A$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_B$. Par théorème (1.22) si f admet une fonction g qui est à la fois une réciproque gauche et droite alors g doit être injective et surjective et donc bijective.

■

Proposition 1.26. *Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$.*

(1) *Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*

(2) *Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*

(3) *Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

(4) *Si f est bijective, alors $f^{-1} : B \to A$ est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.*

(5) *$A \subseteq (f^{-1} \circ f)(A)$ et $(f \circ f^{-1})(B) \subseteq B$.*

(6) *$(f^{-1} \circ f)(A) = A$ si et seulement si f est injective.*

(7) $(f \circ f^{-1})(B) = B$ *si et seulement si* f *est surjective.*

Démonstration. La démonstration est laissée au lecteur comme un exercice. ■

1.3 Le corps des nombres réels

On note par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. On peut voir les nombres réels comme toutes les longueurs géométriques obtenues le long d'une droite.

Exemple 1.27. Les nombres $\sqrt{2}, \pi, e, \ln(5)$ sont tous des nombres réels non rationnels.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est un corps, totalement ordonné, archimédien, et complet :

- totalement ordonné : on peut toujours comparer 2 réels r et u ; soit $u > r$, soit $u < r$, soit $u = r$.
- archimédien : pour tout couple (x, y) de nombres réels, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.
- complet : toute suite de Cauchy est convergente.

Définition 1.28. Soit $A \subset \mathbb{R}$. A est dit majoré (resp. minoré) dans $\mathbb{R}$ s'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $a < s$ (resp. $a > s$) pour tout $a \in A$. L'élément $s \in \mathbb{R}$ est appelé un majorant (resp. un minorant) de A. Le sous-ensemble A est dit borné s'il est à la fois majoré et minoré.

1) L'élément s n'appartient pas nécessairement à A.
2) Si A possède un majorant, alors il en possède une infinité. En effet, si s est un majorant de A, alors tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $t > s$ est aussi un majorant.

Définition 1.29. (Borne supérieure ou supremum). Un majorant s de A est appelé la borne supérieure ou supremum de A s'il est le plus petit des majorants, c'est-à-dire si, pour tout autre majorant s' de A, on a $s \leq s'$.
On note alors $s = \sup A$.
Si A n'est pas majoré, on pose $\sup A = \infty$.

Définition 1.30. (Borne inférieure ou infimum). Un minorant s de A est appelé la borne inférieure ou infimum de A s'il est le plus grand des minorants, c'est-à-dire si, pour tout autre minorant s' de A, on a $s \geq s'$.
On note alors $s = \inf A$.
Si A n'est pas minoré, on pose $\inf A = -\infty$.

Remarque :

- Si le supremum (resp. l'infimum) existe, il est unique.

- Si le supremum de A appartient à A, on dit que c'est le maximum de A et on le note $\max A$.

- Si l'infimum de A appartient à A, on dit que c'est le minimum de A et on le note $\min A$.

- Il est évident que si A est majoré par une bore supérieure s si et seulement si $-A = \{-x : x \in A\}$ est minoré par une borne inférieure $-s$. Pour cette raison, chaque déclaration sur la borne supérieure d'un ensemble a son analogue pour la borne inférieure.

Exemple 1.31. Soit $A = (0, 2]$, alors $\inf A = 0 \notin A$ et $\sup A = 2 = \max A$.

Axiome 1.32. *(Propriété de Densité).*
Si a et b sont des nombres rationnels avec $a < b$, alors il existe un nombre irrationnel x avec $a < x < b$.
Si a et b sont des nombres irrationnels avec $a < b$, alors il existe un nombre rationnel x tel que $a < x < b$.

Axiome 1.33. *(Propriété de complétude).*
Si A est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure alors A un possède un supremum.

Remarque : Cette propriété n'est pas vraie dans $\mathbb{Q}$

Exemple 1.34. Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$$

C'est un sous-ensemble borné de $\mathbb{Q}$ car, par exemple, $\frac{3}{2}$ est un majorant de A et $-\frac{3}{2}$ est un minorant de A. Mais il ne possède ni de borne supérieure ni de borne inférieure dans $\mathbb{Q}$. En revanche, si on considère A comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$, alors la propriété de complétude assure l'existence d'une borne supérieure $r = \sup A$ et d'une borne inférieure $s = \inf A$. On montre alors facilement que $r^2 = s^2 = 2$ et donc que

$$s = -\sqrt{2} \text{ et } r = \sqrt{2}$$

Proposition 1.35. *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$.*
Si $\alpha = \sup A$ et $\epsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $\alpha - \epsilon < x \leq \alpha$.
Si $\beta = \inf A$ et $\epsilon > 0$, il existe $y \in A$ tel que $\beta \leq x < \beta + \epsilon$.

Démonstration. En effet, par définition du supremum, $\alpha - \epsilon$ ne peut pas être une borne supérieure de A, donc il existe un tel x. Si applique cela pour $-A$ on peut monter la proposition pour l'infimum. ■

On dit qu'une suite $\{x_n\}$ est croissante si $x_n \leq x_{n+1}$, et on dit que la suite est strictement croissante si $x_n < x_{n+1}$. Une suite $\{x_n\}$ est décroissante ou strictement décroissante si la suite $\{-x_n\}$ est croissante ou strictement croissante.

Corollaire 1.36. *Si A est majoré et $\alpha = \sup A$, alors il existe un suite croissante $\{x_n\}$ dans A tel que $x_n \longrightarrow \alpha$. De même si A est minoré et $\beta = \inf A$, alors il existe un suite décroissante $\{y_n\}$ dans A tel que $y_n \longrightarrow \beta$.*

Proposition 1.37. *Toute suite bornée et monotone est convergente.*

Démonstration. Supposons que $\{x_n\}$ est une suite bornée et croissante. Alors, x_1 est une borne inférieure de $\{x_n\}$. Par la propriété de complétude, $\alpha = \sup\{x_1, x_2, \ldots\}$ existe. Si $\epsilon > 0$ alors la proposition précédente stipule qu'il existe un entier N avec $\alpha - \epsilon < x_N \leq \alpha$. Puisque la suite est croissante, on a $\alpha - \epsilon < x_n \leq \alpha$ quand $n \geq N$. Donc, $|x_n - \alpha| < \epsilon$, c.a.d. $x_n \longrightarrow \alpha$. La preuve quand la suite est décroissante est similaire.

■

1.4 Exercices

1. Montrer que $X \setminus (X \setminus A) = A$.

2. Montrer la proposition 1.4.
Soit X un univers, et $A, B, C \subseteq X$ alors on a :

(a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3. Montrer la proposition 1.7.
Soit X un ensemble quelconque et $A, B \subseteq X$, alors on a :

(a) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

(b) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

4. Monter le théorème 1.9.
Si X est un ensemble et $\{A_i : i \in I\}$ est une collection de sous-ensembles de X, alors :
(a) $X \setminus (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I}(X \setminus A_i)$ (b) $X \setminus (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I}(X \setminus A_i)$

5. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) $A \subset B$.

(b) $A \cap B = A$.

(c) $A \cup B = B$.

(d) $(X \setminus B) \subset (X \setminus A)$.

(e) $B \cup (X \setminus A) = X$.

(f) $A \cup (X \setminus B) = \varnothing$.

6. Déterminer si chacun des ensembles suivants est l'ensemble vide :

(a) $X = \{x : x^2 - 1 = 0, 2x = 4\}$.

(b) $Y = \{x : x \neq x\}$.

(c) $Z = \{x : 2x + 1 = 1\}$.

7. Montrer que si $A \subset \varnothing$ alors $A = \varnothing$

8. Soient $X = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ et $C = \{3, 4, 5, 6\}$.
Trouver les ensembles suivants :
(a) $X \setminus A$ (b) $X \setminus (A \cap C)$ (c) $B \setminus C$ (d) $X \setminus (A \cup B)$

9. Montrer que : (a) $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$ (b) $A \setminus B = A \cap B^c$

10. Soient $A = \{a, b\}, B = \{2, 3\}$ et $C = \{3, 4\}$.
Trouver : (a) $A \times (B \cup C)$ (b) $(A \times B) \cup (A \times C)$

11. Montrer que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

12. Trouver l'ensemble des parties de X, $\mathscr{P}(X)$ si :
(a) $X = \{1, 2, 3\}$ (b) $X = \{1, \{2, 3\}\}$

13. Montrer que si A contient 2 éléments alors $\mathscr{P}(A)$ contient 4 éléments. Combien d'éléments $\mathscr{P}(A)$ aura t-il si A contient 3,1,0 éléments ? Quel est le cardinal de $\mathscr{P}(A)$ en fonction du cardinal de A ?

14. Considérer la composition des fonctions $g \circ f$, et les 9 cas possibles ou f et g sont soient injective, surjective ou bijective puis déterminer quel propriété est acquise par $g \circ f$.

15. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Trouver :

(a) $f[\{1, 3, 4, 7\}]$

(b) $f[1, 4]$

(c) $f^{-1}[\{4, 9\}]$

(d) $f^{-1}[1, 4]$

16. Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Déterminer lesquelles des relations sur X dont les graphes est donné sont des fonctions.
(i) $\Gamma_f = \{(2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4)\}$
(ii) $\Gamma_g = \{(3, 1), (4, 2), (1, 1)\}$
(iii) $\Gamma_f = \{(2, 1), (3, 4), (1, 4), (2, 1), (4, 4)\}$

17. Soient f et g des fonction sur $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ donts les graphes sont :
$\Gamma_f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 3), (4, 1), (5, 2)\}$ et
$\Gamma_g = \{(1, 4), (2, 1), (3, 1), (4, 2), (5, 3)\}$

(a) Déterminer si les fonctions sont injectives ou surjectives.

(b) Calculer $f(X)$ et $g(X)$.

(c) Trouver $f \circ g$ et $g \circ f$.

18. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 1$. Trouver :
(a) $f^{-1}[\{15\}]$
(b) $f^{-1}[\{-16\}]$
(c) $f^{-1}[\{x : x \leq 0\}]$
(d) $f^{-1}[\{x : 3 \leq x \leq 24\}]$

19. Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $A, B \subset X$ et $\{A_i : i \in I\}$ est une collection de sous-ensembles de X alors :

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

(c) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$

(d) Si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$

(e) $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$

(f) $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

20. Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $A \subset X$ et $B \subset Y$.

(a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ et on obtient égalité quand f est injective.

(b) Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et on obtient égalité quand f est surjective.

21. Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux fonctions bijectives, alors :

(a) $(f \circ f^{-1})(y) = \mathrm{Id}_Y(y) = y$ pour tout $y \in Y$.

(b) $(f^{-1} \circ f)(x) = \mathrm{Id}_X(x) = x$ pour tout $x \in X$.

(c) $(g \circ f)$ est bijective en plus on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

22. Soient $f : X \longrightarrow Y$, $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$, alors :

(a) $(f^{-1} \circ f)(A) \supseteq A$.

(b) $(f \circ f^{-1})(B) \subseteq B$.

(c) $(f^{-1} \circ f)(A) = A$ si et seulement si f est injective.

(d) $(f \circ f^{-1})(B) = B$ si et seulement si f est surjective.

23. Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $A, B \subset Y$ et $\{B_i : i \in I\}$ est une collection de sous-ensembles de Y alors :

(a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}A) \cup f^{-1}B)$

(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}A) \cap f^{-1}B)$

(c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}A) \setminus f^{-1}B)$

(d) Si $A \subset B$ alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

(e) $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

(f) $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

24. Soient $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ et $g \circ f : A \longrightarrow C$:

(a) Si $C_0 \subset C$, montrer que $(g \circ f)^{-1}(C_0) = f^{-1}(g^{-1}(C_0))$

(b) Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

(c) Si $g \circ f$ est surjective, que pouvez vous dire sur f et g ?

(d) Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.

(e) Si $g \circ f$ est injective, que pouvez vous dire sur f et g ?

25. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = x^3 - 4x$. Montrer que f est surjective mais pas injective. Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit bijective.

26. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = \sin(\pi x)$.

(a) Montrer que f est ni injective ni surjective.

(b) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit surjective mais pas injective.

(c) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit injective mais pas surjective.

(d) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit bijective.

2 Espaces métriques

Les espaces métriques sont un cas particulier très important d'espaces topologiques. Nous étudierons leurs propriétés spécifiques comme exemples pour illustrer les définitions abstraites. Ce sont des espaces topologiques avec des propriétés assez intuitives, ou tout du moins qu'on a l'habitude de manipuler car le modèle le plus simple est $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle.

2.1 Définition d'un espace métrique

Définition 2.1. Un **espace métrique** est une paire (X, d) ou X est un ensemble et d est une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}$, appelée **distance** (ou métrique), qui satisfait les propriétés suivantes pour tout $x, y, z \in X$:

(M1)	$d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;	(propriété de séparation)
(M2)	$d(x, y) = d(y, x)$;	(propriété de symétrie)
(M3)	$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$;	(l'inégalité triangulaire)

Pour montrer qu'un espace est métrique on doit vérifier les 3 conditions ci-dessus. Les deux premières sont faciles, c'est l'inégalité triangulaire qui demande généralement du travail. On donne maintenant une conséquence directe de l'inégalité triangulaire que l'on appelle deuxième inégalité triangulaire.

Proposition 2.2. *Pour tout $x, y, z \in X$ on a :*

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$$

Démonstration. On a $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = d(x, z) + d(y, z)$, d'où $d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z)$. De même, on a $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) = d(x, y) + d(x, z)$, d'où $d(y, z) - d(x, y) \leq d(x, z)$. On en déduit

$$-d(x, y) \leq d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, y),$$

il en résulte

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

∎

Nous donnons quelques exemples standard d'espaces métriques.

Exemple 2.3. Soit $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $d(x,y) = |x-y|$ appelée distance euclidienne sur $\mathbb{R}$. L'inégalité triangulaire dans ce cas est une conséquence directe des propriétés de la valeur absolue.

Exemple 2.4. Soient $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$ appelée la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ ou bien la métrique ℓ^2.

Exemple 2.5. Soit $X = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ on définie :

$$\begin{aligned}
d_1(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \\
d_2(x,y) &= \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2} \\
d_\infty(x,y) &= \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |x_i - y_i|
\end{aligned}$$

Remarque :

- d_1 s'appelle la métrique ℓ^1.
- d_2 s'appelle la métrique euclidienne (usuelle) ou bien la métrique ℓ^2.
- d_∞ s'appelle la métrique de ℓ^∞.
- Si $n = 1$, alors les distance dans l'exemple précèdent sont toutes équivalentes a la distance $d(x,y) = |x-y|$ de l'exemple 2.3.
- $\ell^p, 0 < p < \infty$ est l'espace métrique dont les points sont les suites infinies de nombres réels $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ telles que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$.
- Sauf mention du contraire, on supposera que $\mathbb{R}^n$ est toujours muni de la distance Euclidienne usuelle d_2.

Exemple 2.6. Soit ℓ^2 l'espace métrique dont les points sont les suites infinies de nombres réels

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$$

telles que

$$\sum_{k=1}^{\infty} {x_k}^2 < \infty$$

et dont la distance est définie par la formule

$$d(x,y) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2\right]^{1/2}.$$

Exemple 2.7. Soit X un ensemble quelconque, on définie

$$\delta(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } x\neq y,\\ 0 & \text{si } x=y.\end{cases}$$

Cette distance est appelée la **métrique ou distance discrète**. L'espace métrique muni de cette distance est appelé **espace métrique discret**.

Soit (X,d_X) un espace métrique et A une partie non-vide de X. Considérons la restriction $d_A : A\times A\to\mathbb{R}$ de d_X sur $A\times A$ cela veut dire que $d_A(x,y)=d_X(x,y)$ pour tout couple $(x,y)\in A\times A$. Les axiomes de la distance sont valides pour d_A car elles le sont pour d_X. L'espace métrique (A,d_A) est appelé **sous-espace métrique** de (X,d_X) et d_A est appelée la **distance induite** (métrique induite) par d_X. Si A est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ alors en se référant à A comme un espace métrique nous supposons que la métrique d_A est induite par la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ à moins qu'une autre métrique est spécifiée. En particulier, cela s'applique aux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Exemple 2.8. Soit $X=\mathbb{R}$ avec la distance usuelle $d(x,y)=|x-y|$ et $A=[a,b]$, avec $a\neq b$, alors (A,d_A) où $d_A(x,y)=|x-y|$ pour tout $x,y\in A$ est un espace métrique. On peut générer ainsi une infinité de sous-espace métriques de $\mathbb{R}$.

Attention. Noter que A n'est pas ouvert dans $(\mathbb{R},d)$ mais il est ouvert et fermé dans (A,d_A).

Exemple 2.9. Soient (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques. Comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$ on peut définir des distances sur le produit $X\times Y$. Pour les points $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$ on défini les distances :

$$\begin{aligned}d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2))&=d_X(x_1,x_2)+d_Y(y_1,y_2)\\ d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2))&=[d_X(x_1,x_2)^2+d_Y(y_1,y_2)^2]^{1/2}\\ d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2))&=\max\{d_X(x_1,x_2),d_Y(y_1,y_2)\}.\end{aligned}$$

Chacune de ces distances peut être appelée **distance produit** sur $X\times Y$.

Exemple 2.10. Soit $C[a,b]$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$, et on définie sur X

$$d(f,g)=\max_{a\leq t\leq b}|f(t)-g(t)|$$

alors $(C[a,b],d)$ est aussi un espace métrique. Les axiomes (M1)–(M3) sont vérifiés immédiatement. Cet espace joue un rôle très important en analyse. Nous allons le désigner par le même symbole $C[a,b]$ que l'ensemble des points de cet espace.

Exemple 2.11. L'espace $(C[a,b],d)$ où d est définie par :

$$d(f,g)=\int_a^b|f(t)-g(t)|\,dt$$

est aussi un espace métrique.

Remarque. Si (X, d) est un espace métrique et $a > 0$ alors $(X, a \cdot d)$ est aussi un espace métrique. Donc la distance entre les points de X est relative à la distance qu'on utilise. Par exemple si $d'(x, y) = 2d(x, y) = 2|x - y|$ sur $\mathbb{R}$ on a $d(0, 1) = 1$ mais $d'(0, 1) = 2$.

2.2 Distance entre deux parties et diamètre

Définition 2.12. Soit A et B deux parties quelconques d'un espace métrique (X, d). On appelle distance de A et B, et l'on note $d(A, B)$ la quantité positive définie par

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$$

On a évidement

$$\operatorname{dist}(A, B) = \operatorname{dist}(B, A).$$

Si $A = \{a\}$, cette distance se nomme distance du point a à l'ensemble B et se note :

$$\operatorname{dist}(a, B) = \inf_{x \in B} d(a, x)$$

Pour toutes parties A et B de (X, d) on a :

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{x \in A} \operatorname{dist}(x, B) = \inf_{y \in B} \operatorname{dist}(y, A).$$

De plus,

$$A \cap B \neq \varnothing \Longrightarrow \operatorname{dist}(A, B) = 0$$

Si $a \in B$ on a évidement $d(a, B) = 0$.

Attention : $\operatorname{dist}(A, B)$ n'est pas une distance sur l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des partie de X. Par exemple $\operatorname{dist}(A, B) = 0$ n'entraine pas $A = B$. Si $X = \mathbb{R}, A = [0, 2], B = [2, 3], \operatorname{dist}(A, B) = 0$ mais $A \neq B$.

Définition 2.13. On appelle **diamètre** d'une partie A de X, et l'on note par $\operatorname{diam}(A)$:

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y).$$

On dit qu'une partie A de X est **bornée** si $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

Proposition 2.14. $\operatorname{diam}(B_f(a, r)) \leq 2r$ *où* $B_f(a, r) = \{x \in X : d(a, x) \leq r\}$ *est la boule fermée de centre* a *et de rayon* r.

2.3 Espaces vectoriels normés et espaces Euclidiens

Espaces vectoriels normés

Nous définissons maintenant les espaces vectoriels normés qui forment une classe d'espaces métriques qui jouent un rôle très important dans l'analyse.

Définition 2.15. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une **norme** est une application $\|\cdot\|$: $X \to [0, \infty)$, qui satisfait les propriétés suivantes pour tout $x, y \in X$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$:
(N1) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$;
(N2) $\|ax\| = |a| \|x\|$;
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (l'inégalité triangulaire)
La paire $(X, \|\cdot\|)$ est appelée **espace vectoriel normé**.

Proposition 2.16. *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé, alors*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \text{ définie par } d(x, y) = \|x - y\|$$

est une métrique sur X, appelée **métrique induite** *par la norme.*

Démonstration. On montre seulement N3 car les axiomes N1 et N2 sont clairs. Si x, y et $z \in X$, alors on a

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|y - z\| = d(x, z) + d(z, y)$$

∎

Exemple 2.17. La valeur absolue $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}$

Exemple 2.18. Soit $X = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ alors ;

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$
$$\|x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2}$$
$$\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} |x_i|$$

sont des normes de $\mathbb{R}^n$ qui satisfont l'inégalité suivante

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty .$$

Exemple 2.19. Soit X en ensemble non vide et $(Y, \|\mathrm{cot}\|)$ un espace vectoriel normé. Une fonction $f : X \to Y$ est dite bornée si $\|f\| < M$ pour $M > 0$. L'ensemble de toutes les fonctions bornées $f : X \to Y$, noté par $B(X,Y)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(t)\|.$$

Espaces préhilbertiens et espace Euclidiens

Définition 2.20. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ une application telle que pour tout $x, y, z \in V$ et $t \in \mathbb{R}$ on a les propriétés suivantes :

(E 1) $\langle x, x\rangle \geq 0$

(E 2) Si $\langle x, x\rangle = 0$, alors $x = 0$.

(E 3) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

(E 4) $\langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$

(E 5) $\langle tx, y\rangle = t\,\langle x, y\rangle$

Alors $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est dit un produit scalaire et $(X, \langle,\rangle)$ est un espace **préhilbertien**.

Un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé **espace Euclidien**.

Proposition 2.21. *Soit $X = \mathbb{R}^n$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$, sur $\mathbb{R}^n$ alors,*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

est un **produit scalaire** *sur $\mathbb{R}^n$ et*

$$\langle x, x\rangle = \|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Propriétés élémentaires

1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

2. L'inégalité de Minkowski dite aussi inégalité triangulaire :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

3. Le théorème de Pythagore : si x et y sont orthogonaux, alors

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

la réciproque n'étant vraie que dans le cas réel.

4. La règle du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

Réciproquement, d'après le théorème de Fréchet-von Neumann-Jordan, toute norme vérifiant cette identité est préhilbertienne, c'est-à-dire dérive d'un produit scalaire.

5. L'identité de la médiane :

$$\|x-y\|^2+\|x-z\|^2=\frac{1}{2}\|y-z\|^2+2\left\|x-\frac{y+z}{2}\right\|^2,$$

équivalente à celle du parallélogramme, par changement de variable

6. L'identité polaire :

$$\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=2\langle x,y\rangle+2\langle y,x\rangle.$$

Théorème 2.22 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Si* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *alors*

$$\left[\sum_{i=1}^n x_i y_i\right]^2 \leq \left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right]\left[\sum_{i=1}^n y_i^2\right] \tag{2.3.1}$$

Démonstration. Si on utilise la notation des produits scalaires l'inégalité (2.3.1) est équivalente à

$$\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle .$$

En utilisant les propriétés 2.20 des produit scalaires ci-dessus on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x-ty, x-ty\rangle \\ &= \langle x,x\rangle - 2t\langle x,y\rangle + t^2\langle y,y\rangle \\ &= c+bt+at^2 \equiv p(t) \end{aligned}$$

ou $c=\langle x,x\rangle$, $b=2\langle x,y\rangle$ et $a=\langle y,y\rangle$. Donc $p(t)$ est polynôme du second dégrée. Puisque $p(t)\geq 0$ et $a=\langle y,y\rangle\geq 0$, le discriminant

$$\Delta=b^2-4ac=[2\langle x,y\rangle]^2-4\langle y,y\rangle\langle x,x\rangle$$

doit être négatif. Donc on doit avoir $\Delta=[2\langle x,y\rangle]^2-4\langle y,y\rangle\langle x,x\rangle\leq 0$ d'où on obtient

$$\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle .$$

■

Remarque : L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$$

est équivalente a

$$\langle x, y\rangle \leq \sqrt{\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle} = \|x\|\|y\|,$$

et si en remplace x par $x - z$ et y par $z - y$ on aura

$$\langle x - z, z - y\rangle \leq \sqrt{\langle x - z, x - z\rangle \langle z - y, z - y\rangle} = \|x - z\|\|z - y\|.$$

Corollaire 2.23. *Si* $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ *est définie comme*

$$d_2(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2},$$

alors d *est une distance dans* $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Les deux premières conditions d'une distance sont évidentes. Donc on montre seulement l'inégalité triangulaire. Noter que

$$[d_2(x, y)]^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = \langle x - y, x - y\rangle .$$

En utilisant les propriétés de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la remarque précédente on obtient

$$\begin{aligned}
[d_2(x, y)]^2 &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = \langle x - y, x - y\rangle \\
&= \langle (x - z) + (z - y), (x - z) + (z - y)\rangle \\
&= \langle x - z, x - z\rangle + 2\langle x - z, z - y\rangle + \langle z - y, z - y\rangle \\
&\leq \langle x - z, x - z\rangle + 2\sqrt{\langle x - z, x - z\rangle}\sqrt{\langle z - y, z - y\rangle} + \langle z - y, z - y\rangle \\
&\leq d_2(x, z)^2 + 2d_2(x, z)\, d(z, y) + d_2(z, y)^2 \\
&= [d_2(x, z) + d_2(z, y)]^2
\end{aligned}$$

Maintenant si on prend la racine au carré des deux cotés on obtient l'inégalité triangulaire

$$d_2(x, y) \leq d_2(x, z) + d_2(z, y)$$

■

Topologie associée à une distance

Soit (X, d_X) un espace métrique. On se propose de s'intéresser à la géométrie de X. Pour cela, nous allons définir les parties de X qui jouent un rôle important dans la topologie des espaces métriques. Notamment on verra que les boules ouvertes forment la base de la topologie. On montrera aussi que dans un espace métrique quelconque **une boule n'est pas toujours ronde**.

2.4 Boules dans un espace métrique

Définition 2.24. Soient (X, d) est un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$. On définie par :

(1) $B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$. la **boule ouverte** centrée en a et de rayon r.

(2) $B_f(a, r) = \{x \in X : d(a, x) \leq r\}$ la **boule fermée** centrée en a et de rayon r.

(3) $S(a, r) = \{x \in X : d(a, x) = r\}$ la **sphère** de centre a et de rayon r.

Remarque :

- Si $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sont toutes des distances sur le même espace X, alors on notera les boules par rapport aux différentes distances par $B_{d_1}(a, r), B_{d_2}(a, r), \ldots B_{d_n}(a, r)$.
- Si $0 < r < s$ alors,
$$B(a, r) \subseteq B_f(a, r) \subseteq B(a, s).$$

Exemple 2.25.

(1) Si $X = \mathbb{R}$ avec la distance euclidienne alors :
   - $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |a - x| < r\} = (a - r, a + r)$
   - $B_f(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |a - x| \leq r\} = [a - r, a + r]$
   - $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |a - x| = r\} = \{a + r, a - r\}$

(2) Si $X = \mathbb{R}^2$ est muni de la distance usuelle euclidienne alors :
   - $B(a, r)$ est le disque centre en a de rayon r (la circonférence non incluse),
   - $B_f(a, r)$ est le disque avec circonférence incluse et
   - $S(a, r)$ est le cercle de centre a et de rayon r.

(3) Si $X = \mathbb{R}^3, d = d_2$, alors :

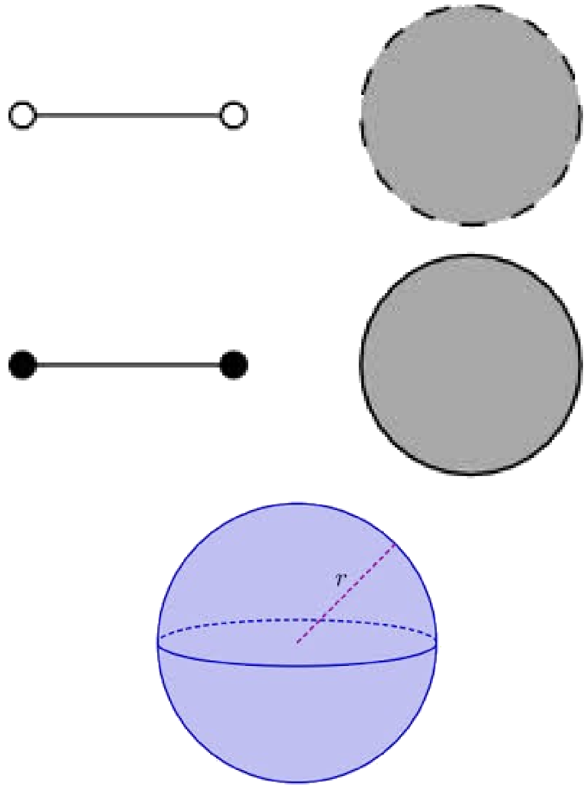


FIGURE 2.1 – Boules dans $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

- $B(a, r)$ est la boule ouverte de rayon r et de centre a (l'ensemble des points strictement a l'intérieur de la sphère de rayon r et de centre a,
- $B_f(a, r)$ est $B(a, f)$ en plus de la sphère et
- $S(a, r)$ sont les points sur la sphère seulement.

(4) Dans $X = \mathbb{R}^2$ les boules de rayon 1 et centrées a l'origine ont les formes suivantes avec les distances d_1, d_2 et d_∞ vues dans l'exemple (2.5) :

$$B_{d_1}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_1((0,0),(x,y) = |x| + |y| < 1\}$$
$$B_{d_2}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_2((0,0),(x,y) = x^2 + y^2 < 1\}$$
$$B_{d_\infty}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_\infty((0,0),(x,y) = \max\{|x|,|y|\} < 1\}$$

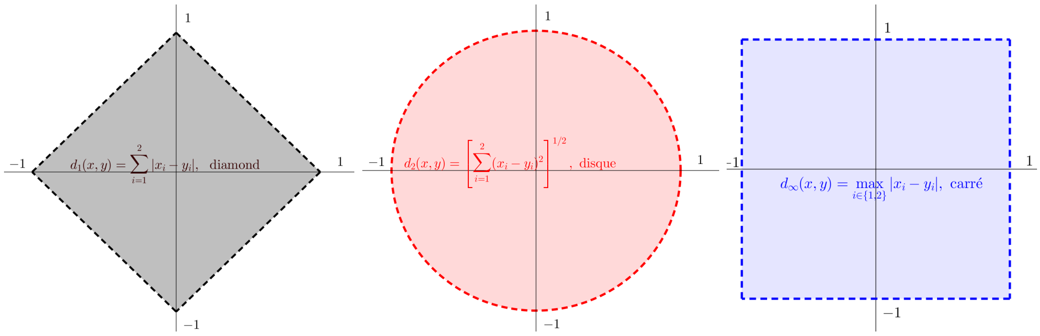


FIGURE 2.2 – Boules ouvertes de centre $(0,0)$ de rayon $r = 1$ dans $\mathbb{R}^2$ avec d_1, d_2 et d_∞

(5) Dans l'espace métrique discret $(\mathbb{R}^2, \delta)$ on a,

$$B(a,r) = \begin{cases} \{a\} & \text{si } r \leq 1, \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

Donc on a $B(a,1) = \{a\}$, $B_f(a,1) = \mathbb{R}^2$ et $S(a,1) = \mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$.

(6) Soit X l'ensemble $B([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions numériques réelles bornées sur $[0,1]$, avec la métrique sup $d = d_\infty$. Alors pour $f_0 \in X$ et $r > 0$, $B(f_0, r)$ est l'ensemble des fonctions $f \in X$ dont le graphe est a l'intérieur du ruban de largeur verticale égale à $2r$ et de centre le graphe de f_0.

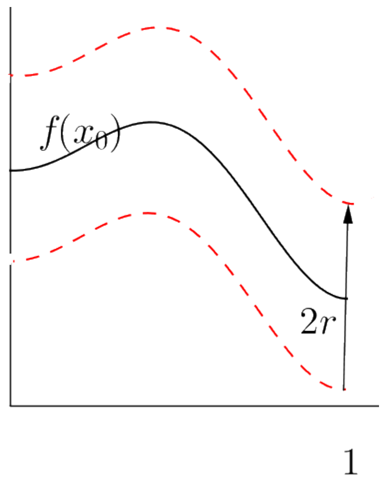


FIGURE 2.3 – Boule ouverte de rayon r et centre $f_0(x)$

Remarques :

(a) Les boules ne sont pas toujours **rondes**.

(b) La forme de la boules dépend généralement de la métrique et l'ensemble sur lequel elle est définie.

(c) Sur (X, δ) on a $B(a,1) = B(a,1/2) = \{a\}$.

2.5 Ouverts, fermés, et voisinage

Définition 2.26. Soient (X, d) est un espace métrique et $O, F, V_x \subset X$, alors on dit que :

(a) O est **ouvert** dans X, si pour tout x dans O il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq O$.

(b) F est **fermé** dans X, si son complément $X \setminus F$, est ouvert dans X.

(c) V_x est un **voisinage** de x s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq V_x$.

Remarques :

(a) $\varnothing$ et X sont a la fois des ouverts et des fermés de (X, d).

(b) Toute boule ouverte est un voisinages de tous ses points.

(c) Tout ouvert est un voisinage de tous ses points.

(d) La réunion quelconque de voisinages de x est un voisinage de x.

(e) L'intersection finie de voisinages de x est un voisinages de x.

(f) X est un voisinage de tout $x \in X$.

(g) $\varnothing$ n'est pas un voisinage de tout $x \in X$.

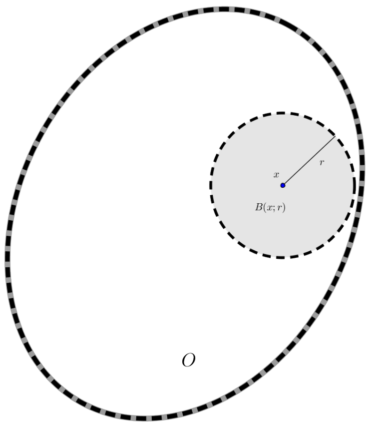


FIGURE 2.4 – Ouvert O dans (X, d)

Exemple 2.27.

(1) Si (X, d) est un espace métrique, alors $X, \varnothing$ sont à la fois ouverts et fermés. Il est clair que X ouvert, en fait, il est le plus grand ouvert de X. Puisque $\varnothing$ ne contient aucun élément, donc tous les points de $\varnothing$ satisfait la condition. Étant donné que ces deux ensembles sont ouverts, leurs compléments $(X \setminus \varnothing = X,\ X \setminus X = \varnothing)$ sont fermés.

(2) Si $X = \mathbb{R}$ et d est la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$, alors tout intervalle ouvert $I = (a, b)$ est un ouvert. En effet pour tout $x \in I$, si on choisi $r = \min\{x - a, b - x\}$, on a $B(x, r) = (x - r, x + r) \subset I$. Par contre tout intervalle non ouvert n'est pas un ouvert. Par exemple $[a, b)$ n'est pas un ouvert, car il n'existe pas de boule ouverte de centre b incluse dans $[a, b)$.

(3) Si $X = \mathbb{R}$ et d est la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$;

- $\mathbb{R}, \varnothing, (a, b), (a, \infty)$ et $(-\infty, b)$ sont ouverts.
- $\mathbb{R}, \varnothing, [a, b], [a, \infty)$ et $(-\infty, b]$ sont fermés.
- $[a, b)$ et $(a, b]$ ne sont ni ouverts ni fermés.
- Si O est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $O = \bigcup_{i \in I}(a_i, b_i)$

(4) Soit (X, δ) un espace métrique discret, alors toute partie de X est à la fois ouverte et fermée.
En effet on a montrer que $\{x\} = B(x, r)$ pour tout $r \in [0, 1]$. Donc tout singleton de X est une boule ouverte donc un ouvert de X. Cela entraine que toute partie de X est ouverte et par complément toute partie de X est fermée.

Proposition 2.28. *Soient (X, d) un espace métrique, $x \in X$ et $r > 0$.*

(1) *$\varnothing$ et X sont des ouverts de (X, d).*

(2) *$\varnothing$ et X sont des fermés de (X, d).*

(3) *Toute intersection finie d'ouverts de (X, d) est un ouvert de (X, d).*

(4) *Toute union arbitraire d'ouverts de (X, d) est un ouvert de (X, d).*

(5) *Toute union finie de fermés de (X, d) est un fermé de (X, d).*

(6) *Toute intersection arbitraire de fermés de (X, d) est un fermé de (X, d).*

(7) *Toute boule ouverte $B(x, r)$ de (X, d) est un ouvert de (X, d).*

(8) *Toute boule fermée $B_f(x, r)$ de (X, d) est un fermé de (X, d).*

(9) *Toute sphère $S(x, r)$ est un sous-ensemble fermé de (X, d).*

(10) *Tout partie finie de (X, d) est un fermé de (X, d).*

Démonstration.

(1) Si $x \in X$ alors pour out $r > 0$, $B(x, r) \subseteq X$, qui montre que X est en effet un ouvert de lui même. Si $\varnothing$ n'étais pas ouvert alors il existerait $x \in \varnothing$ et $r > 0$ tel que $B(x, r) \subsetneq \varnothing$ ce qui est impossible car $\varnothing$ ne contient aucun point.

(2) On prend les compléments dans (1).

(3) On veut montrer que si $G_1, \ldots, G_n$ sont ouverts, alors $\bigcap_{k=1}^{n} G_k$ est un ouvert. Soit $x \in \bigcap_{k=1}^{n} G_k$. Alors pour $1 \leq k \leq n$ il existe $r_k > 0$ avec $B(x, r_k) \subseteq G_k$. Si on choisi $r = \min\{r_1, \ldots, r_k\}$ alors $r > 0$ et $B(x, r_k) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} G_k$.

(4) On veut montrer que si $\{G_i : i \in I\}$ est une collection d'ouverts, alors $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ est un ouvert. Soit $x \in G$, alors $x \in G_j$ pour un certain $j \in I$ et puisque G_j est ouvert il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq G_j$. Donc pour tout $x \in G$ il existe une boule ouverte $B(x, r)$ telle que $B(x, r) \subset G_j \subset G = \bigcup_{i \in I} G_i$, qui montre que G est ouvert.

(5) On prend les compléments dans la partie (1).

(6) On prend les compléments dans la partie (2).

(7) Pour chaque $r > 0$, $B(x, r)$ est un sous-ensemble ouvert de X. En effet si $y \in B(x, r)$ et $0 < s < r - d(x, y)$, alors $B(y, s) \subseteq B(x, r)$. Voir figure (2.5).

(8) Pour chaque $r > 0$, $B_f(x, r)$ est un sous-ensemble fermé de X.
En effet si $z \in G = X \setminus B_f(x, r)$ et $0 < k < d(x, y) - r$, alors $B(z; k) \subseteq G$. Donc G est ouvert, ce qui implique que sont complément $B_f(x, r)$ est un sous ensemble fermé de X. Voir figure (2.5).

(9) Le complément de $S(x, r)$ est l'union $(X \setminus B_f(x, r)) \bigcup B(x, r)$ qui est un ouvert car c'est l'union de deux ouverts. Donc la sphère est un fermé.

(10) Tout partie finie de X est fermée. En fait, si $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $x \in X \setminus F$, alors on peut trouver un rayon positif $r < \min\{d(x_1, x), \ldots, d(x_n, x)\}$ avec $B(x, r) \subseteq X \setminus F$.

■

Exemple 2.29.

(1) Considérons les familles infinies d'ouverts de $\mathbb{R}$. La réunion $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (0, \frac{1}{i}) = (0, 1)$ est un ouvert.

(2) L'intersection $\bigcap_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i} \right) = \{0\}$ n'est pas un ouvert dans $\mathbb{R}$.

(3) En générale une union infinie de fermés n'est pas un fermé :

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \left[-1 + \frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i} \right] = (-1, 1).$$

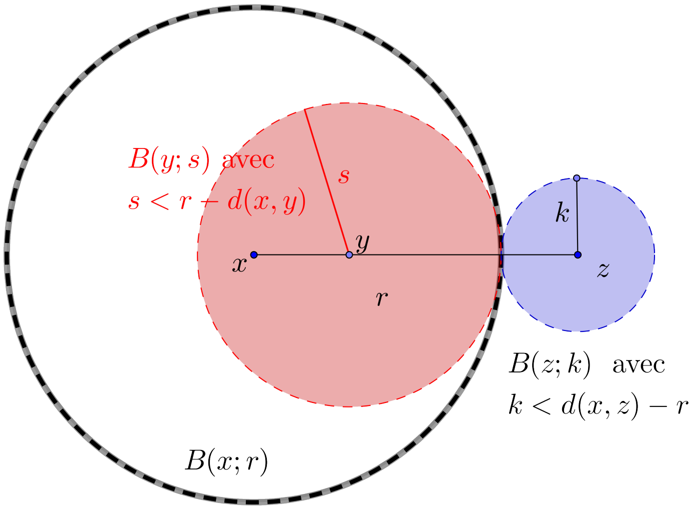


FIGURE 2.5 – La boule ouverte est ubn ouvert.

Proposition 2.30. *Une partie A d'un espace métrique (X,d) est ouverte si et seulement si A est l'union de toutes les boules ouvertes contenues dans A.*

$$A = \bigcup \{B(a,r) : B(a,r) \subseteq A, a \in A\}$$

Démonstration. Exercice 23. ■

Le théorème suivant est une conséquence de la proposition (2.28).

Théorème 2.31. *Soit (X,d) un espace métrique, alors on a :*

(O1) *$\varnothing$ et X sont des ouverts.*

(O2) *Toute union d'ouverts de X est un ouvert de X.*

(O3) *Toute intersection fini d'ouverts de X est un ouvert de X.*

Topologie d'un espace métrique

De manière générale, on appelle **topologie** sur X un ensemble $\mathscr{T}$ de parties de X qui vérifie les trois propriétés ci-dessous.

Axiome 2.32.

(T1) $\varnothing, X \in \mathscr{T}$.

(T2) *Si $\{G_i : i \in I\} \subseteq \mathscr{T}$, alors $\bigcup_{i\in I} G_i \in \mathscr{T}$.*

(T3) *Si $G_1, \ldots, G_n \in \mathscr{T}$, alors $G_1 \cap \ldots \cap G_n \in \mathscr{T}$.*

Si $\mathscr{T}$ est une topologie sur X, alors $(X,\mathscr{T})$ est appelé **espace topologique**.

Proposition 2.33 (Séparation)**.** *Soit (X, d_X) un espace métrique et $x, y \in X, x \neq y$, alors on peut toujours séparer x et y par des ouverts disjoints.*

Démonstration. Puisque $x \neq y$ alors $d(x, y) = r > 0$.
Posons $U = B(x, r/3)$ et $V = B(y, r/3)$ alors on a $x \in U, y \in V$ et $U \cap V = \varnothing$. ■

On dit que tout espace métrique (X, d) est séparé. Cette notion de séparation est connue sous le nom de **Hausdorff**. Donc tout espace métrique (X, d) est Hausdorff.
Notons que le théorème (2.31) affirme que si (X, d) est un espace métrique, alors les ouverts de X vérifient les 3 axiomes de la topologie. On a donc le résultat évident suivant.
Puisque tout ouvert de (X, d) est une union de boules ouvertes (proposition 2.30), on dit que les boules ouvertes forment une **base** de cette topologie. Cette notion est similaire à celle en algèbre linéaire où tout vecteur est une combinaison linéaire des vecteurs de la base.

Théorème 2.34. *Soit (X, d) un espace métrique, alors :*

(1) Les ouverts de X forment une topologie sur X.

(2) Les boules ouvertes de X forment une base de la topologie sur X.

(3) Tout espace métrique est un espace topologique Hausdorff (séparé).

Remarques.

(1) Les ouverts de (X, d) forment une topologie sur (X, d).

(2) Tout espace métrique (X, d) est un espace topologique.

(3) Les boules ouvertes $B(x, r)$ forment une base pour (X, d).

(4) Tout ouvert de (X, d) est un réunion de boules ouvertes de (X, d).

(5) Les intervalles ouverts (a, b) forment une base pour $(\mathbb{R}, d)$.

(6) Si A est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$.

(7) Tout espace métrique (X, d) est Hausdorff.

2.6 Intérieur, extérieur, adhérence et frontière

Les ouverts et fermés jouent un rôle très important dans les espace métriques.

Définition 2.35. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.

(a) On dit qu'un point $a \in X$ est un point **intérieur** à A s'il existe une boule ouverte de centre a incluse dans A. L'ensemble de tous les points intérieurs de A est appelé **l'intérieur** ou **l'ouverture** de A et on le dénote par $\textbf{Int}\, A$.

(b) On dit qu'un point $a \in X$ est un point **extérieur** à A s'il existe une boule ouverte de centre a incluse dans $X \setminus A$. L'ensemble de tous les points extérieurs de A est appelé l'extérieur de A et on le dénote par $\textbf{Ext}\, A$.

(c) On dit qu'un point $x \in X$ est un point **adhérent** à A si tout voisinage de x contient au moins un point de A. Autrement dit $A \cap V_x \neq \varnothing$. L'ensemble de tous les points adhérents à l'ensemble A s'appelle **l'adhérence** ou **fermeture** de A et on le dénote par $\textbf{Adh}\, A$.

(d) On dit qu'un point $x \in X$ est un point **d'accumulation** (valeur d'adhérence) de A si x est adhérent à $A \setminus \{x\}$. Donc tout voisinage V_x de x, contient au mois un point de A autre que x. Autrement dit $(A - \{x\}) \cap V_x \neq \varnothing$. Notons que tous point d'accumulation de A est un point adhérent à A. L'ensemble des points d'accumulation de A est appelé l'ensemble **dérivé** de A et on le note par A'.

(e) On dit qu'un point $x \in X$ est un point **frontière** de A s'il est **adhérent** à la fois à A et à $X \setminus A$. L'ensemble de tous les points frontière de A est appelé frontière de A et on le dénote par $\textbf{Fr}\, A$.

