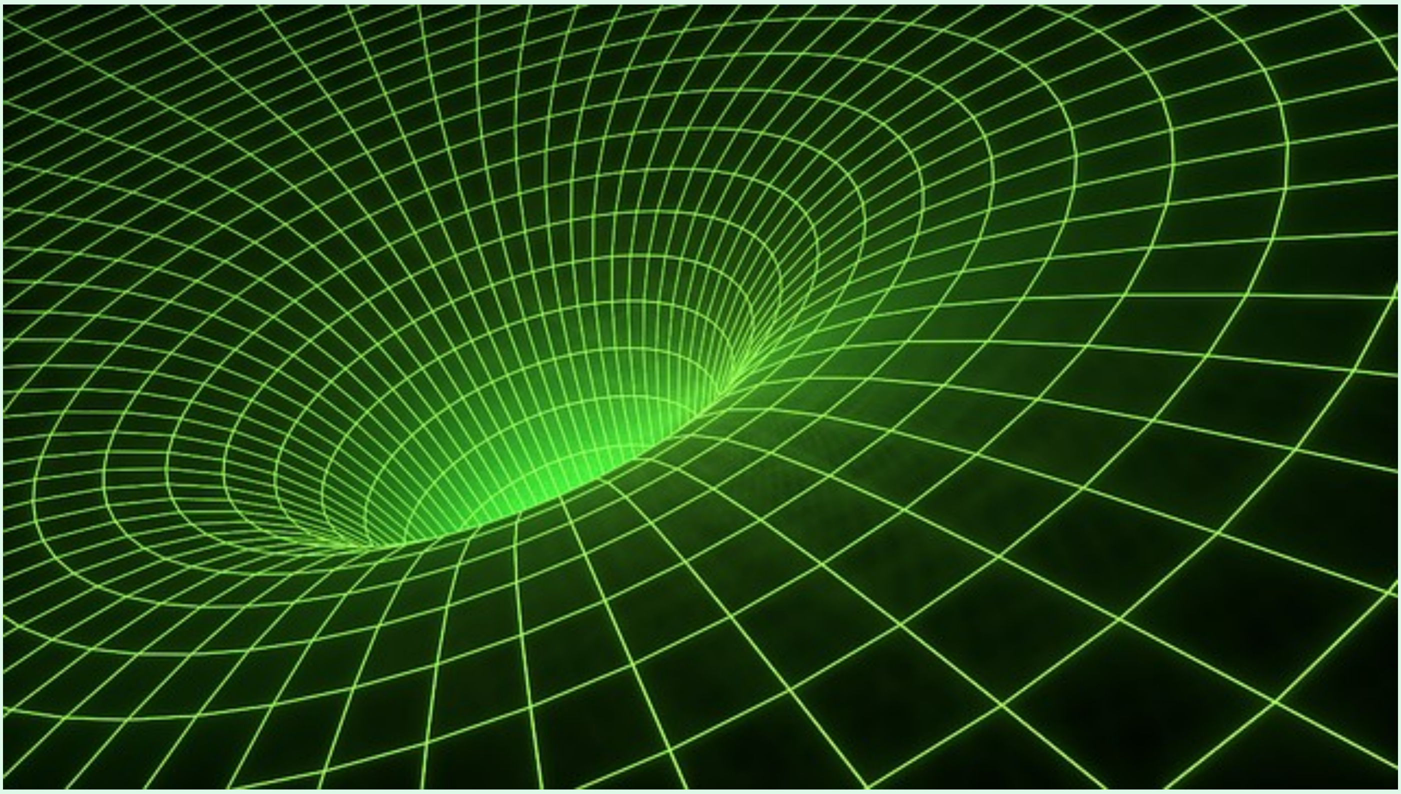
Analyse Complexe Elémentaire

Système LMD

Licence Mathématiques

Semestre 4



El-Bachir Yallaoui

Hamid Benseridi

Département de Mathématiques

Faculté des Sciences

Universite Ferhat Abbas, Sétif 1

Tables des matières

1 Le corps des complexes et sa topologie **1**

1.1 Les nombres complexes 1

1.2 Forme exponentielle d'un nombre complexe 3

1.3 Racines n-ième d'un nombre complexe 7

1.4 Topologie de $\mathbb{C}$ 11

1.5 Exercices 16

2 Fonctions analytiques **19**

2.1 Fonction d'une variable complexe à valeur complexe 19

2.2 Limite et continuité 21

2.3 Différentiabilité, analyticité et holomorphie 24

2.4 Conditions de Cauchy-Riemann et Fonctions Harmoniques 28

2.5 Fonctions harmoniques 36

2.6 Exercices 39

3 Fonctions élémentaires **43**

3.1 Polynômes et fractions rationnelles 43

3.2 Fonctions exponentielle et logarithmique complexes 44

3.3 La fonction puissance générale 52

3.4 Fonctions trigonométriques et hyperboliques complexes 53

3.5 Exercices 57

4 Intégration complexe **60**

4.1 Intégration curviligne 60

4.2 Théorème de Cauchy 69

4.3 Primitives et indépendance du chemin d'intégration 72

4.4 Formule d'intégration de Cauchy et ses conséquences 74

4.5 Exercices 83

Préface

À propos de ces notes de cours d'analyse complexe

Ces notes sont principalement destinées aux étudiants de la deuxième année (semestre 3) de Licence en mathématiques système **LMD** à l'université Ferhat Abbas de Sétif 1, Algérie. Néanmoins, elles peuvent aussi être utiles aux étudiants en ingénierie, physique et autres ayant besoin de notions élémentaires des fonctions d'une variable complexe.
Ces notes sont absolument indispensables pour tout étudiant désirant se spécialiser en mathématiques. Ceci dit, elles n'ont aucune prétention d'être un recueil complet sur le sujet. J'espère, tout de même, qu'elles constituerons un support pédagogique efficace. Elles ne serons complètement profitables aux étudiants que si ces derniers assistent régulièrement aux cours magistraux et préparent minutieusement les travaux dirigés.

Pré-requis