(f) On dit qu'un point $a \in A$ est un point **isolé** de A s'il existe un voisinage V_a de a tel que $V_a \cap A = \{a\}$. On dénote l'ensemble ses points isolés par $\textbf{Is}(A)$.

Remarque : Un point d'accumulation de l'ensemble A peut être dans A ou ne pas y être. Par exemple, si $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ l'ensemble des nombres rationnels du segment $[0,1]$, tout point $[0,1]$ est un point d'accumulation de A.

Définition 2.36. Soit A une partie quelconque de l'espace métrique (X,d), alors on :

- $\textbf{Int}\, A = \bigcup \{G : G \text{ est ouvert et } G \subseteq A\}$;
- $\textbf{Ext}\, A = \bigcup \{G : G \text{ est ouvert et } G \subseteq (X \setminus A)\}$;
- $\textbf{Adh}\, A = \bigcap \{F : F \text{ est fermé et } A \subseteq F\}$;
- $\textbf{Fr}\, A = \textbf{Adh}(A) \cap \textbf{Adh}(X \setminus A)$;
- $A' = \textbf{Adh}\, A - \textbf{Is}(A)$.

Exemple 2.37. Considérons l'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$ et $A = \{-1\} \cup [0, \infty)$, alors :

- $\textbf{Int}\, A = (0, \infty)$;
- $\textbf{Ext}\, A = (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$;
- $\textbf{Adh}\, A = \{-1\} \cup [0, \infty)$;

- $A' = [0, \infty)$;
- $\mathbf{Fr}\, A = \{-1, 0\}$;
- $A' = [0, \infty)$;
- $\mathbf{Is}\ (A) = \{-1\}$.

Voici quelques propriétés qui découlent directement des définitions.
Remarques : Si $A \subset X$ on

(1) $\mathbf{Int}(A) \subseteq A \subseteq \mathbf{Adh}(A)$.

(2) $\mathbf{Int}(X) = X = \mathbf{Adh}(A)$.

(3) $\mathbf{Int}(\varnothing) = \varnothing = \mathbf{Adh}(\varnothing)$.

(4) Si $x \in A$ et $x \notin A'$, alors $x \in \mathbf{Is}\, A$.

Exemple 2.38. Si $X = \mathbb{R}, A = (a, b], B = \{a, b\}$ alors,

(1) $\mathbf{Adh}(A) = [a, b]$ et $\mathbf{Adh}(B) = B$.

(2) $\mathbf{Int}\, A = (a, b)$ et $\mathbf{Int}\, B = \varnothing$.

(3) $\mathbf{Ext}\, A = \mathbb{R} \setminus A$ et $\mathbf{Ext}\, B = \mathbb{R} \setminus B$.

(4) $\mathbf{Is}\, A = \varnothing$ et $\mathbf{Is}\, B = B$.

(5) $\mathbf{Fr}\, A = B$ et $\mathbf{Fr}\, B = B$.

Proposition 2.39. *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subseteq X$.*

(a) *$x \in \mathbf{Int}\, A$ si et seulement si $B(x, r) \subseteq A$ pour un certain $r > 0$.*

(b) *$x \in \mathbf{Adh}\, A$ si et seulement si $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$ pour n'importe quel $r > 0$.*

(c) *$x \in \mathbf{Adh}\, A$ si et seulement si il existe une suite (x_n) dans A tel que $d(x, x_n) \to 0$.*

Démonstration.

(a) Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq A$. Puisque $B(x, r)$ est un ouvert contenu dans A et $\mathbf{Int}\, A$ est le plus grand ouvert contenu dans A, alors on a $x \in B(x, r) \subseteq \mathbf{Int}\, A$, donc $x \in \mathbf{Int}\, A$. Supposons maintenant que $x \in \mathbf{Int}\, A$. Il existe un ouvert G tel que $x \in G \subseteq A$. Mais puisque G est ouvert, il existe $r > 0$ avec $B(x, r) \subseteq G$ et nous avons établi la réciproque.

(b) Supposons que $x \in \mathbf{Adh}\, A$. Si $r > 0$, alors $B(x, r)$ est ouvert et $X \setminus B(x, r)$ est fermé. Il est impossible que $A \subseteq (X \setminus B(x, r))$ car par définition cela implique que $\mathbf{Adh}\, A \subseteq (X \setminus B(x, r))$, qui est une contradiction au fait que $x \in \mathbf{Adh}\, A$. Donc $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$.
Supposons que $x \notin \mathbf{Adh}\, A$; donc $x \in X \setminus \mathbf{Adh}\, A$ qui est ouvert. Par définition il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq X \setminus \mathbf{Adh}\, A$. Pour cette boule $B(x, r) \cap A = \varnothing$.

(c) Supposons que $x_n \in A$ et $d(x_n, x) \to 0$. Puisque $A \in \mathbf{Adh}\, A$, $x_n \in \mathbf{Adh}\, A$ et puisque $\mathbf{Adh}\, A$ est fermé, alors $x \in \mathbf{Adh}\, A$.

Réciproquement supposons que $x \in \mathbf{Adh}\, A$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $B(x, 1/n) \cap A \neq \varnothing$. Il existe $x_n \in B(x, 1/n) \cap A$ tel que $d(x_n, x) < 1/n$. Donc $d(x_n, x) \to 0$.

■

La proposition précédente est très utile car elle fournit méthode concrète pour déterminer si un point spécifique appartient à l'adhérence ou à l'intérieur d'un ensemble. Nous allons voir une illustration dans l'exemple suivant.

Exemple 2.40.

(1) Considérons l'espace métrique $\mathbb{R}$ avec la distance usuelle et son sous ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. On sait que si a et b sont deux réels tel que $a < b$, alors il existe au moins un rationnel y tel que $a < y < b$. Si $x \in \mathbb{R}$ la boule ouverte $B(x, r) = (x - r, x + r)$ doit contenir un nombre rationnel. Par la proposition précédente on a que $x \in \mathbf{Adh}\, \mathbb{Q}$, donc $\mathbf{Adh}\, \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

(2) Si $x \in \mathbb{Q}$ il n y a pas de boule ouverte $B(x, r)$ contenue dans $\mathbb{Q}$ c.a.d. il n y pas $B(x, r) \subseteq \mathbb{Q}$ donc $\mathbf{Int}\, \mathbb{Q} = \varnothing$.

(3) En utilisant les mêmes arguments on a $\mathbf{Adh}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ et $\mathbf{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \varnothing$.

Exemple 2.41. Puisque $B_f(x, r)$ est fermée, on a $\mathbf{Adh}\, B(x, r) \subseteq B_f(x, r)$. Cela ne veut pas dire que $\mathbf{Adh}\, B(x, r) = B_f(x, r)$.
Considérons
$$X = \{(0, 0)\} \cup \{(a, b) : a^2 + b^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Donc X consiste de l'origine et le cercle de rayon 1. On donne a X la distance usuelle induite de $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas

$$\mathbf{Adh}\, B((0, 0); 1) = \{(0, 0)\} \neq B_f((0, 0); 1) = X$$

Exemple 2.42. Soit (X, δ) un espace métrique discret.

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y, \\ 1 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

alors
$$\{x\} = B(x; 1) = \mathbf{Adh}\, B(x; 1) \text{ et } B_f(x; 1) = X.$$

Attention. Dans l'espace métrique discret (X, δ) tout singleton est une boule ouverte donc un ouvert. Donc toute partie de (X, δ) est à la fois ouverte et fermée.

Exemple 2.43.

(a) Soit $X = \mathbb{R}$ et $A = (0,1) \cup \{2\}$. Chaque point dans $[0,1]$ est u point d'accumulation de A sauf le point $\{2\}$. En fait, 2 est un exemple d'un point isolé de A, le seul point isolé de A. La frontière **Fr** $A = \{0,1,2\}$

(b) Considérons les ensembles de $\mathbb{R}, A_1 = (a,b), A_2 = (a,b]$, et $A_3 = [a,b]$, alors $\mathbf{Int}\, A_i = (0,1), \mathbf{Adh}\, A_i = [a,b], \mathbf{Fr}\, A_i = \{a,b\}$

(c) Si $X = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{Q}$, alors chaque point de X est un point d'accumulation de A et A n'a pas de points isolés.

(d) Si $X = \mathbb{R}$ et $A = \{n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$, alors 0 est un point d'accumulation de A, tandis que les points n^{-1} sont tous des points isolés.

Les propositions suivantes contiennent des informations utiles sur les adhérences et les intérieurs des ensembles. Les démonstrations sont laissées comme exercices.

Proposition 2.44. *Soit (X,d) un espace métrique et $A \subseteq X$.*

(1) $\mathbf{Int}\, A \subseteq A \subseteq \mathbf{Adh}(A)$.

(2) $\mathbf{Adh}(X - A) = X - \mathbf{Int}(A)$.

(3) $\mathbf{Int}(X - A) = \mathbf{Ext}(A) = X - \mathbf{Adh}(A)$.

(4) $\mathbf{Int}(A) \cap \mathbf{Ext}(A) = \varnothing$.

(5) $\mathbf{Fr}(A) = \mathbf{Adh}(A) \cap \mathbf{Adh}(X - A)$
$\mathbf{Fr}(A) = \mathbf{Adh}(A) - \mathbf{Int}(A)$
$\mathbf{Fr}(A) = \mathbf{Fr}(X - A)$
$\mathbf{Fr}(A) = X - [\mathbf{Int}(A) \sqcup \mathbf{Ext}(A)]$
$\mathbf{Fr}(A)$ *est fermé.*

(6) $X = \mathbf{Int}(A) \sqcup \mathbf{Ext}(A) \sqcup \mathbf{Fr}(A)$.

Propriétés de l'adhérence. Les propriétés suivantes découlent directement des définitions mais sont très souvent utilisées. Soit (X,d) un espace métrique et $A, B \subset X$.

(1) $\mathbf{Adh}(X) = X$;

(2) $\mathbf{Adh}(\varnothing) = \varnothing$;

(3) $A \subseteq \mathbf{Adh}(A)$;

(4) $\mathbf{Adh}(A)$ est un fermé de X ;

(5) $\mathbf{Adh}(A)$ est le plus petit fermé de X contenant A ;

(6) Si $A \subset F$ et F est un fermé de X, alors $A \subseteq \mathbf{Adh}\, A \subseteq F$;

(7) $\mathbf{Adh}[\mathbf{Adh}(A)] = \mathbf{Adh}\, A$.

(8) $\mathbf{Adh}(A) = A$ si et seulement si A est fermé.

(9) Si $A \subset B$, alors $\mathbf{Adh}(A) \subset \mathbf{Adh}(B)$.

(10) $\mathbf{Adh}(A \cup B) = \mathbf{Adh}(A) \cup \mathbf{Adh}(B)$.

(11) $\mathbf{Adh}(A \cap B) \subset \mathbf{Adh}(A) \cap \mathbf{Adh}(B)$.

Exemple 2.45.

(1) Si $A = (1, 2)$ et $B = (2, 3)$, alors
$\mathbf{Adh}(A \cap B) = \mathbf{Adh}(\varnothing) = \varnothing$, mais $\mathbf{Adh}(A) \cap \mathbf{Adh}(B) = [1, 2] \cap [2, 3] = \{2\}$.
Cela montre qu'en général l'inclusion dans (3) n'est pas une égalité.

(2) Si $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, alors
$\mathbf{Adh}(A \cap B) = \mathbf{Adh}(\varnothing) = \varnothing$, mais $\mathbf{Adh}(A) \cap \mathbf{Adh}(B) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Proposition 2.46. *Soit A une partie de l'espace métrique (X, d), alors on a*
$\mathbf{Adh}\, A = A \cup \{x : x \text{ est un point d'accumulation de} A\} = A \cup A'$.

Démonstration. Posons $B = A \cup \{x : x$ est un point d'accumulation de $A\} = A \cup A'$.
Puisque A et A' sont des sous ensemble de $\mathbf{Adh}\, A$ alors $B = A \cup A' \subset \mathbf{Adh}\, A$.
Inversement supposons que $x \in \mathbf{Adh}\, A$. Si $x \in A$ alors on a $x \in B$. Maintenant si $x \notin A$, alors pour tout $\epsilon > 0, B(x; \epsilon) \cap A \neq \varnothing$. Mais puisque $x \notin A$ alors $[B(x; \epsilon) - \{x\}] \cap A \neq \varnothing$. Donc x est un point d'accumulation de A qui entraine que $\mathbf{Adh}\, A \subset B$. Donc on a donc montrer que $\mathbf{Adh}\, A = A \cup A'$. ■

Corollaire 2.47. *Une partie A d'un espace métrique X est fermée si et seulement si $A' \subset A$.*

Propriétés de l'intérieur. Les propriétés suivantes découlent directement des définitions mais sont très souvent utilisées. Soit (X, d) un espace métrique et $A, B \subset X$.

(1) $\mathbf{Int}(X) = X$;

(2) $\mathbf{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

(3) $\mathbf{Int}(A) \subseteq A$;

(4) $\mathbf{Int}(A)$ est un ouvert de X ;

(5) $\mathbf{Int}(A)$ est le plus grand ouvert de X contenant A ;

(6) Si $O \subset A$ et O est un ouvert de X, alors $O \subset \mathbf{Int}(A)$;

(7) $\mathbf{Int}[\mathbf{Int}(A)] = \mathbf{Int}\, A$;

(8) $\mathbf{Int}(A) = A$ si et seulement si A est ouvert ;

(9) Si $A \subset B$, alors $\mathbf{Int}(A) \subset \mathbf{Int}(B)$;

(10) $\mathbf{Int}(A \cup B) \supset \mathbf{Int}(A) \cup \mathbf{Int}(B)$;

(11) $\mathbf{Int}(A \cap B) = \mathbf{Int}(A) \cap \mathbf{Int}(B)$.

Exemple 2.48.

(1) Si $A = [1, 2]$ et $B = (2, 3)$, alors
$\mathbf{Int}(A \cup B) = \mathbf{Int}[1, 3) = (1, 3)$, mais $\mathbf{Int}(A) \cup \mathbf{Int}(B) = (1, 2) \cap (2, 3)$.
Cela montre qu'en général l'inclusion dans (2) n'est pas une égalité.

(2) Si $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, alors
$\mathbf{Int}(A \cup B) = \mathbf{Int}\,\mathbb{R} = \mathbb{R}$, mais $\mathbf{Int}(A) \cup \mathbf{Int}(B) = \varnothing$.

Définition 2.49. Soit (X, d) un espace métrique et $E \subset X$.
(a) On dit que E est **dense** dans X si $\mathbf{Adh}\, E = X$.
(b) On dit que (X, d) est **séparable** s'il contient un sous-ensemble dénombrable et dense.

Proposition 2.50. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) *E est dense dans X.*

(b) $\mathbf{Adh}\, E = X$.

(c) *X est le seul sous-ensemble fermé contenant E.*

(d) *Tout ouvert non vide de X contient au moins un point de E.*

(e) *Pour tout $x \in X$, et tout $r > 0$, $B(x, r) \cap E \neq \varnothing$.*

(f) *Pour tout $x \in X$, il existe une suite $(x_n) \in E$ telle que $x_n \to x$.*

Exemple 2.51.

(a) Chaque espace métrique est dense dans lui même.

(b) $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont dense dans $\mathbb{R}$.

(c) $\mathbb{R}$ est séparable, car $\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense.

(d) L'ensemble de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont rationnels est dense et dénombrable dans $\mathbb{R}^n$. Donc $\mathbb{R}^n$ est séparable.

(e) Si (X, δ) est un espace métrique discret, alors le seul sous ensemble dense de X est X lui même. En fait, si E est dense dans (X, δ), alors $B(x; 1/2) \cap E \neq \varnothing$, mais par la définition de la distance discrète on a $(x; 1/2) = \{x\}$.

2.7 Nouveaux espaces a partir d'existants espaces

Dans cette section on montre comment obtenir de nouveaux espaces métriques à partir d'existants espaces métriques.

Sous-espace métrique

Supposons que (X, d_X) est un espace métrique donné. Si A est un sous-ensemble non vide de X, considérons la restriction d_A de d_X à A. Pour tout $x, y \in A, d_A(x, y) = d_X(x, y)$. La métrique d_A est appelée la **métrique induite** . Alors (Y, d_A) est aussi un espace métrique et que l'on appelle un **sous-espace métrique** de (X, d_X). On notera cela $(A, d_A) \subset (X, d_X)$.

Comme exemple spécifique nous pouvons prendre $X = \mathbb{R}$ et $A = [0, 1]$ avec la distance usuelle. On peut générer de cette façon une infinité de sous espace métriques.

Attention ! Il est important lors de la discussion des sous-ensembles ouverts et fermés d'être conscient de l'univers où on travail. Quand (X, d_X) est un espace métrique et $A \subset X$, alors (A, d_A) est également un espace métrique. Pour dire que nous avons un ensemble ouvert O dans (A, d_A) ne veut pas dire que O est ouvert dans (X, d_X).

Considérons $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ avec la distance usuelle et le sous-espace métrique (A, d_A) ou A est l'intervalle $A = [1, 5)$.

(a) Noter que $[1, 3) = [1, 5) \cap (0, 3) = A \cap (0, 3)$, donc $[1, 3)$ est un ouvert dan (A, d_A), mais $[1, 3)$ n'est pas un ouvert dans $(\mathbb{R}, d)$.

(b) Noter que $[4, 5) = [1, 5) \cap [4, 7] = A \cap [4, 7]$, donc $[4, 5)$ est un fermé dans A, mais n'est pas un fermé dans $\mathbb{R}$.

(c) Puisque $[4, 5)$ est fermé dans A, alors $\mathbf{Adh}\,[4, 5) = [4, 5)$ dans A, mais $\mathbf{Adh}\,[4, 5) = [4, 5]$ dans $\mathbb{R}$.

Si $a \in A$ et $r > 0$, la boule ouverte dans (A, d_A) est le sous-ensemble

$$B_{d_A}(a, r) = \{x \in A : d_A(a, x) < r\} = A \cap B_{d_X}(a, r)$$

Il est possible que cet ensemble ne soit pas un ouvert dans (X, d_X).

Par exemple si $X = \mathbb{R}$ et $A = [0, 2]$ la boule ouverte centrée en 0 et de rayon 1 dans A est égale à :

$$B_{d_A}(0, 1) = \{a \in A : d_A(0, a) < 1\} = A \cap B_{d_X}(0, 1) = [0, 2] \cap (-1, 1) = [0, 1)$$

qui un ouvert dans (A, d_A) mais ne l'est pas dans (X, d_X).
Un autre exemple est la boule centrée en 2 et de rayon 1 dans (A, d_A) qui est égale à :

$$B_{d_A}(2, 1) = \{a \in A : d_A(2, a) < 1\} = A \cap B_{d_X}(2, 1) = [0, 2] \cap (1, 3) = (1, 2].$$

Remarque. Il faut retenir des exemples précédents que les notions d'ouverts, fermés, adhérence, voisinages ne sont pas intrinsèques mais dépendent de la distance de l'espace ambiant.

Proposition 2.52. *Soit (A, d_A) un sous-espace métrique de (X, d_X) et $G \subset A \subset X$.*

(a) *G est un ouvert de A si et seulement s'il existe un ouvert O de X tel que $G = A \cap O$.*

(b) *G est un fermé de A si et seulement s'il existe un fermé F de X tel que $G = A \cap F$.*

Démonstration.

(a) **Suffisance :** Soit O un ouvert de (X, d_X) et posons $G = A \cap O$. Alors, pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O$, d'où

$$B(x, r) \cap A \subset O \cap A = G.$$

Donc G est un ouvert de (A, d_A).

Nécessité : Soit G ouvert dans A. Alors pour $x \in G$ il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \cap A \subset G$. Posons

$$O = \bigcup_{x \in G} B(x, r_x)$$

O est ouvert dans X et $O \cap A = G$.

(b) La démonstration est similaire à celle dans (a).

■

En utilisant la proposition précédente on a le résultat suivant.

Corollaire 2.53. *Si $\mathscr{B}$ est la collection des ouverts de (X, d), et $A \subset X$, alors*

$$\mathscr{B}_A = \{A \cap O : O \in \mathscr{B}\}$$

est la collection des ouverts de (A, d_A).

Remarque : Si A est un ouvert de X alors pour tout ouvert O de X, $G = A \cap O$ est ouvert A et dans X à la fois. On peut donc avoir le résultat suivant.

Proposition 2.54. *Soit (A, d_A) un sous-espace métrique (X, d). Pour que tout ouvert (resp. tout fermé) de A soit un ouvert (resp. un fermé) de X il faut et il suffit que A soit un ouvert (resp.un fermé) de X.*

Produits d'espaces métriques

Rappelons que le produit cartésien de deux ensembles X_1 et X_2 est défini comme $X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$.

Définition 2.55. Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques, alors si $Z = X \times Y$ on peut définir un nouvel espace métrique (Z, d_Z) en laissant

$$d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

pour tout x_1, x_2 dans X et y_1, y_2 dans Y.

On peut définir la distance d'une autre manière, comme par exemple

$$d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

Cette métrique est appelée **métrique produit**.
On verra plus tard que ces deux distances sont équivalentes.

Proposition 2.56.

(a) *Si G_i est ouvert dans $X_i, i = 1, 2$ alors $G_1 \times G_2$ est ouvert dans $X_1 \times X_2$.*

(b) *Si F_i est fermé dans $X_i, i = 1, 2$ alors $F_1 \times F_2$ est fermé dans $X_1 \times X_2$.*

(c) *Si G est ouvert dans $X_1 \times X_2$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x_1, r) \times B_2(x_2, r) \subseteq G$.*

Démonstration.

(a) Si $(x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$, alors pour $i = 1, 2$ soit $r_i > 0$ tel que $B(x_i, r_i) \subseteq G_i$. Il se découle que si $r = \min\{r_1, r_2\}$, alors $B((x_1, x_2); r) \subseteq G_1 \times G_2$.

(b) $(X_1 \times X_2) \setminus (F_1 \times F_2) = [(X_1 \setminus F_1) \times X_2] \cup [X_1 \times (X_2 \setminus F_2)]$, qui ouvert a partir de (a) car c'est la réunion de deux ouverts.

(c) Soit $\epsilon > 0$ tel que $B((x_1, x_2); \epsilon) \subseteq G$. Si on choisi $0 < r < \epsilon/2$ on aura le résultat désiré.

∎

Corollaire 2.57.

(a) *Tout produit de deux ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*

(b) *Tout produit de deux fermés de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.*

Exemple 2.58. On a vu que $\mathbb{R}, \varnothing, (a, b), a, \infty)$ et $(-\infty, b)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$. Alors, $\mathbb{R}^2, \varnothing, (a, b) \times (c, d), (a, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times (a, \infty)$ et $(-\infty, b)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Remarque. *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques,* $\mathscr{B}_X$ *est la collection de tous les ouverts de* X*,* $\mathscr{B}_Y$ *est la collection de tous les ouverts de* Y*, alors*

$$\mathscr{B}_Z = \{U_X \times U_Y : U_X \in \mathscr{B}_X, U_Y \in \mathscr{B}_Y\}$$

est la collection de tous les ouverts de $Z = X \times Y$.

2.8 Exercices

1. Soit $X=\mathbb{R}^n$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ et $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ on définie :

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|, \\ d_2(x,y) &= \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}, \\ d_\infty(x,y) &= \max_{i\in\{1,\ldots,n\}}|x_i-y_i| \end{aligned}$$

(a) Vérifier l'inégalité triangulaire pour les distances d_1,d_2 et d_∞ .

(b) Si $X=\mathbb{R}^2$ dessiner les boules unitaires ouvertes $B((0,0),1)$ pour d_1,d_2 et d_∞.

2. Si $P=(x_1,y_1)$ et $Q=(x_2,y_2)$ sont deux points quelconque dans $\mathbb{R}^2$, montrer que :
(1) $d_1(P,Q)\geq d_2(P,Q)\geq d_\infty(P,Q)$.
(2) $d_1(P,Q)\leq\sqrt{2}d_2(P,Q)$
(3) $d_2(P,Q)\leq\sqrt{2}d_\infty(P,Q)$.

3. Les quelles de ces fonctions sont des distances sur $\mathbb{R}$?

(a) $d(x,y)=|x^2-y^2|$

(b) $d(x,y)=|x^3-y^3|$

(c) $d(x,y)=|x-2y|$

(d) $d(x,y)=|\arctan x-\arctan y|$

(e) $d(x,y)=e^{x-y}$

4. Montrer que $\delta(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } x\neq y\\ 0 & \text{si } x=y\end{cases}$ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

5. Soit $X=C[a,b], d_1(f,g)=\displaystyle\int_a^b|f(t)-g(t)|dt$ et $d_\infty(f,g)=\max\limits_{a\leq x\leq b}|f(t)-g(t)|$. Montrer que :

(a) (X,d_1) et (X,d_∞) sont des espace métriques.

(b) $d_1(f,g)\leq(b-a)d_\infty(f,g)$.

6. Soit $X=\{a,b\}$ et d telle que $d(a,a)=d(b,b)=0$, $d(a,b)=d(b,a)=r$ où r est un réel positif. Montrer que (X,d) est un espace métrique.

7. Soit X un ensemble et d telle que $d(x,x)=0$ pour tout $x\in X$, $d(x,y)=d(y,x)=r\in[1,2]$ si $x\neq y$. Monter que (X,d) est un espace métrique.

8. Soit X un ensemble et d telle que $d(x,x)=0$ pour tout $x\in X$, $d(x,y)\neq 0$ si $x\neq y$ et $d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$. Montrer que (X,d) est un espace métrique.

9. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des point de l'espace métrique (X, d). Montrer que

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n).$$

10. Soient x, y, z, t des point de l'espace métrique (X, d). Montrer que

$$|d(x, y) - d(z, t)| \leq d(x, z) + d(y, t).$$

11. Soit $f(x)$ une fonction continue définie pour tout $x \geq 0$ telle que :
$f(0) = 0, f(x) > 0, f'(x) > 0$ et $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.
Montrer si (X, d) est un espace métrique, alors $(X, f(d))$ est aussi.

12. Montrer si (X, d) est un espace métrique, alors $(X, f(d))$ est aussi.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$

(c) $f(x) = \min\{1, x\}$

13. Monter l'inégalité de Minkowski, si $(x_1, \cdot, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2\right]^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

14. Dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right]^2 \leq \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right]$$

montrer que l'égalité est vraie si et seulement si les vecteurs x et y sont linéairement dépendants ($y = kx$).

15. Si (X, d) est espace métrique, monter que

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

est une métrique sue X.

16. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $A, B \subset \mathbb{R}^n$ on défini :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a), d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b), \mathrm{diam}(A) = \sup_{a \in A, b \in B} d(a, b)$$

(a) Trouver $d(0, \mathbb{R} - \mathbb{Q})$, $d(\sqrt{3}, \mathbb{Q})$, $d(0, (2, 4])$.

(b) Si $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, calculer $d(A, B)$.

(c) Quel est $\mathrm{diam}([0,1) \cap \mathbb{Q})$ et $\mathrm{diam}([-2,1) \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q})$

17. Soient A et B de parties bornées d'un espace métrique (X,d). Monter que $\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B) + d(A,B)$.

18. Soient $(X,d_X),(Y,d_Y)$ deux espaces métriques. On définie $d : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$d[(x_1,y_1),(x_2,y_2)] = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2)$$

pour tout x_1,x_2 dans X et y_1,y_2 dans Y. Montrer que d est bien une distance.

19. Soient $X = \mathbb{R}^2$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$.

(a) Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Trouver la boule ouverte $B(x_0,r)$ quand $r \leq 1$, et $r > 1$.

(c) Trouver la boule fermée $B_f(x_0,r)$ quand $r < 1$, et $r \geq 1$.

(d) Trouver la sphère $S(x_0,r)$ quand $r = 1$, et $r \neq 1$.

20. Soit (X,d) un espace métrique quelconque.

(a) Est ce que $B(x,r_1) = B(x,r_2)$ implique $r_1 = r_2$?

(b) Est ce que $B(x_1,r) = B(x_2,r)$ implique $x_1 = x_2$?

21. Soient x,y des point de l'espace métrique (X,d) tels que $x \neq y$. Soit $r = d(x,y)/3$, montrer que $B(x,r) \cap B(y,r) = \varnothing$.

22. Montrer que $A \subset X$ est ouvert si et seulement si $X - A$ est fermé.

23. Soit (X,d) un espace métrique et $A \subseteq X$. Montrer que alors A est ouvert dans X si et seulement si A est l'union de toutes les boules ouvertes contenues dans A.

$$A = \bigcup \{B(a,r) : B(a,r) \subseteq A, a \in A\}.$$

24. Montrer les **propriétés de l'adhérence** suivantes. Soit (X,d) un espace métrique et $A,B \subset X$.

(1) $\mathbf{Adh}(X) = X$.

(2) $A \subseteq \mathbf{Adh}(A)$.

(3) Si $A \subset F$ et F est un fermé de X, alors $\mathbf{Adh}\,A \subset F$.

(4) $\mathbf{Adh}(A)$ est un fermé de X ;

(5) $\mathbf{Adh}(A)$ est le plus petit fermé de X contenant A ;

(6) $\mathbf{Adh}[\mathbf{Adh}(A)] = \mathbf{Adh}\,A$.

(7) $\mathbf{Adh}(A) = A$ si et seulement si A est fermé.

(8) Si $A \subset B$, alors $\mathbf{Adh}(A) \subset \mathbf{Adh}(B)$.

(9) $\mathbf{Adh}(A \cup B) = \mathbf{Adh}(A) \cup \mathbf{Adh}(B)$.

(10) $\mathbf{Adh}(A \cap B) \subset \mathbf{Adh}(A) \cap \mathbf{Adh}(B)$. Donner un contre exemple pour l'autre inclusion.

25. Montrer les **propriétés de l'intérieur** suivantes. Soit (X, d) un espace métrique et $A, B \subset X$.

(1) $\mathbf{Int}(X) = X$.

(2) $\mathbf{Int}(A) \subseteq A$.

(3) $\mathbf{Int}(A)$ est un ouvert de X.

(4) Si $O \subset A$ et O est un ouvert de X, alors $O \subset \mathbf{Int}(A)$.

(5) $\mathbf{Int}(A)$ est le plus grand ouvert de X contenant A.

(6) $\mathbf{Int}[\mathbf{Int}(A)] = \mathbf{Int}\, A$.

(7) $\mathbf{Int}(A) = A$ si et seulement si A est ouvert.

(8) Si $A \subset B$, alors $\mathbf{Int}(A) \subset \mathbf{Int}(B)$.

(9) $\mathbf{Int}(A \cup B) \supset \mathbf{Int}(A) \cup \mathbf{Int}(B)$. Donner un contre exemple pour l'autre inclusion.

(10) $\mathbf{Int}(A \cap B) = \mathbf{Int}(A) \cap \mathbf{Int}(B)$.

26. Soit A une partie d'un espace métrique (X, d). Montrer que

(1) $X - \mathbf{Int}\, A = \mathbf{Adh}(X - A)$

(2) $\mathbf{Adh}\, A = X \setminus [\mathbf{Int}(X \setminus A)]$

(3) $\mathbf{Int}\, A = X \setminus [\mathbf{Adh}(X \setminus A)]$

(4) $\mathbf{Fr}\, A = \mathbf{Adh}\, A \setminus \mathbf{Int}\, A$.

(5) $\mathbf{Adh}[\mathbf{Adh}\, A] = \mathbf{Adh}\, A$.

(6) $\mathbf{Int}[\mathbf{Int}\, A] = \mathbf{Int}\, A$.

27. Soient $A_1, \ldots, A_n \subset X$.

(a) Montrer que $\mathbf{Adh}[\bigcup_{k=1}^{n} A_k] = \bigcup_{k=1}^{n} \mathbf{Adh}\, A_k$.

(b) Montrer que (a) n'est pas vraie pour des réunions infini.

28. Si A est ouvert, est-il vrai que $A = \mathbf{Int}(\mathbf{Adh}(A))$?

29. Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X. Montrer que $x \in \mathbf{Adh}\, A$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_n$ dans A tel que $d(x, x_n) \to 0$.

30. Montrer que les sous-ensembles suivants sont fermés dans $\mathbb{R}$.

(a) $[a, b]$ (b) $(-\infty, 0]$ (c) $\{1\}$ (d) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$

31. Montrer que les sous-ensembles suivants sont fermés dans $\mathbb{R}^2$.
(a) Le disque fermé $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(b) Le rectangle fermé $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.
(c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq a, y \geq b\}$

32. Soit $X = [0, 2] \setminus \{1\}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}$. Montre que le sous-ensemble $[0, 1) \subset X$ est a la fois ouvert et fermé dans X.

33. Soit A une partie d'un espace métrique (X, d).

(a) Montrer que si A est ouvert, l'intérieur de $\mathbf{Fr}(A)$ est vide ; ce résultat reste-t-il vrai avec A fermé ? avec A quelconque ?

(b) Montrer que A est ouvert si et seulement si $A \cap \mathbf{Fr}(A) = \varnothing$.

(c) Montrer que A est fermé si et seulement si $\mathbf{Fr}(A) \subset A$.

(d) Montrer que A est à la fois ouvert et fermé si et seulement si $\mathbf{Fr}(A) = \varnothing$.

(e) Montrer que $\mathbf{Fr}(\mathbf{Adh}\, A) \subset \mathbf{Fr}(A)$ et $\mathbf{Fr}(\mathbf{Int}\, A) \subset \mathbf{Fr}(A)$. Donner un exemple dans $\mathbb{R}$ où ces trois ensembles sont distincts.

34. Pour chacune des parties de $\mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer : $\mathbf{Adh}\, A_i, \mathbf{Int}\, A_i$, $\mathbf{Fr}\, A_i$, Is A_i (points isolés) et A_i' (points d'accumulations)
$A_1 = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup \{4, 7\}$, $A_2 = \mathbb{Z}, A_3 = \mathbb{Q}, A_4 = \{(-1)^k + 1/2^k : k \in \mathbb{N}\}$

35. (a) Montrer que si $A_1, \ldots, A_n$ sont des sous-ensembles de X, alors

$$\mathbf{Int}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n} \mathbf{Int}\, A_k$$

(b) Montrer que (a) n'est pas vraie pour des intersections infini.

36. Soit A une partie d'un espace métrique X. Montrer que les propositions suivantes son équivalentes :

(a) x est un point d'accumulation de A.

(b) Tout voisinage V de x contient une infinité de points de A

(c) $x \in \mathbf{Adh}(A - \{x\})$.

37. Si pour $k = 1, 2$, A_k est un sous-ensemble dense de l'espace métrique (X_k, d_k), montrer que $A_1 \times A_2$ est dense dans $X_1 \times X_2$. Donc le produit d'un nombre fini d'espace séparables est séparable.

38. Monter qu'un ouvert d'un espace métrique est ouvert si et seulement si c'est une union de boules ouvertes.

39. Si A est une partie de l'espace métrique X, montrer que

$$\mathbf{Int}\, A = \{x : \mathrm{dist}(x, A^c) > 0\}.$$

Pouvez-vous donner une caractérisation analogue de $\mathbf{Fr}\,A$?

40. (a) Si $A \subseteq X$, montrer que $x \in \mathbf{Adh}\,A$ si et seulement si x est soit un point d'accumulation de A ou un point isolé de A.

(b) Montrer que si une partie de X n'a pas de points d'accumulation, elle est fermée.

(c) Donner un exemple d'une partie infinie de $\mathbb{R}$ qui n'a pas de points d'accumulation.

41. Montrer que $x \in \mathbf{Adh}\,A$ si et seulement si il existe une suite (x_n) de points de A, tel que $x_n \to x$.

42. Soient A et B de parties bornées d'un espace métrique X.

(a) Monter que $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\mathbf{Adh}\,A)$.

(b) Monter que $\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B) + d(A, B)$.

3 Continuité dans les espaces métriques

Le concept de continuité d'une fonction est l'un des concepts fondamentaux en analyse. Nous allons étendre ce concept des fonction numériques $f : X \to \mathbb{R}$ vu dans le cours d'analyse élémentaire aux fonctions entre deux espaces métriques $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$. La définition de la continuité des fonctions d'une variable réelle est en effet un cas très spéciale de la continuité sur les espaces métriques. On établira que les ouverts (fermés) des espaces métriques vus dans le chapitre précédent jouent un grand rôle primordiale dans la continuité des fonctions entres ces espaces métriques. On verra que sur certains espaces métriques toute fonction est continue.

3.1 Continuité ponctuelle, séquentielle et globale

La **continuité ponctuelle** est la continuité en un point du domaine de f. Si $X \subseteq \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$ alors $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction numérique. La définition de la continuité ponctuelle pour les fonctions numériques d'une seule variable vue en analyse élémentaire, est donnée par la définition suivante.

Définition 3.1. On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction **continue** au point $a \in X$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - a| < \delta$, alors $|f(a) - f(x)| < \epsilon$.

La généralisation de la continuité ponctuelle entre espaces métriques arbitraires est donnée par la définition suivante.

Définition 3.2. On dit que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue au point $a \in X$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $d_X(x, a) < \delta$, alors $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$.

Proposition 3.3. *Soit $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ et $a \in X$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *f est continue au point $a \in X$.*

(2) *Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $d_X(x, a) < \delta$, alors $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$.*

(3) *Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(B_{d_X}(a, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(a), \epsilon)$.*

(4) *Pour tout voisinage V de $f(a)$ il existe un voisinage U de a tel que $f(U) \subseteq V$.*

Définition 3.4. On dit que f est **séquentiellement continue** en a si pour toute suite (x_n) de X telle que $x_n \to a$ alors la suite $(f(x_n))$ est telle que $f(x_n) \to f(a)$.

Le résultat suivant montre que sur les espaces métriques, la continuité séquentielle est équivalente à la continuité ponctuelle.

Proposition 3.5. *$f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue en $x = a$ si et seulement si lorsque $x_n \to a$ dans X, alors $f(x_n) \to f(a)$ dans Y.*

Démonstration. Supposons que f est continue en $x = a$ et $x_n \to a$ dans X. Puisque f est continue en $x = a$ alors pour $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $d_X(x, a) < \delta$ alors $d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon$. Puisque $x_n \to a$, soit $N \geq 1$ tel que $d_X(x_n, a) < \delta$ quand $n > N$. Donc, $d_Y(f(x_n), f(a) < \epsilon$ quand $n \geq N$. Puisque ϵ est arbitraire, il s'en suit que $f(x_n) \to f(a)$.

Pour montrer la réciproque, supposons que f n'est **pas** continue en $x = a$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$ il existe au mois un x_n avec $d_X(x_n, a) < \dfrac{1}{n}$, mais $d_Y(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon$. Cela veut dire que $x_n \to a$, mais $\{f(x_n)\}$ n'est pas convergente vers $f(a)$. ∎

Nous n'allons pas passer beaucoup de temps à étudier les fonctions continues à un seul point, mais nous aurons beaucoup à dire sur les fonctions continues sur l'espace métrique entier c.ad. **continuité globale**.

Définition 3.6. $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est dite continue sur X, si elle est continue en tout point x de X.

Proposition 3.7. *Si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *f est continue sur X.*

(2) *Si O est un ouvert de (Y, d_Y), alors $f^{-1}(O)$ est un ouvert de (X, d_X).*

(3) *Si F est un fermé de (Y, d_Y), alors $f^{-1}(F)$ est un fermé de (X, d_X).*

Démonstration. (2) $\iff$ (3) parce que

$$f^{-1}(Y - O) = X - f^{-1}(O) \text{ et } f^{-1}(Y - F) = X - f^{-1}(F).$$

(1) $\Longrightarrow$ (2). Soit $a \in f^{-1}(O)$ alors $f(a) \in O$, et puisque O est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que la boule ouverte $B_{d_Y}(f(a), \epsilon) \subset O$ qui entraine que $f^{-1}(B_{d_Y}(f(a), \epsilon)) \subset f^{-1}(O)$.
D'autre part puisque f est continue, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(B_{d_X}(a, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(a), \epsilon)$, qui entraine que $B_{d_X}(a, \delta) \subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(a), \epsilon))$. En d'autres termes,

$$B_{d_X}(a; \delta) \subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(a), \epsilon)) \subset f^{-1}(O).$$

Donc $f^{-1}(O)$ est ouvert.
(2) $\Longrightarrow$ (1). Si $a \in X$ et $\epsilon > 0$, alors $B_{d_Y}(f(a), \epsilon)$ est un ouvert dans (Y, d_Y) ; donc par (2) on a que $f^{-1}(B_{d_Y}(f(a); \epsilon))$ est un ouvert dans (X, d_X) qui contient a. Ce qui montre qu'il

existe $\delta > 0$ tel que $B_{d_X}(a, \delta) \subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(a), \epsilon)) \Rightarrow f(B_{d_X}(a, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(a), \epsilon)$ et donc f est continue au point a d'après proposition (3.3) . ■

Exemple 3.8.

(1) La fonction constante $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = c \in \mathbb{R}$ est continue.
On a seulement deux cas. Si $c \in U$ alors $f^{-1}(U) = \mathbb{R}$ sinon $f^{-1}(U) = \varnothing$ et les deux des ouverts de $\mathbb{R}$.

(2) La fonction identité $(X, d_X) \longrightarrow (X, d_X)$ définie par $f(x) = x \in X$ est continue.
Si U est un ouvert de X alors $f^{-1}(U) = U$ est évidement un ouvert de X.

(3) Si (X, δ) est un espace métrique discret et (Y, d_Y) est un espace métrique quelconque alors tout fonction $f : (X, \delta) \to (Y, d_Y)$ est continue.
On a vu que toute partie de (X, δ) est ouverte et puisque si U est un ouvert de Y, $f^{-1}(U)$ est une partie de (X, δ) alors $f^{-1}(U)$ est ouvert dans (X, δ).

(4) Si (X, δ) est un espace métrique discret, les seules fonctions $f : (\mathbb{R}, d) \to (X, \delta)$ continues sont les fonctions constantes.
Tout singleton $\{x\}$ de (X, δ) est ouvert donc si f est $f^{-1}\{x\}$ est ouvert dans $(\mathbb{R}, d)$ donc doit être un intervalle (a, b). Cela entraine que l'image de tout intervalle est un singleton. Donc $f(\mathbb{R}) = \{c\}$.

(5) (X, d) est un espace métrique, $a \in X$, $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = d(x, x_0)$, alors f est continue et $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$.

Attention. Soit $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ une fonction continue.
Si U est un ouvert de X alors $f(U)$ n'est pas nécessairement ouvert dans Y.
Si F est un fermé de X alors $f(F)$ n'est pas nécessairement fermé dans Y.
Autrement dit, l'image continue d'un ouvert (fermé) n'est pas nécessairement un ouvert (fermé).

(1) Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, si U est un ouvert de $\mathbb{R}$ on a $f(U) = \{0\}$ qui n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.

(2) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

(3) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais $f(\mathbb{R}) = (0, 1]$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

Exemple 3.9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = x$, si $x \neq 0$. Évidement cette fonction n'est pas globalement continue dans $\mathbb{R}$. Pour le montrer on doit trouver un ouvert O de $\mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(O)$ n'est pas ouvert. Soit $O = (1/2, 2)$ alors $f^{-1}(O) = (1/2, 2) \cup \{0\}$ qui n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.10. Soit $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$, alors on dit que :

(1) f est une **application ouverte** si l'image directe de tout ouvert de X est un ouvert dans Y. Si $U \subseteq X$ est ouvert alors, $f(U)$ est ouvert dans Y,

(2) f est une **application fermée** si l'image directe de tout fermé de X est un fermé dans Y. Si $F \subseteq X$ est fermé alors, $f(F)$ est ouvert dans Y.

Exemple 3.11.

(1) **Application ouverte mais pas fermée :** Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$ est ouverte car $f((a,b)) = (e^a, e^b)$. Si U est ouvert alors $f(U)$ est ouvert dans $(0, \infty)$ et puisque $(0, \infty)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$, alors $f(U)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$. Cependant $f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ n'est pas fermé donc f n'est pas fermée. Donc $f(x) = e^x$ est une application continue, ouverte mais elle n'est pas fermée.

(2) **Application fermée mais pas ouverte :** Considérons la fonction constante $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = c \in \mathbb{R}$. Si F est fermé dans $\mathbb{R}$ alors $g(F) = \{c\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ aussi. Cependant si U est ouvert alors $g(U) = \{c\}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$. Donc $g(x) = c$ est une application continue et fermée mais n'est pas ouverte.

(3) **Application ni ouverte ni fermée :** Considérons la fonction constante $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. On a $h(\mathbb{R}) = (0, 1]$, donc h est une application continue mais n'est ni fermée ni ouverte.

(4) **Application ouverte et fermée :** Considérons la fonction constante $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $k(x) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(x) = x$. On a $h(U) = U$ pour tout $U \subseteq \mathbb{R}$. Donc h est une application continue ouverte et fermée.

(5) **Application ouverte mais non continue :** Considérons la fonction $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{Z}, \delta)$ définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Toute partie de $(\mathbb{Z}, \delta)$ est ouverte, alors f est ouverte. Cependant $f^{-1}(\{0\}) = [0, 1)$ qui n'est ni ouvert ni fermé dans $(\mathbb{R}, d)$.

Remarque. Une application directe de la proposition 3.7 nous donne :

$$f \text{ est continiue} \Leftrightarrow f^{-1} \text{ est ouverte} \Leftrightarrow f^{-1} \text{ est fermée}$$

Proposition 3.12. *Soit $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ une application bijective. Alors, f est ouverte si et seulement si f est fermée.*

Démonstration. Si f est ouverte et $F \subset X$ est fermé, alors $F = X - O$ ou $O \subset X$ est ouvert et $f(F) = f(X) - f(O) = Y - f(O)$ qui est fermé dans Y. Même argument pour la réciproque. ■

Le théorème suivant donne les différentes caractérisations de continuité sur les espaces métriques. Les trois premières ont été démontrées dans la proposition précédente et le reste est laissé comme exercices.