Tout étudiant voulant étudier l'analyse complexe doit, au préalable, connaître les notions de base d'une fonction d'une variable réelle (limites, continuité, différentiation et intégration), les suites et les séries réelles, ainsi que les notions élémentaires de topologie générale. Nous conseillons les étudiants de revoir ces notions qui seront utiliser à travers tout le cours.

Préparation de l'ouvrage

On a utiliser les outils suivants pour la réalisation de cet ouvrage.

- **LaTeX :** pour la production de cet ouvrage.
- **Geogebra :** pour réaliser la majorité des graphes et figures.
- **Maple :** pour vérifier les calculs numériques ainsi que quelques graphes.

Prof. El-Bachir Yallaoui, Août 2018

1 Le corps des complexes et sa topologie

1.1 Les nombres complexes

Un nombre complexe z est défini par

$$z = x + iy$$

où, x, y sont des nombres réels et i est un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.

- $x = \mathrm{Re}(z)$ est appelée la partie réelle de z.
- $y = \mathrm{Im}(z)$ est appelée la partie imaginaire de z.
- $z = x + iy = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$.
- i est un imaginaire pure tel que $i^2 = -1$ ou $i = \sqrt{-1}$.
- Si $x = \mathrm{Re}(z) = 0$ alors $z = iy = i\,\mathrm{Im}(z)$ est un imaginaire pure.
- Si $y = \mathrm{Im}(z) = 0$ alors $z = x = \mathrm{Re}(z)$ est un réel.
- $(x_1 + iy_1) = (x_2 + iy_2)$ si et seulement si $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

L'ensemble des nombres complexes est défini par

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : z = x + iy, i^2 = -1\}$$

Comme $\mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$, tout nombre complexe peut être représenté, de façon unique, comme un point dans le plan $\mathbb{R}^2$.

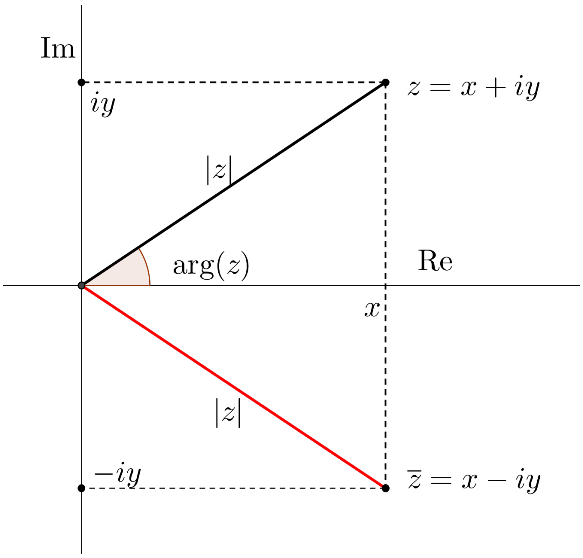


Figure 1.1 – Représentation géométrique des complexes

Opérations sur les nombres complexes

Étant donné $a+ib, c+id \in \mathbb{C}$, alors on peut effectuer les opérations suivantes :

$$\begin{aligned}
\text{Addition :} &\quad (a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)\\
\text{Soustraction :} &\quad (a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)\\
\text{Multiplication :} &\quad (a+ib)\times(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd=(ac-bd)+i(ad+bc)\\
\text{Division :} &\quad \frac{a+ib}{c+id}=\frac{a+ib}{c+id}\cdot\frac{c-id}{c-id}=\frac{(ac+bd)}{a^2+b^2}+i\frac{(bc-ad)}{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