Théorème 3.13. *Soient X, Y deux espaces métriques et $f : X \to Y$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *f est continue.*

(2) *Pour tout voisinage V de $f(x)$ il existe un voisinage U de x tel que $f(U) \subseteq V$.*

(3) *$f^{-1}(O)$ est ouvert dans X pour tout ouvert O de Y.*

(4) *$f^{-1}(F)$ est fermé dans X pour tout fermé F de Y.*

(5) *$f(\mathbf{Adh}\, A) \subseteq \mathbf{Adh}[f(A)]$ pour toute partie A de X.*

(6) *$f^{-1}(\mathbf{Int}\, B) \subseteq \mathbf{Int}\, f^{-1}(B)$ pour toute partie B de Y.*

(7) *$\mathbf{Adh}\, f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(\mathbf{Adh}\, B)$ pour toute partie B de Y.*

Proposition 3.14. *Si (X, d) est espace métrique et $A \subseteq X$, alors pour tout $x, y \in X$,*

$$|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leq d(x, y).$$

Démonstration. Si $a \in A$, alors $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$.
Ainsi, en prenant le infimum pour tout a dans A nous obtenons

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(x, A) &\leq \inf\{d(x, y) + d(y, a) : a \in A\} \\ &\leq d(x, y) + \operatorname{dist}(y, A) \text{ donc} \\ d(x, y) &\geq \operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A) \end{aligned}$$

En inversant les rôles de x et y nous obtenons

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(y, A) &\leq \inf\{d(y, x) + d(y, a) : a \in A\} \\ &\leq d(x, y) + \operatorname{dist}(x, A) \text{ donc} \\ -d(x, y) &\leq \operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A) \end{aligned}$$

d'où nous obtenons l'inégalité $|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leq d(x, y)$. ■

Corollaire 3.15. *Soit $A \subset X$, alors $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \operatorname{dist}(x, A)$ est une fonction continue.*

Maintenant, on combine des fonctions continues pour générer des exemples de nouvelles fonctions continues. Nous supposerons que le lecteur est déjà familier avec la continuité des différentes fonctions rencontrée dans le cours d'analyse élémentaire.
Nous avons le résultat suivant, qui est une extension des résultats vus dans le cours d'analyse pour les fonctions numériques. La démonstration peut se faire facilement en utilisant proposition 3.5.

Proposition 3.16. *Si (X, d) est espace métrique et $f, g : X \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, alors les fonctions suivantes sont aussi continues ;*
(a) $f + g$, (b) $f \cdot g$, (c) $|f|$, (d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)$, si $g \neq 0$.

La dernière proposition est un moyen de combiner des fonctions continues pour obtenir une autre fonction continue. Un autre moyen est d'utiliser la composition de fonction.

Proposition 3.17. *Si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y), g : (Y, d_Y) \to (Z, d_Z)$ sont des fonctions continues, alors la composée $g \circ f : (X, d_X) \to (Z, d_Z)$ définie par $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ est aussi continue.*

Démonstration. Soit U un ouvert de Z, alors

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}[g^{-1}(U)].$$

Puisque g est continue $g^{-1}(U)$ est ouvert dans Y. De même f est continue $f^{-1}[g^{-1}(U)]$ est ouvert dans X. Ce qui montre que $(g \circ f)$ est continue. ■

Proposition 3.18. *Soit (X, d_X) un espace métrique et $A \subset X$. Alors l'injection canonique $i : (A, d_A) \hookrightarrow (X, d_X)$ définie par $i(a) = a$ pour $a \in A$, est continue. De plus i est ouverte (fermée) si et seulement si A est ouvert (fermé).*

Démonstration. Soit O un ouvert de X, alors $i^{-1}(O) = O \cap A$ qui est ouvert dans (A, d_A) donc i est continue. Soit i ouverte et U un ouvert de A alors $i(U) = U = O \cap A$ est ouvert dans X si et seulement si A est ouvert dans X. ■

Proposition 3.19. *Soient $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ une application continue, $A \subset X$ et $f(X) \subseteq B \subseteq Y$. Alors les restriction suivantes sont continues.*

(1) $g = f|_A : (A, d_A) \to (Y, d_Y)$.

(2) $h = f|^B : (X, d_X) \to (B, d_B)$.

(3) $k = f|^{f(X)} : (X, d_X) \to (f(X), d_{f(X)})$.

Démonstration.

(1) $g = f|_A = f \circ i$ où i est l'injection canonique de A dans X, $i : A \hookrightarrow X$. g est la composée de deux fonctions continues, donc g est continue.

(2) $h = i \circ f$ où i est l'injection canonique de $f(X)$ dans B, $i : f(X) \hookrightarrow B$. g est la composée de deux fonctions continues, donc h est continue.

(3) Cas spécial où $B = f(X)$.

■

Attention. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
La fonction f est discontinue en tout point $x \in \mathbb{R}$. Mais, la restriction $f|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ est une fonction constante égale à 0, est donc continue. Donc le fait que f n'est pas continue n'implique pas que la restriction de f n'est pas continue aussi.

Proposition 3.20. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $Z = X \times Y$ muni de la distance produit. Alors, les projections $p_X : X \times Y \to X$ et $p_Y : X \times Y \to Y$ définies par $p_X(x, y) = x$ et $p_Y(x, y) = y$ sont continues et ouvertes.*

Démonstration. Soit U un ouvert de X, alors $p_X^{-1}(U) = U \times Y$ qui est ouvert dans $X \times Y$. Si U un ouvert de X et V est un ouvert de Y alors $p_X(U \times V) = U$ est un ouvert dans X, donc p_X est une application ouverte. Même chose pour p_Y. ■

Proposition 3.21. *Soit (A, d_A) un sous-espace métrique de (X, d_Y), et soit $i : A \hookrightarrow X$ l'injection canonique. Supposons que $g : (Z, d_Z) \to (A, d_A)$ est une fonction. Alors, g est continue si et seulement si $i \circ g : (Z, d_Z) \to (X, d_X)$ est continue.*

Démonstration.
($\Rightarrow$) Si g est continue alors $i \circ g$ est continue car c'est la composée de deux fonctions continues.
($\Leftarrow$) Supposons que $i \circ g$ est continue. Si V est ouvert de A alors $V = U \cap A$ où U est un ouvert de X. Alors

$$g^{-1}(V) = g^{-1}(U \cap A) = g^{-1}(i^{-1}(U)) = (i \circ g)^{-1}(U)$$

qui est ouvert dans Z par continuité de $i \circ g$. Donc g est continue. ■

Théorème 3.22. *Soient X, Y et W des espaces métriques. Alors, $f : W \to X \times Y$ est continue si et seulement si $p_X \circ f : W \to X$ et $p_Y \circ f : W \to Y$ sont continues.*

Démonstration. Si f est continue, alors $p_X \circ f$ et $p_Y \circ f$ sont continues étant les composées de fonctions continues.
Suppose que $p_X \circ f$ et $p_Y \circ f$ sont continues. On doit montrer que l'image réciproque de tout ouvert de $X \times Y$ est un ouvert de W. Si U, V sont de ouverts de X, Y respectivement, alors $U \times V$ est un ouvert de $X \times Y$. En outre

$$U \times V = (U \times X) \cap (V \times Y) = p_X^{-1}(U) \cap p_Y^{-1}(V).$$

Alors,

$$f^{-1}(U \times V) = (f^{-1}p_X^{-1}(U)) \cap (f^{-1}p_Y^{-1}(V)) = (p_X \circ f)^{-1}(U) \cap (p_X \circ f)^{-1}(U)$$

qui est un ouvert étant l'intersection de deux ouverts, car $p_X \circ f$ et $p_Y \circ f$ sont continues. Donc f est continue. ■

Corollaire 3.23. *Soit X un espace métrique et $\Delta : X \to X \times X$ définie par $\Delta(x) = (x, x)$. Alors, Δ est continue.*

Démonstration. $(p_X \circ \Delta)(x) = p_X(x, x) = x = 1_X(x)$ qui est continue et $(p_Y \circ \Delta)(x) = p_X(x, x) = x = 1_X(x)$ qui est continue. Donc par théorème 3.22 Δ est continue. ∎

Proposition 3.24. *Soient X et Y des espaces métriques et $x_0 \in X, y_0 \in Y$.*

Si $i_{x_0} : Y \to X \times Y$ est définie par $i_{x_0}(y) = (x_0, y)$, alors i_{x_0} est continue.
Si $i_{y_0} : X \to X \times Y$ est définie par $i_{y_0}(x) = (x, y_0)$, alors i_{y_0} est continue.

Démonstration. $(p_X \circ i_{y_0})(x) = p_X(x, y_0) = x = 1_X(x)$ qui est continue et $(p_Y \circ i_{y_0})(x) = p_X(x, y_0) = y_0$ est constante qui est continue. Donc par théorème 3.22 i_{y_0} est continue. ∎

Proposition 3.25. *Soient X, Y et W des espaces métriques et $f : X \times Y \to W$ continue. Alors, pour tout $x_0 \in X, y_0 \in Y$ les applications $y \mapsto f(x_0, y)$ et $x \mapsto f(x, y_0)$ sont continues.*

Attention ! La réciproque est fausse. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

les applications partielles $x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$ sont continues mais f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exemple 3.26.

(1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (3x^2 + 5y^3, 7xy)$. Alors f est continue.

En utilisant théorème 3.22 il suffit de montrer que les projections $g(x, y) = 3x^2 + 5y^3$ et $h(x, y) = 7xy$ sont continues. $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont des projections donc continues. Donc $h(x, y) = 7xy$ est continue étant le produit de fonctions continues. De même $3x^2$ et $5y^3$ sont continues étant le produit de fonctions continues. Finalement $g(x, y)$ est continue étant la somme de fonctions continues.

(2) La fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $(x, y) \mapsto x + y$ (addition de deux vecteurs) est continue. INDICATION: *Utiliser théorème 3.22.*

(3) La fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $(t, x) \mapsto tx$ (multiplication par un scalaire) est continue. INDICATION: *Utiliser proposition 3.5.*

Proposition 3.27. *Si $f, g : X \to Y$ sont des applications continues, alors on a :*

(1) *Le graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$.*

(2) *La diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ est fermée dans $X \times X$.*

(3) *L'ensemble* $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ *est fermé dans* X.

(4) *Si* $X = Y$ *alors* $A = \{x \in X : f(x) = x\}$ *est fermé dans* X.

Démonstration.

(1) On veut montrer que $X \times Y \setminus \Gamma_f$ est ouvert. Soit $(x, y) \in X \times Y \setminus \Gamma_f$ alors $y \neq f(x)$. Puisque Y est séparé alors ils existent des voisinages $V_y, V_{f(x)}$ disjoints dans Y. Puisque f est continue, alors $U_x = f^{-1}(V_{f(x)})$ est un voisinage de x. Posons $G = U_x \times V_y$, alors $(x, y) \in G \subset X \times Y \setminus \Gamma_f$. Donc $X \times Y \setminus \Gamma_f$ est ouvert.

(2) Posons $Y = X$ et $f(x) = x$ dans (1).

(3) La fonction $h(x) = f(x) - g(x)$ est continue et $A = h^{-1}\{0\}$ qui est fermé car c'est l'image réciproque d'un fermé.

(4) Posons $X = Y$ et $g(x) = x$ dans (3).

■

Maintenant on utilise corollaire 3.15 pour montrer un très fameux résultat.

Lemme 3.28 (Lemme de Urysohn). *Si* A *et* B *sont deux sous-ensembles disjoints et fermés de* X*, alors il existe une fonction continue* $f : X \to \mathbb{R}$ *possédant les propriétés suivantes :*

(a) $0 \leq f(x) \leq 1$ *pour tout* x *dans* X

(b) $f(x) = 0$ *pour tout* x *dans* A

(c) $f(x) = 1$ *pour tout* x *dans* B

Démonstration. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, A)}{\operatorname{dist}(x, A) + \operatorname{dist}(x, B)}$$

cette fonction est bien définie et satisfait les propriétés voulues. ■

Corollaire 3.29. *Si* F *un fermé de* X *et* G *est un ouvert de* X *tels que* $F \subset G$*, alors il existe une fonction continue* $f : X \to \mathbb{R}$ *telle que :*

(a) $0 \leq f(x) \leq 1$ *pour tout* x *dans* X*,*

(b) $f(x) = 1$ *pour tout* $x \in F$*,*

(c) $f(x) = 0$ *pour tout* $x \notin G$.

Démonstration. Utilisons le lemme de Urysohn avec $A = X - G$ et $B = F$. ■

3.2 Homéomorphisme

Rappelons que si une fonction $f : X \to Y$ est bijective, son inverse f^{-1} est une fonction $f^{-1} : Y \to X$ bijective aussi. On a que $(f \circ f^{-1})(y) = y$ pour tout $y \in Y$ et $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ pour $x \in X$.

Définition 3.30. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques, et $f : X \to Y$. On dit que f est un **homéomorphisme** de X sur Y si

(1) f est bijective,

(2) f est continue de X sur Y,

(3) f^{-1} est continue de Y sur X

S'il existe un homéomorphisme de X sur Y, on dit que X et Y sont **homéomorphes** ou bien **topologiquement équivalents** et on le note par $X \cong Y$.
Toute propriété **conservée** par un homéomorphisme est dite **propriété topologique**.

Exemple 3.31.

(1) Soit $X = (0,1)$ et $Y = (a,b)$ avec $a < b$ munis de la distance usuelle. La fonction $f : (0,1) \to (a,b)$ définie par la fonction linéaire $f(x) = a + (b-a)x$ est un homéomorphisme. La fonction réciproque est $f^{-1} : (a,b) \to (0,1)$ définie par la fonction linéaire $f^{-1}(x) = (y-a)/(b-a)$. Donc $(0,1)$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.

(2) Soit $X = (a,b)$ avec $a < b$ et $Y = \mathbb{R}$ munis de la distance usuelle sont homéomorphes. La fonction $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ définie par la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b}$ est un homéomorphisme.

(3) Soit (X, d_X) un espace métrique quelconque, alors la fonction identité $\mathrm{Id}_X : X \to X$ définie par $\mathrm{Id}_X(x) = x$ pour tout $x \in X$ est un homéomorphisme.

(4) La fonction $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ définie par $f(x) = x^2$ est un bijection continue et sa bijection réciproque est $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Donc f est un homéomorphisme.

(5) La fonction $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ définie par $f(x) = e^x$ est un bijection continue et sa bijection réciproque est $f^{-1}(x) = \ln x$. On a vue que $f(x) = e^x$ est une application ouverte mais elle n'est pas fermée.

Remarques :

(1) La relation "homéomorple" est une relation d'équivalence.

(2) Si f est un homéomorphisme, l'image réciproque et l'image directe de tout ouvert est un ouvert.

(3) Si f est un homéomorphisme, l'image réciproque et l'image directe de tout fermé est un fermé.

(4) Les application f et f^{-1} sont ouvertes et fermées.

(5) Un homéomorphisme établit une bijection entre les ouverts (resp. fermés) de X et ceux de Y.

(6) Une suite $x_n \to x$ dans X si et seulement si et seulement si $f(x_n) \to f(x)$ dans Y.

(7) Puisque $(0,1) \simeq \mathbb{R}$ alors la bornitude n'est pas une propriété topologique.

(8) Puisque $(0,\infty) \simeq \mathbb{R}$ alors la fermeture n'est pas une propriété topologique.

Attention ! Il est important de noter, cependant, que la continuité de f et l'existence de l'inverse ne sont pas suffisantes pour conclure que f est un homéomorphisme. La continuité de la fonction inverse est quelque chose qui doit être vérifié séparément. Il est entièrement possible pour qu'une fonction soit continue et bijective, mais d'avoir un inverse discontinue. En voici deux exemples.

Exemple 3.32. $f : [0,1] \cup (2,3] \to [0,2]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ x-1 & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

I est facile de vérifier que f est continue et bijective sur son domaine. Cependant

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & 0 \le y \le 1 \\ y+1 & 1 < y \le 2 \end{cases}$$

n'est pas continue quand $y = 1$.

Exemple 3.33. Soit l'identité $\mathrm{Id} : (\mathbb{R}, \delta) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Alors, $f(x) = \mathrm{Id}(x) = x$ est continue et bijective, mais f^{-1} n'est pas continue. Considérons $A = \{x\}$ qui est ouvert dans $(\mathbb{R}, \delta)$, mais $(f^{-1})(A) = A$ n'est pas ouvert dans $(\mathbb{R}, d_1)$.

Proposition 3.34. $\mathbb{R}$ *est homéomorphe à* $(-1,1)$.

Démonstration. La fonction $\phi(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est bijective et continue de $\mathbb{R}$ sur $(-1,1)$. Puisque $\phi^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$ on voit que ϕ^{-1} est continue de $(-1,1)$ sur $\mathbb{R}$, alors $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $(-1,1)$. ■

Remarque. Puisque $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $(-1,1)$, alors la bornitude (le fait qu'un espace est borné) **n'est pas** une propriété topologique.

Corollaire 3.35.
(a) $\mathbb{R}$ *est homéomorphe à* (a,b)*, où* $a,b \in \mathbb{R}$ *et* $a < b$*.*
(b) (a,b) *est homéomorphe à* (c,d)*, où* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ *et* $a < b, c < d$*.*

Proposition 3.36. *Si* $f : X \to Y$ *et* $g : Y \to Z$ *sont des homéomorphismes alors* $(g \circ f)$ *l'est aussi.*

Proposition 3.37. *Soit* $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ *une bijection. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) f *est un homéomorphisme.*

(2) f *est une application continue et ouverte.*

(3) f *est une application continue et fermée.*

(4) f^{-1} *est une application continue et ouverte.*

(5) f^{-1} *est une application continue et fermée.*

(6) f^{-1} *est un homéomorphisme.*

(7) $f(\mathbf{Adh}\, A) = \mathbf{Adh}[f(A)]$.

Démonstration.
(1) $\Leftrightarrow$ (2) $f^{-1} : Y \to X$ est continue est équivalent à dire que pour tout ouvert $U \subset X$ on a $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ est ouvert.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Puisque f est une bijection on applique proposition (3.12).

(2) $\Leftrightarrow$ (4) f continue est équivalent à l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X. Mais cela est exactement la définition de f^{-1} ouverte.

(4) $\Leftrightarrow$ (5) Puisque f est une bijection on applique proposition (3.12).

(1) $\Leftrightarrow$ (6) évident.

(1) $\Leftrightarrow$ (7) La continuité de f entraine que $f(\mathbf{Adh}\, A) \subset \mathbf{Adh}[f(A)]$. Puisque f est fermée alors $f(\mathbf{Adh}\, A)$ est fermé et $f(A) \subset f(\mathbf{Adh}\, A)$. De plus on a que on a $\mathbf{Adh}[f(A)]$ est le plus petit fermé contenant $f(A)$ donc $f(A) \subset \mathbf{Adh}[f(A)] \subset f(\mathbf{Adh}\, A)$. ∎

Proposition 3.38. *Si* $I \subseteq \mathbb{R}$ *est un intervalle et si* $f : I \to \mathbb{R}$ *est continue et strictement monotone, alors* I *et* $f(I)$ *sont homéomorphes.*

Démonstration. On fait la démonstration dans le cas ou $I = (a,b)$. Puisque f est strictement monotone alors f est injective donc $f : I \to f(I)$ est une bijection continue. Puisque f est ouverte alors $f(I) = (c,d)$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Mais $I = (a,b)$ est homéomorphe à $f(I) = (c,d)$. ∎

Remarque : La proposition reste vraie si $I = \mathbb{R}$.

Proposition 3.39. *Supposons que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est une application continue et soit $\Gamma(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ le graphe de f. Alors, $g : X \to X \times Y$ définie par $g(x) = (x, f(x))$ est un homéomorphisme entre X et Γ_f.*

Démonstration. Soit $h : \Gamma_f \to X$ la fonction définie par $h(x, f(x)) = x$. h est une restriction de la projection $p_X : X \times Y \to X$ sur Γ_f qui est continue donc h est continue. De plus notons que :

$$(g \circ h)(x, (f(x)) = g[h(x, f(x))] = g(x) = (x, f(x))$$

et

$$(h \circ g)(x) = h[g(x)] = h[(x, f(x))] = x$$

qui donne que $(g \circ h) = 1_{\Gamma_f}$ et $(h \circ g) = 1_X$ donc $g = h^{-1}$ et $h = g^{-1}$. Cela entraine que g un homéomorphisme entre X et Γ_f. ■

Exemple 3.40. $\mathbb{R}$ et $A = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ sont homéomorphes car A est le graphe de la fonction $f(x) = x^2$.

Proposition 3.41. *Supposons que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est un homéomorphisme et $A \subset X$ tel que $f(A) = B$. Alors les restrictions, $g = f|_A : A \to B$ et $h = f|_{X \setminus A} : X \setminus A \to Y \setminus B$ sont aussi des homéomorphismes.*

Démonstration. La démonstration est laissée au lecteur comme exercice. ■

3.3 Métriques équivalentes

Définition 3.42. Soient d et d' deux métriques de X.

(1) On dit que d et d' sont **topologiquement équivalentes** si l'identité $Id : (X, d) \to (X, d')$ est un homéomorphisme. Il est donc indifférent, topologiquement parlant, de travailler avec l'une ou l'autre des distances. En particulier, deux distances sont topologiquement équivalentes si et seulement si toute suite convergente pour une distance est convergente vers la même limite pour l'autre distance.

(2) On dit que les distances d et d' sont **Lipschitz-équivalentes** s'ils existent des constantes positives h, k tel que pour tout $x, y \in X$,

$$hd'(x, y) \leq d(x, y) \leq kd'(x, y).$$

(3) Si X est un espace vectoriel, on dit que les normes N et N' sont **deux normes équivalentes** s'ils existent des constantes $h, k > 0$ tel que pour tout $x \in X$,

$$hN'(x) \leq N(x) \leq kN'(x).$$

Définition 3.43. Une application $g : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+$ est dite sous-additive si pour tout $x, y \in \mathbb{R}+$ on a :

$$g(x+y) \leq g(x) + g(y)$$

Exemple 3.44.

(a) $g(x) = |x|$

(b) $g(x) = |\sin x|$

(c) $g(x) = ax + b, b > 0$

(d) $g(x) = \arctan(|x|)$

(e) $g(x) = \ln(1+x), x \geq 0$

(f) $g(x) = \dfrac{x}{1+x}, x \geq 0$

Proposition 3.45. *Si (X, d) est un espace métrique et $g : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+$ est une fonction positive, croissante et concave, alors $f(|x|)$ est sous-additive.*

Proposition 3.46. *Si (X, d) est un espace métrique et $g : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+$ est une fonction croissante, sous-additive et ne s'annulant qu'en 0, alors $(g \circ d)$ est une distance sur X.*

Corollaire 3.47. *Si (X, d) est un espace métrique alors*

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

est une distance équivalente à d sur X et $d'(x,y) < 1$.

Démonstration. Considérons la fonction $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$ pour $x \geq 0$. La fonction g possède l'hypothèse de la proposition précédente. Donc $d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ est une métrique sur X. Pour l'équivalence des métriques on note que $d(x,y) = \dfrac{d'(x,y)}{1-d'(x,y)}$, donc $d(x_n, x) \to 0$ si et seulement si $d'(x_n, x) \to 0$. ■

Proposition 3.48.

(1) *Les métriques Lipschitz-équivalentes sont topologiquement équivalentes*

(2) *Deux normes sont équivalentes si et seulement si leurs distances correspondantes sont équivalentes.*

(3) *Si d et d' sont équivalentes, alors (X, d) et (X, d') ont la même topologie.*

Exemple 3.49.

(1) Dans $X = \mathbb{R}^2$ on a

$$\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leq 2\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|$$

donc d_1 et d_∞ sont equivalentes sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Généralement si $X = \mathbb{R}^n$ et d_1, d_2, d_∞ sont les distances définies dans l'exemple 2.5 alors

$$d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq nd_\infty(x,y)$$

Donc d_1, d_2, d_∞ sont des métriques equivalentes sur $\mathbb{R}^n$.

(3) Si $X = \mathbb{R}^n$ alors la distance Euclidienne d_2 et la distance discrète δ ne sont pas equivalentes.

(4) Si (X, d) est un espace métrique et $d'(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ alors d et d' sont équivalentes sur X.

3.4 Continuité uniforme

Définition 3.50. Soient (X, d) et (Y, d') deux espace métriques et $f : X \to Y$.

(a) On dit que f est **uniformément continue** si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $d'(f(x), f(a)) < \epsilon$ pour tout $x, a \in X$ tels que $d(x, a) < \delta$.

(b) On dit que f est k-lipschitzienne si et seulement si il existe $k > 0$ tel que pour tout $x, a \in X$, $d'(f(x), f(a)) < kd(x, a)$.

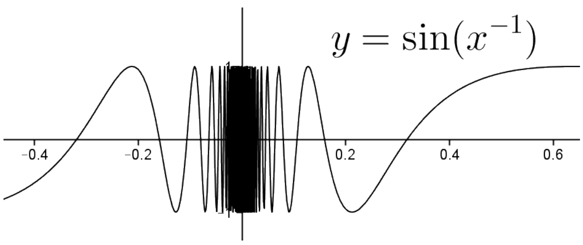
Remarques :

(1) Quelle est la différence entre continuité et continuité uniforme ?
Dans la définition de la continuité en un point x_0, le δ dépend de x_0. Dans la définition de la continuité uniforme, ce δ ne dépend plus de x_0. Il est le même quel que soit x_0 dans X. Cette uniformité fait des fonctions uniformément continues des fonctions plus souples d'utilisation que les fonctions continues.

(2) Toute fonction uniformément continue est continue, mais pas réciproquement.

Exemple 3.51. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est continue mais pas uniformément continue. En effet, pour tout $\delta > 0$, considérons $x = n \in \mathbb{N}$ et $y = n + \delta$. On aura $|f(x) - f(y)| = (n + \delta)^2 - n^2 = 2n\delta + \delta^2 > 2n\delta$, et cela peut être fait aussi grand que l'on veut, peu n'importe quelle petite valeur de δ.

Exemple 3.52. La fonction $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x^{-1})$ est continue mais n'est pas uniformément continue. Si $\delta > 0$, alors il existent des points $s, t \in (0, \delta)$ avec $f(s) = -1$ et $f(t) = 1$, de sorte que $|f(s) - f(t)| = 2$, même si $|s - t| < \delta$.



Proposition 3.53. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et à dérivée bornée avec $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$. Alors, f est M-lipschitzienne.*

Démonstration.

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_y^x f'(t)\ dt \right| \leq \int_y^x \left| f'(t) \right|\ dt \leq M|x - y|.$$

Donc f est M-lipschitzienne. ■

Proposition 3.54.

(a) *Si f est uniformément continue alors f est continue.*

(b) *Toute fonction k-lipschitzienne est uniformément continue.*

(c) *La fonction identité Id_X est uniformément continue.*

(d) *Si f et g sont uniformément continues alors $(g \circ f)$ est aussi.*

On a donc ;

$$f \text{ lipschitzienne } \Longrightarrow f \text{ uniformément continue } \Longrightarrow f \text{ continue}$$

Exemple 3.55. Soit X un espace métrique, $A \subseteq X$ et $f : X \to \mathbb{R}+$ définie par $f(x) = \mathrm{dist}(x, A)$. On montrera dans les exercices que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$. Donc f est 1-lipschitzienne qui entraine qu'elle est uniformément continue.

3.5 Exercices

1. Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espace métriques et $f : X \to Y$. Montrer les assertions suivantes :

(a) f est continue en x_0 si et seulement si pour tout voisinage V de $f(x_0)$ il existe un voisinage V' de x_0, tel que $f(V') \subset V$.

(b) f est continue en x_0 si et seulement si pour tout voisinage V de $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0.

(c) La fonction $\mathrm{Id}_X(x) = x$ est continue.

(d) Toute fonction constante de X dans Y est continue.

(e) La composée de deux fonctions continues est continue.

(f) Si (X, d_X) est discret alors f est continue.

(g) Si f est continue et $A \subset X$, alors la restriction $f_{|}A : A \to Y$ est continue. La réciproque est fausse.

2. Si (X, d) un espace métrique, $f : B(a; r) \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $x = a$ avec $f(a) = 0$, et $g : B(a; r) \to \mathbb{R}$ est fonction bornée (pas nécessairement continue), alors le produit fg est continue en $x = a$.

3. Soit X un espace métrique et $A \subset X$ est un voisinage de x_0, montrer que la restriction $f|_A : A \to Y$ est continue en x_0 si et seulement si f est continue en x_0.

4. Soit X un espace métrique et $f : X \to \mathbb{R}$, $A = (-\infty, a)$ et $B = (b, \infty)$. Montrer que f est continue si et seulement si $f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(B)$ sont des ouverts de X.

5. Soit $f : X \to Y$ une fonction continue et F est un ouvert de X. Montrer par un contre exemple que $f(F)$ n'est pas nécessairement un fermé de Y.

6. Soient X, Y deux espaces métriques, $A \subseteq X$ et $f : X \to Y$. Montrer que f est continue si et seulement si $f(\mathbf{Adh}\, A) \subseteq \mathbf{Adh}[f(A)]$

7. Soient X, Y deux espaces métriques, $A \subseteq X$ et $f : X \to Y$. Montrer que f est continue si et seulement si pour toute partie B de Y, $f^{-1}(\mathbf{Int}\, B) \subseteq \mathbf{Int}\, f^{-1}(B)$.

8. Montrer que la fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $(x, y) \mapsto x + y$ (addition de deux vecteurs) est continue.
INDICATION: *Utiliser proposition 3.5.*

9. Montrer que la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $(t, x) \mapsto tx$ (multiplication par un scalaire) est continue.

10. Monter que si (X, d) est un espace métrique, $a \in X$, $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = d(x, a)$, alors f est continue et $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$.

11. Monter que si (X, δ) est un espace métrique discret, les seules fonctions continues de $[0, 1]$ dans (X, δ) sont les fonctions constantes.

12. Montrer qu'une bijection $f : X \to Y$ est ouverte si et seulement si elle est fermée.

13. Montrer que la projection $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\pi_1(x_1, x_2) = x_1$ est continue, ouverte mais n'est pas fermée.

14. Soient $X = (\mathbb{R}, \delta), Y = (\mathbb{R}, d), f = \mathrm{Id}_X : X \to Y$ et $g = \mathrm{Id}_Y : Y \to X$. Montrer que :
(1) f est continue mais n'est ni ouverte ni fermée.
(2) g n'est pas continue mais elle est ouverte et fermée.
Noter que cela montre que la réciproque d'une fonction continue et bijective n'est pas nécessairement continue.

15. Montrer que la projection $p_X : (X \times Y, d_{X\times Y}) \to (X, d_X)$ définie par $p_X(x, y) = x$ est continue.

16. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Pour $x \in X$; $d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$.

(a) Montrer que si $x, y \in X$ alors $|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leq d(x, y)$.

(b) En déduire que la fonction $f(x) = d(x, A)$ est continue.

(c) Monter que $\mathbf{Adh}\, A = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$

(d) On suppose $x_0 \notin A$. Trouver deux ouverts U et V qui séparent x_0 et A c.a.d. tels que $x_0 \in U, A \subset V$ et $U \cap V = \varnothing$.

17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie par $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Indication : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

18. Montrer que si (X, d_X) un espace métrique alors la diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ est fermé dans $X \times X$.

19. Montrer que si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue, alors le graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$.

20. Proposition (**??**). Montrer que si $f, g : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ sont des applications continues, alors l'ensemble $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.

21. (**Théorème de catégorie de Baire)** Supposons que A, B sont des ouverts dense dans X. Montrer que $A \cap B$ est dense et ouvert dans X.

22. Soit (X, d) un espace métrique et $\mathrm{Id}_X : X \to X$ l'identité définie par $\mathrm{Id}_X(x) = x$ pour tout $x \in X$. Montrer que Id_X est un homéomorphisme.

23. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ continues. Montrer que si $g \circ f$ est un homéomorphisme et si f est surjective alors f et g sont des homéomorphismes.

24. Supposons que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est un homéomorphisme et $A \subset X$ tel que $f(A) = B$. Alors les restrictions, $g = f|_A : A \to B$ et $h = f|_{X\setminus A} : X \setminus A \to Y \setminus B$ sont aussi des homéomorphismes.

25. Soient $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$. Montrer que f est un homéomorphisme.

26. Montrer que $(-1, 1)$ et la parabole $y = x^2$ sont homéomorphes.

27. Montrer qu'un cercle et une ellipse sont homéomorphes.

28. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ continues. Montrer que si $(g \circ f)$ est un homéomorphisme et si f est surjective alors f et g sont des homéomorphismes.

29. Soient $f : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ définie par $f(x) = \tan^{-1}(x) = \arctan(x)$. Montrer que f est uniformément continue.

30. Montrer les propositions suivantes :

(a) Si f est uniformément continue alors f est continue.

(b) Toute fonction k-lipschitzienne est uniformément continue.

(c) La fonction identité Id_X est uniformément continue.

(d) Si f et g sont uniformément continues alors $(g \circ f)$ est aussi.

31. Montrer les propositions suivantes :

(a) Deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes.

(b) Deux normes équivalentes induisent deux distances équivalentes.

(c) Deux distances sont topologiquement équivalentes si et seulement si toute suite convergente pour une distance est convergente vers la même limite pour l'autre distance.

32. Montrer que si $X = \mathbb{R}^n$ et d_1, d_2, d_∞ sont les distances définies dans l'exemple 2.5 alors

$$d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y)$$

33. Supposons que X est espace métrique qui possède deux distance d et d', tel que pour tout $x_1, x_2 \in X$ et il existe une constante positive k

$$d(x_1, x_2) \leq k d'(x_1, x_2)$$

(a) Monter que $B_d(x; r/k) \subseteq B_{d'}(x; r)$ pour tout $x \in X$ et $r > 0$.

(b) Déduire que tout d-ouvert est d'-ouvert.

4 Espaces métriques complets

4.1 Les Suites dans un espace métrique

Rappelons que tout au long du chapitre (X, d) est un espace métrique donné. Dans cette section, nous allons discuter les suites numériques comme une extension du même concept rencontré dans le cours d'analyse élémentaire.
Une suite (x_n) est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: $n \mapsto x_n$.

Définition 4.1. Une suite (x_n) dans $\mathbb{R}$ converge vers x si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre naturel N tel que si $n \geq N$, alors $|x_n - x| < \epsilon$.
On note $x_n \to x$ ou bien $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

L'extension de cette définition sur un espace métrique (X, d) devient ;

Définition 4.2. Une suite (x_n) dans (X, d) converge vers x si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre naturel N tel que si $n \geq N$, alors $d(x_n, x) < \epsilon$.

Remarques.

1. Nous signalons que la valeur de N dans la définition dépend de la valeur de ϵ.

2. Le fait que $d(x_n, x) < \epsilon$ pour $n \geq N$, veut dire la boule ouverte $B(x; \epsilon)$ contient $x_N, x_{N+1}, \ldots$. Donc cette boule contient une infinité des éléments de la suite (x_n). Il y a donc un nombre fini des éléments de la suite (x_n), soient $\{x_1, \ldots, x_{N-1}\}$ à l'extérieur de la boule $B(x; \epsilon)$.

Proposition 4.3. *La limite d'une suite convergente dans un espace métrique est unique.*

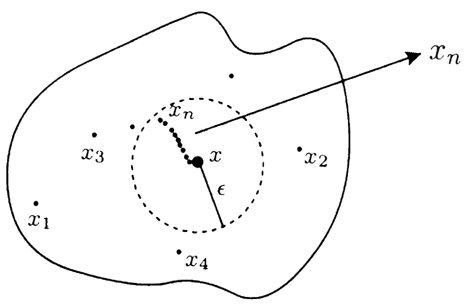


FIGURE 4.1 – $B(x; \epsilon)$ contient une infinité des éléments de la suite (x_n)

Exemple 4.4.

(a) Soit $X = \mathbb{R}$, la suite $(1 + e^{-n})_n$ converge vers 1, c.a.d. $\lim_{n\to\infty}(1 + e^{-n}) = 1$.

(b) Soit (X, d) l'espace métrique discret, alors une suite (x_n) dans X converge vers x si et seulement s'il existe N tel que $x_n = x$ quand $n \geq N$.

(c) Si (Z, d) est le produit cartésien des deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y), alors la suite (x_n, y_n) de Z converge vers (x, y) si et seulement si $x_n \to x$ et $y_n \to y$.

La valeur des suites et le concept de convergence commence faire surface dans la proposition suivante. Cette proposition nous donne une nouvelle caractérisation d'une partie fermée et éventuellement l'adhérence d'une partie d'un espace métrique.

Proposition 4.5. *Le sous-ensemble F de X est fermé si et seulement toute suite (x_n) de F telle que $x_n \to x$, alors $x \in F$.*

Démonstration. Tout d'abord supposons que F est fermé, que (x_n) est une suite d'éléments de F, et $x_n \to x$. Si $x \notin F$, alors le fait $X \setminus F$ est ouvert signifierait qu'il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset X \setminus F$. Mais il y aurait alors un N de telle sorte que pour $n \geq N, d(x_n, x) < r$, c'est-à-dire $x_n \in B(x; r) \subset X \setminus F$, qui est une contradiction au fait que $\{x_n\} \in F$. Donc x doit être un élément de F.
Maintenant supposons que $x_n \to x$, où $x_n, x \in F$. On veut montrer que F est fermé. Si $x \in \mathbf{Adh}\, F$, alors selon la proposition 2.39, $B(x; r) \cap F \neq \varnothing$ pour chaque $r > 0$. En particulier, pour chaque n il existe $x_n \in B(x; n^{-1}) \cap F$. Donc (x_n) est une suite de F avec $d(x_n, x) < n^{-1}$, alors $x_n \to x$, et donc $x \in F$. Donc $\mathbf{Adh}\, F \subseteq F$ qui prouve que F est fermé. ■

Remarque. Les parties fermées d'un espace métrique sont celles qui contiennent les limites de leurs suites convergentes.

Définition 4.6. Soit (x_n) une suite dans (X, d), alors une suite extraite (sous-suite) de (x_n) est une autre suite obtenue en ne prenant que certains éléments (une infinité) de la suite de départ. On la note $(x_{\varphi(n)}) = \{x_{\varphi(1)}, x_{\varphi(2)}, \ldots\}$, où $\varphi(1) < \varphi(2) < \cdots$. Par exemple si (x_n) est une suite dans (X, d) et $\varphi(n) = n^2$, alors $(x_{n^2}) = \{x_1, x_4, x_9, \ldots\}$ est une sous-suite de (x_n).

Lemme 4.7. *Soit A une partie de l'espace métrique X, et x un point d'accumulation de A, alors il existe une suite de nombres positifs $\{\epsilon_n\}$ et une suite de point distincts $(a_n)_n$ dans A, tel que : (i) $\epsilon_n \leq n^{-1}$; (ii) $a_n \neq x$; (iii) $d(x, a_n) < \epsilon_n$.*

Théorème 4.8. *Soit A une partie de l'espace métrique X.*

(a) *Un point x est un point d'accumulation de A si et seulement s'il existe une suite de points dans A qui converge vers x.*

(b) $\mathbf{Adh}\, A = A \cup \{x : x \textit{ est un point d'accumulation de} A\} = A \cup A'$.

(c) *A est fermé si et seulement si A contient tous ces points d'accumulations.*

Démonstration.

(a) Supposons que (a_n) est une suite de points distincts de A tel que $a_n \to x$. Si $\epsilon > 0$, alors il existe N tel que $a_n \in B(x;\epsilon)$ pour $n > N$. Puisque les points a_n sont distincts, il existe au moins un point différent de x. Donc x est un point d'accumulation. Maintenant supposons que x est un point d'accumulation de A. On utilise lemme 4.7, pour finir la démonstration de la partie (a).

(b) Soit $B = A \cup \{x : x \text{ est un point d'accumulation de} A\}$ selon proposition 4.5 on a que $B \subset \mathbf{Adh}\, A$. D'autre part si $x \in \mathbf{Adh}\, A$ selon proposition 4.5 il existe une suite $(a_n)_n$ dans A tel que $a_n \to x$. Si a_n contient un nombre infini de points distincts alors il existe une sous-suite (a_{n_k}) de termes distincts et en utilisant partie (a) x est un point d'accumulation, donc $x \in A$. Si a_n contient un nombre fini de termes distincts alors $a_{n_k} = x$ pour toutes les valeurs de $k \geq 1$, et donc $x \in A$.

(c) La partie (c) est évidente à partir de (b).

■

Remarque :
Soit (x_n) une suite de points de (X, d). Si a est un point d'accumulation (une valeur d'adhérence) de (x_n) alors il satisfait l'une les propriétés suivantes, qui sont toutes équivalentes :

(1) Tout voisinage de a contient une infinité de points de la suite (x_n).

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbf{Adh}\{x_k, k \geq n\}$

(3) $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{Adh}\{x_k, k \geq n\}$

Définition 4.9. Si $A \subseteq X$ et $x \in X$, alors la distance de x à A est

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Il est clair que, lorsque $x \in A, \operatorname{dist}(x, A) = 0$. Mais il est possible que la distance d'un point à un ensemble soit 0 lorsque le point n'est pas dans A.

Proposition 4.10. *Si $A \subseteq X$, alors* $\mathbf{Adh}\, A = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, A) = 0\}$.

Démonstration. Si $x \in \mathbf{Adh}\, A$, alors il existe une suite (a_n) dans A tel que $a_n \to x$. Donc $d(x, a_n) \to 0$, et il s'ensuit que $\operatorname{dist}(x, A) = 0$.
Si $\operatorname{dist}(x, A) = 0$, alors il existe une suite $\{a_n\}$ dans A tel que $d(x, a_n) \to 0$. Donc, $a_n \to x$, et $x \in \mathbf{Adh}\, A$. ■

Exemple 4.11. Si $X = \mathbb{R}$, l'ensemble $A = \{1 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ représente est une suite bornée dans X. On a $x_{2n} \to 2$ et $x_{2n+1} \to 0$ donc $d(A, 2) = d(A, 0) = 0$ et $\{0, 2\} \in \mathbf{Adh}\, A$.

4.2 Suite de Cauchy et complétude

Définition 4.12.

(a) Une suite (x_n) de X est une **suite de Cauchy** si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $m, n > N$ alors $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

(b) L'espace métrique (X, d) est dit **complet** si toute suite de Cauchy dans (X, d) est convergente.

(c) Un espace normé complet est dit **espace de Banach**. Dans tel espace pour monter qu'une suite est convergente il suffit de monter qu'elle est de Cauchy, qui ne demande pas la connaissance de la limite.

Exemple 4.13.

(1) La suite $(1/n)$ est une suite de Cauchy dans $A = (0, 1)$ car $|1/m - 1/n| \to 0$ quand $m, n \to \infty$, cependant $1/n \to 0 \notin A$.

(2) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet car toute suite de Cauchy est convergente dans $\mathbb{R}$.

(3) $A = (0, 1)$ n'est pas complet car la suite de Cauchy $(1/n)$ ne converge pas dans A.

(4) $\mathbb{Q}$ n'est pas complet car la suite définie par $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$; $x_1 = 2$ est une suite de $\mathbb{Q}$ qui converge vers $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

(5) Soit (x_n) une suite de Cauchy dans l'espace métrique discret (X, δ). Puisque $\delta(x_m, x_n) < \epsilon \Rightarrow x_m = x_n$ alors la suite a la forme $(x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_N, x, x, \ldots)$ donc est convergente. Tout espace métrique discret est alors complet.

(6) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Banach.

Rappelons qu'un ensemble est borné si son diamètre est fini.

Proposition 4.14.

(a) *Tout sous-ensemble A de (X, d) est borné si et seulement si pour tout x dans X il existe $r > 0$ tel que $A \subseteq B(x, r)$.*

(b) *L'union d'un nombre fini d'ensembles bornés est bornée.*

Démonstration.

(a) Si $A \subseteq B(x; r)$, alors $\operatorname{diam} A \leq 2r$; donc A est borné.
Inversement, supposons que A est borné et $\operatorname{diam} A = \delta$. Soit $x \in X$ et $a_0 \in A$. Pour tout point $a \in A$ on a $d(x, a) \leq d(x, a_0) + d(a_0, a) \leq d(x, a_0) + \delta$. Si on pose $r = 2[d(x, a_0) + \delta]$, alors $A \subseteq B(x; r)$.

(b) Si A_k sont bornés pour $1 \leq k \leq n$ et $x \in X$, alors soit $r_k > 0$ tel que $A_k \subseteq B(x; r_k)$. Si on pose $r = r_1 + \cdots + r_n$, alors $A_1 \cup \cdots \cup A_n \subseteq B(x; r)$.

■

Théorème 4.15. *Soit (X, d) un espace métrique, alors*

(a) *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

(b) *Toute suite de Cauchy est bornée.*

(c) *Toute sous suite de Cauchy est de Cauchy.*

(d) *Tout suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente est convergente.*

Démonstration.

(a) En fait si $x_n \to x$ et $\epsilon > 0$, alors on choisi N tel que $d(x, x_n) < \epsilon/2$. Alors, quand $m, n > N$, $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \epsilon$.

(b) Si (x_n) est une suite de Cauchy, alors il existe $N \geq 1$ tel que $d(x_n, x_m) < 1$ pourvu que $m, n \geq N$. Si $A = \{x_1, \ldots, x_N\}$ et $B = \{x_n : n > N\}$, alors $(x_n) = A \cup B$. A est borné car c'est un ensemble fini et B est borné car $\operatorname{diam} B \leq 1$, donc $(x_n) = A \cup B$ est borné.

(c) Évident.

(d) Supposons que $x_{n_k} \to x$, et soit $\epsilon > 0$. On choisi un nombre naturel N_1 tel que $d(x_{n_k}, x) < \epsilon/2$ pour $n_k \geq N_1$, et on choisi un nombre naturel N_2 tel que $d(x_n, x_m) < \epsilon/2$ quand $m, n \geq N_2$. Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$, et soit $n \geq N$. On choisi $n_k \geq N$. Puisque on a que $n_k \geq N_1$ et $n, nk > N_2$, on aura que

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

■

Remarques :

- Les espaces complets sont ceux ou les suites convergentes sont les suites de Cauchy.
- Les réciproques de (1) et (2) sont évidement fausses.

Exemple 4.16.

(1) Si $X = (0, 1)$, la suite $\left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est une suite de Cauchy dans X dont la limite est égale à 0 qui n'est pas dans X.

(2) Si $X = \mathbb{R}$, la suite $\{1 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ est une suite bornée dans X mais n'est pas de Cauchy.

La vertu de la notion d'être Cauchy, lorsque l'espace est complet, c'est que vous savez la limite existe sans avoir à produire cette limite.

Proposition 4.17. *Si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ uniformément continue et (x_n) est une suite de Cauchy dans (X, d_X), alors $(f(x_n))$ est de Cauchy dans (Y, d_Y).*

Proposition 4.18. *Si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est un homéomorphisme et si (Y, d_Y) est complet, alors (X, d_X) est complet.*

Proposition 4.19. *Soient d_1 et d_2 deux métriques Lipschitz équivalentes sur X. Alors, (X, d_1) est complet si et seulement si (X, d_2) est complet.*

Théorème 4.20 (Théorème de Cantor). *Un espace métrique (X, d) est complet si et seulement si chaque fois que F_n est une suite de sous-ensembles non vides satisfaisant :*

(1) *chaque F_n est fermé ;*

(2) $F_1 \supseteq F_2 \ldots \supseteq F_k \supseteq F_{k+1} \ldots$*;*

(3) $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$*,*

alors $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ *est un singleton.*

Démonstration. Supposons (X, d) est complet et $\{F_n\}$ satisfait les conditions du théorème. Pour chaque n soit $x_n \in F_n$. Si $\epsilon > 0$, soit N tel que $\operatorname{diam} F_n < \epsilon$ pour $n > N$. Donc, si $m, n > N$, alors (ii) implique que $x_m, x_n \in F_N$ et donc $d(x_m, x_n) \leq \operatorname{diam} F_N < \epsilon$. Ainsi x_n est une suite de Cauchy qui converge vers x parce que X est complet. Puisque les F_n sont fermés alors $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. S'il y a un autre point $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, alors $d(x, y) \leq \dim F_n$ pour chaque $n \geq 1$. Selon (iii) $\operatorname{diam} F_n \to 0$ donc $x = y$.
Supposons que (X, d) satisfait les conditions énoncées et que (x_n) est une suite de Cauchy. Soit $F_n = \mathbf{Adh}\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$.Il est clair que, (i) et (ii) sont satisfaites. Si $\epsilon > 0$, alors soit N tel que $d(x_m, x_n) < \epsilon$ quand $m, n \geq N$. Mais quand $k \geq N, \operatorname{diam} F_k = \sup\{d(x_m, x_n) : m, n \geq k\} \leq \epsilon$. Ainsi la suite $\{F_n\}$ satisfait condition (iii), donc $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$. Mais pour $n \geq 1, d(x, x_n) \leq \operatorname{diam} F_n \to 0$. Donc, $x_n \to x$ c.a.d. que (X, d) est complet. ∎

Corollaire 4.21. $(\mathbb{R}, d)$ *avec $d(x, y) = |x - y|$ est complet.*

Démonstration. Soit $\{F_n\}$ une suite de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ satisfaisant les trois conditions dans le théorème précédant. Puisque chacun à un diamètre fini, ils sont bornés. Utilisant l'axiome de complétude de $\mathbb{R}$, $a_n = \inf F_n$ et $b_n = \sup F_n$ existent. Puisque F_n sont fermés, alors $a_n, b_n \in F_n$ et donc $0 \leq b_n - a_n \leq \operatorname{diam} F_n \to 0$. Puisque $F_{n+1} \subseteq F_n$, il s'en suit que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Les suites $\{a_n\}$ et $\{a_n\}$ sont donc monotones et bornées qui doivent converger. Ils existent donc des points $a, b \in F_n$ tels que $a_n \to a$ et $b_n \to b$ Donc $|b - a| \leq \operatorname{diam} F_n \to 0$, donc $a = b$. Donc, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$. Par le théorème de Cantor, $\mathbb{R}$ est complet. ∎

Proposition 4.22. *Si (X, d_X) est un espace métrique complet et $A \subseteq X$, alors Le sous-espace métrique (A, d_A) est complet si et seulement si A est fermé dans X.*

Remarque. *Dans les espaces métriques complets, les parties complètes pour la métrique induite sont exactement les parties fermées.*

Il n'est pas difficile de trouver des exemples d'espaces métriques qui ne sont pas complets. Par exemple en utilisant la proposition précédente nous pouvons considérer n'importe quel sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'est pas fermé.

Exemple 4.23.

(1) $(a, b), (a, \infty), (-\infty, b)$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas complets dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

(2) $[a, b], [a, \infty)$ et $(-\infty, b]$ sont complets dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

(3) L'espace $(\mathcal{B}(D, \mathbb{R}), d_\infty)$ des fonction réelles bornées sur le domaine D, avec sup métrique d_∞, est complet.
$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)|$$

Proposition 4.24.

(a) *Le produit de deux espaces métriques $(X, d_X), (Y, d_Y)$ est complet si et seulement si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont complets.*

(b) *Le produit d'un nombre fini d'espaces métriques est complet si et seulement si tous ses facteurs sont complets.*

Exemple 4.25.

(1) $(\mathbb{R}^n, d_2)$ muni de la distance euclidienne est complet.

(2) $(\mathbb{C}^n, d_2)$ muni de la distance euclidienne est complet.

(3) (ℓ^2, d_2) est complet.

Attention. La complétude **n'est pas** une propriété topologique.
On a vu dans le corollaire (3.35) que $\mathbb{R}$ et $X = (a, b)$ sont homéomorphes. Cependant dans cette section on a vu que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet mais $(X, |\cdot|)$ n'est pas complet. Donc la complétude n'est pas une propriété topologique.

4.3 Théorème du point fixe

Définition 4.26. Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \to X$. On dit que f est une application contractante (ou simplement une contraction) si et seulement s'il existe $0 < k < 1$ tel que pour tout $x, y \in X$,
$$d(f(x), f(y)) < kd(x, y).$$

Donc une contraction est k-lipschitzienne avec $0 < k < 1$.

Corollaire 4.27. *Si $X \subseteq \mathbb{R}$ alors $f : X \to X$ avec $|f'| < k < 1$ est une contraction.*

Démonstration. Voir proposition 3.53 ■

Proposition 4.28. *Toute contraction sur un espace métrique X est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et posons $\delta = \epsilon/k$. Pour $x, y \in X$ tel que $d(x, y) < \delta$ on a $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) < \epsilon$ ■

Le théorème qui suit est très important et est un des théorèmes qui a le plus d'applications dans l'analyse.

Théorème 4.29 (Théorème du point fixe-Banach 1922).
Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une contraction. Alors, il existe un point unique $a \in X$ tel que $f(a) = a$. De plus, si $x_0 \in X$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, alors

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \quad et \quad d(a, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, f(x_0))$$

Démonstration. Supposons que f est une contraction, alors il existe $k \in (0, 1)$ tel que pour pour $x, y \in X$, on a $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$.
Pour l'unicité, supposons que a et a' sont deux point fixes de f, alors

$$d(a, a') = d(f(a), f(a')) \leq kd(a, a').$$

Ce qui est possible que si $d(a, a') = 0$, donc $a = a'$.
Si $x_0 \in X$ et $(x_n)_n$ est la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$. Alors pour tout $n \geq 1$ on a

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1}) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \leq k^n d(x_1, x_0).$$

On en déduit que si $m = n + p$,

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &= d(x_{n+p}, x_n) \\
&= d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\
&\leq (k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \cdots + k^n) d(x_1, x_0) \\
&\leq k^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{p-1} k^i \\
&\leq k^n \frac{(1-k^p)}{1-k} d(x_1, x_0) \text{ puisque } 1 - k^p < 1 \text{ on obtient} \\
&< \frac{k^n}{1-k} d(x_0, f(x_0)) \to 0 \text{ quand } n \to \infty \text{ car } k \in (0, 1).
\end{aligned}$$

La suite (x_n) est donc de Cauchy, et comme X est complet, il existe $a \in X$ tel que $x_n \to a$. Or f est uniformément continue (car Lipschitzienne) donc $f(x_n) \to f(a)$.

Mais $x_{n+1} = f(x_n)$, en passant à la limite, on obtient $a = f(a)$ et donc a est un point fixe de f. ■

Remarques :

(a) Le théorème du point fixe est aussi connu comme théorème de l'application contractante.

(b) Le théorème du point fixe de Banach est un outil très utilisé pour démontrer l'existence de solutions pour les problèmes de Cauchy associes à des équations différentielles ordinaires (EDO) ou même à des équations aux dérivées partielles (EDP).

(c) L'hypothèse $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ n'implique pas que f est une contraction.

(d) L'hypothèse X complet est fondamentale. Par exemple, si $X = (0, 1)$ et $f(x) = x/3$, alors f est contractante et n'a pas de point fixe dans X.

(e) Cette méthode des itérations est un excellent outil de calcul numérique des valeurs approchées du point fixe.

(f) La méthode des itérations de Banach est généralement très lente pour trouver une approximation du point fixe.

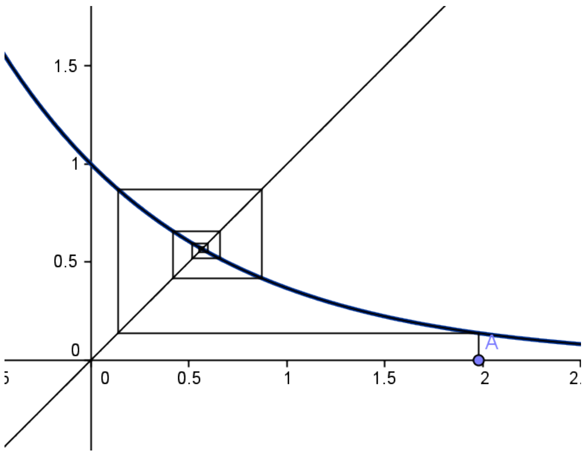


FIGURE 4.2 – Itérations du point fixe $e^{-x} = x$

Exemple 4.30. Trouver le nombre des solutions de l'équation $\cos x = x$.
Posons $f : X \to X$ ou $f(x) = \cos x$ et $X = [-1, 1]$. X est complet car il est fermé dans $\mathbb{R}$ et $|f'(x)| \le k \le 1$. Le théorème des accroissements finis implique que pour tout $x, y \in X$

$$|f(x) - f(y)| \le k|x - y|.$$

Il s'en suit que l'équation $\cos x = x$ admet une seule solution d'après le théorème du point fixe.

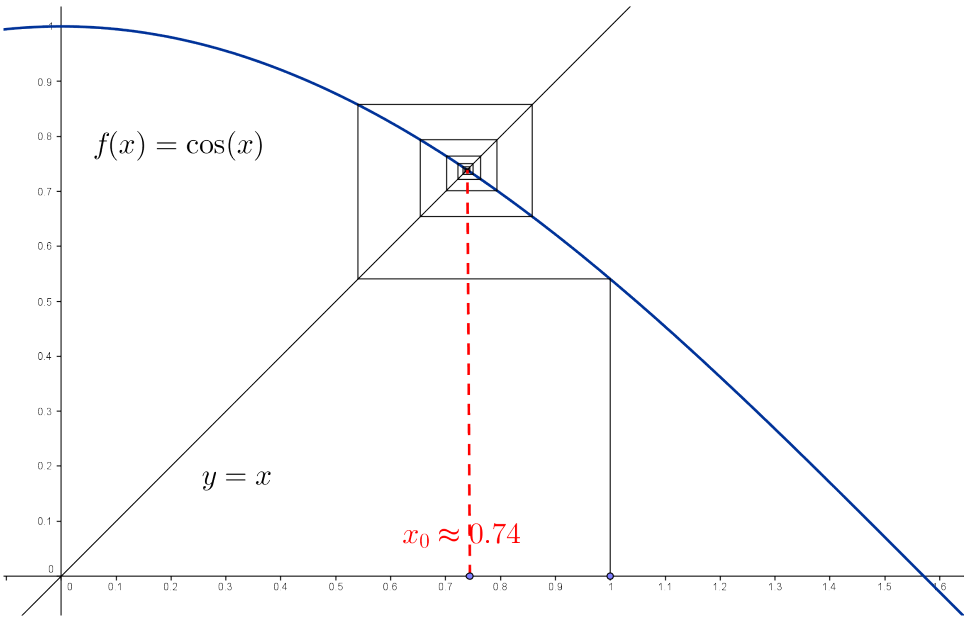


FIGURE 4.3 – Itérations du point fixe de $f(x) = \cos(x)$

Corollaire 4.31. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $|f'| < k < 1$ alors f possède un point fixe.*

Exemple 4.32. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ avec $f(x) = \frac{1}{3}e^x$. Alors, $|f'(x)| = \frac{1}{3}e^x \leq \frac{e}{3} < 1$.
Donc f possède un point fixe unique dans $[0,1]$.
Posons $a_1 = \frac{1}{2}$ et $a_{n+1} = f(a_n)$, alors $a_{43} \approx 0.6190613$ et le point fixe est $a \approx 0.61906 = a_{21}$.

n	x_n	$x_{n+1} = \cos(x_n)$		n	x_n	$x_{n+1} = e^{x_n}/3$
1	0.5000000	0.8775826		1	0.5000000	0.5495738
2	0.8775826	0.6390125		2	0.5495738	0.5775048
3	0.6390125	0.8026851		3	0.5775048	0.5938625
4	0.8026851	0.6947780		4	0.5938625	0.6036566
5	0.6947780	0.7681958		5	0.6036566	0.6095979
6	0.7681958	0.7191654		6	0.6095979	0.6132305
7	0.7191654	0.7523558		7	0.6132305	0.6154622
8	0.7523558	0.7300811		8	0.6154622	0.6168372
9	0.7300811	0.7451203		9	0.6168372	0.6176860
10	0.7451203	0.7350063		10	0.6176860	0.6182105
42	0.7390852	0.7390851		42	0.6190613	0.6190613
43	0.7390851	0.7390851		43	0.6190613	0.6190613

TABLE 4.1 – Itérations du point fixe utilisant la méthode de Banach.

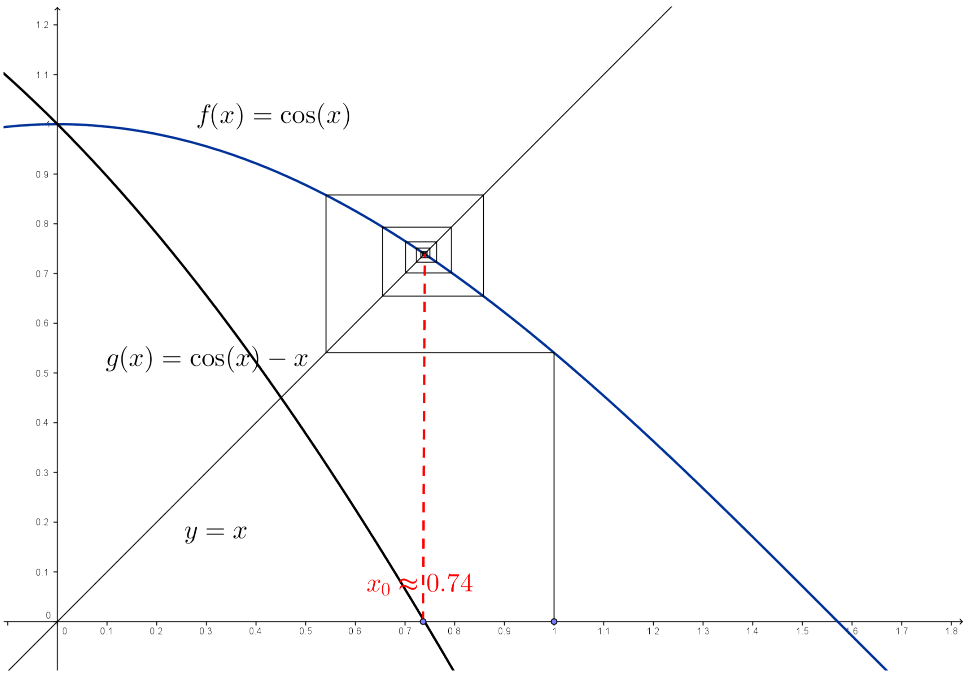


FIGURE 4.4 – Graphes de $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \cos(x) - x$

Méthode de Newton-Raphson

La méthode Banach pour trouver le point fixe est généralement **très lente** car le nombre d'itérations est généralement très grand. Pour cela on a fait des méthodes comme celle de Newton-Raphson pour trouver la solution du point fixe **plus rapidement**.
Trouver le point fixe en solvant l'équation $g(x) = x$ est équivalent à trouver le zéro de l'équation de la forme $f(x) = g(x) - x = 0$. Ceci est possible lorsque g applique l'intervalle $[a, b]$ dans lui-même et s'il existe une certaine constante k telle que $|g'(x)| \leq k < 1$ pour tout $x \in [a, b]$.

Supposons que $f : I \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable, $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ et qu'il existe $0 \leq k < 1$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq k$$

Alors, $f(x) = 0$ a une solution unique $x = a \in I$, obtenue en prenant une valeur initiale a_0 et en posant $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ ou $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Si $g : I \to \mathbb{R}$ avec $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, alors $g'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$, donc g est une contraction et $g(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$.

Exemple 4.33. Soit $f(x) = \cos x - x$ pour $x \in [-1, 1]$, cherchons une approximation de la racine de f en utilisant la méthode de Newton-Raphson. On a

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right| = \left|\frac{(\cos x - x)(-\cos x)}{(-\sin x - 1)^2}\right| \leq \left|\frac{(2)(1)}{2^2}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

Posons $a_1 = 1/2$, $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} = x - \dfrac{\cos(x) - x}{-\sin(x) - 1}$ on aura $a_5 \approx 0.7390851$.
Noter que la même approximation a été obtenue après 43 itérations avec la méthode de Banach du point fixe.

Exemple 4.34. Soit $f(x) = x^2 - 2$ pour $x \in [1, 2]$, cherchons une approximation de la racine positive de f. On a

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right| = \left|\frac{(x^2-2)(2)}{(2x)^2}\right| = \left|\frac{4x^2-4}{4x^2}\right| = \left|1 - \frac{1}{x^2}\right| \leq 1 \text{ for } x > 1$$

Posons $a_1 = 3/2$, $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} = x - \dfrac{x^2 - 2}{2x}$ on aura $a_7 \approx 1.4142136$.

n	x_n	$x_{n+1} = g(x_n)$
1	0.5000000	2.2500000
2	2.2500000	1.5694444
3	1.5694444	1.4218904
4	1.4218904	1.4142343
5	1.4142343	1.4142136
6	1.4142136	1.4142136
7	1.4142136	1.4142136

TABLE 4.2 – Itérations avec la méthode de Newton-Raphson.

Comparaison des méthodes de Banach et Newton-Raphson

On a mentionner que la méthode de Banach est lente pour trouver le point fixe. Ci-dessous on donne une comparaison des itérations du point fixe en utilisant les deux méthodes pour les fonctions $f(x) = \cos(x)$ pour $-1 \leq x \leq 1$ et $f(x) = e^x/3$ pour $0 \leq x \leq 1$.
On note la méthode de Newton-Raphson est nettement plus rapide pour trouver la solution. Par exemples dans le cas de la fonction $f(x) = \cos(x)$ la valeur du point fixe $a \approx 0.7390851$ a été obtenue après 44 itérations en utilisant la méthode de Banach, cependant seulement 5 itération avec la méthode de Newton-Raphson.
Dans le cas de la fonction $f(x) = e^x/3$ la valeur du point fixe $a \approx 0.6190613$ a été obtenue après 43 itérations en utilisant la méthode de Banach, cependant seulement 5 itération avec la méthode de Newton-Raphson.

n	x_n	$x_{n+1} = \cos(x_n)$
1	0.5000000	0.8775826
2	0.8775826	0.6390125
3	0.6390125	0.8026851
4	0.8026851	0.6947780
5	0.6947780	0.7681958
6	0.7681958	0.7191654
7	0.7191654	0.7523558
8	0.7523558	0.7300811
9	0.7300811	0.7451203
10	0.7451203	0.7350063
42	0.7390852	0.7390851
43	0.7390851	0.7390851

n	x_n	$x_{n+1} = e^{x_n}/3$
1	0.5000000	0.5495738
2	0.5495738	0.5775048
3	0.5775048	0.5938625
4	0.5938625	0.6036566
5	0.6036566	0.6095979
6	0.6095979	0.6132305
7	0.6132305	0.6154622
8	0.6154622	0.6168372
9	0.6168372	0.6176860
10	0.6176860	0.6182105
42	0.6190613	0.6190613
43	0.6190613	0.6190613

TABLE 4.3 – Itérations du point fixe utilisant la méthode de Banach.

Méthode de Newton-Raphson $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$f(x) = \cos(x) - x$		
n	x_n	$x_{n+1} = g(x_n)$
1	0.5000000	0.7552224
2	0.7552224	0.7391416
3	0.7391416	0.7390851
4	0.7390851	0.7390851
5	0.7390851	0.7390851
6	0.7390851	0.7390851
7	0.7390851	0.7390851

$f(x) = e^x/3 - x$		
n	x_n	$x_{n+1} = g(x)$
1	0.5000000	0.6100597
2	0.6100597	0.6189968
3	0.6189968	0.6190613
4	0.6190613	0.6190613
5	0.6190613	0.6190613
6	0.6190613	0.6190613
7	0.6190613	0.6190613

TABLE 4.4 – Itérations du point fixe utilisant la méthode de Newton-Raphson.

Remarque . On peut utiliser Microsoft Excel pour calculer les itérations du point fixe soit avec la méthode de Banach ou bien la méthode de Newton-Raphson.

Résumé

- Un ensemble complet est celui dans lequel toute suite de Cauchy est convergente.
- Toute suite convergente est de Cauchy, mais la réciproque est fausse.
- Toute sous-suite de Cauchy est de Cauchy.
- Tout suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente est convergente.
- Tout ensemble complet est fermé.
- Un ensemble fermé n'est pas nécessairement complet.
- La complétude n'est pas une propriété topologique.
- Si (X, d) est un espace métrique complet ; alors une partie A de X est complète si et seulement si A est une partie fermée de (X, d).
- Le produit d'espaces métriques est complet si et seulement si chacun des facteurs est complets.
- Tous les principaux espaces que nous rencontrons dans nos applications $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}$ et $C(a, b)$ avec leurs métriques habituels) sont complets et ainsi de tous leurs sous-ensembles fermés sont complets.
- Si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ uniformément continue et (x_n) est une suite de Cauchy dans (X, d_X), alors $(f(x_n))$ est de Cauchy dans (Y, d_Y).
- Si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est une homéomorphisme et si (Y, d_Y) est complet, alors (X, d_X) est complet.
- Une contraction est application k–Lip avec $0 < k < 1$.
- Si $X \subseteq \mathbb{R}$ alors $f : X \to X$ avec $|f'| < k < 1$ est une contraction.
- Toute contraction est uniformément continue.
- Le Théorème de Banach du point fixe est l'une des applications les plus importante en analyse. Si $f : X \to X$ une contraction, alors il existe un point unique $a \in X$ tel que $f(a) = a$. Si on laisse $x_{n+1} = f(x_n)$ alors $x_n \to a$, mais la convergence est lente.
- Trouver le point fixe en solvant l'équation $g(x) = x$ est équivalent à trouver le zéro de l'équation de la forme $f(x) = g(x) - x = 0$.
- La méthode de Newton-Raphson utilise une équation de récurrence pour trouver une approximation rapide du zéro de l'équation $f(x) = 0$ (ou bien le point fixe).

  Supposons que $f : I \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable, $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ et qu'il existe $0 \leq k < 1$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\left|\dfrac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right| \leq k$ Alors, $f(x) = 0$ a une solution unique $x = a \in I$, obtenue en prenant une valeur initiale a_0 et en posant $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ où $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

4.4 Exercices

4.1 Montrer les propositions suivante :

- Toute suite convergente est de Cauchy.
- Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.
- Toute suite de Cauchy est bornée.
- Toute suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente converge.

4.2 Soit $X = \mathbb{R}$ avec les métriques suivantes :

(a) $d(x, y) = |x^3 - y^3|$

(b) $d(x, y) = |e^x - e^y|$

(c) $d(x, y) = |\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(y)|$

Pour qu'elles de ces métrique (X, d) est t-il complet ?

4.3 Montrer que la distance $d(x, y) = \left|\dfrac{x}{1+|x|} - \dfrac{y}{1+|y|}\right|$ sur $\mathbb{R}$ est topologiquement équivalente à la distance usuelle mais $\mathbb{R}$ muni de cette distance n'est pas complet.

4.4 Montrer que si (x_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, alors (x_n^2) est de Cauchy aussi.

4.5 (Proposition 4.17) Si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ uniformément continue et (x_n) est une suite de Cauchy dans (X, d_X), alors $(f(x_n))$ est de Cauchy dans (Y, d_Y).

4.6 (Proposition 4.18) Si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est un homéomorphisme et si (Y, d_Y) est complet, alors (X, d_X) est complet.

4.7 Soient d_1 et d_2 deux métriques équivalentes sur le même espace X. Monter que si (X, d_1) est complet, alors (X, d_2) l'est aussi.

4.8 (Proposition 4.22) Si (X, d_X) est un espace métrique complet et $A \subseteq X$, alors
Le sous-espace métrique (A, d_A) est complet si et seulement si A est fermé dans X.

4.9 (a) Montrer que toute intersection de parties complètes de X est une partie complète de X.
(b) Montrer que toute réunion finie de parties complètes de X est une partie complète de X.

4.10 Si (X, δ) est l'espace métrique discret, alors une suite (x_n) dans X converge vers x si et seulement si, il existe N tel que $x_n = x$ quand $n \geq N$.

4.11 Montrer que l'espace métrique discret (X, δ) est complet.

4.12 Si (Z, d_Z) est le produit cartésien des deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y), avec $d_Z((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$.

(1) Montrer que la suite $(x_n, y_n) \to (x, y)$ dans Z si et seulement si $x_n \to x$ et $y_n \to y$.

(2) Montrer que si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont complets alors (Z, d_Z) est complet aussi.

4.13 Supposons que (x_n) est suite de X qui converge vers x et $z_1, \dots, z_m$ est collection fini de points dans X. On défini une nouvelle suite $(y_n)_n$ dans X en laissant $y_k = z_k$ pour $1 \leq k \leq m$ et $y_k = x_{k_m}$ quand $k \geq m + 1$. Montrer que $y_n \to x$.

4.14 Soit (Z, d_Z) le produit cartésien des deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y).
(a) Montrer que la suite $(z_n)_n = (x_n, y_n)_n$ est une suite de Cauchy dans Z si et seulement si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans X et $(y_n)_n$ est une suite de Cauchy dans Y.
(b) Montrer que Z est complet si et seulement si les deux X et Y sont complets.

4.15 Montrer que toute contraction est continue.

4.16 Trouver un exemple simple de fonctions $f : A \subset \mathbb{R} \to A$ vérifiant l'inégalité $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ ne possédant aucun point fixe.

4.17 (a) Montrer que pour $x \geq 1$ et $t \geq 0$, $\sqrt{x+t} - \sqrt{x} \leq t/2$.
(b) Montrer que $f(x) = \sqrt{x}$ est une contraction sur $[1, \infty)$.
(c) Trouver le point fixe de f.

4.18 Monter que toute fonction continue $f : [a, b] \to [a, b]$ a un point fixe sur $[a, b]$.

4.19 Monter la fonction $f : [1, 2] \to [1, 2]$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

a un point fixe unique sur $[1, 2]$, et trouver ce point.

4.20 Monter que l'équation $x^5 + 7x - 1 = 0$ possède une solution unique dans $[0, 1]$. Trouver le point fixe en utilisant la méthode de Newton.

4.21 Soit $f : (0, 1/4) \to (0, 1/4)$ définie par $f(x) = x^2$. Montrer que f est une contraction qui ne possède aucun point fixe.

4.22 Soit $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ définie par $f(x) = x + x^{-1}$. Montrer que $[0, \infty)$ est complet et $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour $x, y \in [1, \infty)$, mais f n'est pas une contraction et n'a aucun point fixe.

5 Espaces métriques compacts

5.1 Motivation

Notre motivation est le fameux théorème des valeurs extrêmes, rencontré dans le cours d'analyse élémentaire.

Theorem. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Alors, ils existent $x_m, x_M \in [a, b]$ tels que $f(x_m)$ est le minimum de f et $f(x_M)$ est le maximum de f sur $[a, b]$.

Ce théorème est vraie seulement si l'intervalle est fermé et borné. Si l'intervalle est ouvert le résultat est faux, par exemple $f(x) = \dfrac{1}{x}; x \in (0, 1)$. Si l'intervalle est n'est pas borné le résultat est aussi faux, par exemple $f(x) = x; x \in [0, \infty)$.
L'explication topologique en est que les intervalles bornés et fermés ont une propriété spéciale, appelée la **compacité**, ce qui rend le théorème des valeurs extrêmes (et beaucoup d'autres résultats) valides.

Theorem (Heine-Borel)**.** Toute partie K bornée et fermée de $(\mathbb{R}, d_u)$ est compacte.

En utilisant le théorème de Heine-Borel on peut avoir une version plus raffinée du théorème des valeurs extrêmes.

Theorem. Soient K une partie compacte de $\mathbb{R}$ et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors, $f(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

$f(K)$ étant une partie bornée et fermée de $\mathbb{R}$ garantie que f atteint ses valeurs extrêmes.

5.2 Définitions et propriétés des compacts

Soit (X, d) un espace métrique, $A \subset X$ et $\mathcal{G}$ une collection de parties de X. On dit que $\mathcal{G}$ est un recouvrement de A si $A \subseteq \bigcup\{G : G \in \mathcal{G}\}$. Un sous-recouvrement de A est a un sous ensemble $\mathcal{G}_1$ de $\mathcal{G}$ qui recouvre A. Si les éléments de $\mathcal{G}$ sont tous des ouverts de X, alors on dit que $\mathcal{G}$ est un recouvrement par des ouverts de A.

Définition 5.1. Une partie K d'un espace métrique (X, d) est dite **compacte** si de tout recouvrement par des ouverts de K, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. En d'autres termes, si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de X telle que
$K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, alors in existe $J \subset I$ fini tel que $K \subset \bigcup_{i \in J} U_i$.

Exemple 5.2.

(1) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ n'est pas un espace compact car si on pose $G_n = (-n, n)$, alors $\mathcal{G} = \{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ est un recouvrement par des ouverts de $\mathbb{R}$ qui n'a aucun sous-recouvrement fini.

(2) L'intervalle $I = (0, 1)$ n'est pas compact car si on pose $G_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right)$, alors $\mathcal{G} = \{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ est un recouvrement par des ouverts de I qui n'a aucun sous-recouvrement fini.

(3) L'intervalle $I = [0, 1])$ est pas compact dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

(4) Tout partie finie $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ d'un espace métrique (X, d) est compacte.
En particulier $\varnothing$ est une partie compacte de (X, d).

(5) L'espace métrique discret (X, δ) est compact si et seulement si X est fini.
Dans (X, δ) toute singleton $\{x\}$ est ouvert. Donc $\bigcup\{x : x \in X\}$ est un recouvrement pas des ouverts de (X, δ) qui est fini si et seulement X est fini.

Il est facile de trouver des ensembles qui se sont pas compacts. Mais pour trouver des exemples non triviaux de compacts il faut d'abord prouver quelques résultats.

Théorème 5.3. *Soit (X, d) un espace métrique et $F \subseteq K \subseteq X$,*

(a) *Si K est compact dans (X, d), alors K est borné dans (X, d).*

(b) *Si K est compact dans (X, d), alors K est fermé dans (X, d).*

(c) *Si K est compact et F est fermé dans (X, d), alors F est compact dans (X, d).*

(d) *Si $f : (X, d) \to (X', d')$ est une application continue et K une partie compacte dans (X, d), alors l'image $f(K)$ est compacte dans (X', d').*

Démonstration.

(a) Pour montrer que K est borné notons que pour tout $x_0 \in X$, $\{B(x_0, n) : n \in \mathbb{N}\}$ est recouvrement par des ouverts de K, qui doit contenir un sous-recouvrement fini car K est compact. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} B(x_0, n) = B(x_0, N)$ et donc K est borné.

(b) Pour monter que K est fermé, il est équivalent de montrer que $X \setminus K$ est ouvert. Si $x \notin K$, pour chaque $z \in K$ il existent $r_z, s_z > 0$ tels que $B(z; r_z) \cap B(x; s_z) = \varnothing$. La famille $\{B(z; r_z) : z \in K\}$ est un recouvrement ouvert de K. Puisque K est compact, ils existent des points $\{z_1, \ldots, z_n\}$ dans K tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(z_i; r_{z_i})$. Soit $s = \min\{s_{z_i} : 1 \leq i \leq n\}$. Remarquons que

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} B(x; s_{z_i}) = B(x; s);$$

est une boule ouverte disjointe de toutes les boules $B(z_i, r_{z_i})$ qui constituent un recouvrement ouvert de K ; par conséquent

$$B(x; s) \subseteq X \setminus K.$$

Donc $X \setminus K$ est ouvert.

(c) Soit $\mathcal{G}$ un recouvrement ouvert de F, et puisque F est fermé $(X \setminus F) \cup \mathcal{G}$ est recouvrement par des ouverts de K. Puisque K est compact il existe un sous-recouvrement fini de K qui entraine qu'il existe un sous-recouvrement fini de $\mathcal{G}$ qui couvre F.

(d) Considérons un recouvrement ouvert quelconque $\mathcal{U}$ de $f(K)$ dans (X', d'). Donc $f(K) \subseteq \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}$. Puisque f est continue la famille $\mathcal{G} = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ est un recouvrement ouvert de la partie compacte K, qui possède un sous-recouvrement fini tel que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i)$, d'où $f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.

■

La compacité est une propriété topologique.

Corollaire 5.4. *Toute application continue d'un espace compact vers un espace métrique est bornée.*

Une conséquence facile du théorème précédent est le théorème des valeurs extrêmes vu dans le cours d'analyse élémentaire.

Corollaire 5.5. *Si $f : K \to \mathbb{R}$ une application continue et K est une partie compacte de (X, d), alors $f(K)$ est bornée et ils existent a et b dans K tels que pour tout $x \in K$,*

$$f(a) = \inf f(K) \leq f(x) \leq \sup f(K) = f(b).$$

Démonstration. Nous savons de la proposition précédente que $f(K)$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$. Posons $\alpha = \inf\{f(x) : x \in K\}$ et $\beta = \sup\{f(x) : x \in K\}$. Puisque $\alpha, \beta \in \mathbf{Adh}\, f(K)$ et $\mathbf{Adh}\, f(K) = f(K)$ car $f(K)$ est fermée alors $\alpha, \beta \in f(K)$. Il existe donc $a, b \in K$ tels que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$. ■

Remarques :

(1) Une fonction numérique continue sur un espace compact y atteint ses bornes inférieure et supérieure.

(2) Si A est une partie compacte de X et $f : A \to \mathbb{R}$ est une application continue, on ne peut pas conclure que $f(A) = [\alpha, \beta]$. Par exemple soit $A = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ est une suite de nombres réels croissante et bornée. Alors, $b = \lim_{n\to\infty} x_n$ existe. De plus $\mathbf{Adh}\, A = A \cup \{b\}$ est compact (pourquoi ?), mais $\beta = b \notin f(A)$.

Proposition 5.6. *Dans un espace métrique compact, toute suite admet (au moins) un point d'accumulation.*

Démonstration. La suite décroissante de fermés $F_n = \mathbf{Adh}\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ a une intersection non vide et d'après le théorème de Cantor $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$.

■

Proposition 5.7. *Soient K_1 et K_2 deux parties compactes d'un espace métrique (X, d), alors*

(a) $K_1 \cup K_2$ *est compacte.*

(b) $K_1 \cap K_2$ *est compacte.*

(c) $K_1 \times K_2$ *est compacte.*

Proposition 5.8. *Soient $X_1, \dots, X_n$ un nombre fini d'espaces métriques, alors $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ est compact si et seulement si X_i est compact pour tout $i = 1, \dots, n$.*

Remarque.

(1) La proposition 5.7 peut être généraliser pour un nombre fini de parties compactes.

(2) La proposition 5.8 est un cas spécial du fameux théorème de Tychonoff.

5.3 Espaces précompacts et séquentiellement compacts

On a besoin de ces définitions pour présenter le prochain théorème qui représente le résultat principal sur la compacité dans les espaces métriques.

Définition 5.9.

(a) Une famille $\mathcal{F}$ de parties de K possède la **propriété de l'intersection finie** (PIF) si lorsque $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$, $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} F_k \neq \varnothing$.

(b) On dit que K est **séquentiellement compact** si toute suite de K admet une sous-suite convergente.

(c) Soit (X, d) un espace métrique et K une partie de X. On dit K est **précompact** (ou **totalement borné**) si pour tout $r > 0$, ils existent des points $x_1, \dots, x_n$ dans K tels que $K \subseteq \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} B(x_k; r)$.

Exemple 5.10.

(1) La famille $\mathcal{F} = \{(0,1), (0, \frac{1}{3}), \dots, (0, \frac{1}{2}), \dots\}$ possède la propriété de l'intersection finie car $(a, a_1) \cap (0, a_2) \cap \cdots \cap (0, a_n) = (0, a)$, où $a = \min\{a_1, \dots a_n\}$.

(2) Si A est partie finie de (X, d). Alors A est nécessairement séquentiellement compact. Si (a_n) est une suite de A alors au moins l'un des éléments de A (soit a) doit se répète une infinité de fois dans la suite. Donc la sous-suite $(a_1, a_2, \ldots, a_k, a, a, \ldots)$ est convergente dans A.

(3) La partie $A = (0, 1)$ de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ n'est pas séquentiellement compacte, car toute sous-suite de $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ doit converger vers 0 mais $0 \notin A$. Donc la suite de A, $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ne possède pas de sous-suite qui converge dans A.

Lemme 5.11. *Soit U_α un recouvrement ouvert d'un espace séquentiellement compact. Alors il existe $r > 0$ tel que toute boule de rayon r est contenue dans l'un des ouverts U_α .*

Démonstration. Si la conclusion n'était pas vraie, il existerait une suite (x_n) avec la propriété $B(x_n, 2^{-n})$ intersecte chacun des complémentaires $F_\alpha = X - U_\alpha$. Soit x la limite d'une sous-suite (x_{n_k}) de (x_n). Fixons α tel que $x \in F_\alpha$. On choisi alors un point $y^\alpha_{n_k}$ dans $B(x_{n_k}; 2^{-n_k})\mathcal{F}_\alpha$.Comme F_α est fermé et que $y^\alpha_{n_k} \to x$, on conclut que $x_\aleph \in F_\alpha$, ce qui est une contradiction. ■

Voici le théorème principal de cette section.

Théorème 5.12. *Soit (X, d) un espace métrique et K une partie fermée de X. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *(K, d) est compact.*

(b) *Si $\mathcal{F}$ est une famille de parties fermées de K possédant PIF, alors $\bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\} \neq \varnothing$.*

(c) *Toute suite de K admet une sous-suite convergente (K est séquentiellement compact).*

(d) *Toute partie infinie de K possède un point d'accumulation.*

(e) *(K, d) est complet et précompact.*

Démonstration.
(a) ⇒ (b). Soit $\mathcal{F}$ une famille de parties fermées de K possédant PIF.
Suppose $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F = \varnothing$. Alors, $\mathcal{G} = \{X - F : F \in \mathcal{F}\}$ est recouvrement ouvert de X, et donc de K. Puisque K est compacte, ils existent $F_1, \ldots, F_n$ dans $\mathcal{F}$ tels que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(X - F_i) = X - \bigcap_{i=1}^{n} F_i$$

Mais puisque chaque $F_i \subseteq K$, alors $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i = \varnothing$, qui est une contradiction au fait que $\mathcal{F}$ possède la PIF.
(b) ⇒ (a). Soit $\mathcal{G}$ un recouvrement ouvert de K, et posons $\mathcal{F} = \{K - G : G \in \mathcal{G}\}$. Puisque $\mathcal{G}$ est couvre K, alors $\bigcap\{K - G : G \in \mathcal{G}\} = \varnothing$. Donc $\mathcal{F}$ ne possède pas la PIF et il doit y

avoir un nombre fini d'ensembles $G_1, \ldots, G_n$ tels que $\bigcap_{i=1}^{n}(K - G_i) = \varnothing$. Qui entraine que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i$. Donc K est une partie compacte.

(c) $\Rightarrow$ **(d)**. Si S est une partie infinie, alors S contient une suite de points distincts (x_n) ; par (c) il existe une sous-suite (x_{n_k}) convergente ver x. Donc x est un point d'accumulation de S.

(d) $\Rightarrow$ **(c)**. Supposons que (x_n) est une suite points distincts dans K. Par (d), (x_n) a un point d'accumulation dans K car K est fermé. La boule $B(x;1)$ contient une infinité d'éléments de la suite (x_n), on choisi $x_{n_1} \in B(x;1)$. La boule $B(x;1/2)$ contient une infinité d'éléments de la suite (x_n), on choisi $x_{n_2} \in B(x;1/2)$ avec $n_2 > n_1$. On répète ceci, on choisi $x_{n_3} \in B(x;1/3)$ avec $n_3 > n_2$. Donc on peut choisir une sous-suite (x_{x_k}), tel que $n_{j+1} > n_j$ et $x_{n_j} \in B(x;1/j)$ pour tout $j = 1, 2, \ldots$. Il est clair que la sous suite converge vers x.

(a) $\Rightarrow$ **(d)**. Supposons que (d) est fausse. Alors, il existe un ensemble infinie sans point d'accumulation. Donc, pour $n \geq 1$, $F_n = \{x_k : k \geq n\}$ contient tout ces point d'accumulations et est donc fermé. Il s'ensuit que $\cap_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing$. Alors, toute intersection finie de $\{F_1, F_2, \ldots\}$ a une une intersection vide, qui est une contradiction de (b) équivalente à (a).

(a) $\Rightarrow$ **(e)**. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans K. Puisque (a) $\Rightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (c), il existe une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \to x$. Mais cela implique que $x_n \to x$. Pour montrer que K est précompact, notons que $\{B(x;r) : x \in K\}$ est un recouvrement ouvert qui doit avoir un sous-recouvrement fini.

(e) $\Rightarrow$ **(c)**. Soit (x_n) une suite dans K et (r_n) une suite décroissante de nombres positifs tels que $r_n \to 0$. Par (e), il existe un recouvrement fini de K par les boules $B(x_k; r_1)$. Il existe don une boule $B(y_1, r_1)$ qui contient un nombre infini d'éléments de (x_n). Soit $\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} : d(y_1, x_n) < r_1\}$. Considérons maintenant la suite $\{x_n : n \in \mathbb{N}_1\}$ et les boules de rayon r_2. On répète le processus, il existe $y_2 \in K$ tel que $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N}_1 : d(y_2, x_n) < r_2\}$ est ensemble infini. Par induction on peut montrer que pour chaque $k \geq 1$ on choisi un point $y_k \in K$ et un ensemble infini $\mathbb{N}_k$ tel que $\mathbb{N}_{k+1} \subset \mathbb{N}_k$ et $\{x_n : n\mathbb{N}_k\} \subset B(y_k; r_k)$. Si $F_k = \mathbf{Adh}\{x_n : n\mathbb{N}_k\}$, alors $F_{k+1} \subset F_k$ et $\operatorname{diam} F_k \leq 2r_k$. Puisque K est complet, alors le théorème de Cantor implique que $\bigcap_{k} F_k = \{x\}$. Si on choisi $n_k\mathbb{N}_k$ alors (x_{n_k}) est une sous-suite de (x_n) et $x_{n_k} \to x$.

(e) $\Rightarrow$ **(a)**. Soit $\mathcal{G}$ un recouvrement ouvert de K. Soient $x_1, \ldots, x_n \in K$, il existe $r > 0$ tel que $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k; r)$, et pour $1 \leq k \leq n$ soit $G_k \in \mathcal{G}$ tel que $B(x_k; r) \subset G_k$. Alors, $\{G_1, \ldots, G_k\}$ est un sous-recouvrement fini de K.

(c) $\Rightarrow$ **(e)**. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans K, alors (c) implique qu'il existe une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \to x$. Puisque $d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n)$, alors $x_n \to x$. ■

5.4 Compacité dans les espaces Euclidiens

La compacité sur les espaces Euclidiens prend une forme plus spéciale que celle sur les espaces topologiques ou les espaces métriques arbitraires. Cela est due aux résultats de Hein-Borel sur $\mathbb{R}$.

Théorème 5.13 (Théorème de Heine-Borel). *Si K est une partie de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- **(a)** *K est compacte.*
- **(b)** *K est bornée et fermée.*
- **(c)** *K est séquentiellement compacte.*
- **(d)** *Toute partie infinie de K possède un point d'accumulation dans K.*

Corollaire 5.14.

- **(a)** *Tout intervalle borné et fermé $[a, b]$ est compact dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.*
- **(b)** *Le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ est compact dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$.*
- **(c)** *Une partie de $(\mathbb{R}^n, d_2)$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*
- **(d)** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f atteint sa borne inférieure et sa borne supérieure.*

Démonstration.

- **(a)** L'intervalle $[a, b]$ est fermé dans l'espace métrique complet $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, donc $[a, b]$ est complet. Si $r > 0$, on peut trouver $a = x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ tels que $x_k - x_{k-1} < r$, et $[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x; r_k)$. Donc $[a, b]$ est précompact.
  $[a, b]$ complet+précompact $\Rightarrow [a, b]$ compact.
- **(b)** Évident en utilisant (a) et proposition 5.7–(c).
- **(c)** Si $K \subset (\mathbb{R}^n, d_2)$ est compact alors, K est fermé et borné par proposition 5.3.

  Réciproquement, supposons que K est borné et fermé. Alors, K est borné pour la distance d_∞ sur $\mathbb{R}^n$. In s'en suit qu'il existe $M > 0$ tel que $K \subseteq [-M, M] \times \cdots [-M, M]$. Puisque $[-M, M]$ est compact dans $\mathbb{R}$, $[-M, M] \times \cdots [-M, M]$ est compact dans $\mathbb{R}^n$. Comme K est un sous-ensemble fermé d'un ensemble compact, alors il est compact d'après proposition
- **(d)** On utilise le fait que $[a, b]$ est compact et corolaire 5.5.

■

Exemple 5.15. Dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$ on a :

(1) Toute partie bornée et fermée de $(\mathbb{R}^2, d_2)$ est pas compacte.

(2) Toute partie non-bornée ou bien non-fermée de $(\mathbb{R}^2, d_2)$ n'est pas compacte.

(3) Le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ est compact.

(4) La boule fermée $B_f(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_2(a, x) \leq r\}$ (disque fermé) est compacte.

(5) La sphère $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_2(a, x) = r\}$ est compacte.

(6) La partie $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |3x| + |4y| \leq 10\}$ est compacte.

(7) Les rubans $[a, b] \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times [c, d]$ ne sont pas compacts.

(8) La partie $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(x)\}$ n'est pas compacte.

(9) Le graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x) : x \in \mathbb{R})\}$ d'une application continue n'est pas compact.

Attention !

(1) Notez que la métrique utilisée pour $\mathbb{R}^n$ dans le théorème Hein-Borel doit être usuelle, ou le résultat risque de ne pas être vrai même pour une métrique équivalente.

(2) Dans un espace métrique arbitraire, un fermé et borné n'a pas besoin d'être compact. Par exemple si on utilise la métrique $d(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$ qui est équivalente à la métrique usuelle sur $\mathbb{R}$. $(\mathbb{R}, d)$ est fermé et borné, mais n'est pas compact.

(3) Pour l'espace métrique $\mathbb{Q}$, si $a, b \in \mathbb{Q}$ et $a < b$, alors $F = \mathbb{Q} \cap [a, b]$ est borné mais n'est pas compact car il n'est pas complet.

Théorème 5.16 (Théorème de Heine)**.** *Si $f : (X, d) \to (X', d')$ est continue et X est compact, alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Supposons que f n'est pas uniformément continue. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il y a des points $x, y \in X$ tels que $d(x, y) < \delta$, mais $d'(f(x), f(y)) \geq \epsilon$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il y a des points $x_n, y_n \in X$ tels que $d(x_n, y_n) < n_{-1}$, mais $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$. Puisque X est compact, il existe $x \in X$ et une sous-suite (x_{x_k}) tels que $x_{n_k} \to x$.
Puisque $d(y_{n_k}, x) \leq d(y_{n_k}, y_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \leq n_{n_k}^{-1} + +d(x_{n_k}, x)$, alors $y_{n_k} \to x$.
Par conséquent, puisque f est continue on a

$$\epsilon \leq d'(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq d'(f(x_{n_k}), f(x)) + d'(f(x), f(y_{n_k})) \to 0.$$

Ce qui est une contradiction. ■

Le résultat suivant (vu dans le cours d'analyse élémentaire), est une conséquence immédiate du théorème précédent.

Corollaire 5.17. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.*

Proposition 5.18. *Si (X, d) est compact, $f : (X, d) \to (X', d')$ est continue et bijective, alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. Puisque f est une bijection, sa bijection réciproque existe,

$$f^{-1} : (X', d') \to (X, d).$$

On doit monter que f^{-1} est continue.
Supposons que V est fermé dans X. Il suffit de monter que $(f^{-1})^{-1}(V)$ est fermé. Mais puisque $(f^{-1})^{-1}(V) = f(V)$ on a

V fermé dans $X \Rightarrow V$ compact dans $X \Rightarrow f(V)$ compact dans $X' \Rightarrow f(V)$ fermé dans X'.

Donc f^{-1} est continue, qui entraine que f est un homomorphisme. ■

En utilisant le théorème précédent et le fait que si f est continue, $f \circ i$ est aussi, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 5.19. *Si (X, d) est compact, $f : (X, d) \to (X', d')$ est continue et bijective, alors X et $f(X)$ sont homéomorphes.*

Exemple 5.20. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, monotone et $B = f([a, b])$, alors l'application réciproque $f^{-1} : B \to [a, b]$ est continue.

Proposition 5.21. *Soit $x_n \to x$ dans (X, d), alors $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.*

Proposition 5.22. *Tout espace métrique compact est séparable.*

Démonstration. La famille $U_x = \{B(x; r) : x \in X, r > 0\}$ est un recouvrement ouvert de X. Puisque X est compact il existe un recouvrement fini, donc

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} \{B(x_i; r) : x_i \in X, r > 0\}.$$

X contient donc un sous-ensemble dénombrable et dense, donc X est séparable. ■

Résumé sur la compacité

- Une partie K d'un espace métrique (X, d) est dite compacte si de tout recouvrement ouvert de K, on peut en extraire un sous-recouvrement fini.
- Toute partie compacte d'un espace métrique est bornée.
- Toute partie compacte d'un espace métrique est fermée.
- Toute partie fermée d'un espace compact est compacte.
- L'image continue d'une partie compacte est compacte.
- La compacité est une propriété topologique.
- Toute application continue d'un espace métrique compact vers un espace métrique est bornée et y atteint ses bornes supérieure et inférieure.
- Toute partie infinie d'un compact possède au moins un point d'accumulation.
- Toute suite dans un compact admet au moins un point d'accumulation.
- Toute suite dans un compact admet une sous-suite convergente.
- Tout compact est séquentiellement compact.
- Dans un compact, une famille de fermés possédant PIF, a une intersection non vide.
- Tout compact est complet et précompact.
- La réunion, l'intersection et le produit de deux parties compacte sont compacts.
- Dans $(\mathbb{R}^n, d_2)$ une partie K est compacte si et seulement si K est borné et fermé.
- Dans $(\mathbb{R}^n, d_2)$ une partie K est compacte si et seulement si toute suite admet une sous-suite convergente.
- Dans $(\mathbb{R}^n, d_2)$ une partie K est compacte si et seulement si K est séquentiellement compact.
- Dans $(\mathbb{R}^n, d_2)$ une partie K est compacte si et seulement si toute partie infinie de K possède un point d'accumulation dans K.
- Toute application continue sur un compact y est uniformément continue.
- Toute application continue et bijective sur un compact y est un homéomorphisme.
- Tout espace métrique compact est séparable.

5.5 Exercices

1. Lesquels de ces sous-ensembles suivants sont compacts ?

(i) $[0,1)$ (iv) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$

(ii) $[0,\infty)$ (v) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq 1/x\}$

(iii) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ (vi) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| \leq 1\}$

2. Montrer que si $X \subseteq \mathbb{R}$ n'est pas compact, alors il existe une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ qui n'est pas bornée.

3. Soit X un espace compact. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varnothing \neq V_n \subset X$ avec $V_n \supseteq V_{n+1}$. Montrer que $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} \neq \varnothing$.

4. Montrer que la réunion finie de parties compactes est compacte.

5. Montrer que l'intersection de parties compactes est compacte.

6. Montrer que si A est précompact, alors $\mathbf{Adh}(A)$ est aussi.

7. Montrer que si A est précompact, alors A est borné.

8. Montrer que tout sous-ensemble fini de (X,d) est compact. En particulier $\varnothing$ est compact.

9. Montrer que l'espace métrique discret (X,δ) est compact si et seulement si X est fini.

10. Montrer que tout espace métrique compact est complet.

INDICATION: *Ne pas utiliser le théorème 5.12.*

11. Soit (X,d) un espace métrique compact, et (x_n) une suite dans X admettant un unique point d'accumulation. Montrer que $x_n \to x$.

12. (Proposition 5.8) Soient X_1, X_2 deux d'espaces métriques. Montrer que $X = X_1 \times X_2$ est compact si et seulement si X_1 et X_2 sont compacts.

13. (Proposition 5.21) Soit (X,d) un espace métrique et (x_n) une suite convergente de X telle que $x_n \to x$. Montrer, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

14. Soit $f : (X,d) \to (X',d')$ continue, bijective et X est compact, alors f est un homéomorphisme.

15. Supposons que $f : (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ est continue, et K est une partie compacte de Y . Montrer que $f^{-1}(K)$ est fermé. Trouver un exemple qui montre que $f^{-1}(K)$ n'est pas nécessairement compact.

16. Soit (X,d) un espace métrique compact.

(a) Montrer que la suite (a_n) est convergente dans X si et seulement si elle admet un unique point d'accumulation.

(b) Soient (a_n) et (b_n) deux suite dans $[0,1]$. Supposons que la suite (a_nb_n) converge ver 1. Montrer que $a_n \to 1$ et $b_n \to 1$.

17. Soit (X,d) un espace métrique, $A, B \subset X$ et $A \cap B = \varnothing$.

(a) Montrer que si A et B sont compacts, alors $\mathrm{dist}(A,B) \neq 0$.

(b) Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $\mathrm{dist}(A,B) \neq 0$.

(c) Est ce que $\mathrm{dist}(A,B) \neq 0$ si A et B sont fermés ?

18. Soit (X,d) un espace métrique, et $f : X \to X$ telle que pour tout $x, y \in X$,

$$d(f(x), f(y)) = d(x,y).$$

(a) Montrer que f injective.

(b) Montrer que généralement f n'est pas surjective.

(c) Montrer que si X est compact, alors f est surjective.

(d) Montrer que si X est compact, alors f est un homéomorphisme.

19. Supposons que (X,d) est compact et $f : X \to X$ est continue.

(a) Montrer que la fonction $g(x) = d(x, f(x))$ est continue et possède un minimum.

(b) Si de plus on suppose que $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ pour tout $x, y \in X, x \neq y$, montrer que f possède un point fixe unique.

6 Espaces métriques connexes

6.1 Motivation

Cette section traite d'un problème qui le lecteur rencontrera (ou a rencontrés) dans son premier cours d'analyse complexe. Voici un problème similaire qui se produit sur $\mathbb{R}$. Supposons que U est un ouvert de $\mathbb{R}$ (dans la topologie usuelle) et $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable telle que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in U$. Nous voudrions conclure que f est constante, mais l'exemple $U = (-2, -1) \cup (1, 2)$, avec $f(x) = -1$ si $-2 < x < -1$, et $f(x) = +1$ si $1 < x < 2$, indique que le résultat est faux.
Quelle condition supplémentaire devrions ajouter sur U pour rendre le résultat vrai ?
La réponse est la **connexité**.
Cette nouvelle notion topologique «**connexité**» que nous allons définir signifie intuitivement qu'un espace est «en un seul morceau» ou encore qu'on ne peut pas le partager en deux parties «éloignées l'une disjointe l'autre».
Considérerons les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants. $X = [0, 1] \cup (2, 3)$ et $Y = [0, 1] \cup (1, 2)$. X est formé de deux parties distinctes, $[0, 1]$ et $(2, 3)$. D'autre part Y est la réunions de deux parties qui ne sont pas vraiment séparées. On pouvez écrire $Y = [0, 1/2] \cup (1/2, 2)$ ou $Y = [0, a] \cup (a, 2), a \in [0, 2)$ ou $Y = [0, 2)$.
Quelle est donc la vraie différence entre X et Y ?
Noter que dans l'espace métrique (X, d) les parties $[0, 1]$ et $(2, 3)$ sont a la fois ouvertes et fermées. Par exemple, $B_X(1; \frac{1}{2}) = \{x \in X : |x - 1| < \frac{1}{2}\} = (\frac{1}{2}, 1] \subseteq [0, 1]$, donc la partie $[0, 1]$ de X est ouverte et fermée à la fois. De même la partie $(2, 3)$ est aussi ouverte et fermée, étant le complément de $[0, 1]$ dans X. On dira que X n'est pas connexe par contre Y est connexe. D'un point de vue étymologique, être connexe c'est être constitué «en un seul morceau».
Considérons la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ tel que $f' = 0$ pour tout $x \in U$. On veut conclure que f est constante sur U. Mais si on choisi $U = (-3, -1) \cup (1, 3)$ et

$$f(x) = \begin{cases} -1; \text{ si } x \leq 0 \\ +1; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

l'assertion n'est pas vraie. On a donc besoin d'une condition supplémentaire sur U, la connexité.

6.2 Espaces et parties connexes

Définition 6.1. Soit (X, d) un espace métrique.
On dit que (X, d) est un espace **connexe** si et seulement si les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées sont l'ensemble vide $\varnothing$ et X.

Remarque : Une définition équivalente de la connexité de X est la suivante.
X est connexe si et seulement si $X = A \cup B$, où $A \cap B = \varnothing$, A et B sont les deux ouverts ou fermés, alors soit $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$.

Proposition 6.2. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *X est connexe.*

(b) *Il n'existe pas de partions de X en deux ouverts disjoints.*

(c) *Il n'existe pas de partions de X en deux fermés disjoints.*

Exemple 6.3. Dans notre motivation $X = [0, 1] \cup (2, 3)$, si $A = [0, 1]$ et $B = (2, 3)$ alors, A et B sont disjoints et les deux ouverts (fermés), donc $X = [0, 1] \cup (2, 3)$ n'est pas connexe. Par contre $Y = [0, 2)$ est connexe.

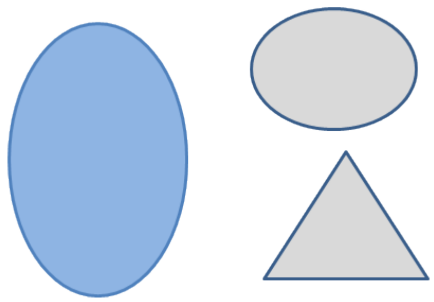


FIGURE 6.1 – Connexe et non-connexe

Définition 6.4. Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X. Comme d'habitude, on munit A de la distance induite d_A. On dit que A est une partie connexe si et seulement si l' espace métrique (A, d_A) est connexe. Classiquement, nous considérons l'ensemble vide comme étant connexe.

Exemple 6.5.

(a) $\mathbb{R}^n$ est connexe.

(b) Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe.

(c) Toute boule ouverte (fermée) de $\mathbb{R}^n$ est connexe.

Proposition 6.6. *Si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue et X est connexe, alors $f(X)$ est connexe. L'image continue d'un connexe st connexe.*

Démonstration. Supposons que f est surjective c.a.d $Y = f(X)$. Alors, si Y n'est pas connexe, il existe une partie ouverte et fermée U de Y non vide et distincte de Y. Alors $V = f^{-1}(U)$ est ouvert et fermé dans X. De plus, puisque f est surjective, ni V ni $X - V = f^{-1}(Y - U)$ ne sont vides. Donc X n'est pas connexe ce qui est une contradiction. ■

Corollaire 6.7. *La connexité est une propriété topologique.*

Démonstration. Supposons que $f : X \to Y$ est un homéomorphisme. Si X est connexe, alors $Y = f(X)$ est proposition par théorème 6.6.
D'autre part si Y est connexe, f^{-1} est continue, donc $X = f^{-1}(Y)$ est connexe pour la même raison. ■

La connexité est une propriété topologique.

Corollaire 6.8. *Si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue et X est connexe, alors le graphe de la fonction f, $\Gamma(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ est connexe. En particulier Γ_f est connexe si et seulement si X est connexe.*

Démonstration. D'après le théorème (3.39) on a vue que si f est une application continue alors X et le graphe de f, $\Gamma(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ sont homéomorphes. Donc d'après le corollaire 6.7, Γ_f est connexe. ■

Proposition 6.9. *Un espace métrique (X, d) est connexe si et seulement si toute application continue $f : (X, d) \to (\{0, 1\}, \delta)$ est constante c.a.d. soit $f \equiv 0$ ou bien $f \equiv 1$.*

Démonstration. Si X est connexe et $f : X \to \{0, 1\}$ est continue, alors $f(X)$ est connexe et donc f est constante. En effet, si f n'est pas constante, on a $f(X) = \{0, 1\}$ qui est une réunion disjointe de deux fermés et donc $f(X)$ n'est pas connexe.
Réciproquement, si X n'est pas connexe, et si $X = A \cup B$ est la réunion disjointes de deux fermés non vides, si on pose

$$f(x) = \begin{cases} 0; & \text{si } x \in A \\ 1; & \text{si } x \in B \end{cases}$$

f n'est pas constante. Les fermés de $\{0, 1\}$ sont $\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$ et leurs images réciproques sont respectivement $\varnothing, A, B, X$ qui sont tous des fermés, donc f est continue. ■

En générale la réunion et l'intersection de parties connexes ne l'est pas, comme le voit dans les figures suivantes.

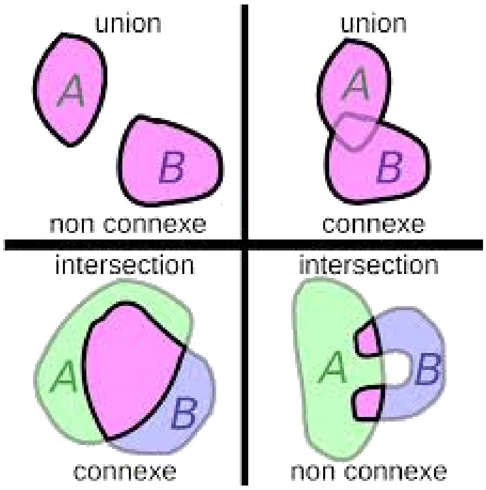


FIGURE 6.2 – Réunion et intersections de connexes

Dans des conditions spéciales on peut avoir connexité, comme dans la proposition suivante.

Proposition 6.10. *Soit (X, d) un espace métrique.*

(a) *Si $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$ est une collection de parties connexes de X, tel que $E_\alpha \cap E_\beta \neq \varnothing$ pour tout $\alpha, \beta \in I$, alors $E = \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ est connexe.*

(b) *Si $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de parties connexes de X, tel que $E_n \cap E_{n+1} \neq \varnothing$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ est connexe.*

Démonstration. (a) Soit $f : E \to \{0, 1\}$ continue. Pour tout $\alpha \in I$, la restriction $f : E_\alpha \to \{0, 1\}$ est continue, donc constante car E_α est connexe. En outre, pour tout $\alpha, \beta \in I, E_\alpha \cap E_\beta \neq \varnothing$ donc les constantes valeurs valeur que f prend sur E_α et E_β sont la même. Donc f est constante sur $E = \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$.
(b) La démonstration est similaire à celle de la partie (a). ■

Proposition 6.11. *$X \times Y$ est connexe si et seulement si X et Y le sont.*

Démonstration. Si $X \times Y$ est connexe, $X = p_X(X \times Y)$ et $Y = p_Y(X \times Y)$ sont des projection canonique qui sont continues, donc X et Y sont connexes.
Réciproquement, si X et Y sont connexes, soit $f : X \times Y \to \{0, 1\}$ continue. Nous allons monter que f est constante. Comme Y est connexe l'application $Y \ni y \mapsto (x, y)$ est constante, donc $f(x, y_1) = f(x, y_2)$ pour tout $x \in X$. Comme X est connexe l'application $X \ni x \mapsto (x, y)$ est constante, donc $f(x_1, y) = f(x_2, y)$ pour tout $y \in Y$. Donc $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, donc f est constante et alors $X \times Y$ est connexe. ■

Proposition 6.12. *Supposons que A est une partie connexe de l'espace métrique (X, d) et que $A \subseteq B \subseteq \mathbf{Adh}(A)$. Alors B est connexe.*

Démonstration. Supposons que $f : B \to \{0,1\}$ est continue. Alors, $f|_A$ est constante car A est connexe. Supposons sans perte de généralité que $f(a) = 0$ pour tout $a \in A$. Supposons aussi que $f(b) = 1$ pour un certain $b \in B$. Puisque $\{1\}$ est ouvert dans $\{0,1\}$, $f^{-1}(1)$ est ouvert dans B, donc $f^{-1}(1) = B \cap U$ pour un certain U ouvert dans X. U est ouvert qui contient le point $b \in B \subset \mathbf{Adh}(A)$, donc $U \cap A \neq \varnothing$. Soit $a \in U \cap A \subseteq U \cap B = f^{-1}(1)$. Donc $f(a) = 1$, qui est une contradiction. Donc B est connexe. ∎

Corollaire 6.13.

(a) *L'adhérence d'une partie connexe est connexe.*

(b) *Si $x \in \mathbb{R}^n$ et $B(x;r) \subseteq E \subseteq \mathbf{Adh}\, B(x;r)$, alors E est connexe.*

L'exemple suivant est appelé «Courbe sinus du topologue».

Exemple 6.14. $X = \{(x, \arcsin x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0,0)\}$ est connexe.
En effet, $f : (0,1] \to X$ définie par $f(x) = \arcsin x$, est continue, donc $C = f((0,1])$ est connexe. Puisque $C \subseteq X \subseteq \mathbf{Adh}(C)$, alors X est connexe.
Au lieu du point $(0,0)$ on pouvait choisir n'importe quel point de $\{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}$ et l'ensemble résultant serait toujours connexe.

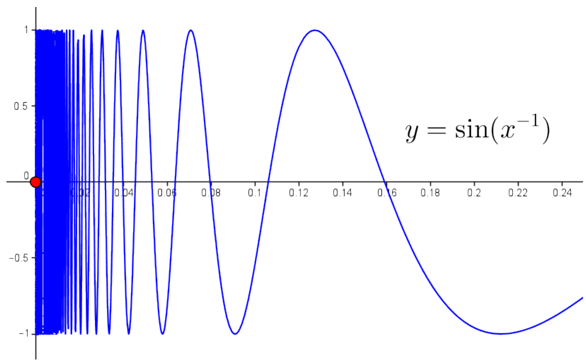


FIGURE 6.3 – Courbe sinus du topologue

6.3 Connexité par arcs

Définition 6.15. Soit (X,d) un espace métrique. On appelle **chemin** toute application continue $\gamma : [0,1] \to (X,d)$. L'image $\gamma([0,1])$ du chemin s'appelle un **arc** avec origine $\gamma(0)$ et extrémité $\gamma(1)$.

Définition 6.16. Soit (X,d) un espace métrique. On dit que X est **connexe par arcs** si pour tout $a, b \in X$, il existe un arc inclus dans X d'origine a et d'extrémité b.

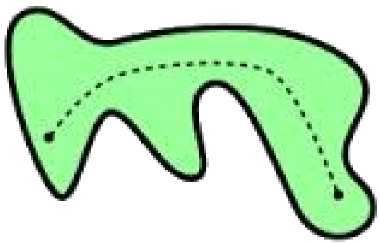


FIGURE 6.4 – Connexe par arc

Exemple 6.17.

(a) $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.

(b) Toute partie convexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.

(c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq (x-c)^2 + (y-d)^2 \leq b\}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $0 < a < b$ est connexe par arcs.

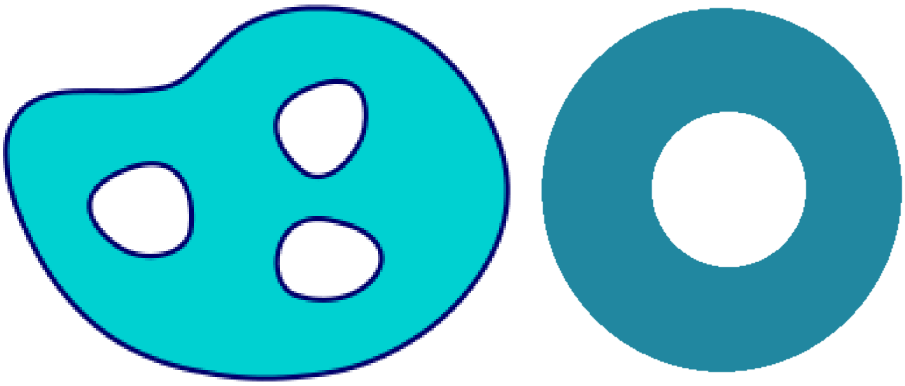


FIGURE 6.5 – Parties connexe de $\mathbb{R}^2$

Proposition 6.18. *Un espace connexe par arcs est connexe.*

Démonstration. Supposons que X est connexe par arcs et $g : X \to \{0, 1\}$ est continue. Si g n'est pas constante, alors ils existent $x_1, x_2 \in X$ tels que $g(x_1) = 0$ et $g(x_2) = 1$. Soit $f : [0, 1] \to X$ un chemin dans X tel que $f(0) = x_1$ et $f(1) = x_2$. Alors la fonction $g \circ f : [0, 1] \to \{0, 1\}$ est continue et surjective qui entraîne que $[0, 1]$ n'est pas connexe, qui est une contradiction. ∎

Remarque. La connexité par arcs est surtout une notion pratique pour montrer qu'un espace est connexe. En termes intuitifs, un espace est connexe par arcs si et seulement si on peut toujours relier deux de ses points par une courbe continue ce qui en fait une notion moins abstraite que la connexité.
La réciproque de la proposition 6.18 est malheureusement fausse. Néanmoins, la proposition suivante donne un cas où la réciproque est vraie.

Proposition 6.19. *Une partie ouverte et connexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit G un partie ouverte et connexe de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in G$.
Soit $A = \{x \in G$ qui ont un arc joignant x_0 et $x\}$. A est connexe par arcs.
Si on montre que A est à la fois ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^n$, alors $G = A \cup (G - A)$ serait une partions d'ouverts de la partie connexe G. Donc soit $A = \varnothing$ ou bien $G - A = \varnothing$. Puisque $x_0 \in A$ alors on a $G - A = \varnothing$. Donc $G = A$ est connexe par arc.
Montrons que A est ouvert. Soit $x \in A \subset G$, puisque G est ouvert alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset G$. Tout point $y \in B(x, r)$ peut être joint à x par un segment de ligne droite dans $B(x, r)$ donc tout point $y \in B(x, r)$ peut être joint à x_0 par un arc et donc $B(x, r) \subset A$ qui montre que A est ouvert.
Montrons que $G - A$ est ouvert aussi. Soit $x \in G - A$ alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset G - A$. Sinon cela veut dire que $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$. Soit $y \in B(x, r) \cap A$ alors on peut joindre x_0 à y et y à x qui est une contradiction car $x \in G - A$. Donc $G - A$ est ouvert. ■

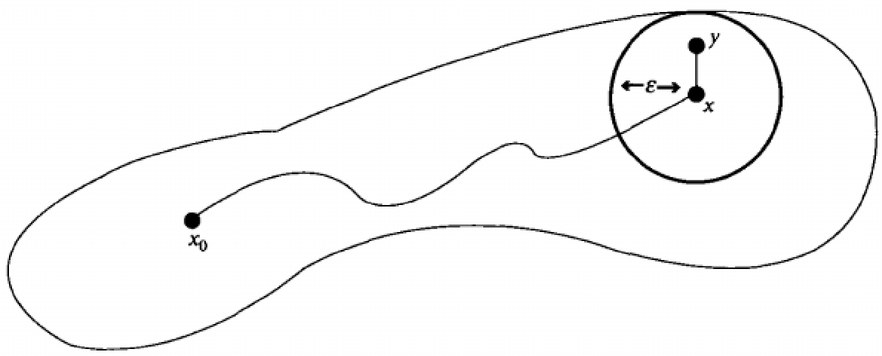


FIGURE 6.6 – Partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$ est connexe

6.4 Les connexes des réels

Proposition 6.20. *Toute partie connexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle. Réciproquement, les seuls parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Démonstration. Supposons que $C \subset \mathbb{R}$ est connexe et C n'est pas un intervalle. Il existe donc $a, b \in C$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $a < x < b$ et $x \notin C$. Mais alors $C \subset (-\infty, x) \cup (x, \infty)$, donc C n'est pas connexe.
Réciproquement, soit I un intervalle de bornes $a < b$. Soit U un ouvert non vide de I qui est aussi un fermé de (dans I). Fixons un point x_0 de I et considérons $y = \sup\{x \in \mathbb{R} : [x_0, y] \subset U\}$. Supposons que $y < b$. Comme U est fermé, il contient le point y, et donc l'intervalle $[x, y]$. Mais puisque U est ouvert il contient l'intervalle $(y - \epsilon, y - \epsilon)$, et donc contient $[x_0, y + \epsilon]$, ce qui contredit la définition de y. On a donc $y = b$ et $[x_0, b) \subset U$. On montre de la même façon que $(a, x_0] \in U$, et donc $(a, b) \subset U$. Comme U est fermé, on a $U = I$. ■

Exemple 6.21.

(1) Si $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$ alors les parties, $[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$ sont connexes.

(2) Si $a \in \mathbb{R}$ alors les parties, $(-\infty, a], (-\infty, a), (a, \infty), [a, \infty)$ et $(-\infty, \infty)$ sont connexes.

(3) $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe car $\mathbb{Q} \subset (-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$.

(4) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ n'est pas connexe.

Exemple 6.22.

(1) $\mathbb{R}^n$ est connexe.

(2) Si $I_1, I_2, \ldots, I_n$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$, alors $I_1 \times \cdots \times I_n$ est connexe dans $\mathbb{R}^n$.

(3) Toute boule ouverte $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(a, x) < r\}$ de $\mathbb{R}^n$ est connexe dans $\mathbb{R}^n$.

(4) Toute boule fermée $B_f(a, r)) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(a, x) \leq r\}$ de $\mathbb{R}^n$ est connexe dans $\mathbb{R}^n$.

(5) Toute sphère $S(a, r)) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(a, x) = r\}$ de $\mathbb{R}^n$ est connexe dans $\mathbb{R}^n$.

(6) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(t) = tx + (1-t)y$ est continue. Puisque $[0, 1]$ est connexe dans $\mathbb{R}$, son image $f([0, 1]) = \{tx + (1-t)y : 0 \leq t \leq 1$ et $x, y \in \mathbb{R}^n\}$ est connexe dans $\mathbb{R}^n$.

(7) Si (X, δ) un espace métrique discret, alors X n'est pas connexe s'il contient plus d'un point. En effet, on a vue que le singleton $\{x\}$ est a la fois ouvert et fermé dans (X, δ).

Corollaire 6.23 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Si $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ est continue, X est connexe, $a, b \in f(X)$ avec $a < b$. Alors pour tout $c \in [a, b]$ il existe $x \in X$ tel que $f(x) = c$.*

Démonstration. Puisque X est connexe et f est continue, alors $f(X)$ est connexe dans $\mathbb{R}$ et donc doit être un intervalle, donc $f(X) = I$. Puisque $a, b \in f(X) = I$, alors $[a, b] \subseteq f(X) = I$. ∎

Corollaire 6.24.

(a) *Si X est connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(X)$ est un intervalle.*

(b) *Si X est connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ est continue, alors le graphe de f, $\Gamma(f)$ est connexe.*

(c) *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f([a, b]) = [c, d]$.*

Démonstration.

(a) Puisque X est connexe et f est continue alors $f(X)$ est connexe. Mais les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, donc $f(X)$ est un intervalle.

(b) Conséquence immédiate du corollaire 6.8 avec $Y = \mathbb{R}$.

(c) L'intervalle $[a, b]$ est connexe dans $\mathbb{R}$ et son image $f([a, b])$ doit être connexe dans $\mathbb{R}$ puisque f est continue. Donc $f([a, b])$ est un intervalle soit $[c, d]$.

∎

Connexité et homéomorphismes

Intuitivement on sait que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes. On va utiliser le fait que la connexité est une propriété topologique pour montrer que cette assertion est en effet vraie. Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est un homéomorphisme.
La restriction $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}^2 - \{f(0)\}$ est aussi un homéomorphisme. Mais $\mathbb{R} - \{0\}$ n'est pas connexe, cependant $\mathbb{R}^2 - \{f(0)\}$ est connexe par arcs et donc connexe. Ceci constitue une contradiction donc $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
De la même façons on peut monter que l'intervalle $I = [0, 1]$ et le cercle $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ ne sont pas homéomorphes. Supposons que $f : I \to S$ est u homéomorphisme. Alors la restriction de f de $I_1 = I - \{1/2\} = [0, 1/2) \cup (1/2, 1]$ sur $S_1 = S - \{f(1/2)\}$ est aussi un homéomorphisme. Il est évident que I_1 n'est pas connexe, mais S_1 est connexe par arcs donc connexe.

Resumé de la connexité sur les espaces métriques

- X est un espace connexe si et seulement si les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées sont l'ensemble vide $\varnothing$ et X.
- X est connexe ssi il n'existe pas de partions de X en deux ouverts disjoints.
- X est connexe ssi il n'existe pas de partions de X en deux fermés disjoints.
- X est connexe ssi toute application continue $f : (X, d) \to (\{0, 1\}, \delta)$ est constante.
- L'image continue d'un connexe st connexe.
- La connexité est une propriété topologique.
- $X \times Y$ est connexe si et seulement si X et Y sont connexes.
- Si A est connexe et $A \subseteq B \subseteq \mathbf{Adh}(A)$, alors B est connexe.
- Si A est connexe alors et $\mathbf{Adh}(A)$ est aussi connexe.
- X est connexe par arcs si pour tout $a, b \in X$, il existe une application continue $f : [0, 1] \to X$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.
- Tout espace connexe par arcs est connexe.
- Un espace connexe n'est pas nécessairement connexe par arcs.
- Toute partie ouverte et connexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.
- Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est connexe si et seulement si et seulement si A un intervalle.
- Si X est connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(X)$ est un intervalle.
- Si X est connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ est continue, alors le graphe de f, $\Gamma(f)$ est connexe.
- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f([a, b]) = [c, d]$.

6.5 Exercises

1. Soit (X, d) un espace métrique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) X est connexe.

(b) Il n'existe pas de partions de X en deux ouverts disjoints.

(c) Il n'existe pas de partions de X en deux fermés disjoints.

2. Montrer que si $f : (X, d) \to (X', d')$ est continue et X est connexe, alors $f(X)$ est connexe.

3. Si (X, d) est connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ est continue telle que $|f(x)| = 1$ pour tout $x \in X$, montrer que f doit être constante.

4. Monter qu'un espace connexe par arcs est connexe.

5. Supposons que $f, g : [0, 1] \to X$ sont respectivement des chemins de $x \to y$ et $y \to z$. Montrer que

$$h(t) = \begin{cases} f(2t); & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ g(2t-1); & \text{si } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

est un chemin $x \to z$ dans X.

6. Montrer qu'une partie ouverte et connexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.

7. Supposons que $A \subseteq X, B \subseteq Y$ et $f : X \to Y$ est un homéomorphisme avec $f(A) = B$. Montrer que les restrictions $g = f|_A : A \to B$ et $h = f|_{X-A} : X - A \to Y - B$ sont des homéomorphismes.

8. Montrer que tout polynôme de degré impair a au moins une racine réelle.

9. Montrer que toute fonction continue $f : [a, b] \to [a, b]$, admet un point fixe $x \in [a, b]$.

10. Supposons que X est connexe par arcs, et $f : X \to Y$ est continue. Montrer que Y est connexe par arcs.

11. Montrer que $X = C([0, 1])$ avec $d(f, g) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$ est connexe par arcs.

12. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subsetneq X$.

(a) Montrer que $\mathbf{Fr}(A) = \varnothing$ si et seulement si A est ouvert et fermé dans X.

(b) Montrer que X est connexe si et seulement si $\mathbf{Fr}(A) = \varnothing$.

13. Supposons que A et B sont des parties connexes de X tel que $\mathbf{Adh}(A) \cap B \neq \varnothing$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.

7 Espaces topologiques

Dans ce chapitre, nous allons abstraire certaines propriétés que l'on a vu dans les espaces métriques et donc créer une nouvelle structure qui se produit fréquemment en mathématiques que l'on appellera «espace topologique». Puis nous allons étendre sur cette nouvelle structure les notions limite, continuité, voisinage, compacité et la connexité.
La topologie générale propose donc un formalisme permettant de généraliser les notions familières rencontrées dans les problèmes d'analyse sur $\mathbb{R}^n$ ou les espaces métriques en général. Le quantitatif (via l'utilisation de $\mathbb{R}$) est intervenu de manière cruciale dans les chapitres sur les espaces métriques. En topologie générale, les notions resteront qualitatives.

7.1 Structure topologique

Les ouverts d'une topologie

Une topologie est une structure géométrique définie sur un ensemble X. Fondamentalement, la topologie est connue en déclarant lesquels des sous-ensembles de X sont des ensembles «ouverts». Ainsi les axiomes de la topologie sont l'abstraction des propriétés des ouverts de X.

Définition 7.1. On appelle **espace topologique** un couple $(X, \mathscr{T})$, où X est un ensemble et $\mathscr{T}$ est une famille de parties de X, appelées ***ouverts***, vérifiant les propriétés suivantes :

(O1) $\varnothing$ et X sont ouverts.

(O2) **Toute** réunion d'ouverts est un ouvert.

(O3) Toute intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.

Une autre façon de le dire, est que la famille $\mathscr{T}$ des ouverts vérifie les propriétés suivantes :

(O1) $\varnothing, X \in \mathscr{T}$.

(O2) Si $\{G_i : i \in I\} \subseteq \mathscr{T}$, alors $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathscr{T}$.

(O3) Si $G_1, \ldots, G_n \in \mathscr{T}$, alors $G_1 \cap \ldots \cap G_n \in \mathscr{T}$.

Définition 7.2. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique et F une partie de X. On dit que la partie F est fermée si et seulement si le complément $(X - F) \in \mathscr{T}$.

Exemple 7.3.

(1) Si $\mathscr{T}_{\text{Gros}} = \{\varnothing, X\}$ alors $(X, \mathscr{T}_{\text{Gros}})$ est un espace topologique et $\mathscr{T}_{\text{Gros}}$ est appelée la topologie **grossière** ou **triviale** de X. Il est évident que les trois axiomes de topologie sont satisfaites. Dans cette topologie les seuls ouverts (fermés) sont $\varnothing$ et X.

(2) Si $\mathscr{T}_{\text{Disc}} = \mathscr{P}(X)$, l'ensemble de toutes les parties de X alors $(X, \mathscr{T}_{\text{Disc}})$ est un espace topologique et $\mathscr{T}_{\text{Disc}}$ est appelée la topologie **discrète** de X. Dans cette topologie les singletons sont des ouverts et donc toute partie de X est à la fois ouverte et fermée. Les fermés dans cette topologie sont $\varnothing, X$ et les parties finies.

(3) Soit $X = \{a, b\}$, alors $\mathscr{T}_a = \{\varnothing, \{a\}, X\}$ et $\mathscr{T}_b = \{\varnothing, \{b\}, X\}$ sont deux topologies sur X appelées les espaces de **Sierpinski**. Les $\mathscr{T}_a$–fermés sont $\mathscr{T}_b$ et vis versa.

(4) Soit $X = \{a, b, c\}$, alors $\mathscr{T}_1 = \{\varnothing, \{a\}, X\}$, $\mathscr{T}_2 = \{\varnothing, \{a, b\}, X\}$ et $\mathscr{T}_3 = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, X\}$ sont trois des topologies distinctes sur X. Les $\mathscr{T}_1$–fermés sont $\{\varnothing, \{b, c\}, X\}$. La famille $A = \{\varnothing, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ n'est pas une topologie de X.

(5) Soient X un ensemble non vide et

$$\mathscr{T}_{\text{Cof}} = \{U \in X : X - U \text{ est fini }\} \cup \{\varnothing\},$$

alors $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ est un espace topologique et $\mathscr{T}_{\text{Cof}}$ est appelée la topologie **cofinie** sur X.

(6) Soient (X, d) un métrique et $\mathscr{T}_d$ la famille des ouverts de X. Alors $(X, \mathscr{T}_d)$ est un espace topologique et $\mathscr{T}_d$ est appelée la **topologie associée à la distance** d. Donc tout espace métrique est un espace topologique.

(7) Soit $(\mathbb{R}^n, d_u)$ l'espace métrique avec la distance usuelle alors $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$ est un espace topologique ou $\mathscr{T}_u$ est la topologie associée à la distance usuelle. Les parties $(a, b), (a, +\infty), (-\infty, a)$ et $\mathbb{R}$ sont ouvertes dans $(\mathbb{R}, d_u)$. Les parties $[a, b], [a, +\infty), (-\infty, a]$ et $\mathbb{R}$ sont fermées dans $(\mathbb{R}, d_u)$. Les parties $[a, b), (a, b], \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ne sont ni ouverts ni fermés dans $(\mathbb{R}, d_u)$.

(8) Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique et A une partie de X. La famille

$$\mathscr{T}_A = \{A \cap U : U \in \mathscr{T}\}$$

est une topologie sur A appelée topologie **induite** par la partie A. On dit que $(A, \mathscr{T}_A)$ est un sous-espace topologique de $(X, \mathscr{T})$.

(9) Soient $(X, \mathscr{T}_X)$ et $(Y, \mathscr{T}_Y)$ deux espaces topologiques et $Z = X \times Y$. La **topologie produit** ou bien la **topologie de Tychonoff** $\mathscr{T}_Z$ est définie par :

$$\mathscr{T}_Z = \{ \text{ la famille des réunions des parties } U \times V : U \in \mathscr{T}_X \text{ et } V \in \mathscr{T}_Y\}$$

On dit que $(Z, \mathscr{T}_Z)$ est l'espace topologique produit de $(X, \mathscr{T}_X)$ et $(Y, \mathscr{T}_Y)$.

Voisinages

Définition 7.4. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On dit qu'une partie V de X est un voisinage de x dans X, s'il existe un ouvert O de X, vérifiant $x \in O \subseteq V$. On note par $\mathscr{V}(x)$ l'ensemble de tous les voisinages de x.

Remarque. Un voisinage de x contient tous les points assez proches de x, mais également des points qui peuvent être très loin de x. D'après la définition, X tout entier est un voisinage de x.

Propriétés des voisinages. Soit $a \in X$, alors :

(V1) a appartient à tout élément de $\mathscr{V}(a)$

(V2) Toute partie W de X qui contient un élément de $\mathscr{V}(a)$ est aussi un élément de $\mathscr{V}(a)$.

(V3) Toute intersection finie d'éléments de $\mathscr{V}(a)$ est un élément de $\mathscr{V}(a)$.

(V4) Si $V \in \mathscr{V}(a)$, il existe un élément $W \in \mathscr{V}(a)$ tel que pour tout $b \in W$, $V \in \mathscr{V}(b)$.

Persuadez-vous sur un dessin que les propriétés ci-dessus sont vérifiées, puis prouvez-les.

Système fondamental de voisinages

Définition 7.5. Dans un espace topologique $(X, \mathscr{T})$, on appelle système fondamental de voisinages (noté SFV) d'un point x toute partie $\mathscr{S}(x) \subseteq \mathscr{V}(x)$ de voisinages de x tel que pour tout voisinage V de x, il existe $W \in \mathscr{S}(x)$ tel que $W \subset V$.

Exemple 7.6.

(1) Soit un espace topologique $(X, \mathscr{T})$. $\mathscr{S}(a) = \{O \in \mathscr{T} : a \in O\}$ est un SFV de a.

(2) Soit (X, d) un espace métrique.
$\mathscr{S}(a) = \{B(a; r) : r > 0\}$ est un SFV de a.
$\mathscr{S}(a) = \{B(a; \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}^*\}$ est un SFV **dénombrable** de a.

(3) Soit $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ un espace topologique muni de la topologie usuelle.
$\mathscr{S}(a) = \{(a - \epsilon, a + \epsilon) : \epsilon > 0\}$ est un SFV de a.
$\mathscr{S}(a) = \{(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}^*\}$ est un SFV **dénombrable** de a.

Remarque. Dans un espace métrique, tout point possède un système fondamental dénombrable de voisinages. Cette propriété est la raison pour laquelle les suites jouent un rôle fondamental dans l'étude des espaces métriques.

Définition 7.7. Un espace topologique $(X, \mathscr{T})$ est dit **métrisable** s'il existe une distance sur X telle que la topologie associée à cette distance coïncide avec la topologie donnée c.a.d. $\mathscr{T} = \mathscr{T}_d$. Une telle distance est dite compatible avec la topologie de X.

Remarque. La distance usuelle sur $\mathbb{R}$ engendre la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$. Donc les ouverts de l'espace métrique $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sont les ouverts de l'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_d)$.

Exemple 7.8. On définit la **droite numérique achevée** par $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On munit $\mathbb{R}$ de la topologie suivante :

- si $x \in \mathbb{R}, \mathscr{V}(x) = \{V \subset \overline{\mathbb{R}} : \exists \epsilon > 0, (x-\epsilon, x+\epsilon) \subset V\}$
- si $x = -\infty, \mathscr{V}(x) = \{V \subset \overline{\mathbb{R}} : \exists A \in \mathbb{R}, \{y < A\} \subset V\}$
- si $x = -\infty, \mathscr{V}(x) = \{V \subset \overline{\mathbb{R}} : \exists A \in \mathbb{R}, \{y > A\} \subset V\}$

  La distance $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ est compatible avec cette topologie.

Remarque :
Il existe des topologies non métrisables, entre autres les topologies non séparées et les topologies pour lesquelles il n'y a pas de système fondamental dénombrable de voisinages.

Comparaison de topologies

Deux topologies $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ sur l'ensemble ensemble X sont les mêmes si elles ont les mêmes ouverts. Si l'une des topologies de X contient tous les ouverts d'une autre topologie de X on dit que les deux topologies sont comparables.

Définition 7.9. Soient $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ deux topologies sur X. On dit que $\mathscr{T}$ est ***moins fine*** que $\mathscr{T}'$ (ou bien $\mathscr{T}'$ est ***plus fine*** que $\mathscr{T}$) si $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$, si tout ouvert de $(X, \mathscr{T})$ est aussi un ouvert de $(X, \mathscr{T}')$.

Lemme 7.10. *La topologie grossière $\mathscr{T}_{\text{Gros}}$ est la topologie la moins fine des topologies sur X, et la topologie discrète $\mathscr{T}_{\text{Disc}}$ est la topologie la plus fine des topologies sur X.*

$$\mathscr{T}_{\text{Gros}} = \{\varnothing, X\} \subseteq \mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_{\text{Disc}} = \mathscr{P}(X).$$

Dans certains cas on peut établir une relation d'ordre partiel entre les topologies sur le même ensemble X avec la relation «moins fine que ». Deux topologies ne sont pas nécessairement comparables. Par exemple, les deux espaces de Sierpinski $\mathscr{T}_a$ et $\mathscr{T}_b$ ne sont pas comparables.

Proposition 7.11. *Soient $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ deux topologies sur X, alors on a :*

(a) *$\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$ si et seulement si pour tout $x \in U \in \mathscr{T}$, il existe $V \in \mathscr{T}'$ tel que $x \in V \subseteq U$.*

(b) *$\mathscr{T} = \mathscr{T}'$ si et seulement si $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$ et $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}$.*

Exemple 7.12. On a vu que si $X = \{a, b, c\}$, alors $\mathscr{T}_1 = \{\varnothing, \{a\}, X\}$, $\mathscr{T}_2 = \{\varnothing, \{a, b\}, X\}$ et $\mathscr{T}_3 = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, X\}$ sont trois des topologies distinctes sur X. Les topologies $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ sont moins fines que $\mathscr{T}_3$, cependant $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ ne sont pas comparables.

Les suites dans un espace topologique

Dans un espace topologique $(X, \mathscr{T})$, une suite est une application de $\mathbb{N}$ dans X notée habituellement (x_n) pour $n \in \mathbb{N}$.

Définition 7.13. Une suite (x_n) d'éléments de X converge vers $x \in X$, si pour tout voisinage V de x, il existe un entier $N(V)$ tel que $x_n \in V$ pour tout $n \geq N(V)$.

Attention. On a vu que toute suite convergente (x_n) dans un espace métrique (X, d) admet une limite unique. Cela n'est pas nécessairement vrai dans les espace topologique autres que les espaces métriques.

Exemple 7.14. Considérons l'espace topologique $(X, \mathscr{T}_{\text{Triv}})$ avec la topologie grossière $\mathscr{T}_{\text{Triv}} = \{\varnothing, X\}$. Alors toute suite convergente (x_n) de X, converge vers n'importe quel point de $x \in X$.
Supposons que $x_n \to x \in X$ et U est ouvert qui contient x alors $U = X$ (car les seuls ouverts sont $\varnothing$ et X) donc $x_n \in U$ pour tout n.

7.2 L'intérieur et l'adhérence

Dans cette section on va revisiter les parties d'un espace comme l'adhérence et l'intérieur dans le contexte d'un espace topologique.
Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique, on note par :

$\mathbf{Adh}(A)$:	l'adhérence de A,
$\mathbf{Int}(A)$:	l'intérieur de A,
$\mathbf{Ext}(A)$:	l'extérieur de A et par
$\mathbf{Fr}(A)$:	la frontière de A.

Définition 7.15. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique, alors

(a) $\mathbf{Adh}(A)$: est le plus petit fermé **contenant** A.

(b) $\mathbf{Int}(A)$: est le plus grand ouvert **contenu** dans A.

(c) $\mathbf{Ext}(A) = \mathbf{Int}(X - A)$.

(d) $\mathbf{Fr}(A) = \mathbf{Adh}(A) \cap \mathbf{Adh}(X - A)$.

Proposition 7.16. *Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique et $A \subseteq X$.*

(a) $\mathbf{Int}\, A \subseteq A \subseteq \mathbf{Adh}(A)$.

(b) $\mathbf{Adh}(X - A) = X - \mathbf{Int}(A)$.

(c) $\mathbf{Ext}(A) = \mathbf{Int}(X - A) = X - \mathbf{Adh}(A)$.

(d) $\mathbf{Int}(A) \cap \mathbf{Ext}(A) = \varnothing$.

(e) $\mathbf{Fr}(A) = \mathbf{Adh}(A) \cap \mathbf{Adh}(X - A)$
$\mathbf{Fr}(A) = \mathbf{Fr}(X - A)$
$\mathbf{Fr}(A) = X - [\mathbf{Int}(A) \sqcup \mathbf{Ext}(A)]$
$\mathbf{Fr}(A) = \mathbf{Adh}\, A - \mathbf{Int}\, A$
$\mathbf{Fr}(A)$ *est fermé.*

(f) $X = \mathbf{Int}(A) \sqcup \mathbf{Ext}(A) \sqcup \mathbf{Fr}(A)$.

Les propriétés suivantes découlent directement des définitions mais sont très souvent utilisées.

Proposition 7.17. *Soit* $(X, \mathscr{T})$ *un espace topologique et* $A \subset X$.

(a) *Si* $A \subset F$ *et* F *est un fermé de* X*, alors* $\mathbf{Adh}\, A \subset F$.

(b) *Si* $O \subset A$ *et* O *est un ouvert de* X*, alors* $O \subset \mathbf{Int}(A)$.

(c) *Si* $O \cap A = \varnothing$ *et* O *est un ouvert de* X*, alors* $O \subset \mathbf{Ext}(A)$.

Proposition 7.18. *Soit* $(X, \mathscr{T})$ *un espace topologique et* $A, B \subset X$.

(a) $\mathbf{Adh}(X) = X$.

(b) $A \subseteq \mathbf{Adh}(A)$.

(c) $\mathbf{Adh}[\mathbf{Adh}(A)] = \mathbf{Adh}\, A$.

(d) $\mathbf{Adh}(A) = A$ *si et seulement si* A *est fermé.*

(e) *Si* $A \subset B$*, alors* $\mathbf{Adh}(A) \subset \mathbf{Adh}(B)$.

(f) $\mathbf{Adh}(A \cup B) = \mathbf{Adh}(A) \cup \mathbf{Adh}(B)$.

(g) $\mathbf{Adh}(A \cap B) \subset \mathbf{Adh}(A) \cap \mathbf{Adh}(B)$.

Attention.
Si A est une partie d'un espace topologique $(X, \mathscr{T})$, considérons les assertions suivantes :
(a) $x \in \mathbf{Adh}\, A$.
(b) Il existe une suite (x_n) d'éléments de X qui converge dans X vers x.

- Si X est un espace métrique, alors (a) $\Longleftrightarrow$ (b).
- Si X est un espace topologique, alors (b) $\Rightarrow$ (a).
- Si X est un espace topologique, alors (a) $\Rightarrow$ (b) n'est pas nécessairement vraie.

Proposition 7.19. *Soit* $(X, \mathscr{T})$ *un espace topologique et* $A, B \subset X$.

(a) $\mathbf{Int}(X) = X$.

(b) $\mathbf{Int}(A) \subseteq A$.

(c) $\mathbf{Int}[\mathbf{Int}(A)] = \mathbf{Int}\, A$.

(d) $\mathbf{Int}(A) = A$ *si et seulement si* A *est ouvert.*

(e) *Si* $A \subset B$*, alors* $\mathbf{Int}(A) \subset \mathbf{Int}(B)$.

(f) $\mathbf{Int}(A \cup B) \supset \mathbf{Int}(A) \cup \mathbf{Int}(B)$.

(g) $\mathbf{Int}(A \cap B) = \mathbf{Int}(A) \cap \mathbf{Int}(B)$.

Remarque. La relation « moins fine » est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des topologies sur X. Plus la topologie est fine, plus riche est la structure topologique. Si $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ deux topologies sur X telle que $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$ et $A \subset X$ alors

$$(\mathbf{Int}\, A)_{\mathscr{T}} \subseteq (\mathbf{Int}\, A)_{\mathscr{T}'} \subseteq A \subseteq (\mathbf{Adh}\, A)_{\mathscr{T}'} \subseteq (\mathbf{Adh}\, A)_{\mathscr{T}}.$$

Définition 7.20. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique et $A \subset X$.

(a) La partie A est dite dense dans X si $\mathbf{Adh}(A) = X$.

(b) $(X, \mathscr{T})$ est dit séparable s'il contient une partie dénombrable dense.

La propriété suivante est une caractérisation pratique des parties denses.

Proposition 7.21. *A est dense dans $(X, \mathscr{T})$ si et seulement si tout ouvert non vide de X rencontre A.*

Démonstration. Si A n'est pas dense dans X alors $\mathbf{Adh}(A) \neq X$, donc $X - \mathbf{Adh}(A)$ est un ouvert non vide de X qui ne rencontre pas A (car $A \subset \mathbf{Adh}(A)$).
Réciproquement, si O est un ouvert non vide qui ne rencontre pas A, $A \cap O = \varnothing$, alors $A \subset (X - O)$ c.a.d que A est inclue dans le fermé $(X - O)$, et donc $\mathbf{Adh}(A) \subset (X - O) \neq X$. ■

Exemple 7.22.

(1) Soit $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$ l'espace topologique usuel sur $\mathbb{R}$, $A = (1, 2)$ et $B = (2, 3)$, alors $\mathbf{Adh}(A \cap B) = \mathbf{Adh}(\varnothing) = \varnothing$, mais $\mathbf{Adh}(A) \cap \mathbf{Adh}(B) = [1, 2] \cap [2, 3] = \{2\}$.

(2) Soit $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$ l'espace topologique usuel sur $\mathbb{R}$, $A = (1, 2]$ et $B = (2, 3)$, alors $\mathbf{Int}(A \cup B) = \mathbf{Int}(1, 3) = (1, 3)$, mais $\mathbf{Int}(A) \cup \mathbf{Int}(B) = (1, 2) \cup (2, 3)$.

(3) Soit $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$ l'espace topologique usuel sur $\mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, alors $\mathbf{Adh}(A \cap B) = \mathbf{Adh}(\varnothing) = \varnothing$, mais $\mathbf{Adh}(A) \cap \mathbf{Adh}(B) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.
$\mathbf{Int}(A \cup B) = \mathbf{Int}\, \mathbb{R} = \mathbb{R}$, mais $\mathbf{Int}(A) \cup \mathbf{Int}(B) = \varnothing$.

(4) Soit $(X, \mathscr{T}_{\text{Gros}})$ l'espace topologique grossier et A une partie de X. Alors $\mathbf{Int}(A) = \varnothing$ et $\mathbf{Adh}(A) = X$. Pourquoi ? Toute partie A de X est dense dans X.

(5) Soit $(X, \mathscr{T}_{\text{Disc}})$ l'espace topologique discret et A une partie de X. Dans cette topologie toute partie A de X est a la fois ouverte et fermée. Donc $\mathbf{Int}(A) = A$ et $\mathbf{Adh}(A) = A$. Dans cette topologie il n y a pas de partie propre de X dense dans X.

(6) Soient $X = \{a, b\}$ muni de la topologie $\mathscr{T}_a = \{\varnothing, \{a\}, X\}$, $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$.
Les $\mathscr{T}_a$–fermés sont $\{\varnothing, \{b\}, X\}$. On a donc $\mathbf{Int}\, A = A, \mathbf{Adh}\, A = X, \mathbf{Int}\, B = \varnothing$, et $\mathbf{Adh}\, B = B$. De plus on que A est dense dans X.

7.3 Base d'une topologie

Dans un espace métrique, tout ouvert est une réunion de boules ouvertes. On veut établir quelque chose similaire pour les espaces topologiques, d'où la notion de base d'une topologie.

Définition 7.23. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique, une base pour la topologie $\mathscr{T}$ est une collection $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$ telle que tout élément de $\mathscr{T}$ est une réunion d'éléments de $\mathscr{B}$.
Les ensembles $B \in \mathscr{B}$ de la base sont appelés **éléments de la base**.

Exemple 7.24.

(1) Si (X, d) un espace métrique, alors la topologie $\mathscr{T}_d$ engendrée par la métrique d est la famille des ouverts de X. Les familles $\mathscr{B} = \{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$ et $\mathscr{B}' = \{B(x, n^{-1}) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ sont des bases de la topologie $\mathscr{T}_d$. Cela montre la base n'est pas nécessairement unique.

(2) La famille des intervalles ouverts $\mathscr{B} = \{(a, b) : x \in \mathbb{R}, \}$ est une base de l'espace topologique usuel $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_d)$ où $d(x, y) = |x - y|$.

(3) Soit $X = \{a, b\}$, alors $\mathscr{T}_a = \{\varnothing, \{a\}, X\}$ est une topologie sur X dont $\mathscr{B} = \{\{a\}, X\}$

(4) Soit $X = \{a, b, c, \}$. Alors $\mathscr{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$ est une topologie sur X. Une base pour cette topologie est $\mathscr{B} = \{\{a\}, \{b\}, X\}$.

(5) Si $(X, \mathscr{T})$ est un espace topologique, alors $\mathscr{T}$ est une base pour elle même.

(6) La base de l'espace topologique grossier $(X, \mathscr{T}_{\text{Gros}})$ est $\mathscr{B} = \{X\}$.

(7) Soit X un ensemble et $\mathscr{B}$ la collection des singletons $\{x\}$ de X. Alors, $\mathscr{B}$ est une base de la topologie discrète $\mathscr{T}_{\text{Disc}}$ sur X.

Remarque Un espace topologique peut avoir plusieurs bases. Par exemple $\mathbb{R}^2$ peut avoir comme base les disques ouverts, les carrées ouverts ou bien les diamants ouverts.

Proposition 7.25. *Si $\mathscr{B}$ est une base de la topologie $\mathscr{T}$ sur X, alors $\mathscr{B}$ satisfait les assertions suivantes :*

(a) $\bigcup\{B : B \in \mathscr{B}\} = X$.

(b) *Pour tout $x \in X$, il existe $B \in \mathscr{B}$ tel que $x \in B$.*

(c) *Si $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ et $x \in B_1 \cap B_2$, alors il existe $B_3 \in \mathscr{B}$ tel que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Démonstration. Supposons que $\mathscr{B}$ est une base de la topologie $\mathscr{T}$.

(a) Puisque $X \in \mathscr{T}$ alors $X = \bigcup\{B : B \in \mathscr{B}\}$ par définition de la base.

(b) Soit $x \in X = \bigcup\{B : B \in \mathscr{B}\}$, alors il existe $B \in \mathscr{B}$ tel que $x \in B$.

(c) Si $B_1, B_2 \in \mathscr{B} \subset \mathscr{T}$, alors $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{T}$. Donc $B_1 \cap B_2$ est la réunion d'éléments de $\mathscr{B}$ et si $x \in B_1 \cap B_2$, alors il existe $B_3 \in \mathscr{B}$ tel que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

■

Proposition 7.26. *Si $\mathscr{B}$ est une famille de parties de X qui satisfait :*

(1) *Pour tout $x \in X$, il existe $B \in \mathscr{B}$ tel que $x \in B$.*

(2) *Si $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ et $x \in B_1 \cap B_2$, alors il existe $B_3 \in \mathscr{B}$ tel que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Alors $\mathscr{B}$ est une base de la topologie $\mathscr{T}$ sur X.

Définition 7.27. Soit $\mathscr{B}$ une base de la topologie sur X. La topologie $\mathscr{T}$ engendrée par $\mathscr{B}$ est la collection des parties $U \subset X$ telle que pour tout $x \in X$, il existe $B \in \mathscr{B}$ tel que $x \in B \subset U$.

Proposition 7.28. *La collection $\mathscr{T}$ engendrée par la base $\mathscr{B}$ est une topologie sur X.*

Proposition 7.29. *Si $\mathscr{B}$ est une base les deux topologies $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ de X alors $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$.*

Proposition 7.30. *Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ des bases des topologies $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ respectivement. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *$\mathscr{T}$ est moins fine que $\mathscr{T}'$ c.a.d. $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$.*

(b) *Pour tout $B \in \mathscr{B}$ et $x \in B$, il existe $B' \in \mathscr{B}'$ tel que $x \in B' \subset B$.*

Corollaire 7.31. *Deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ génèrent la même topologie sur X, si et seulement si pour tout $x \in B \in \mathscr{B}$ il existe $B' \in \mathscr{B}'$ tel que $x \in B' \subset B$, et pour tout $x \in B' \in \mathscr{B}'$, il existe $B \in \mathscr{B}$ tel que $x \in B \subset B'$.*

Proposition 7.32. *Soit $X = \mathbb{R}$, alors $\mathscr{B}_\ell = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b\}$ est une base pour la topologie limite inférieure $\mathscr{T}_\ell$ de $\mathbb{R}$, en outre $\mathscr{T}_d \subsetneq \mathscr{T}_\ell$.*

Démonstration. Pour tout $B \in \mathscr{B}$ pour la topologie standard, et pour tout $x \in (a, b)$, on peut prendre $B' = [x, b) \in \mathscr{B}_\ell$ et donc on a $x \in B' \subset B$. Donc la topologie standard est moins fine que la topologie limite inférieure, $\mathscr{T}_d \subset \mathscr{T}_\ell$. Pour montrer que les deux topologies ne sont pas les mêmes, considérons $B' = [a, b) \in \mathscr{B}'$, et soit $x = a \in B'$. Alors il n'y a pas d'élément $B = (c, d) \in \mathscr{B}$ avec $x \in B \subset B'$. Car si $x \in B$, alors $c < x = a < d$, et alors $y = (a + c)/2$ satisfait $y \in (c, d)$ mais $y \notin [a, b)$. Donc $B \nsubseteq B'$. ■

Proposition 7.33. *Si $\mathscr{B}$ est une base de la topologie $\mathscr{T}$ sur X, et $A \subset X$, alors la collection*

$$\mathscr{B}_A = \{A \cap B : B \in \mathscr{B}\}$$

est une base de la topologie induite $\mathscr{T}_A$ sur A.

Proposition 7.34. *Soit $(X, \mathscr{T}_X)$ et $(Y, \mathscr{T}_Y)$ deux espaces topologiques, $\mathscr{B}_X$ est une base de la topologie $\mathscr{T}_X$, $\mathscr{B}_Y$ est une base de la topologie $\mathscr{T}_Y$, alors la collection*

$$\mathscr{B}_Z = \{U_X \times U_Y : U_X \in \mathscr{B}_X, U_Y \in \mathscr{B}_Y\}$$

est une base de la topologie produit $\mathscr{T}_Z$ sur $Z = X \times Y$.

Exemple 7.35.

(1) On a vu que $\mathscr{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b\}$ est une base pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$. Donc $\mathscr{B}' = \{(a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ est une base de la topologie usuelle sur $Z = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

(2) Si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont deux espaces métriques, la topologie produit sur $Z = X \times Y$ coïncide avec la topologie définie par la métrique produit.

(3) Soit $X = \mathbb{R}^2$, $\mathscr{B} = \{B(x; r) : x \in X, r > 0\}$ et $\mathscr{B}' = \{(a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$.

Les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ génèrent la même topologie sur $\mathbb{R}^2$, notamment la topologie $\mathscr{T}_d$ induite par la métrique d.

(4) Soit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. La collection $\mathscr{T}$ formée par $\varnothing, \overline{\mathbb{R}}$ et toute réunion d'intervalles de la forme (a, b), ou $[-\infty, b)$, ou $(a, +\infty]$ est une topologie de $\overline{\mathbb{R}}$.

7.4 Continuité dans les espaces topologiques

Continuité d'une application entre espaces topologiques

Définition 7.36. Une fonction $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ est dite continue au point $a \in X$:

(a) si l'image réciproque de tout voisinage de $f(a)$ est un voisinage de a,

(b) si $f(a) \in V \in \mathscr{T}_Y$ alors ils existe $U \in \mathscr{T}_X$ tel que $a \in U \subseteq f^{-1}(V)$.

Définition 7.37. Une fonction $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ est dite continue sur X :

(a) si elle est continue en tout point de X,

(b) si pour tout $V \in \mathscr{T}_Y, f^{-1}(V) \in \mathscr{T}_X$.

Définition 7.38. Une fonction $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ est dite un homéomorphisme lorsqu'elle est bijective et que f et f^{-1} sont continues.

Remarque. *Soit $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ un homéomorphisme, alors :*

- *les parties ouvertes de Y sont exactement les images par f des parties ouvertes de X,*
- *les parties fermées de Y sont exactement les images par f des parties fermées de X,*
- *si $y = f(x)$, les voisinages de y sont exactement les images par f des voisinages de x.*

Théorème 7.39. *Soient $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ et $\mathscr{B}_Y$ une base de $\mathscr{T}_Y$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *f est continue.*

(2) *Pour tout $B \in \mathscr{B}_Y$, $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}_X$.*

(3) *Pour tout $V \in \mathscr{T}_Y$, $f^{-1}(V) \in \mathscr{T}_X$.*

(4) *Pour toute partie fermée F de Y, $f^{-1}(F)$ est une partie fermée de X.*

(5) *Pour toute partie A de X, $f(\mathbf{Adh}\, A) \subseteq \mathbf{Adh}\, f(A)$.*

(6) *Pour toute partie C de Y, $f^{-1}(\mathbf{Int}\, C) \subseteq \mathbf{Int}\, f^{-1}(C)$.*

(7) *Pour toute partie C de Y, $\mathbf{Adh}\, f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(\mathbf{Adh}\, C)$.*

Attention !

(1) Si G est ouvert dans X, $f(G)$ n'est pas nécessairement ouvert dans Y.

(2) Si F est fermé dans X, $f(F)$ n'est pas nécessairement une partie fermée de Y.

Proposition 7.40. *Soient $(X, \mathscr{T}_X), (Y, \mathscr{T}_Y), (Z, \mathscr{T}_Z)$ des espaces topologiques, et $f : X \to Y, g : Y \to Z$ continues, alors $g \circ f : X \to Z$ est continue.*

Proposition 7.41. *Soit $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{T}')$, alors*

(1) *Si f est une application constante, alors f est continue.*

(2) *Si $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{\text{Disc}}$, alors toute application f est continue.*

(3) *Si $\mathscr{T}' = \mathscr{T}_{\text{Gros}}$, alors toute application f est continue.*

(4) *Si $X = Y$ et $f = \mathrm{Id}_X$ est continue si et seulement si $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}$.*

(5) *Si $X = Y$ et $f = \mathrm{Id}_X$ est un homéomorphisme si et seulement si $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$.*

Proposition 7.42. *Soit $(A, \mathscr{T}_A)$ un sous-espace d'un espace topologique $(X, \mathscr{T})$. Alors, l'injection canonique $i : A \to X$ définie par $i(a) = a$ pour tout $a \in A$ est continue.*

Corollaire 7.43. *Soit $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ continue, et A une partie non vide de X. Alors, la restriction $f|_A : (A, \mathscr{T}_A) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ est continue.*

Corollaire 7.44. *Soit $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ un homéomorphisme, A une partie non vide de X et $B = f(A)$. Alors, la restriction $f|_A^B : (A, \mathscr{T}_A) \to (B, \mathscr{T}_B)$ est un homéomorphisme.*

Proposition 7.45. *Soient $(X, \mathscr{T}_X)$ et $(Y, \mathscr{T}_Y)$ deux espaces topologiques et $Z = X \times Y$ muni de la topologie produit. Alors, les projections $p_X : X \times Y \to X$ et $p_Y : X \times Y \to Y$ définies par $p_X(x, y) = x$ et $p_Y(x, y) = y$ sont des applications continues et ouvertes.*

Théorème 7.46. *Soient X, Y et W des espaces topologiques. Alors, $f : W \to X \times Y$ est continue si et seulement si $p_X \circ f : W \to X$ et $p_Y \circ f : W \to Y$ sont continues.*

Démonstration. Si f est continue, alors $p_X \circ f$ et $p_Y \circ f$ sont continues étant les composées de fonctions continues.
Suppose que $p_X \circ f$ et $p_Y \circ f$ sont continues. On doit montrer que l'image réciproque de tout ouvert de $X \times Y$ est un ouvert de W. Si U, V sont de ouverts de X, Y respectivement, alors $U \times V$ est un ouvert de $X \times Y$. En outre

$$U \times V = (U \times X) \cap (V \times Y) = p_X^{-1}(U) \cap p_Y^{-1}(V).$$

Alors,

$$f^{-1}(U \times V) = (f^{-1} p_X^{-1}(U)) \cap (f^{-1} p_Y^{-1}(V)) = (p_X \circ f)^{-1}(U) \cap (p_X \circ f)^{-1}(U)$$

qui est un ouvert étant l'intersection de deux ouverts, car $p_X \circ f$ et $p_Y \circ f$ sont continues. Donc f est continue. ∎

Définition 7.47. Si X est espace topologique on appelle diagonale, la partie de $X \times X$ définie par : $D = \{(x, x) : x \in X\}$.

Corollaire 7.48. *Soit X un espace topologique et $\Delta : X \to X \times X$ définie par $\Delta(x) = (x, x)$. Alors, Δ est une application continue.*

Démonstration. $(p_X \circ \Delta)(x) = p_X(x,x) = x = id_X(x)$ qui est continue et $(p_Y \circ \Delta)(x) = p_X(x,x) = x = id_X(x)$ qui est continue. Donc par théorème 7.46 Δ est continue. ∎

Proposition 7.49. *Soient X et Y des espaces topologiques, $a \in X$ et $b \in Y$. Alors les applications $x \mapsto i_b(x) = (x,b)$ et $y \mapsto i_a(y) = (a,y)$ sont continues.*

Démonstration. $(p_X \circ i_b)(x) = p_X(x,b) = x = id_X(x)$ qui est continue et
$(p_Y \circ i_b)(x) = p_X(x,b) = b$ est constante qui est continue. Donc par théorème 7.46 $x \mapsto (x,b)$ est continue. ∎

Proposition 7.50. *Soient X, Y et W des espaces topologiques et $f : X \times Y \to W$ continue. Alors, pour tout $a \in X, b \in Y$ les applications $y \mapsto f(a,y)$ et $x \mapsto f(x,b)$ sont continues.*

Attention ! La réciproque est fausse. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

les applications partielles $x \mapsto f(x,y)$ et $y \mapsto f(x,y)$ sont continues mais f n'est pas continue en $(0,0)$.

Proposition 7.51. *Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ sont continues de l'espace topologique X sur $\mathbb{R}$, alors $f+g, fg, |f|$ sont continues. Si on plus $g \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ est aussi continue.*

Exemple 7.52. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (3x^2+5y^3, 7xy)$. Alors est continue. En utilisant théorème 7.46 il suffit de montrer que les projections $g(x,y) = 3x^2+5y^3$ et $h(x,y) = 7xy$ sont continues. $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont des projections donc continues. Donc $h(x,y) = 7xy$ est continue étant le produit de fonctions continues. De même $3x^2$ et $5y^3$ sont continues étant le produit de fonctions continues. Finalement $g(x,y)$ est continue étant la somme de fonctions continues.

Proposition 7.53. *Si $f, g : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ sont des applications continues et X est séparé, alors :*

(1) L'ensemble $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.

(2) Le graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$.

7.5 Espaces topologiques Hausdorff

Dans un espace métrique on utilise souvent la propriété de séparation, si $d(x, y) = 0$ alors $x = y$. La distance sépare les points de l'espace métrique (X, d_X). C'est cette condition qui nous donne que toute suite convergente (x_n) dans un espace métrique (X, d_X) admet une limite unique. Cependant cela n'est pas nécessairement vrai dans les espaces topologiques autres que les espaces métriques. Voir l'exemple 7.14.
Lorsque Hausdorff a cristallisé les premières idées modernes d'un espace topologique, il a inclus une condition supplémentaire pour assurer la «séparation de points». Il était plus tard découvert que des topologies sans cette condition supplémentaire pourraient être utiles. Maintenant la condition Hausdorff est considérée séparément.

Définition 7.54. Un espace topologique $(X, \mathscr{T})$ est dit **Hausdorff** ou **séparé** si deux points distincts appartiennent à deux ouverts disjoints.

Propriétés des espaces topologiques Hausdorff

(1) Si $(X, \mathscr{T}_X)$ est un espace topologique Hausdorff et $A \subseteq X$, alors le sous-espace topologique $(A, \mathscr{T}_A)$ est aussi Hausdorff.

(2) Si $(X, \mathscr{T}_X)$ et $(Y, \mathscr{T}_Y)$ sont deux espaces topologiques Hausdorff, alors leurs produit $(X \times Y, \mathscr{T}_{X\times Y})$ est aussi un espace topologique Hausdorff.

(3) Si $(X, \mathscr{T})$ est Hausdorff et $A \subset X$. Un point $x \in X$ est un point d'accumulation de A si et seulement si tout voisinage V de x contient un nombre infini de point de A.

(4) Toute suite dans un espace topologique Hausdorff admet au plus une limite.

(5) Tout singleton dans un espace topologique Hausdorff est fermé.

(6) Toute partie finie d'un espace topologique Hausdorff est fermée.

(7) Si $(X, \mathscr{T})$ est Hausdorff et $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$, alors $(X, \mathscr{T}')$ est Hausdorff.

(8) $(X, \mathscr{T}_X)$ est Hausdorff si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ est fermée dans $X \times X$.

(9) Si $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ est injective et continue et $(Y, \mathscr{T}_Y)$ est Hausdorff alors $(X, \mathscr{T}_X)$ l'est aussi.

(10) Si $(X, \mathscr{T}_X)$ est homéomorphe à $(Y, \mathscr{T}_Y)$, alors $(X, \mathscr{T}_X)$ est Hausdorff si et seulement si $(Y, \mathscr{T}_Y)$ est Hausdorff.

(11) La propriété Hausdorff est une propriété topologique.

(12) Si $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ est une application continue et $(Y, \mathscr{T}_Y)$ est Hausdorff alors le graphe $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$.

(13) Si $f, g : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ sont des applications continues et $(Y, \mathscr{T}_Y)$ est Hausdorff alors $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.

Démonstration. Nous donnons les démonstrations de (1)–(6) et nous laissons les autres comme exercices.

(1) Soient $x, y \in A, x \neq y$ alors $x, y \in X, x \neq y$ et ils existent $V, V \in \mathscr{T}_X$ tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \varnothing$ car $(X, \mathscr{T}_X)$ est Hausdorff. Soient $U_1 = A \cap U$ et $V_1 = A \cap V$, alors $U_1, V_1 \in \mathscr{T}_A, x \in U_1, y \in V_1$ et $U_1 \cap V_1 = \varnothing$ qui montre que $(A, \mathscr{T}_A)$ est Hausdorff.

(2) Supposons que $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ et $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. Alors soit $x_1 \neq x_2$ ou bien $y_1 \neq y_2$. Supposons que $x_1 \neq x_2$, puisque $(X, \mathscr{T}_X)$ est Hausdorff, ils existent $U_1, U_2 \in \mathscr{T}_X$ tels que $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ et $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Observons que $U_1 \times Y$ et $U_2 \times Y$ sont des voisinages ouverts disjoints de (x_1, y_1) et (x_2, y_2), donc $(X \times Y, \mathscr{T}_{X \times Y})$ est un espace topologique Hausdorff.

(3) Si $V \cap A$ est infini, alors $V \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing$, donc x est un point d'accumulation de A.
Réciproquement, si $V \cap A$ est fini, alors $V \cap (A - \{x\}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est fermé. Donc, $U = V - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = V \cap (X - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\})$ est ouvert. Alors, $x \in U$, U ouvert, et $U \cap (A - \{x\}) = \varnothing$, donc x n'est pas un point d'accumulation de A.

(4) Supposons que la suite (x_n) converge vers y et z. On doit montrer que $y = z$. Supposons que $x \neq y$, alors puisque X est séparé ils existent des ouverts $U, V \in \mathscr{T}$ tels que $y \in U, z \in V$ et $U \cap V = \varnothing$. Puisque $x_n \to y$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geq N$. Puisque $x_n \to z$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in V$ pour tout $n \geq M$. Donc, pour $n \geq \max\{N, M\}, x_n \in U \cap V$, ce qui est impossible car l'intersection est vide.

(5) Soit $y \in X$ et $y \neq x$. Puisque X est séparé ils existent des ouverts $U, V \in \mathscr{T}$ tels que $x \in U, y \in V$ et $U \cap V = \varnothing$. Puisque $x \notin V$, alors $x \in X - V$ qui est un fermé contenant $\{x\}$. Donc $\mathbf{Adh}\{x\} \subset X - V$, donc $y \notin \mathbf{Adh}\{x\}$. En outre, puisque $\mathbf{Adh}\{x\}$, ne peut contenir un point autre que x, il en découle que $\{x\} = \mathbf{Adh}\{x\}$, donc $\{x\}$ est fermé.

(6) Toute partie finie est une réunion de singletons (fermés) et la réunions finie de parties fermées est fermée.

■

Unicité de la limite dans les espaces topologiques séparés.

Dans les espaces métriques tout singleton est un fermé et toute suite convergentes admet une limite unique. Ces deux propriétés ne sont pas nécessairement varies dans les espaces topologiques non-Hausdorff.
L'espace topologique de Sierpinski $(X, \mathscr{T}_a)$ n'est pas Hausdorff. Le complément de l'ouvert $\{a\}$ est $\{b\}$ n'est pas un ouvert. Donc le singleton $A = \{a\}$ de $(X, \mathscr{T}_a)$ n'est pas fermé.
On a vue dans l'exemple (7.14) que dans l'espace topologique grossier $(X, \mathscr{T}_{\text{Gros}})$ la limite d'une suite convergente n'est pas unique.
La propriété Hausdorff dans les espaces topologiques garanti que le singleton est un fermé et que la limite d'une suite convergente est unique.

Exemple 7.55.

(1) Si (X, d) espace métrique alors $(X, \mathscr{T}_d)$ est Hausdorff.
Autrement dit tout espace métrisable est Hausdorff.

(2) $(\mathbb{R}^n, \mathscr{T}_{d_2})$ est Hausdorff.

(3) $(X, \mathscr{T}_{\text{Disc}})$ est Hausdorff pour tout X.

(4) Si $(X, \mathscr{T})$ est Hausdorff et X est fini, alors $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{\text{Disc}}$.

(5) $(X, \mathscr{T}_{\text{Gros}})$ n'est pas Hausdorff pour tout X.

(6) $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ n'est pas Hausdorff si X est infini, mais tout singleton $\{x\}$ de X est fermé.

(7) Si $X = \{a, b\}$ et $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{\text{Disc}} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, X\}$, alors $(X, \mathscr{T}_{\text{Disc}})$ est Hausdorff.

(8) $X = \{a, b\}$ avec la topologie de Sierpinski $\mathscr{T}_a = \{\varnothing, \{a\}, X\}$, n'est pas séparé, car le seul ouvert contenant b est X et donc il n y a pas d'ouvert contenant a disjoint de X.

(9) Un espace topologique fini n'est pas nécessairement Hausdorff.

7.6 Espaces topologiques compacts

La définition de compacité dans un espace topologique $(X, \mathscr{T}_X)$ est la même que celle sur un espace métrique.

Définition 7.56. Soit $(X, \mathscr{T}_X)$ un espace topologique et A une partie de X. On dit que :
(a) $(X, \mathscr{T}_X)$ est **compact** si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de $\mathscr{T}_X$ telle que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, alors in existe $J \subset I$ fini tel que $X = \bigcup_{i\in J} U_i$.
(b) A est **compacte** si le sous-espace topologique $(A, \mathscr{T}_A)$ est compact.

Remarque. Dans un espace topologique abstrait il n'y a pas de notion de distance et donc on ne peut pas parler de parties bornées.

Définitions equivalentes

(a) An espace topologique $(X, \mathscr{T})$ est compact.

(b) Tout recouvrement ouvert de X possède un sous-recouvrement fini.

(c) Toute famille de parties fermées de X qui possède la propriété de l'intersection finie possède une intersection non vide.

(d) Toute partie infinie de X possède un point d'accumulation.

(e) Toute suite de X possède un point d'accumulation.

Le théorème suivant est similaire à la proposition 5.3 mais dans le contexte des espaces topologiques. La démonstration est aussi similaire, mais on doit utiliser les ouverts à la places des boules ouvertes.

Théorème 7.57. *Soit $(X, \mathscr{T}_X)$ un espace topologique, alors on a :*

(a) *Toute partie fermée d'une partie compacte est compacte.*

(b) *Toute partie compacte d'un espace Hausdorff est fermée.*

(c) *L'image continue d'une partie compacte est compacte.*

Démonstration. Soit $(X, \mathscr{T}_X)$ un espace topologique.

(a) Si K est compact dans X et F est une partie fermée dans K. Si $U_\alpha \in \mathscr{T}_X$ $[\alpha \in A]$ et $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \supseteq F$, alors $X \setminus F \in \mathscr{T}_X$ et

$$(X \setminus F) \cup \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = X \supseteq E.$$

Puisque est K est compact, on peut trouver $\alpha(j) \in A$ $[1 \leq j \leq n]$ tels que

$$(X \setminus F) \cup \bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha(j)} \supseteq E.$$

Puisque $(X \setminus F) \cap F = \varnothing$ et $E \supseteq F$, il suit que

$$\bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha(j)} \supseteq F$$

donc F est compact.

(b) Let K be a compact set. If $x \notin K$, alors, pour tout $k \in K$, on a $k \neq x$, et puisque X est Hausdorff, on peut trouver des ouverts U_k et V_k tels que

$$x \in V_k,\ k \in U_k \text{ and } V_k \cap U_k = \varnothing.$$

Puisque $\bigcup\limits_{k \in K} U_k \supseteq \bigcup\limits_{k \in K} \{k\} = K$, est un recouvrement par des ouvert de K. Par compacité, on peut trouver $k(1), k(2), \ldots, k(n) \in K$ tels que

$$\bigcup_{j=1}^{n} U_{k(j)} \supseteq K.$$

Notons que l'intersection finie $V = \bigcap\limits_{j=1}^{n} V_{k(j)}$ est un voisinage de x et que

$$V \cap K \subseteq V \cap \bigcup_{j=1}^{n} U_{k(j)} = \varnothing,$$

donc $V \cap K = \varnothing$ et on a montrer que tout $x \in X \setminus K$ possède un voisinage ouvert inclus dans $X \setminus K$. Donc $X \setminus K$ est ouvert et K est fermé.

(c) Supposons que $U_a \in \mathscr{T}_Y$ pour tout $a \in A$ et $\bigcup\limits_{a \in A} U_a \supseteq f(K)$. Alors

$$\bigcup_{a \in A} f^{-1}(U_a) = f^{-1}\left(\bigcup_{a \in A} U_a\right) \supseteq K$$

et, puisque f est continue $f^{-1}(U_a) \in \mathscr{T}_X$ pour tout $a \in A$. Puisque K est compact, il existent $a(j) \in A$ $[1 \leq j \leq n]$ tels que

$$\bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(U_{a(j)}) \supseteq K$$

et donc
$$\bigcup_{j=1}^{n} U_{a(j)} \supseteq f\left(\bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(U_{a(j)})\right) \supseteq f(K)$$
qui entraine que $f(K)$ est compact.

$\blacksquare$

Attention. Dans un espaces métriques toute partie compacte est fermée. Cela n'est pas vrai dans un espace topologique sauf si ce dernier est Hausdorff. Si $X = \{a, b\}$, $\mathscr{T}_X = \{\varnothing, X\}$ et $K = \{a\}$. $(X, \mathscr{T}_X)$ est compact car X est fini, cependant K est une partie compacte qui n'est pas fermée car son complément $\{b\}$ n'est pas ouvert. Cela donne un exemple d'une partie compacte qui n'est pas fermée qui montre que la condition Hausdorff est nécessaire dans la partie (b) de la proposition précédente.

Remarque. Dans un espace topologique métrisable une partie est compacte si et seulement si elle est bornée et fermée.

Corollaire 7.58. *Si $(X, \mathscr{T})$ est un espace topologique compact Hausdorff et $A \subset X$. Alors A est une partie fermée de X si et seulement si $(A, \mathscr{T}_A)$ est compact.*

Le corollaire suivant est une version du théorème des valeurs extrêmes.

Corollaire 7.59. *Si $(X, \mathscr{T})$ est un espace topologique compact et $f : (X, \mathscr{T}) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est une application continue, alors ils existent $a, b \in X$ tels que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ pour tout x de X.*

Remarque. Le résultat prochain est le même que celui dans la proposition 5.18, sauf que dans le contexte d'espaces topologiques on doit ajouter la condition que $(Y, \mathscr{T}_Y)$ est Hausdorff qui n'est pas nécessaire dans (5.18) car tout espace métrique est Hausdorff.

Proposition 7.60. *Supposons que $(X, \mathscr{T}_X)$ est compact, que $(Y, \mathscr{T}_Y)$ est Hausdorff et que $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ est une bijection continue, alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. Puisque f est une bijection, $g = f^{-1}$ est une fonction bien définie. Si K est fermé dans X, alors il est compact dans X et donc $f(K)$ est compact. Mais une partie compacte d'un espace Hausdorff est fermée donc $g^{-1}(K) = f(K)$ est fermé. Donc g est continue. Cela entraine que f est un homéomorphisme. $\blacksquare$

Proposition 7.61. *Soient $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ deux topologies sur le même espace X telles que $\mathscr{T}_1 \supseteq \mathscr{T}_2$.*

(a) *Si $\mathscr{T}_1$ est compacte alors $\mathscr{T}_2$ l'est aussi.*

(b) *Si $\mathscr{T}_2$ est Hausdorff alors $\mathscr{T}_1$ l'est aussi.*

(c) *Si $\mathscr{T}_1$ est compacte et $\mathscr{T}_2$ est Hausdorff alors $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$.*

Démonstration.

(a) Puisque $i : (X, \mathscr{T}_1) \to (X, \mathscr{T}_2)$ est continue, alors l'image d'un compact est compact. Donc si X est compact dans $\mathscr{T}_1$, alors X est compact dans $\mathscr{T}_2$.

(b) Si $x_1 \neq x_2$ alors ils existent $U_1, U_2 \in \mathscr{T}_2$ tels que $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Mais $\mathscr{T}_1 \supseteq \mathscr{T}_2$ donc $U_1, U_2 \in \mathscr{T}_1$.

(c) L'application $i : (X, \mathscr{T}_1) \to (X, \mathscr{T}_2)$ est une bijection continue. Donc un i est un homéomorphisme qui entraine que $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$.

■

Théorème 7.62. *$X \times Y$ est compact si et seulement si X et Y sont compacts.*

Démonstration.
($\Rightarrow$) Si $X \times Y$ est compact alors X et Y sont sont compacts car ils sont les image des projections continues $p_X(X \times Y) = X$ et $p_Y(X \times Y) = Y$.
($\Leftarrow$) Soit $O_a \in \mathscr{T}_{X\times Y}$ $[a \in A]$ et
$$\bigcup_{a\in A} O_a = X \times Y.$$
Alors, pour tout $(x, y) \in X \times Y$, on peut trouver $U_{x,y} \in \tau$, $V_{x,y} \in \sigma$ et $a(x, y) \in A$ tels que
$$(x, y) \in U_{x,y} \times V_{x,y} \subseteq O_{a(x,y)}.$$
En particulier, on a
$$\bigcup_{y\in Y} \{x\} \times V_{x,y} = \{(x, y) \,:\, y \in Y\}$$
pour tout $x \in X$ et alors
$$\bigcup_{y\in Y} V_{x,y} = Y.$$
Puisque $(Y, \mathscr{T}_Y)$ est compact, on peut trouver un nombre naturel $n(x)$ et $y(x, j) \in Y$ $[1 \leq j \leq n(x)]$ tel que
$$\bigcup_{j=1}^{n(x)} V_{x,y(x,j)} = Y.$$
Maintenant $U_x = \displaystyle\bigcap_{j=1}^{n(x)} U_{x,y(x,j)}$ est une intersection finie d'ouverts de X et donc est ouvert. De plus $x \in U_x$ donc
$$\bigcup_{x\in X} U_x = X.$$
Puisque $(X, \mathscr{T}_X)$ est compact $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m$ tels que
$$\bigcup_{r=1}^{m} U_{x_r} = X.$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned}\bigcup_{r=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n(x_r)} O_{x_r,y(x_r,j)} &\supseteq \bigcup_{r=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n(x_r)} U_{x_r,y(x_r,j)} \times V_{x_r,y(x_r,j)}\\ &\supseteq \bigcup_{r=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n(x_r)} U_{x_r} \times V_{x_r,y(x_r,j)} \supseteq \bigcup_{r=1}^{m} U_{x_r} \times Y \supseteq X \times Y\end{aligned}$$

et donc $(X \times Y, \mathscr{T}_{X\times Y})$ est compact. ■

Le théorème de Tychonoff est équivalent a l'axiome du choix.

Théorème 7.63 (Théorème de Tychonoff)**.**

$$\prod_{a\in A} X_a \textit{ est compact si et seulement si } X_a \textit{ est compact pour tout } a \in A.$$

Propriétés des espaces topologiques compacts

(1) An espace topologique $(X, \mathscr{T})$ est dit compact si tout recouvrement de X par des ouverts de $\mathscr{T}$ possède un sous-recouvrement fini.

(2) Soit $\mathscr{B}$ est une base de $(X, \mathscr{T})$. Alors $(X, \mathscr{T})$ est dit compact si et seulement si tout recouvrement de X par des ouverts de $\mathscr{B}$ possède un sous-recouvrement fini.

(3) Toute famille de parties fermées d'un espace topologique $(X, \mathscr{T})$ qui possède la propriété de l'intersection finie possède une intersection non vide.

(4) Toute partie infinie de $(X, \mathscr{T})$ possède un point d'accumulation.

(5) Toute suite de $(X, \mathscr{T})$ possède un point d'accumulation.

(6) Toute partie fermée d'un espace topologique compact est compacte.

(7) Toute partie compacte d'un espace topologique Hausdorff est fermée.

(8) Une partie d'un espace topologique compact et Hausdorff est fermée si et seulement si elle est compacte.

(9) L'image continue d'une partie compacte est compacte.

(10) Dans un espace topologique métrisable une partie est compacte si et seulement si elle est bornée et fermée.

(11) Dans un espace vectoriel normé de dimension fini une partie est compacte si et seulement si elle est bornée et fermée.

(12) Si $(X, \mathscr{T})$ est compact et $f : (X, \mathscr{T}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_d)$ est une application continue, alors ils existent $a, b \in X$ tels que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ pour tout x de X.

(13) Une bijection continue d'un espace topologique compact vers un espace topologique Hausdorff est un homéomorphisme.

(14) L'union finie de parties compactes de $(X, \mathscr{T})$ est compacte.

(15) L'intersection de parties compactes d'un espace Hausdorff $(X, \mathscr{T})$ est compacte.

(16) Le produit arbitraire de compacts est compact si et seulement si chaque facteur est compact.

(17) Si $\mathscr{T}_2$ est moins fine que $\mathscr{T}_1$ et $(X, \mathscr{T}_1)$ est compact alors $(X, \mathscr{T}_2)$ est compact.

(18) Si $\mathscr{T}_2$ est moins fine que $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_1$ est compacte et $\mathscr{T}_2$ est Hausdorff alors $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$.

(19) Si X est fini alors $(X, \mathscr{T})$ est toujours compact.

(20) $(X, \mathscr{T}_{\text{Gros}})$ est toujours compact.

(21) $(X, \mathscr{T}_{\text{Disc}})$ est compact si et seulement si X est fini.

(22) $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ est toujours compact.

Exemple 7.64.

(1) $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$ n'est pas compact mais l'intervalle $[a, b]$ est une partie compacte de $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$.

(2) $(\mathbb{R}^n, \mathscr{T}_u)$ n'est pas compact mais la boule fermée $B_f(x, r)$ est une partie compacte.

(3) Toute partie fermée et bornée de $(\mathbb{R}^n, \mathscr{T}_u)$ est compacte.

(4) Dans $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$ la partie $A = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ est compacte.

(5) $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\text{Dis}})$ n'est pas compact.

(6) $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\text{Gros}})$ est compact.

(7) $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ est compact.

(8) Si $X = \{a, b, c\}$ alors les 29 topologies sur X sont toutes compactes.

(9) Si $x_n \to x$ dans $(X, \mathscr{T}_X)$, alors $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

(10) La boule unité fermée d'un espace vectoriel normé de dimension fini est compacte.

7.7 Espaces topologiques connexes

La **connexité** est une propriété topologique. Puisque la définition de la connexité sur les espace métriques utilise seulement les ouverts alors sa définition sur les espace topologiques reste la même. De plus les résulta obtenu restent valides.

Définition 7.65. Soit $(X, \mathscr{T}_X)$ un espace topologique.

(a) $(X, \mathscr{T}_X)$ est dit **connexe** si et seulement si les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées sont l'ensemble vide $\varnothing$ et X.

(b) X est connexe si et seulement si $X = A \cup B$, où $A \cap B = \varnothing$, A et B sont les deux ouverts ou fermés, alors soit $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$.

(c) $(X, \mathscr{T}_X)$ est dit **non-connexe** si on peut trouver des ouverts non-vides $U, V \in \mathscr{T}_X$ tels que, $U \cup V = X$ et et $U \cap V = \varnothing$. Un espace qui n'est pas non-connexe est dit **connexe**.

(d) Une partie A e X est dite connexe (respectivement non-connexe) si et seulement si le sous-espace topologique $(A, \mathscr{T}_A)$ est connexe (respectivement non-connexe).

(e) Soit $(X, \mathscr{T}_X)$ un espace topologique. On appelle **chemin** toute application continue $\gamma : [0, 1] \to (X, \mathscr{T}_X)$. L'image $\gamma([0, 1])$ du chemin s'appelle un **arc** avec origine $\gamma(0)$ et extrémité $\gamma(1)$.

(f) Soit $(X, \mathscr{T}_X)$ un espace topologique. On dit que X est **connexe par arcs** si pour toute paire de points $x, y \in X$, il existe un arc inclus dans X d'origine x et d'extrémité y.

Proposition 7.66. *Soit $(X, \mathscr{T}_X)$ un espace topologique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *X est connexe.*

(b) *$\varnothing$ et X sont les seules parties ouvertes et fermées à la fois dans X.*

(c) *Si $A \subseteq X$ et* **Fr** *$A = \varnothing$ alors soit $A = \varnothing$ ou bien $A = X$.*

(d) *Il n'existe pas de partions de X en deux ouverts disjoints.*

(e) *Il n'existe pas de partions de X en deux fermés disjoints.*

(f) *X n'est pas la réunion de deux parties séparées de X.*

Propriétés des espaces topologiques connexes

(1) $(X, \mathscr{T}_X)$ est connexe ssi les seules parties à la fois ouvertes et fermées sont $\varnothing$ et X.

(2) La réunion et l'intersection de parties connexes n'est pas nécessairement connexe.

(3) Une partie A d'un espace topologique connexe $(X, \mathscr{T}_X)$ n'est pas nécessairement connexe. On dit alors que la connexité **n'est pas une propriété héréditaire**.

(4) Si $(X, \mathscr{T}_X)$ est un espace topologique, $x_0 \in X$, et $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$ est une collection de parties connexes de X, telle que $x_0 \in E_\alpha$ pour tout $\alpha \in I$, alors $E = \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ est connexe.

(5) Si X est connexe et $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$ est une collection de parties connexes de X, tel que $E_\alpha \cap E_\beta \neq \varnothing$ pour tout $\alpha, \beta \in I$, alors $E = \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ est connexe.

(6) Si X est connexe et $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de parties connexes de X, tel que $E_n \cap E_{n+1} \neq \varnothing$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ est connexe.

(7) Un espace topologique $(X, \mathscr{T}_X)$ est connexe si et seulement si toute application continue $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (\{0,1\}, \mathscr{T}_{disc})$ est constante c.a.d. soit $f \equiv 0$ ou bien $f \equiv 1$.

(8) Si $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ est continue et X est connexe, alors $f(X)$ est connexe.

(9) Si $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ est continue alors X est connexe si et seulement si le graphe de $f, \Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ est connexe.

(10) La connexité est une propriété topologique.

(11) Supposons que A est une partie connexe de l'espace topologique $(X, \mathscr{T}_X)$ et que $A \subseteq B \subseteq \mathbf{Adh}(A)$. Alors B est connexe.

(12) L'adhérence d'une partie connexe est connexe.

(13) Soient $(X, \mathscr{T}_X)$ et $(Y, \mathscr{T}_Y)$ des espaces topologiques, alors $X \times Y$ est connexe si et seulement si X et Y le sont.

(14) Tout espace topologique $(X, \mathscr{T}_X)$ connexe par arcs est connexe.

(15) $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_d)$ est connexe et donc $(\mathbb{R}^n, \mathscr{T}_d)$l'est aussi.

(16) Une partie A de $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_d)$ est connexe si et seulement si A est un intervalle.

(17) Toute partie ouverte et connexe de $(\mathbb{R}^n, \mathscr{T}_d)$ est connexe par arcs.

(18) $(\mathbb{R}^n, \mathscr{T}_d)$ est connexe par arcs.

(19) Toute partie convexe de $(\mathbb{R}^n, \mathscr{T}_d)$ est connexe par arcs.

Exemple 7.67.

(1) $(X, \mathscr{T}_{\text{Gros}})$ est toujours connexe.

(2) $(X, \mathscr{T}_{\text{Disc}})$ est toujours non-connexe si X contient au moins 2 éléments.

(3) $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\mathrm{d}})$ est connexe et $(\mathbb{Q}, \mathscr{T}_{\mathrm{d}})$ est non-connexe.

(4) $(X, \mathscr{T}_a)$ est connexe où $X = \{a, b\}$ et $\mathscr{T}_a = \{\varnothing, \{a\}, X\}$.

(5) $(X, \mathscr{T}_{\mathrm{Cof}})$ est connexe seulement si X est infini.

(6) $\mathbb{R} - \{0\}$ n'est pas connexe mais $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ est connexe.

(7) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq (x-c)^2 + (y-d)^2 \leq b\}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $0 < a < b$ est connexe par arcs.

7.8 Structures topologiques de quelques espaces

Dans cette section on revisite quelques exemples d'espaces topologiques fondamentaux et on liste leurs majeures propriétés topologiques.

Topologies grossière

Soient X un ensemble quelconque alors $\mathscr{T}_{\text{Gros}} = \{\varnothing, X\}$ est appelée la topologie **triviale** ou topologie **grossière** sur X. $(X, \mathscr{T}_{\text{Gros}})$ est appelé l'espace topologique grossier.

Propriétés. Soit $(X, \mathscr{T}_{\text{Gros}})$ un espace topologique grossier alors :

(1) $\mathscr{T}_{\text{Gros}}$ est la topologie la moins fine sur X.

(2) Les seuls ouverts et fermés de $(X, \mathscr{T}_{\text{Gros}})$ sont $\varnothing$ et X.

(3) La topologie grossière est la moins fine possible sur X.

(4) La seule base possible de la topologie grossière sur X est $\{X\}$.

(5) Toute fonction $f : (Y, \mathscr{T}_Y) \to (X, \mathscr{T}_{\text{Gros}})$ est continue.

(6) $(X, \mathscr{T}_{\text{Gros}})$ n'est pas métrisable.

(7) $(X, \mathscr{T}_{\text{Gros}})$ n'est pas Hausdorff si X a au moins deux éléments.

(8) $(X, \mathscr{T}_{\text{Gros}})$ est connexe.

(9) $(X, \mathscr{T}_{\text{Gros}})$ est compact.

(10) Tout sous-espace de $(X, \mathscr{T}_{\text{Gros}})$ possède la topologie grossière.

(11) Toute suite de $(X, \mathscr{T}_{\text{Gros}})$ converge vers tout point de X.

(12) Toute suite possède une sous-suite convergente (la suite elle-même).

(13) $(X, \mathscr{T}_{\text{Gros}})$ est donc séquentiellement compact.

(14) Si $A \subsetneq X$ alors $\mathbf{Int}_{\text{Gro}}\, A = \varnothing$ et $\mathbf{Adh}_{\text{Gro}}\, A = X$.

(15) Tout sous-ensemble non-vide de X est donc dense dans X, une propriété qui caractérise les espaces topologiquement grossiers.

(16) Si S est un sous-ensemble de X ayant au moins deux points, tout élément de X est un point d'accumulation de S.

(17) Si $S = \{a : a \in X\}$ alors les points d'accumulations de S sont $X - \{a\}$.

(18) Deux espaces grossièrement topologiques sont homéomorphes si et seulement s'ils ont même cardinalité.

Topologies discrète

Soit X un ensemble quelconque et $\mathscr{T}_{\text{Disc}} = \mathscr{P}(X)$, l'ensemble de toutes les parties de X. Alors on appelle $\mathscr{T}_{\text{Disc}}$ la topologie **discrète** de X et $(X, \mathscr{T}_{\text{Disc}})$ l'espace topologique **discret**.

Propriétés de $(X, \mathscr{T}_{\text{Disc}})$**.**

(1) $\mathscr{T}_{\text{Disc}}$ est la topologie la plus fine possible sur X.

(2) Dans $(X, \mathscr{T}_{\text{Disc}})$ le singleton $\{x\}$ est une partie à la fois ouverte et fermée.

(3) Dans $(X, \mathscr{T}_{\text{Disc}})$ toute partie de X est à la fois ouverte et fermée.

(4) Si $A \subset X$ alors $\mathbf{Adh}\, A = \mathbf{Int}\, A = A$.

(5) Il n'existe pas de partie X dense dans X.

(6) Tout point de X est isolé.

(7) Toute application $f : (X, \mathscr{T}_{\text{Disc}}) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ est toujours continue.

(8) $(X, \mathscr{T}_{\text{Disc}})$ est Hausdorff (si X contient plus deux points).

(9) $(X, \mathscr{T}_{\text{Disc}})$ est compact si et seulement si X est fini.

(10) $(X, \mathscr{T}_{\text{Disc}})$ n'est pas connexe (si X contient plus d'un point).

(11) $(X, \mathscr{T}_{\text{Disc}})$ est métrisable, par exemple par la distance discrète δ.

(12) Un espace fini est métrisable seulement si'il est discret.

(13) Les singletons de X forment une base de sa topologie.

(14) X est à base dénombrable d'ouverts si et seulement si X est dénombrable.

(15) $(X, \mathscr{T})$ est discret si et seulement si tous ses singletons sont ouverts.

(16) Un espace topologique fini $(X, \mathscr{T})$ est discret si et seulement si $(X, \mathscr{T})$ est séparé.

(17) $(X, \mathscr{T}_{\text{Disc}})$ est séparable si et seulement si X est dénombrable.

(18) Deux espaces topologiques discrets de même cardinalité sont homéomorphes.

Topologie de Sierpinski

Soit $X = \{a, b\}$, alors il y a 4 topologies possibles sur X.

(1) $\mathscr{T}_{\text{Gros}} = \{\varnothing, X\}$, la topologie triviale .

(2) $\mathscr{T}_a = \{\varnothing, \{a\}, X\}$.

(3) $\mathscr{T}_b = \{\varnothing, \{b\}, X\}$.

(4) $\mathscr{T}_{\text{Disc}} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, X\}$, la topologie discrète.

Les topologies $\mathscr{T}_a, \mathscr{T}_b$ sont appelées les espaces de *Sierpinski*.
Dans l'espace de Sierpinski $(X, \mathscr{T}_a)$, le point a est séparé du point b par l'ouvert $\{a\}$, cependant le point b n'est pas séparé par un ouvert du point a. $(X, \mathscr{T}_a)$ n'est pas Hausdorff. Ce genre de asymétrie de «proximité» dans les espaces topologiques n'existe pas dans les espace métriques.

Propriétés de la topologie de Sierpinski. Soit $X = \{a, b\}$ et $\mathscr{T}_a = \{\varnothing, \{a\}, X\}$, alors :

(1) Les ouverts de $\mathscr{T}_a$ sont $\{\varnothing, \{a\}, X\}$.

(2) Les fermés de $\mathscr{T}_a$ sont $\{\varnothing, \{b\}, X\}$.

(3) $\mathbf{Adh}\{a\} = X$ et $\mathbf{Int}\{a\} = \{a\}$. $\{a\}$ est dense dans X.

(4) $\mathbf{Adh}\{b\} = \{b\}$ et $\mathbf{Int}\{b\} = \varnothing$.

(5) $\{a\}$ est un ouvert qui n'est pas fermé et $\{b\}$ est un fermé qui n'est pas ouvert.

(6) $f : [0, 1] \to X$ définie par $f(0) = a$ et $f(t) = b, t \in (0, 1]$ est un chemin entre a et b.

(7) $(X, \mathscr{T}_a)$ n'est pas Hausdorff.

(8) $(X, \mathscr{T}_a)$ est connexe par arcs et connexe.

(9) $(X, \mathscr{T}_a)$ est compact.

(10) $(X, \mathscr{T}_a)$ n'est pas métrisable.

(11) $\{a\}$ est une partie compact de X qui n'est pas fermée.

(12) Tout recouvrement par des ouverts de X doit contenir X car X est le seul ouvert contenant le point b. Tout recouvrement par des ouverts de X contient un sous-recouvrement fini qui est $X = \{a, b\}$ lui même.

(13) Toute suite dans X converge vers le point b car le seul voisinage de b est X.

(14) Une suite dans X converges vers a si et seulement si la suite contient un nombre fini de b et un nombre infini de a.

(15) Les seules fonctions $f : X \to X$ continues sont $f(x) = x$, $f(x) \equiv a$ et $f(x) \equiv b$.

Topologie cofinie

Soit X un ensemble. La topologie **cofinie (complément fini)** $\mathscr{T}_{\text{Cof}}$ est définie par ;

$$\mathscr{T}_{\text{Cof}} = \{U \in X : X - U \text{ est fini } \} \cup \{\varnothing\}.$$

On notera l'espace topologique cofinie par $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$.
Remarque. Le nom cofinie vient de «***complément fini***».

Propriétés de $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$**.**

(1) Si X est fini alors $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}}) = (X, \mathscr{T}_{\text{Disc}})$.

(2) La seule partie finie et ouverte de $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ est $\varnothing$.

(3) La seule partie infinie et fermée de $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ est X.

(4) Les partie fermées de $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ sont les parties finies ou bien X.

(5) Si X est infini et $A \subset X$ alors $\mathbf{Adh}\, A = X$ si A est infini.

(6) Si X est infini et $A \subset X$ alors $\mathbf{Adh}\, A = A$ si A est fini.

(7) Si X est infini et $A \subset X$ alors $\mathbf{Int}\, A = A$ si $X - A$ est fini.

(8) Si X est infini et $A \subset X$ alors $\mathbf{Int}\, A = \varnothing$ si $X - A$ est infini.

(9) Toute partie A infinie de X est dense dans X.

(10) Les seules parties ouvertes et fermée à la fois de $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ sont $\varnothing$ et X.

(11) Toute partie de l'espace topologique $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ est compacte.

(12) Toute partie ouverte de $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ est compacte mais n'est pas fermée.

(13) $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ est compact.

(14) $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ est connexe.

(15) $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ n'est pas Hausdorff.

(16) Si S est une partie finie de X, alors S est ouvert dans $\mathscr{T}_{\text{Disc}}$, mais ne l'est pas dans $\mathscr{T}_{\text{Cof}}$ car $X - S$ est infini. Donc. $\mathscr{T}_{\text{Cof}} \neq \mathscr{T}_{\text{Disc}}$.

(17) $\mathscr{T}_{\text{Cof}} \subsetneq \mathscr{T}_{\text{Disc}}$ (inclusion stricte).

(18) Si $X = \mathbb{N}$, alors $\mathscr{T}_{\text{Gros}} \subsetneq \mathscr{T}_{\text{Cof}} \subsetneq \mathscr{T}_{\text{Disc}}$ (inclusions strictes).

(19) $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_d)$ n'est pas compact mais $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ est compact.

(20) $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_d)$ est Hausdorff mais $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ n'est pas Hausdorff.

(21) Dans $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_d)$ les parties compactes sont fermées mais dans $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ les parties ouvertes (autres que X) sont compactes mais ne sont pas fermées.

7.9 Exercices

1. Soit $X = \{a, b, c\}$ trouver les 29 topologies possibles sur X.

2. Montrer que la collection $\mathscr{T}_{\text{Cof}}$ est une topologie sur X.

3. Montrer que la collection $\mathscr{T}_d$ est une topologie sur X.

4. Si $(X, \mathscr{T})$ est un espace topologique et $A \subset X$, montrer que la collection $\mathscr{T}_A = \{A \cap U : U \in \mathscr{T}\}$ est une topologie sur A.

5. Soit $X = \{a, b, c\}$, $\mathscr{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ et $A = \{a, b\}$. Trouver la topologie induite $\mathscr{T}_A$ de A.

6. Soient $X = [0, \infty)$ et $U_a = \{(a, \infty) : a > 0\}$, montrer que $\mathscr{T} = \{\varnothing, X, U_a\}$ est une topologie sur X.

7. Soit X un ensemble infini, montrer que :

(a) La collection $\mathscr{T}_{\text{Cof}}$ est une topologie sur X.

(b) La seule partie finie et ouverte de $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ est $\varnothing$.

(c) La seule partie infinie et fermée de $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ est X.

(d) Les seules parties ouvertes et fermée à la fois de $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ sont $\varnothing$ et X.

(e) Toute partie de l'espace topologique $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ est compacte.

(f) Toute partie ouverte de l'espace topologique $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ est compacte mais pas fermée.

8. Montrer que $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ est compact, connexe, mais n'est pas Hausdorff (séparé).

9. Soit $(X, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ ou X est infini et $A \subseteq X$.
(a) Trouver **Int** A dans le cas ou A est fini et infini.
(b) Trouver **Fr** A dans le cas ou A est fini et infini.

10. Soient $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ deux topologies sur X.
(a) Montrer que $\mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$ est une topologie sur X.
(b) Montrer que généralement $\mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2$ n'est pas une topologie sur X.

11. Soit $U_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, montrer que $\mathscr{T} = \{\varnothing, U_n, \mathbb{N}\}$ est une topologie sur $\mathbb{N}$.

12. Soit $\mathscr{T}$ la collection de parties de $\mathbb{R}$ contenant $\varnothing, \mathbb{R}$ et tout les intervalles de la forme $(-\infty, b)$. Montrer que $\mathscr{T}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.

13. Montrer que tout espace métrique est séparé.

14. Montrer que si X et Y sont des espaces topologiques séparés, alors $X \times Y$ est aussi.

15. Montrer que $\mathscr{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ est une base pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.

16. Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ des bases pour les topologies $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ respectivement. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathscr{T}$ est moins fine que $\mathscr{T}'$, donc $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$.

(2) Pour tout $B \in \mathscr{B}$ et $x \in B$, il existe $B' \in \mathscr{B}'$ tel que $x \in B' \subset B$.

17. Soit $(A, \mathscr{T}_A)$ un sous-espace d'un espace topologique $(X, \mathscr{T})$. Montrer que pour que tout ouvert de A soit un ouvert de X il faut et il suffit que A soit un ouvert de X.

18. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties de X. Montrer que

(a) $\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{Adh}\, A_i = \mathbf{Adh} \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ (b) $\bigcap_{i=1}^{n} \mathbf{Int}\, A_i = \mathbf{Int} \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

19. Montrer que $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ est continue dans chacun des cas suivants :

(1) $(X, \mathscr{T}_X) = (Y, \mathscr{T}_Y)$ et $f(x) = x$.

(2) f est constante.

(3) $\mathscr{T}_X = \mathscr{T}_{\text{Disc}}$.

(4) $\mathscr{T}_Y = \mathscr{T}_{\text{Gros}}$.

20. Soit $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ continue, et A une partie non vide de X. Montrer que la restriction $f|_A : (A, \mathscr{T}_A) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ est continue.

21. Soient $f, g : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ sont des applications continues, montrer que :

(1) Si X est séparé $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.

(2) Si Y est séparé $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$.

22. Montrer que si (X, d) espace métrique alors $(X, \mathscr{T}_d)$ est Hausdorff.
Autrement dit tout espace ma métrisable est Hausdorff.

23. Montrer que $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\text{Cof}})$ n'est pas Hausdorff, mais tout singleton $\{x\}$ de X est fermé.

24. Si $(X, \mathscr{T})$ est Hausdorff et $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$, alors $(X, \mathscr{T}')$ est Hausdorff.

25. Montrer que si $(X, \mathscr{T}_X)$ est un espace topologique Hausdorff et $A \subseteq X$, alors le sous-espace topologique $(A, \mathscr{T}_A)$ est aussi Hausdorff.

26. Montrer que si $(X, \mathscr{T}_X)$ et $(Y, \mathscr{T}_Y)$ sont deux espaces topologiques Hausdorff, alors leurs produit $(X \times Y, \mathscr{T}_{X \times Y})$ est aussi un espace topologique Hausdorff.

27. Montrer que $(X, \mathscr{T}_X)$ est Hausdorff si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ est fermée dans $X \times X$.

28. Montrer que si $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ est injective et continue et $(Y, \mathscr{T}_Y)$ est Hausdorff alors $(X, \mathscr{T}_X)$ l'est aussi.

29. Montrer que si $(X, \mathscr{T}_X)$ est homéomorphe à $(Y, \mathscr{T}_Y)$, alors $(X, \mathscr{T}_X)$ est Hausdorff si et seulement si $(Y, \mathscr{T}_Y)$ est Hausdorff.

30. Montrer que la propriété Hausdorff est une propriété topologique.

31. (a) Trouver une fonction continue $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$, ou $(X, \mathscr{T}_X)$ est compact et $(Y, \mathscr{T}_Y)$ est Hausdorff mais f n'est pas un homéomorphisme.

(b) Trouver une fonction continue $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$, ou $(X, \mathscr{T}_X)$ est compact et $(Y, \mathscr{T}_Y)$ est compact mais f n'est pas un homéomorphisme.

8 Exercices avec corrigés

8.1 Opérations sur les ensembles

1. Montrer que $X \setminus (X \setminus A) = A$.

Solution. Soit $x \in X \setminus (X \setminus A) \Leftrightarrow x \notin (X \setminus A) \Leftrightarrow x \in A$.

2. Montrer que : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Solution.

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

3. Montrer que $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

Solution. Soit $x \in X \setminus (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A$ et $x \notin \cup B \Leftrightarrow x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.

4. Montrer que : $X \setminus (\bigcap\limits_{i \in I} A_i) = \bigcup\limits_{i \in I}(X \setminus A_i)$

Solution. Soit $x \in X \setminus (\bigcap\limits_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow x \notin (\bigcap\limits_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow x \notin A_1$ ou $x \notin A_2$ ou $\ldots \Leftrightarrow$ $x \in (X \setminus A_1)$ ou $x \in (X \setminus A_2) \ldots \Leftrightarrow x \in \bigcup\limits_{i \in I}(X \setminus A_i)$

5. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) $A \subset B$.

(b) $A \cap B = A$.

(c) $A \cup B = B$.

(d) $(X - B) \subset (X - A)$.

(e) $B \cup (X - A) = X$.

(f) $A \cap (X - B) = \varnothing$.

Solution.
(a) $\Rightarrow$ (b) Supposons que $A \subset B$ alors $A = A \cap A \subset A \cap B \subset A$.
(b) $\Rightarrow$ (c) $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = \varnothing \cup A \cup (B - A) = B$.
(c) $\Rightarrow$ (d) $A \subset A \cup B = B \Leftrightarrow (X - B) \subset (X - A)$.
(d) $\Rightarrow$ (e) $X = B \cup (X - B) \subset B \cup (X - A) \subset X$.

(e) $\Rightarrow$ (f) $B \cup (X - A) = X \Rightarrow (X - B) \cap A = \varnothing$.
(f) $\Rightarrow$ (a) $(X - B) \cap A = \varnothing \Rightarrow (X - B) \subset (X - A) \Rightarrow A \subset B$.

6. Facile.

7. Montrer que si $A \subset \varnothing$ alors $A = \varnothing$.
Solution. On a $\varnothing \subset A$ toujours et $A \subset \varnothing$ par hypothèse donc $\varnothing \subset A \subset \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$.

8. Soient $X = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ et $C = \{3, 4, 5, 6\}$.
Trouver $X \setminus (A \cup B) = \{5, 7, 9\}$

9. Montrer que : (a) $A - B = A \cap B^c$
Solution. Soit $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \notin B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in (X - B) \Leftrightarrow x \in (A \cap B^c)$.
(b) $(A - B) \cap B = (A \cap B^c) \cap B = \varnothing$

10. Soient $A = \{a, b\}, B = \{2, 3\}$ et $C = \{3, 4\}$. Trouver :
(a) $A \times (B \cup C)$ (b) $(A \times B) \cup (A \times C)$
Solution.
(a) $A \times (B \cup C) = \{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\}$
(b) $(A \times B) \cup (A \times C) = \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3), (a, 4), (b, 4)\}$

11. Montrer que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
Solution.

$$\begin{aligned} A \times (B \cap C) &= \{(x, y) : x \in A, y \in (B \cap C)\} \\ &= \{(x, y) : x \in A, (y \in B \text{ et } y \in C)\} \\ &= \{(x, y) : (x \in A, y \in B) \text{ et } (x \in A, y \in C)\} \\ &= (A \times B) \cap (A \times C). \end{aligned}$$

12. Trouver l'ensemble des parties de X, $\mathscr{P}(X)$ si :
(a) $X = \{1, 2, 3\}$ $X = \{1, \{2, 3\}\}$
Solution.
(a) $X = \{1, 2, 3\}$ alors $\mathscr{P}(X) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$.
(b) $X = \{1, \{2, 3\}\}$ alors $\mathscr{P}(X) = \{\varnothing, \{1\}, \{2, 3\}, X\}$.

13. Si Card$(A) = n < \infty$, alors Card$[\mathscr{P}(A)] = 2^n$.

8.2 Opérations sur les fonctions

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Trouver :
(a) $f[\{1,3,4,7\}]$ (b) $f[1,4]$ (c) $f^{-1}[\{4,9\}]$ (d) $f^{-1}[1,4]$

Solution.
(a) $f[\{1,3,4,7\}] = \{f(1), f(3), f(4), f(7)\} = \{1, 9, 16, 49\}$
(b) $f[1,4] = [1,16]$
(c) $f^{-1}[\{4,9\}] = \{-3,-2,2,3\}$
(d) $f^{-1}[1,4] = [-2,-1] \cup [1,2]$

2. Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $A, B \subset X$ et $\{A_i : i \in I\}$ est une collection de sous-ensembles de X alors :

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
(b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
(c) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$
(d) Si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$
(e) $f(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i \in I} f(A_i)$
(f) $f(\cap_{i\in I} A_i) \subset \cap_{i \in I} f(A_i)$

Solution.
(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
Soit $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow$ il existe $x \in X : y = f(x) \in f(A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B \Leftrightarrow f(x) \in f(A)$ ou $f(x) \in f(B) \Leftrightarrow f(x) \in f(A) \cup f(B)$.

(f) $f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) \subset \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$
Soit $y \in f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) \Rightarrow \exists x \in X : y = f(x) \in f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) \Rightarrow x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i \Rightarrow x \in A_1$ pour tout $i \Rightarrow x \in A_i$ pour tout $i \Rightarrow y = f(x) \in f(A_i)$ pour tout $i \Rightarrow y = f(x) \in \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$.

3. Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $A \subset X$ et $B \subset Y$.

(a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ et on obtient égalité ssi f est injective.

(b) Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et on obtient égalité ssi f est surjective.

Solution.
(a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ et on obtient égalité ssi f est injective.

Montrons que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
Soit $a \in A$ alors $f(a) \in f(A)$ qui implique que $a \in f^{-1}[f(A)]$. Donc $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Maintenant on veut montrer que $A = f^{-1}(f(A))$ si et seulement si f est injective.

($\Leftarrow$) Supposons que f est injective et $x \in f^{-1}(f(A))$ alors $f(x) \in f(A)$. Il existe donc $a \in A$ tel que $f(a) = f(x)$ mais puisque f est injective alors $a = x \in A$. Donc $f^{-1}(f(A)) \subset A$. En outre on sait que $A \subset f^{-1}(f(A))$ donc si f est injective on a

$f^{-1}(f(A)) = A$.

($\Rightarrow$) Supposons que $f^{-1}(f(A)) = A$. Si on pose $A = \{a\}$ on a $f^{-1}(f(\{a\})) = \{a\}$. Donc $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ qui signifie que f est injective.

Contre exemple : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$ et $A = \{1\}$ alors $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(\{1\})) = f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\} \supsetneq A = \{1\}$, due au fait que f n'est pas injective.

4. Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux applications et $C \subset Z$, montrer que $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}[g^{-1}(C)]$.

Solution.
($\subseteq$) Supposons que $x \in (g \circ f)^{-1}(C)$. Alors, $g(f(x)) = (g \circ f)(x) \in C$. Alors par la définition des images inverses, $f(x) \in g^{-1}(C)$. Cela montre que $f^{-1}(g^{-1}(C)) \subseteq (g \circ f)^{-1}(C)$.

($\supseteq$) Supposons que $x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$. Alors, $f(x) = g^{-1}(C)$ et donc $g(f(x)) = (g \circ f)(x) \in C$. Par la définition des images inverses, $x \in (g \circ f)^{-1}(C)$ et $x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$. Cela montre que $(g \circ f)^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(C))$.

Les deux assertions ensemble montrent que $(f \circ g)^{-1}(C) = f^{-1}[g^{-1}(C)]$.

5. Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $A, B \subset Y$ et $\{B_i : i \in I\}$ est une collection de sous-ensembles de Y alors :

(a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}B)$

(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}B)$

(c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}A) \setminus f^{-1}B)$

(d) Si $A \subset B$ alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

(e) $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

(f) $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

Solution.

(a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}B)$.
Soit $x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow f(x) \in A$ ou $f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ ou $f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

(f) $f^{-1}(\cap_{i \in I} B_i) = \cap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.
Soit $x \in f^{-1}(\cap_{i \in I} B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \cap_{i \in I} B_i f(x) \in B_i$ pour tout $i \in I \Leftrightarrow$ $x \in f^{-1}(B_i)$ pour tout $i \in I \Leftrightarrow x \in \cap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$.

(a) Montrer que f est ni injective ni surjective.

(b) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit surjective mais pas injective.

(c) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit injective mais pas surjective.

(d) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit bijective.

Solution.

(a) Montrer que f est ni injective ni surjective.
$f(1) = f(-1) = 0$ donc f n'est pas injective.
$f^{-1}(2)$ n'existe pas donc f n'est pas surjective.

(b) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit surjective mais pas injective.
La restriction $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ est surjective mais pas injective.

(c) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit injective mais pas surjective.
La restriction $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ est injective mais pas surjective.

(d) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit bijective.
La restriction $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ est bijective.

8.3 Espaces métriques

1. Soit $X = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ on définie :

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \qquad d_\infty(x, y) = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |x_i - y_i|$$

Solution.

(a) Vérifier l'inégalité triangulaire pour les distances d_1 et d_∞ .

$$\begin{aligned} d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \\ \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| = d_1(x, z) + d_1(z, y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_\infty(x, y) = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |x_i - y_i| = \max_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \\ \leq \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |x_i - z_i| + \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |z_i - y_i| = d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y). \end{aligned}$$

(b) Dessiner les boules unitaires ouvertes $B((0, 0), 1)$ pour d_1 et d_∞ quand $X = \mathbb{R}^2$. Voir page **??** des notes de cours.

2. Quelles conditions doit on avoir sur $f : X \to Y$, pour que $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ soit une distance sur X.

Solution. Les conditions M2 et M3 sont satisfaites pour toute fonction continue f. Donc on doit vérifier condition M1. $d(x, y) = |f(x) - f(y)| = 0 \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ si et seulement si f est injective.

3. Monter que $\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$ est une distance sur $X = \mathbb{R}^2$, et que la boule $B(x_o, r) = \begin{cases} x_0 & \text{si } r \leq 1, \\ X & \text{si } r > 1. \end{cases}$

Solution.

Clairement les conditions M1 et M2 sont satisfaites.
On doit donc vérifier condition M3 : $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$.
Si $\delta(x, z) = 1$ ou bien $\delta(z, y) = 1$, alors M3 est satisfaite car $\delta(x, y) \leq 1$.
Si $\delta(x, z) = \delta(z, y) = 0$ alors $x = y = z$ et donc $0 = \delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y) = 0$.
Alors, M3 est vérifiée par δ qui est donc une métrique de $\mathbb{R}^2$.

Par définition on a $B(x_0, r) = \{x \in X : \delta(x_0, x) < r\}$.
Si $r > 1$ alors $\delta(x_0, x) < r$ pour tout $x \in X$ puisque $\delta(x_0, x) < 1$. Donc $B(x_0, r) = X$.

Si $r \leq 1$ alors $\delta(x_0, x) < r \leq 1 \Rightarrow \delta(x_0, x) = 0 \Rightarrow x = x_0$. Donc $B(x_0, r) = \{x_0\}$.

4. Soit $X = C[a, b]$ et $d(f, g) = \int\limits_a^b |f(t) - g(t)|dt$. Montrer que d est une métrique.

Solution. Facile.

5. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subseteq X$. Montrer que :

(a) $\mathbf{Int}\, A \subseteq A \subseteq \mathbf{Adh}\, A$;

(b) $\mathbf{Fr}\, A$ et $\mathbf{Adh}\, A$ sont fermés et $\mathbf{Int}\, A$ est ouvert dans X.

(c) $\mathbf{Int}\, A = A$ si et seulement si A est ouvert.

(d) $\mathbf{Adh}\, A = A$ si et seulement si A est fermé.

(e) $\mathbf{Fr}\, A \subseteq A$ si et seulement si A est fermé.

(f) $\mathbf{Int}(X \setminus A) = X \setminus \mathbf{Adh}\, A$ et $\mathbf{Adh}(X \setminus A) = X \setminus \mathbf{Int}\, A$.

Solution.

(a) $\mathbf{Int}\, A \subseteq A \subseteq \mathbf{Adh}\, A$. Par définition.

(b) $\mathbf{Fr}\, A$ et $\mathbf{Adh}\, A$ sont fermés et $\mathbf{Int}\, A$ est ouvert dans X.
$\mathbf{Fr}\, A = \mathbf{Adh}(A) - \mathbf{Int}(A) = \mathbf{Adh}(A) \cap (\mathbf{Int}\, A)^c$ qui est fermé.
$\mathbf{Adh}\, A$ est l'intersections de tous les fermés contenant A, c'est donc un fermé.
$\mathbf{Int}\, A$ est l'union d'ouverts donc c'est un ouvert.

(c) $\mathbf{Int}\, A = A$ si et seulement si A est ouvert.
Si $\mathbf{Int}\, A = A$ alors A est ouvert puisque $\mathbf{Int}\, A$ est ouvert.
Si A est ouvert alors et $A = \mathbf{Int}\, A$ car $\mathbf{Int}\, A$ est le grand ouvert contenu dans A.

(d) $\mathbf{Adh}\, A = A$ si et seulement si A est fermé.

(e) $\mathbf{Fr}\, A \subseteq A$ si et seulement si A est fermé.
($\Leftarrow$) Si A est fermé alors $\mathbf{Adh}\, A = A \cup \mathbf{Fr}\, A = A$ donc $\mathbf{Fr}\, A \subset A$.
($\Rightarrow$) Par négation, si A n'est pas fermé alors il existe $x \in \mathbf{Adh}\, A - A$ donc $x \in \mathbf{Fr}\, A - A$ c.a.d. $\mathbf{Fr}\, A \nsubseteq A$.

(f) $\mathbf{Int}(X - A) = X - \mathbf{Adh}\, A$ et $\mathbf{Adh}(X - A) = X - \mathbf{Int}\, A$.
(1) $A \subset \mathbf{Adh}\, A \Rightarrow X - \mathbf{Adh}\, A \subset X - A$ de plus $X - \mathbf{Adh}\, A$ est un ouvert contenu dans $X - A$, donc $X - \mathbf{Adh}\, A \subset \mathbf{Int}(X - A)$.
(2) $\mathbf{Int}(X - A) \subset (X - A)$ donc $A \subset X - \mathbf{Int}(X - A)$ qui est fermé donc
$A \subset \mathbf{Adh}\, A \subset X - \mathbf{Int}(X - A) \Rightarrow \mathbf{Int}(X - A) \subset X - \mathbf{Adh}\, A$.
Les deux assertions impliques que $\mathbf{Int}(X - A) = X - \mathbf{Adh}\, A$.
Si on remplace A par $X - A$ dans l'égalité précédente on obtient $\mathbf{Adh}(X - A) = X - \mathbf{Int}\, A$.

6. Pour chacune des parties de $\mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer : $\mathbf{Adh}\, A_i, \mathbf{Int}\, A_i$, $\mathbf{Fr}\, A_i$, Is A_i (points isolés) et A_i' (points d'accumulations)
$A_1 = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup \{4, 7\}$, $A_2 = \mathbb{Z}, A_3 = \mathbb{Q}, A_4 = \{(-1)^k + 1/2^k : k \in \mathbb{N}\}$
Solution.

	$\mathbf{Adh}(A_i)$	$\mathbf{Int}(A_i)$	$\mathbf{Fr}(A_i)$	$\mathbf{Is}(A_i)$	A_i'
A_1	$(-\infty, 2] \cup \{4, 7\}$	$(-\infty, 0) \cup (0, 2)$	$\{0, 2, 4, 7\}$	$\{4, 7\}$	$(-\infty, 2]$
A_2	$\mathbb{Z}$	$\varnothing$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\varnothing$
A_3	$\mathbb{R}$	$\varnothing$	$\mathbb{R}$	$\varnothing$	$\mathbb{R}$
A_4	$A_4 \cup \{-1, 1\}$	$\varnothing$	$A_4 \cup \{-1, 1\}$	A_4	$\{-1, 1\}$

7. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Montrer que les propositions suivantes son équivalentes :

(a) x est un point d'accumulation de A.

(b) Tout voisinage V_x de x contient une infinité de points de A.

(c) $x \in \mathbf{Adh}(A - \{x\})$.

Solution.
(a)⇒(b). Supposons que V_x contient un nombre fini $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de points de A. Soit $r = \inf\{d(x, a_i) : i = 1, \ldots, n\}$, alors $V_x \cap B(x; r/2)$ est un voisinage de x qui ne contient aucun point de A différent de x. Donc x n'est pas un point d'accumulation de A.

(b)⇒(c). Supposons que tout voisinage V_x de x contient une infinité de points de A. Alors $(V_x - \{x\}) \cap A \neq \varnothing$ c.a.d. que $x \in \mathbf{Adh}(A - \{x\})$.

(c)⇒(a). Supposons que $x \in \mathbf{Adh}(A - \{x\})$. Alors pour tout voisinage V_x on a $(A - \{x\}) \cap V_x$ contient au moins un point de A, qui entraine que $x \in A'$.

8. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts denses de X est un ouvert dense de X.

Solution.
Il suffit de le montrer pour deux ouverts denses. Soient D_1 et D_2 deux ouverts denses parties de X. Il est clair que $D = D_1 \cap D_2$ est un ouvert. Puisque D_1 est dense alors pour tout $x \in X$ et $r > 0$ on a : $A = B(x, r) \cap D_1 \neq \varnothing$. Donc A est un ouvert non vide, qui entraine que $A \cap D_2 \neq \varnothing$ car D_2 est dense dans X. Mais $A \cap D_2 = B(x, r) \cap (D_1 \cap D_2) \neq \varnothing$ qui montre que $D = D_1 \cap D_2$ est un ouvert dense de x.

9. Soient A et B des parties bornées d'un espace métrique X.

(a) Monter que $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\mathbf{Adh}\, A)$.

(b) Monter que $\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) + d(A, B)$.

Solution.

(a) (1) $A \subset \mathbf{Adh}\, A$ donc $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam}(\mathbf{Adh}\, A)$.
(2) Réciproquement si $x, y \in \mathbf{Adh}\, A$ il existent $x', y' \in A$ tels que $d(x, x') < \epsilon$

et $d(y, y') < \epsilon$, alors $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) \leq d(x', y') + 2\epsilon$.
Donc pour tout $\epsilon > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}[\mathbf{Adh}(A)] &= \sup_{x,y \in \mathbf{Adh}\, A} d(x, y) \\
&\leq \sup_{x',y' \in A} d(x', y') + 2\epsilon \\
&= \operatorname{diam}(A) + 2\epsilon,
\end{aligned}$$

qui entraine que $\operatorname{diam}(\mathbf{Adh}\, A) \leq \operatorname{diam} A$.
Finalement les deux inégalités montrent que $\operatorname{diam}(\mathbf{Adh}\, A) = \operatorname{diam} A$.

(b) Si $x, y \in A \cup B, a \in A$ et $b \in B$ alors

$$\begin{aligned}
d(x, y) &\leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \\
&\leq \operatorname{diam}(A) + d(a, b) + \operatorname{diam}(B),
\end{aligned}$$

donc

$$\operatorname{diam}(A \cup B) - \operatorname{diam}(A) - \operatorname{diam}(B) \leq \inf d(a, b) = d(A, B \leq d(a, b))$$

et finalement

$$\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) + d(A, B).$$

8.4 Continuité sur les Espaces Métriques

1. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $A, B \subset \mathbb{R}^n$ on défini :

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a), \ \operatorname{dist}(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b), \ \operatorname{diam}(A) = \sup_{a \in A, b \in B} d(a, b)$$

(a) Trouver $\operatorname{dist}(0, \mathbb{R} - \mathbb{Q})$, $\operatorname{dist}(\sqrt{3}, \mathbb{Q})$, $\operatorname{dist}(0, (2, 4])$.

(b) Si $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, calculer $d(A, B)$.

(c) Calculer $\operatorname{diam}([0, 1) \cap \mathbb{Q})$ et $\operatorname{diam}([-2, 1) \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q})$.

Solution.

(a) $\operatorname{dist}(0, \mathbb{R} - \mathbb{Q}) = 0$, $\operatorname{dist}(\sqrt{3}, \mathbb{Q}) = 0$, $\operatorname{dist}(0, (2, 4]) = 2$.

(b) Si $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, alors $d(A, B) = 0$.

(c) $\operatorname{diam}([0, 1) \cap \mathbb{Q}) = 1$ et $\operatorname{diam}([-2, 1) \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q}) = 3$.

2. Montrer que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est toujours continue dans les cas suivant :

(a) $X = Y$ et $f(x) = x$ pour tout $x \in X$.

(b) $f(x) = y_0$ pour tout $x \in X$, où y_0 est une constante.

(c) $X = Y = \mathbb{R}, \ d_X(a, b) = |a - b|$, et $f(x) = x^2$.

(d) d_X est la distance discrète.

Solution.

(a) Si O un ouvert de $X = Y$ alors $f^{-1}(O) = O$ est aussi un ouvert.

(b) Si O un ouvert de Y, alors $f^{-1}(O) = \varnothing$ si $y_0 \notin O$ et $f^{-1}(O) = X$ si $y_0 \in O$ et les deux sont des ouverts de X.

(c) Si $b > a \geq 0$ alors, $f^{-1}(a, b) = (-\sqrt{b}, -\sqrt{a}) \cup (-\sqrt{b}, -\sqrt{a})$ qui ouvert dans $\mathbb{R}$.

(d) Dans ce cas $f^{-1}(U)$ est ouvert pour tout $U \subset Y$, donc f est continue.

3. Montrer que les intervalles $(-1, 1)$ et $(2, 5)$ sont homéomorphes dans $(\mathbb{R}, d)$.
Solution. Considérons $f : (-1, 1) \to (2, 5)$ définie par $f(x) = 2 + \dfrac{3(x + 1)}{2}$ qui est clairement un homéomorphisme, car f est une bijection et $f(-1, 1) = (2, 5)$. De plus puisque f est une fonction linéaire son inverse existe et est continue.

4. Soit $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$.
Montrer que f est un homéomorphisme.

Solution. On note que f est continue sur $(-1, 1)$, $f'(x) >= \dfrac{1}{(1 - |x|)^2} > 0$ donc f est injective et $f(-1, 1) = \mathbb{R}$ donc f est surjective. De plus $f^{-1}(x) = f(x)$ elle est donc continue. Cela établi que f est en effet un homéomorphisme.

5. Supposons que $A \subseteq X, B \subseteq Y$ et $f : X \to Y$ est un homéomorphisme avec $f(A) = B$. Montrer que les restrictions $g = f|_A : A \to B$ et $h = f|_{X-A} : X - A \to Y - B$ sont des homéomorphismes.
Solution.
Puisque $f : X \to Y$ est un homéomorphisme alors $f^{-1} : Y \to X$ est continue.
$g = f|_A : A \to B$ est continue et bijective et en plus $g^{-1} = f^{-1}|_B : B \to A$ est continue.
$h = f|_{X-A} : X - A \to Y - B$ est continue et bijective et en plus $h^{-1} = f^{-1}|_{Y-B} : Y - B \to X - A$ est continue.

6. Soient X un espace métrique et $f : X \to \mathbb{R}$. Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$ les ensembles $f^{-1}(-\infty, a)$ et $f^{-1}(a, \infty)$ sont des ouverts de X.

Solution.
($\Rightarrow$) Supposons que f est continue. Puisque les ensembles $(-\infty, a)$ et (a, ∞) sont des ouverts de $\mathbb{R}$, et f est continue alors $f^{-1}(-\infty, a)$ et $f^{-1}(a, \infty)$ sont des ouverts de X.

($\Leftarrow$) Si $a < b$ alors $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$ et que $f^{-1}(a, b) = f^{-1}(-\infty, b) \cap f^{-1}(a, \infty)$ est un ouvert de X. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $O = \cup_i(a_i, b_i)$ et donc $f^{-1}O = f^{-1}[\cup_i(a_i, b_i)] = \cup_i f^{-1}(a_i, b_i)$ est un ouvert de X car c'est l'union d'ouverts de X.

7. Montrer que $f : X \to Y$ est continue ssi $f(\mathbf{Adh}\, A) \subseteq \mathbf{Adh}[f(A)]$ pour tout $A \subset X$.

Solution.
($\Rightarrow$) Supposons que f est continue et $A \subset X$, alors $A \subset f^{-1}[f(A)] \subset f^{-1}[\mathbf{Adh}\, f(A)]$ ou $f^{-1}[\mathbf{Adh}\, f(A)]$ est fermé car f est continue. Mais $\mathbf{Adh}\, A$ est le plus petit fermé contenant A, alors $A \subset \mathbf{Adh}\, A \subset f^{-1}[\mathbf{Adh}\, f(A)]$ qui entraine que $f(\mathbf{Adh}\, A) \subset \mathbf{Adh}\, f(A)$.

($\Leftarrow$) Supposons que $f[\mathbf{Adh}\, A] \subset \mathbf{Adh}[f(A)]$. On veut monter que l'image inverse d'un fermé de Y est un fermé de X. Soit F un fermé de Y et $A = f^{-1}(F) \subset X$. on a $f(\mathbf{Adh}\, A) \subset \mathbf{Adh}[f(A)] = \mathbf{Adh}[f(f^{-1}(F))] \subset \mathbf{Adh}\, F = F$. Donc $\mathbf{Adh}\, A \subset f^{-1}[f(\mathbf{Adh}\, A)] \subset f^{-1}(F) = A$. Cela montre que $A = f^{-1}(F)$ est un fermé de X et donc f est continue.

8. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ continues. Montrer que si $(g \circ f)$ est un homéomorphisme et si f est surjective alors f et g sont des homéomorphismes.

Solution. Supposons que $(g \circ f)$ est un homéomorphisme et que f est surjective. Alors $G = (g \circ f)(E) = g[f(E)] = g(F)$, qui montre que g est aussi surjective. Puisque $(g \circ f)$ est un homéomorphisme alors $h = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ est continue de plus on a :
$(h \circ g) \circ f = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = 1_E$ donc f est injective.

$f \circ (h \circ g) = f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ g = 1_F$ donc f est surjective.
$h \circ g = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g = f^{-1}$ est continue car c'est la composée de deux fonction continues.
Donc f est un homéomorphisme.
$g = (g \circ f) \circ f^{-1}$ est un homéomorphisme car c'est la composée de deux homéomorphismes.

9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie par $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Indication : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution.
Soit $x \in \mathbb{Q} - \mathbb{R}$ alors il existe une suite $(x_n) \in \mathbb{Q}$ telle que $x_n \to x$.
Puisque f est continue alors $0 = f(x_n) \to f(x)$ quand $n \to \infty$ donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

10. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Pour $x \in X$; $d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$.

(a) Montrer que si $x, y \in X$ alors $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

(b) En déduire que la fonction $f(x) = d(x, A)$ est continue.

(c) Monter que $\mathbf{Adh}\, A = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$

(d) On suppose $x_0 \notin \mathbf{Adh}\, A$. Trouver deux ouverts U et V qui séparent x_0 et A.

Solution.

(a) Soit $a \in A$ alors $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ qui entraine que $\operatorname{dist}(x, A) \leq d(x, y) + \operatorname{dist}(y, A)$.
Donc $\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A) \leq d(x, y)$ (1).
Si nous échangeons x et y dans (1) on trouve $\operatorname{dist}(y, A) - \operatorname{dist}(x, A) \leq d(x, y)$ (2).
Les inégalités (1) et (2) nous donne $|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leq d(x, y)$.

(b) $|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$, donc f est continue.

(c) Soit $B = \{x \in X : f(x) = \operatorname{dist}(x, A) = 0\}$.
Si $x \in B$ alors soit $x \in \mathbf{Int}\, A$ ou bien $x \in \mathbf{Fr}\, A$ qui montre que $B \subset \mathbf{Adh}\, A$.

L'ensemble $\{0\}$ est fermé dans $[0, \infty)$ et $f(x) = \operatorname{dist}(x, A)$ est continue donc $f^{-1}(\{0\})$ est fermé dans X. Mais $f^{-1}(\{0\}) = B \supset A$ et $\mathbf{Adh}\, A$ est le plus petit fermé contenant A donc $\mathbf{Adh}\, A \subset f^{-1}(\{0\}) = B$.

Les deux inclusions nous donnent que $\mathbf{Adh}\, A = \{x \in X : f(x) = \operatorname{dist}(x, A) = 0\}$.

(d) On suppose $x_0 \notin \mathbf{Adh}\, A$. Trouver deux ouverts U et V qui séparent x_0 et A.

Soit $x_0 \notin \mathbf{Adh}\, A$ alors $\operatorname{dist}(x, A) = r > 0$. Soient $U = B(x_0, r/3)$ et $V = \bigcup\limits_{a \in A} B(a; r/3)$, alors U et V sont deux ouverts qui séparent x_0 et A.

8.5 Espaces Métriques Complets

1. Montrer les propositions suivante :

(a) Toute suite convergente est de Cauchy.

(b) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

(c) Toute suite de Cauchy est bornée.

(d) Toute suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente est convergente.

Solution. Pour les parties (a),(c) et (d) voire Théorème 4.15 page 77.

(b) Soit (x_n) une suite de Cauchy, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $m, n > N$ alors $d(x_m, x_n) < \epsilon$. Soit (x_{x_k}) une sous-suite de (x_n). Si on choisi $n_{k_1}, n_{k_2} > N$ alors $d(x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}) < \epsilon$. Donc (x_{x_k}) est une suite de Cauchy aussi.

2. Avec qu'elles des distances d_a, d_b, d_c, $\mathbb{R}$ est t-il complet ?

(a) $(\mathbb{R}, d_a)$ est complet où $d_a(x, y) = |x^3 - y^3|$.

(b) $(\mathbb{R}, d_b)$ n'est pas complet où $d_b(x, y) = |e^x - e^y|$.

(c) $(\mathbb{R}, d_c)$ n'est pas complet où $d_c(x, y) = |\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(y)|$.

Solution.

(a) Soit (x_n) une suite d_a-Cauchy, donc $d_a(x_n, x_m) = |x_n^3 - x_m^3| \to 0$ quand $m, n \to \infty$. Donc (x_n^3) est d_u-Cauchy, est puisque (R, d_u) est complet alors (x_n^3) est convergente. Il existe donc $y \in \mathbb{R}$ tel que $|x_n^3 - y| \to 0$ quand $n \to \infty$.
Soit $x = y^{1/3}$, alors $x_n^3 \to x^3 \in \mathbb{R}$ c.a.d. que $d_a(x_n, x) = |x_n^3 - x^3| = |x_n^3 - y| \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc (x_n) est d_a–convergent qui entraine que (R, d_a) est complet.

(b) Montrer que la suite $(-n)$ est d_b–Cauchy mais ne converge pas dans $(\mathbb{R}, d_b)$.

(c) Soit $(\mathbb{R}, d_u)$ l'espace métrique complet muni de la distance usuelle. Considérons la suite (n) dans $\mathbb{R}$. La suite $(\tan^{-1} n)$ converge vers $\pi/2$ dans $(\mathbb{R}, d_u)$. Donc $(\tan^{-1} n)$ est d_u–Cauchy qui entraine que (n) est d_c–Cauchy. Si on suppose que $n \to a$ dans $(\mathbb{R}, d_c)$, alors $\tan^{-1} n \to \tan^{-1} a$ dans $(\mathbb{R}, d_u)$, mais voudrait dire que $\tan^{-1} a = \pi/2$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$ qui est impossible. Donc (n) ne converge pas dans $(\mathbb{R}, d_c)$, qui fait que cet espace n'est pas complet.

3. Soient $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ uniformément continue et (x_n) est une suite de Cauchy dans X.

(a) Montrer que $(f(x_n))$ est de Cauchy dans Y.

(b) Si de plus, f est bijective et f^{-1} est continue, montrer que si Y est complet X est complet.

Solution.

(a) Puisque f est uniformément continue alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$, $d_X(x_1, x_2) < \delta$ entraine $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$.

Puisque (x_n) est de Cauchy alors pour tout $\delta > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p, q > N$ alors $|x_p - x_q| < \delta$.

Donc pour tout $p, q \in \mathbb{N} : p, q > N$ on a $d_Y(f(x_p), f(x_q)) < \epsilon$ qui montrer que $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy dans (Y, d_Y).

(b) Soit (x_n) une suite de Cauchy dans (X, d_X), alors d'après (a) $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy dans (Y, d_Y). Si de plus (Y, d_Y) est complet alors $(f(x_n))$ est convergente donc $f(x_n) \overset{d_Y}{\to} y \in Y$ qui entraine $x_n \overset{d_X}{\to} f^{-1}(y) \in X$ par continuité de f^{-1}. Donc (x_n) est convergente dans (X, d_X) qui entraine qu'il est complet.

4. Montrer que si (x_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, alors (x_n^2) est de Cauchy aussi.

Solution.
Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d_u)$. On sait que que suite de Cauchy est bornée c.a.d. $|x_n| < M$ pour tout n. Soit $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $m, n > N$ alors $|x_m - x_n| < \epsilon$. On a alors $|x_m^2 - x_n^2| = |x_m - x_n||x_m + x_n| \leq 2M\epsilon = \epsilon_1$. Donc $(x_n^2)_n$ est de Cauchy.

5. Si (X, d_X) est un espace métrique complet et $Y \subseteq X$, alors (Y, d_Y) est complet si et seulement si Y est fermé dans X.

Solution.
$(\Rightarrow)$ Supposons que Y est complet et soit $x \in \mathbf{Adh}\, Y$. Alors il existe une suite $(y_n) \in Y$ qui converge vers x dans X. Puisque (y_n) est une suite convergente dans un espace complet Y la limite doit être dans Y. De plus la limite est unique donc $x \in Y$ qui entraine que Y est fermé.

$(\Leftarrow)$ Supposons que Y est fermé dans X et que (y_n) est suite de Cauchy dans $Y \subset X$. Puisque X est complet, il existe $x \in X$ tel que $y_n \to x$. Mais puisque Y est fermé il doit contenir tous les points limites donc $x \in Y$. Il suit que (Y, d_Y) est complet.

6. Montrer que toute réunion finie de parties complètes de X est une partie complète de X.
Solution. Il suffit de le montrer pour deux parties complètes de X. Soient A, B deux parties complètes de X et (x_n) une suite de Cauchy dans $A \cup B$.

7. Si (X, δ) est l'espace métrique discret, alors une suite (x_n) dans X converge vers x si et seulement si, il existe N tel que $x_n = x$ quand $n \geq N$.
Solution. Supposons que $x_n \to x$ dans (X, δ). Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$ alors $\delta(x_n, x) < \epsilon$. Mais puisque δ est la distance discrète alors si $\epsilon < 1$ on a $\delta(x_n, x) < \epsilon \Leftrightarrow \delta(x_n, x) = 0$ donc $x_n = x$ pour $n \geq N$.

8. Si (Z, d) est le produit cartésien des deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y), alors la suite (x_n, y_n) de Z converge vers (x, y) si et seulement si $x_n \to x$ et $y_n \to y$.
Solution. Notons que si $z_n = (x_n, y_n)$ et $z = (x, y)$ alors

$$d_Z(z_n, z) = d_Z((x_n, y_n), (x, y)) = d_X(x_n, x) + d_Y(y_n, y)$$

$$\begin{aligned} z_n = (x_n, y_n) \to z = (x,y) &\Leftrightarrow d_Z(z_n, z) \to 0 \\ &\Leftrightarrow d_X(x_n, x) + d_Y(y_n, y) \to 0 \\ &\Leftrightarrow d_X(x_n, x) \to 0 \text{ et } d_Y(y_n, y) \to 0 \\ &\Leftrightarrow x_n \to x \text{ et } y_n \to y. \end{aligned}$$

9. (a) Montrer que pour $x \geq 1$ et $t \geq 0$, $\sqrt{x+t} - \sqrt{x} \leq t/2$.
(b) Montrer que $f(x) = \sqrt{x}$ est une contraction sur $[1, \infty)$
(c) Trouver le point fixe de f.

Solution.
(a) $\sqrt{x+t} - \sqrt{x} = \dfrac{(\sqrt{x+t} - \sqrt{x})(\sqrt{x+t} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+t} + \sqrt{x})} = \dfrac{t}{(\sqrt{x+t} + \sqrt{x})} \leq \dfrac{t}{2}$ car $x \geq 1$.
(b) Si $f(x) = \sqrt{x}$ on pose $y = x + t$ où $t > 0$ et $x \geq 1$ alors,
$d(f(y), f(x)) = |f(y) - f(x)| = |\sqrt{x+t} - \sqrt{x}| \leq \dfrac{t}{2} = \dfrac{|y-x|}{2} \leq \dfrac{d(y,x)}{2}$.
Donc $f(x) = \sqrt{x}$ est une contraction.

(c) Puisque $[1, \infty)$ est complet et $f(x) = \sqrt{x}$ est une contraction donc le théorème de Banach garanti un fixe unique qui est $x = 1$.

10. Monter la fonction $f : [1, 2] \to [1, 2]$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + 2x^{-1}\right)$ a un point fixe unique sur $[1, 2]$, et trouver ce point.

Solution. Puisque $f'(x) = (1 - 2x^{-2})/2 < 1/2 < 1$, alors Corollaire 5.27 garanti un point fixe.

$$\frac{1}{2}\left(x + 2x^{-1}\right) = x \Leftrightarrow 2x^{-1} = x \Leftrightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \in [1, 2].$$

11. Monter que l'équation $x^5 + 7x - 1 = 0$ possède une solution unique dans $[0, 1]$. Trouver la racine exacte à 6 décimaux en utilisant la méthode de Newton.

Solution. Si on pose $f(x) = x^5 + 7x - 1$ on a $f'(x) = 5x^4 + 7 > 0$ donc f est strictement croissante. De plus on a $f(0)f(1) = (-1)(7) < 0$ donc le théorème des valeurs intermédiaires garanti une racine dans $(0, 1)$, cette racine est unique car $f' > 0$. Posons $x_1 = 1/2$ et $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ on aura : $x_2 = 0.153846$, $x_3 = 0.142849$, $x_4 = 0.142848$, et $x_5 = 0.142848$.

12. Soit $f : (0, 1/4) \to (0, 1/4)$ définie par $f(x) = x^2$. Montrer que f est une contraction qui ne possède aucun point fixe.

Solution. $f(x) = x^2 = x \Leftrightarrow x = 0, 1$ donc évidement f n'admet pas de point fixe sur $(0, 1/4)$.
$f(0, 1/4) = (0, 1/16) \subset (0, 1/4)$. De plus on a $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x-y||x+y| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.
Donc f est contraction sur $(0, 1/4)$. Mais $(0, 1/4)$ n'est pas complet, donc cela ne contredit pas le théorème du point fixe de Banach.

13. Soit $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ définie par $f(x) = x + x^{-1}$. Montrer que $[1, \infty)$ est complet et $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour $x, y \in [1, \infty)$, mais f n'est pas une contraction et n'a aucun point fixe.

Solution. $[1, \infty)$ est un fermé de l'espace complet $\mathbb{R}$, donc doit être complet par Proposition 5.19.
$f(x) = x + x^{-1} \leq 1$ pour $x \geq 1$, alors l'image de $[1, \infty)$ est lui même.
De plus $|f'(x)| = |1 - x^{-2}| < 1$ quand $x \in [1, \infty)$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires $|f(x) - f(y)| \leq |x - y||f'(c)| < |x - y|$. Cela ne montre pas que f est une contraction. Car pour avoir une contraction on doit avoir $|f'(c)| = 1 - c^{-2} < k < 1$ pour tout $c \in [1, \infty)$ ce qui est impossible.

8.6 Espaces Métriques Compacts

1. Lesquels de ces sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont compacts ?

(i) $[0, 1)$ (iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

(ii) $[0, \infty)$ (v) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq 1/x\}$

(iii) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ (vi) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$

Solution.

(i) $[0, 1)$ n'est pas fermé, donc n'est pas compact.

(ii) $[0, \infty)$ n'est pas borné, donc n'est pas compact.

(iii) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ n'est pas complet, donc n'est pas compact.

(iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ est borné et fermé donc est compact.

(v) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq 1/x\}$ n'est pas borné, donc n'est pas compact.

(vi) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ est borné et fermé donc est compact.

2. Donner des exemples de suites dans $\mathbb{R}$ avec 0, 1 et 2 points d'accumulations :

Solution.

$\{n : n \in \mathbb{N}\}$ n'a pas de point d'accumulation.

$\{n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$ possède un seul point d'accumulation $\{0\}$.

$\{(-1)^n(1 + n^{-1}) : n \in \mathbb{N}\}$ possède deux points d'accumulations $\{-1, 1\}$.

3. Considèrerons l'espace métrique $(\mathbb{Q}, d)$ où $d(x, y) = |x - y|$ et $A = \{x \in \mathbb{Q} : 2 < x^2 < 3\}$. Montrer que A est fermé et borné mais n'est pas compact.

Solution. Il est clair que A est borné. On peut écrire A comme :
$A = \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{3} < x < -\sqrt{2}\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\} = A_1 \cup A_2$. De plus on a

$$A_1 = [-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad A_2 = [\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}.$$

Donc A_1 et A_2 sont fermés dans $\mathbb{Q}$.
Pour la compacité considérons $G = \{G_n; n \geq 1\}$ où

$$G_n = \{x \in \mathbb{Q} : 2 + n^{-1} < x^2 < 3 - n^{-1}\}.$$

G est un recouvrement ouvert de A qui ne possède aucun sous-recouvrement fini.

4. Supposons que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue, et K est une partie compacte de Y . Montrer que $f^{-1}(K)$ est fermé. Trouver un exemple qui montre que $f^{-1}(K)$ n'est pas nécessairement compact.

Solution. Puisque tout compact est fermé et f est continue alors $f^{-1}(K)$ est fermé.
Contre exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ et $K = \{0\}$.

5. Montrer que si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas compact, alors il existe une fonction continue $f : A \to \mathbb{R}$ qui est bornée mais n'atteint pas toutes ses bornes.

Solution. Si A n'est pas compact alors il est soit non borné ou bien non fermé.
(1) Si A non borné considérons $f : A \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$, alors pour tout $x \in$ on a $0 < f(x) \leq 1$. La borne inférieure de f est 0, mais il n'existe pas de $x \in A$ tel que $f(x) = 0$.
(2) Supposons que A non fermé et soit $b \in \mathbf{Adh}\, A - A$. Considérons $f : A \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = |x - b|$, alors la borne inférieure de f est 0, mais il n'existe pas de $x \in A$ tel que $f(x) = 0$.

6. (a) Monter que la réunion finie de parties compactes d'un espace métrique X est compacte.
(b) Monter que la réunion arbitraire de parties compactes d'un espace métrique X n'est pas nécessairement compacte.
Solution.
(a) Il suffit de montrer que la réunion de deux parties compactes est compacte.
Soient K_1, K_2 deux parties compactes, $K = K_1 \cup K_2$ et $\mathcal{C}$ un recouvrement ouvert de K donc $K \subseteq \bigcup\limits_{i \in J} G_i$. $\mathcal{C}$ est recouvrement ouvert de K_1 (K_2), donc doit contenir un sous-recouvrement fini. Donc il existent $J_1, J_2 \subset J$ finis tel que $K_1 \subseteq \bigcup\limits_{i \in J_1} G_i$ et $K_2 \subseteq \bigcup\limits_{i \in J_2} G_i$ qui entraine que $K = K_1 \cup K_2 \subseteq \bigcup\limits_{i \in J_1 \cup J_2} G_i$.
(b) Soit $K_n = [1, n+1], n = 1, 2, \ldots$. Il est évident que K_n est compact dans $\mathbb{R}$ et que $\bigcup\limits_{n} K_n = [1, \infty)$ n'est pas compact.

7. Monter que l'intersection arbitraire de parties compactes de $\mathbb{R}^n$ est compacte.
Solution. Soit $K = \bigcap\limits_{a \in A} K_a$, où K_a sont des compacts de $\mathbb{R}^n$. K est fermé dans $\mathbb{R}^n$ car c'est l'intersection de fermés. De plus K est fermé dans le compact K_{a_0} où $a_0 \in A$. Il en suit que K est une partie fermée d'un compact, donc elle est compacte.

8. Montrer que l'espace métrique discret (X, δ) est compact si et seulement si X est fini.
Solution. Supposons $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est fini. Alors, X possède un maximum de 2^n de parties ouvertes distinctes. Donc n'importe quel recouvrement ouvert de X est lui même un recouvrement ouvert fini.

Par contre si X est infini alors le recouvrement ouvert $\{\{x\} : x \in X\}$ n'admet pas de recouvrement fini. Donc (X, δ) est compact si et seulement si X est fini.

9. Montrer que si A est précompact, alors $\mathbf{Adh}(A)$ l'est aussi.
Solution. Supposons que A est précompact donc pour tout $r > 0$ ils existent $x_1, \ldots, x_n$ tels que $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, r)$. Si $y \in \mathbf{Adh}(A) - A$ alors $B(y, r) \cap A \neq \varnothing$, il existe donc $z \in B(x_k, r) \cap A$ pour un certain x_k. On a $d(y, x_k) \leq d(y, z) + d(z, x_k) \leq$

$r + r = 2r$ donc $y \in B(x_k, 2r)$. Donc $\mathbf{Adh}\, A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 2r)$ qui montre que $\mathbf{Adh}\, A$ est en effet précompact.

10. Montrer que si A est précompact, alors A est borné.
Solution. Si A est précompact, alors pour tout $r > 0$ ils existent $x_1, \ldots, x_n$ tels que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$. Donc $\operatorname{diam} A \leq \sum_{i=1}^{n} \operatorname{diam} B(x_i, r) = 2nr$.

11. Montrer que tout sous-ensemble fini de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est compact.
Solution. Soient $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un sous-ensemble fini de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$. Alors, A est borné ($|a_i| \leq M$) et fermé ($\mathbf{Adh}\, A = A$) donc compact.

12. Soient X, Y deux d'espaces métriques. Montrer que $Z = X \times Y$ est compact si et seulement si X et Y sont compacts.
Solution.
($\Rightarrow$) Supposons que $Z = X \times Y$ est compact. Alors, la suite (x_n, y) possède une sous-suite convergente $(x_{n_k}, y) \to (x, y)$. Donc toute suite (x_n) de X possède une sous-suite convergente dans X qui entraine que X est compact. Par symétrie on montre que Y est aussi compact.
($\Leftarrow$) Réciproquement supposons que X et Y sont compacts et soit $(z_n) = (x_n, y_n)$ une suite dans $Z = X \times Y$. Puisque X est compact la suite (x_n) possède une sous-suite (x_{n_k}) convergente dans X. Puisque Y est compact la suite (x_{n_k}) possède une sous-suite $(y_{n_{k_j}})$ convergente dans Y. Donc la suite $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})$ est une sous-suite convergente de la suite (x_n, y_n) dans $Z = X \times Y$. Cela montre que $Z = X \times Y$ est compact.

13. Soit (X, d) un espace métrique et (x_n) une suite convergente de X telle que $x_n \to x$. Montrer, $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.
Solution. Soit $(G_a)_{a \in I}$ un recouvrement ouvert de A. Il existe un ouvert G_{a_N} qui contient $\{x, x_N, x_{N+1}, \ldots\}$. Pour tout $x_i : i = 1, 2, \ldots, N-1$ il existe un ouvert G_{a_i} tel que $x_i \in G_{a_i}$. Donc $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}\} \cup \{x, x_N, x_{N+1}, \ldots\} \subset \cup_{i=1}^{n} G_{a_i}$ qui est un sous-recouvrement ouvert fini et alors A est compact.

14. Soit (X, d) un espace métrique, $A, B \subset X$ et $A \cap B = \varnothing$.

(a) Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $\operatorname{dist}(A, B) > 0$.

(b) Est ce que $\operatorname{dist}(A, B) \neq 0$ si A et B sont fermés ?

Solution. Par définition $\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A \text{ et } b \in B\}$.

(a) Supposons que A est compact et B est fermé, donc $\mathbf{Adh}\, A = A$ et $\mathbf{Adh}\, B = B$. Considérons la fonction $f : B \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \operatorname{dist}(x, A)$. f est continue sur le compact B donc elle est bornée et atteint son minimum sur B. Ils existent $a \in A$ et $b \in B$ tels que $\operatorname{dist}(A, B) = d(a, b)$. Puisque $A \cap B = \varnothing$ alors

$\mathrm{dist}(A, B) > 0$ car s'il existe $b \in B$ tel que $\mathrm{dist}(A, b) = 0$ alors $b \in \mathbf{Adh}\, A = A$ (voir exercice 9 TD 4) et donc $A \cap B \neq \varnothing$ ce qui est une contradiction.

(b) Considérons $A = \{(x, y) : xy = 1\}$ et $B = \{(x, y) : y = 0\}$. A et B sont fermés dans $\mathbb{R}^2$, mais $\mathrm{dist}(A, B) = 0$ puisque $y = 1/x \to 0$ quand $x \to \infty$.

8.7 Espaces Métriques Connexes

1. Soit (X, d) un espace métrique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) X est connexe.

(b) Il n'existe pas de partions de X en deux ouverts disjoints.

(c) Il n'existe pas de partions de X en deux fermés disjoints.

Solution.
(a) $\Rightarrow$ (b). Supposons que $A, B \subset X, X = A \cup B, A \cap B = \varnothing$ et A, B ouverts. Alors, A et B sont fermés car $X - A = B$ et $X - B = A$. Il suit que A et B sont à la fois ouverts et fermés qui montre que X n'est pas connexe.

(b) $\Rightarrow$ (c). Supposons que $A, B \subset X, X = A \cup B, A \cap B = \varnothing$ et A, B sont fermés. Alors A et B sont aussi des ouverts qui forment une partition de X.

(c) $\Rightarrow$ (a). Supposons que X n'est pas connexe. Alors, il existe une partie propre $G \subsetneq X$ qui est à la fois ouverte et fermée. Il suit que $X - G$ est une partie de X à la fois ouverte et fermée et $X = G \cup (X - G)$ qui montre qu'il existe une partions de X en deux fermés disjoints.

2. Montrer que si $f : (X, d) \to (X', d')$ est continue et X est connexe, alors $f(X)$ est connexe.
Solution.
Si $G \subsetneq f(X)$ est à la fois ouverte et fermée. Alors puisque f est continue $f^{-1}(G) \subsetneq X$ est à la fois ouverte et fermée qui entraine que X n'est pas connexe.

3. Si (X, d) est connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ est continue telle que $|f(x)| = 1$ pour tout $x \in X$, montrer que f doit être constante.
Solution.
Si $|f(x)| = 1$ alors $f(X) = \{-1, 1\}$. Donc $X = f^{-1}\{-1\} \cup f^{-1}\{1\}$. Puisque f est continue $f^{-1}\{-1\}$ et $f^{-1}\{1\}$ sont des fermés de X. I suit que X est une partition de deux fermés disjoints donc X est non-connexe.

4. Monter qu'un espace connexe par arcs est connexe.
Solution.
Supposons que X est connexe par arcs et $g : X \to \{0, 1\}$ est continue. Si g n'est pas constante, alors ils existent $x_1, x_2 \in X$ tels que $g(x_1) = 0$ et $g(x_2) = 1$. Soit $f : [0, 1] \to X$ un chemin dans X tel que $f(0) = x_1$ et $f(1) = x_2$. Alors la fonction $g \circ f : [0, 1] \to \{0, 1\}$ est continue et surjective qui entraine que $[0, 1]$ n'est pas connexe, qui est une contradiction.

5. Supposons que $f, g : [0, 1] \to X$ sont respectivement des chemins de $x \to y$ et $y \to z$. Montrer que

$$h(t) = \begin{cases} f(2t); & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ g(2t - 1); & \text{si } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

est un chemin $x \to z$ dans X.

Solution.

On a $h(0) = f(0) = x, h(1/2) = f(1) = y = g(0)$, et $h(1) = g(1) = z$. De plus $f(2t)$ et $g(2t-1)$ sont des composées de fonctions continues donc sont elles mêmes continues qui entraine que h est aussi continue.

6. Montrer qu'une partie ouverte et connexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.

Solution.

Soit G un partie ouverte et connexe de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in G$.

Soit $A = \{x \in G$ qui ont un arc joignant x_0 et $x\}$. A est connexe par arcs.

Si on montre que A est à la fois ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^n$, alors $G = A \cup (G - A)$ serait une partions d'ouverts de la partie connexe G. Donc soit $A = \varnothing$ ou bien $G - A = \varnothing$. Puisque $x_0 \in A$ alors on a $G - A = \varnothing$. Donc $G = A$ est connexe par arc.

Montrons que A est ouvert. Soit $x \in A \subset G$, puisque G est ouvert alors il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset G$. Tout point $y \in B(x,r)$ peut être joint à x par un segment de ligne droite dans $B(x,r)$ donc tout point $y \in B(x,r)$ peut être joint à x_0 par un arc et donc $B(x,r) \subset A$ qui montre que A est ouvert.

Montrons que $G - A$ est ouvert aussi. Soit $x \in G - A$ alors il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset G - A$. Sinon cela veut dire que $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$. Soit $y \in B(x,r) \cap A$ alors on peut joindre x_0 à y et y à x qui est une contradiction car $x \in G - A$. Donc $G - A$ est ouvert.

7. Montrer que toute fonction continue $f : [a,b] \to [a,b]$, admet un point fixe $x \in [a,b]$.

Solution.

Puisque $f([a,b]) \subseteq [a,b]$ alors $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$. Soit $g(x) = f(x) - x$, alors g est continue et $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x \in (a,b)$ tel que $g(c) = 0$ ou bien $f(x) = c$.

8. Supposons que X est connexe par arcs, et $f : X \to Y$ est continue et surjective. Montrer que Y est connexe par arcs.

Solution.

Soient $y_1, y_2 \in Y$. Puisque f est surjective, $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ pour $x_1, x_2 \in X$. Soit $g : [0,1] \to X$ un chemin continue dans X de x_1 vers x_2. Alors la fonction $f \circ g : [0,1] \to Y$ est un chemin continue dans Y de y_1 vers y_2. Alors Y est connexe par arcs.

9. Montrer que $X = C([0,1])$ avec $d(f,g) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$ est connexe par arcs et donc connexe.

Solution.

Supposons que f, g sont deux éléments quelconques dans $C[0,1]$. On défini un chemin $h : [0,1] \to C[0,1]$ par $h(t) = tf + (1-t)g$. Alors pour chaque $t \in [0,1]$ la fonction $h(t)$ est continue donc est un élément de $C[0,1]$. De plus, la fonction h est continue puisque

$$d_\infty(h(t), h(s)) = \sup_{x\in[0,1]} |(t-s)f(x) + (s-t)g(x)| \leq |t-s|(Mf + Mg),$$

où $|f(x)| \leq M_f$ et $|g(x)| \leq M_g$ pour tout $x \in [0,1]$.
Pour tout $\epsilon > 0$, soit $\delta = \epsilon/(Mf + Mg)$, alors on obtient $d_\infty(h(t), h(s)) < \epsilon$ quand $|t?s| < \delta$. Finalement , $h(0) = g$ et $h(1) = f$, donc h est un chemin continu dans $C[0,1]$ de g vers f. Donc $C[0,1]$ est connexe par arcs et donc connexe.

10. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subsetneq X$. Montrer que X est connexe si et seulement si $\mathbf{Fr}(A) = \varnothing$.
Solution.
On sait $\mathbf{Fr}(A) = \mathbf{Adh}(A) - \mathbf{Int}(A)$, don si A est à la fois ouvert et fermé $\mathbf{Fr}(A) = \varnothing$. Donc X est connexe si et seulement si $\mathbf{Fr}(A) = \varnothing$.

11. Supposons que A et B sont des parties connexes de X tel que $\mathbf{Adh}(A) \cap B \neq \varnothing$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.
Solution.
Considérons la fonction continue $f : A \cup B \to \{0,1\}$ avec la distance discrète δ. Puisque A et B sont connexes alors les fonctions ; $f|_A = c_A : A \to \{0,1\}$ et $f|_B = c_B : B \to \{0,1\}$ sont constantes et ont pour valeur 0 ou bien 1. Notons que $\mathbf{Adh}(A)$ est aussi connexe car A est connexe et $f(\mathbf{Adh}\, A) = c_A$. Soit $b \in \mathbf{Adh}(A) \cap B$ alors $f(b) = c_A = c_B$. Donc $f(A \cup B) = c_A$ qui entraine que f est constante sur $A \cup B$ qui est donc connexe.

12. Soient $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ un homomorphisme et $a \in X$.
Solution.

(a) Montrer que $f_a : X - \{a\} \to Y - \{f(a)\}$ est un homomorphisme.
Voir exercice 5 du TD no. 4.

(b) Déduire qu'il n y a pas d'homomorphisme entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.
Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ soit un homéomorphisme.
Alors la restriction $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}^2 - \{f(0)\}$ serait aussi un homéomorphisme.
Mais $\mathbb{R} - \{0\}$ n'est pas connexe, cependant $\mathbb{R}^2 - \{f(0)\}$ est connexe.
Donc $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

8.8 Espaces Topologiques

1. Soit $X = \{a, b, c\}$ trouver les 29 topologies possibles sur X.

Solution. On donne les types distincts des topologies et le nombre de chaque.

$\mathscr{T}_{Triv} = \{\varnothing, X\}$ (1) $\quad$ $\mathscr{T}_{dis} = P(X)$ (1)

$\mathscr{T}_1 = \{\varnothing, \{a\}, X\}$ (3) $\quad$ $\mathscr{T}_2 = \{\varnothing, \{a, b\}, X\}$ (3)

$\mathscr{T}_3 = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, X\}$ (6) $\quad$ $\mathscr{T}_4 = \{\varnothing, \{a, b\}, \{c\}, X\}$ (3)

$\mathscr{T}_5 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$ (3) $\quad$ $\mathscr{T}_6 = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ (3)

$\mathscr{T}_7 = \{\varnothing, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ (6)

2. Soit $(X, \mathscr{T}_{\text{cof}})$ ou X est infini $\mathscr{T}_{\text{cof}} = \{U \subset X : (X - U) \text{ fini }\} \cup \{\varnothing\}$ et $A \subseteq X$.

(a) Montrer que la collection $\mathscr{T}_{\text{cof}}$ est une topologie sur X.

(b) Déterminer quels sont les parties fermées de X.

(c) Si A est fini trouver $\textbf{Adh}\, A$, $\textbf{Int}\, A$ et $\textbf{Fr}\, A$.

(d) Si A est infini trouver $\textbf{Adh}\, A$, $\textbf{Int}\, A$ et $\textbf{Fr}\, A$.

Solution.

(a) Montrer que la collection $\mathscr{T}_{\text{cof}}$ est une topologie sur X.
(1) $X - X = \varnothing$ fini donc $X \in \mathscr{T}_{\text{cof}}$.
(2) Soient $U_a \in \mathscr{T}_{\text{cof}}, a \in A$, alors $X - \cup_a U_a = \cap_a (X - U_a)$ est fini car c'est une intersection de finis.
(3) Si $U_1, U_2 \in \mathscr{T}_{\text{cof}}$ alors $X - (U_1 \cap U_2) = (X - U_1) \cap (X - U_2)$ est fini car c'est l'union de 2 fini.

(b) Déterminer quels sont les parties fermées de X.
Les fermés sont les compléments des ouverts donc les fermés de $\mathscr{T}_{\text{cof}}$ sont les parties finies de X ou bien X.

(c) Si A est fini trouver $\textbf{Adh}\, A$, $\textbf{Int}\, A$ et $\textbf{Fr}\, A$.
$\textbf{Adh}\, A = A$ car A est fermé.
$\textbf{Int}\, A = \varnothing$ car c'est le seul ouvert contenu dans A.
$\textbf{Fr}\, A = \textbf{Adh}\, A - \textbf{Int}\, A = A$.

(d) Si A est infini trouver $\textbf{Adh}\, A$, $\textbf{Int}\, A$ et $\textbf{Fr}\, A$.
$\textbf{Adh}\, A = X$ car c'est le plus petit fermé contenant A.
$\textbf{Int}\, A = A$ si $X - A$ est fini et $\textbf{Int}\, A = \varnothing$ si $X - A$ est infini.
$\textbf{Fr}\, A = \textbf{Adh}\, A - \textbf{Int}\, A = X - A$ si $X - A$ est fini et $\textbf{Fr}\, A = \textbf{Adh}\, A - \textbf{Int}\, A = X$ si $X - A$ est infini.

3. Soient $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ deux topologies sur X.
(a) Montrer que $\mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$ est une topologie sur X.
(b) Montrer que généralement $\mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2$ n'est pas une topologie sur X.

Solution.
(a) Montrer que $\mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$ est une topologie sur X.

(O1) $\varnothing, X \in \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ donc $\varnothing, X \in \mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$.
(O2) Si $U_a \in \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ alors $\cup_a U_a \in \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ et donc $\cup_a U_a \in \mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$.
(O3) Si $U_1, U_2 \in \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ alors $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ et donc $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$.
(b) Montrer que généralement $\mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2$ n'est pas une topologie sur X.
Soit $X = \{a, b, c\}$, alors $\mathscr{T}_1 = \{\varnothing, \{a\}, X\}$ et $\mathscr{T}_1 = \{\varnothing, \{b\}, X\}$ sont deux topologies (voir exercice 1).
Mais $\mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, X\}$ n'est pas une topologie.

4. Soit $\mathscr{T}$ la collection de parties de $\mathbb{R}$ contenant $\varnothing, \mathbb{R}$ et tout les intervalles de la forme $(-\infty, b)$. Montrer que $\mathscr{T}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.
Solution.
(O1) $\varnothing, \mathbb{R} \in \mathscr{T}$.
(O2) $\cup_a(-\infty, b_a) = (-\infty, \sup\limits_a b_a) \in \mathscr{T}$.
(O3) $(-\infty, b_1) \cap (-\infty, b_1) = (-\infty, \inf\{b_1, b_2\}) \in \mathscr{T}$.

5. Montrer que $\mathscr{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ est une base pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.
Solution.
(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ on a $x \in (x - r, x + r) \in \mathscr{B}$.
(2) Soit $x \in B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ alors si $B_1 = (a_1, b_1)$ et $B_2 = (a_2, b_2)$ on a $x \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) = (c_1, c_2) \in \mathscr{B}$.

6. Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ des bases pour les topologies $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ respectivement. Montrer que $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$ si et seulement si pour tout $B \in \mathscr{B}$ et $x \in B$, il existe $B' \in \mathscr{B}'$ tel que $x \in B' \subset B$.
Solution.
($\Rightarrow$) Soit $x \in B \in \mathscr{B}$ et puisque $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$ alors $B \in \mathscr{T}'$.
($\Leftarrow$) Soit $U \in \mathscr{T}$, alors pour tout $x \in U$ il existe $B \in \mathscr{B}$ tel que $x \in B \subset U$. Mais par hypothèse il existe $B' \in \mathscr{B}'$ tel que $x \in B' \subset B$. Donc pour tout $x \in U$ il existe $B' \in \mathscr{B}'$ tel que $x \in B' \subset U$ qui entraine que $U \in \mathscr{T}'$.

7. Si $(X, \mathscr{T})$ est un espace topologique , $A \subset X$, et $\mathscr{T}_A = \{A \cap U : U \in \mathscr{T}\}$.

(a) Montrer que la collection $\mathscr{T}_A$ est une topologie sur A.

(b) Si $X = \{a, b, c\}$, $\mathscr{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ et $A = \{a, b\}$ trouver la topologie induite $\mathscr{T}_A$ de A,

Solution.

(a) Montrer que la collection $\mathscr{T}_A$ est une topologie sur A.
(O1) $\varnothing = A \cap \varnothing$ et $A = A \cap X$ donc $\varnothing, A \in \mathscr{T}_A$.
(O2) Si $U_a \in \mathscr{T}$ alors $(A \cap U_a) \in \mathscr{T}_A$ et on a $\cup_a(A \cap U_a) = A \cap (\cup_a U_a) \in \mathscr{T}_A$ car $\cup_a U_a \in \mathscr{T}$.
(O3) Si $U_1, U_2 \in \mathscr{T}$ alors $(A \cap U_1), (A \cap U_2) \in \mathscr{T}_A$ et on a $(A \cap U_1) \cap (A \cap U_2) = A \cap (U_1 \cap U_2) \in \mathscr{T}_A$.

(b) Si $X = \{a,b,c\}$, $\mathscr{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, X\}$ et $A = \{a,b\}$ trouver la topologie induite $\mathscr{T}_A$ de A,
$\mathscr{T}_A = \{A \cap U : U \in \mathscr{T}\} = \{\varnothing, \{a\}, A\}$.

8. Soit $(A, \mathscr{T}_A)$ un sous-espace d'un espace topologique $(X, \mathscr{T})$. Montrer que pour que tout ouvert de A soit un ouvert de X il faut et il suffit que A soit un ouvert de X.
Solution.
(1) Si A est un ouvert de X alors $A \in \mathscr{T}$. Pour tout $G \in \mathscr{T}_A$, il existe $U \in \mathscr{T}$ tel que $G = A \cap U$. Mais puisque $A, U \in \mathscr{T}$ alors $G = A \cap U \in \mathscr{T}$ donc $G \in \mathscr{T}$ et alors $\mathscr{T}_A \subset \mathscr{T}$.
(2) Si tout ouvert de A est un ouvert de X alors $\mathscr{T}_A \subset \mathscr{T}$, qui entraine que $A \in \mathscr{T}$ c.a.d. A est un ouvert de X.

9. Montrer que $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ est continue dans chacun des cas suivants :

(a) $(X, \mathscr{T}_X) = (Y, \mathscr{T}_Y)$ et $f(x) = x$.

(b) f est constante.

(c) $\mathscr{T}_X = \mathscr{T}_{disc}$.

(d) $\mathscr{T}_Y = \mathscr{T}_{triv}$.

Solution.

(a) Si $O \in \mathscr{T}_X$ alors puisque $f(x) = x$, $f^{-1}(O) = O \in \mathscr{T}_X$ et donc f est continue.

(b) Si $O \in \mathscr{T}_X$ alors puisque $f(x) = c$, $f^{-1}(O) = X \in \mathscr{T}_X$ si $c \in O$ sinon $f^{-1}(O) = \varnothing \in \mathscr{T}_X$ et donc f est continue.

(c) Puisque tout sous ensemble est ouvert dans la topologie discrète $\mathscr{T}_{disc}$, alors $f^{-1}(O) \in \mathscr{T}_{disc}$ pour tout $O \in \mathscr{T}_Y$ et donc f est continue. .

(d) Puisque $\mathscr{T}_Y = \mathscr{T}_{triv} = \{\varnothing, Y\}$ on a $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathscr{T}_X$ et $f^{-1}(Y) = X \in \mathscr{T}_X$ et donc f est continue.

10. Soit $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ continue, et A une partie non vide de X.
Montrer que la restriction $g = f|_A : (A, \mathscr{T}_A) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ est continue.
Solution. Soit $O \in \mathscr{T}_Y$ alors $g^{-1}(O) = A \cap f^{-1}(O) \in \mathscr{T}_A$ car $f^{-1}(O) \in \mathscr{T}_X$ et donc g est continue.

11. Montrer que si $f, g : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ sont des applications continues, montrer que :

(a) Si X est séparé $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.

(b) Si Y est séparé $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$.

Solution.

(a) Si X est séparé $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.
Soit $b \in X - A$ alors $f(b) \neq g(b)$.

Puisque X est séparé ils existent des ouverts $U, V \in \mathscr{T}_Y$ tels que $f(b) \in U, g(b) \in V$ et $U \cap V = \varnothing$. Donc $b \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \in \mathscr{T}_X$ car f, g sont continues et $U, V \in \mathscr{T}_Y$.
De plus $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subset X - A$.
Il suit que $X - A$ est ouvert et donc X est fermé.

(b) Si Y est séparé $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$.
On va montrer que le complément de Γ_f, $X \times Y - \Gamma_f$ que est ouvert.
Soit $(x, y) \in X \times Y - \Gamma_f$ alors $(x, y) \notin \Gamma_f$ et donc $y \neq f(x)$.
Puisque Y est séparé alors ils existent $U, V \in \mathscr{T}_Y$ tels que $f(x) \in U, y \in V$ et $U \cap V = \varnothing$.
Puisque f est continue il suit que $x \in U_1 = f^{-1}(U) \in \mathscr{T}_X$. De plus $W = U_1 \times V \subseteq X \times Y - \Gamma_f$. Donc $X \times Y - \Gamma_f$ est ouvert qui entraine que Γ_f est fermé.

Références

[1] Conway, J.B. : A Course in Point Set Topology, Springer (2014).

[2] Doneddu, A : Topologie. Fonctions réelles d'une variable réelle. Tome 4. Vuibert (1979).

[3] Dugundji, J. : Topology. Allyn and Bacon, Newton (1967).

[4] Kolmogov, A.N., Fomin, S.V. : Introductory Real Analysis, Dover (1970).

[5] Hewitt, E., Stromberg, K. : Real and Abstract Analysis. Springer, New York (1975).

[6] Kelley, J.L. : General Topology. Ishi, New York (2008).

[7] Morris, S.A. : Topology without tears, (2011).

[8] Munkres, J.R : Topology a First Course, Prentice-Hall (1975).

[9] Steen, L.A., Seebach, J.A. : Counterexamples in Topology. Springer, New York (1978).

[10] Willard, S : General Topology, Adison Wesley (1970).

[11] Sutherland, W. : Introduction to Metric and Topological Spaces (second edition), Oxford University Press (2009).

Index