$\mathbb{C}$ est un corps commutatif

L'ensemble des nombres complexes muni des opérations d'addition et de multiplications définies ci-dessus possèdent les propriétés algébriques suivantes :

(C1) $(\mathbb{C},+)$ est un groupe Abélien.

(C2) $(\mathbb{C}-\{0\},\times)$ est un groupe Abélien.

(C3) Pour tous $a,b,c \in \mathbb{C}$, on a $(a+b)\times c = a\times c + b\times c$.

Les propriétés C1–C3 montrent clairement que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un **corps** commutatif.

Module et conjugué d'un nombre complexe

Si $z=x+iy, x,y\in\mathbb{R}$ on définit par :

- $\overline{z}=\overline{x+iy}=x-iy$ le complexe conjugué de z,
- $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ le module ou la norme de z.

On remarque d'après les figures ci-dessus que :

$$|z|\leq \operatorname{Re} z\leq |z| \quad \text{et} \quad |z|\leq \operatorname{Im} z\leq |z|$$

$$x=\operatorname{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad y=\operatorname{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

Exemple 1. Trouver le conjugué et le module de $z=3+4i$.
Solution. $\overline{z}=3-4i$ et $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Proposition 1.1. *Soient z et $w\in\mathbb{C}$. Alors, on a les propriétés suivantes :*

(1) $\overline{\overline{z}}=z$

(2) $|\overline{z}|=|z|$

(3) $z\overline{z}=|z|^2$

(4) $\overline{z\pm w}=\overline{z}\pm\overline{w}$

(5) $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$

(6) $\overline{z/w}=\overline{z}/\overline{w}$

Proposition 1.2. *Soient z et $w\in\mathbb{C}$. Alors,*

(1) $|z| = 0$ *si et seulement si* $z = 0$

(2) $|z.w| = |z|.|w|$

(3) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$ *si* $w \neq 0$

(4) $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(inégalité triangulaire)*

(5) $||z| - |w|| \leq |z - w|$

Exemple 2. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe tel que $|z| = 2$.
Montrer que $|z - 3| \leq 7$ et que $\dfrac{1}{|z^2 - 1|} \leq \dfrac{1}{3}$.
Solution.
En appliquant l'inégalité triangulaire (4) on a $|z - 3| \leq |z| + 3 \leq 7$.
En appliquant l'inégalité (5) on obtient $\dfrac{1}{|z^2 - 1|} \leq \dfrac{1}{|z^2| - 1} \leq \dfrac{1}{3}$.

1.2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

La forme polaire d'un nombre complexe $z = x + iy$ est définie par

$$z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{1}$$

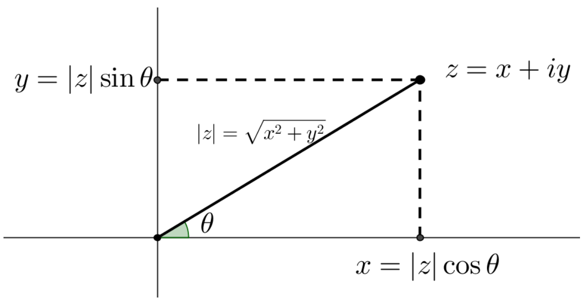


FIGURE 1.2 – Représentation polaire

Étant donne $\mathbb{C}$ est isomorphe a $\mathbb{R}^2$, le nombre complexe $x + iy$ et le couple (x, y) représentent le même point dans le plan.
Il en découle de la figure (1.2) que :

$$x = |z|\cos\theta \quad \text{et que} \quad y = |z|\sin\theta$$

L'angle θ est appelé **argument** de z, $\theta = \arg z$.

Pour trouver $\arg z$ on doit résoudre simultanément les équations

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \text{ et } \sin\theta = \frac{y}{|z|} \tag{2}$$

La valeur de $\theta = \arg z$ n'est pas unique car si θ_0 est une solution alors $\theta = \theta_0 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$, sont toutes des solutions de $\arg z$.

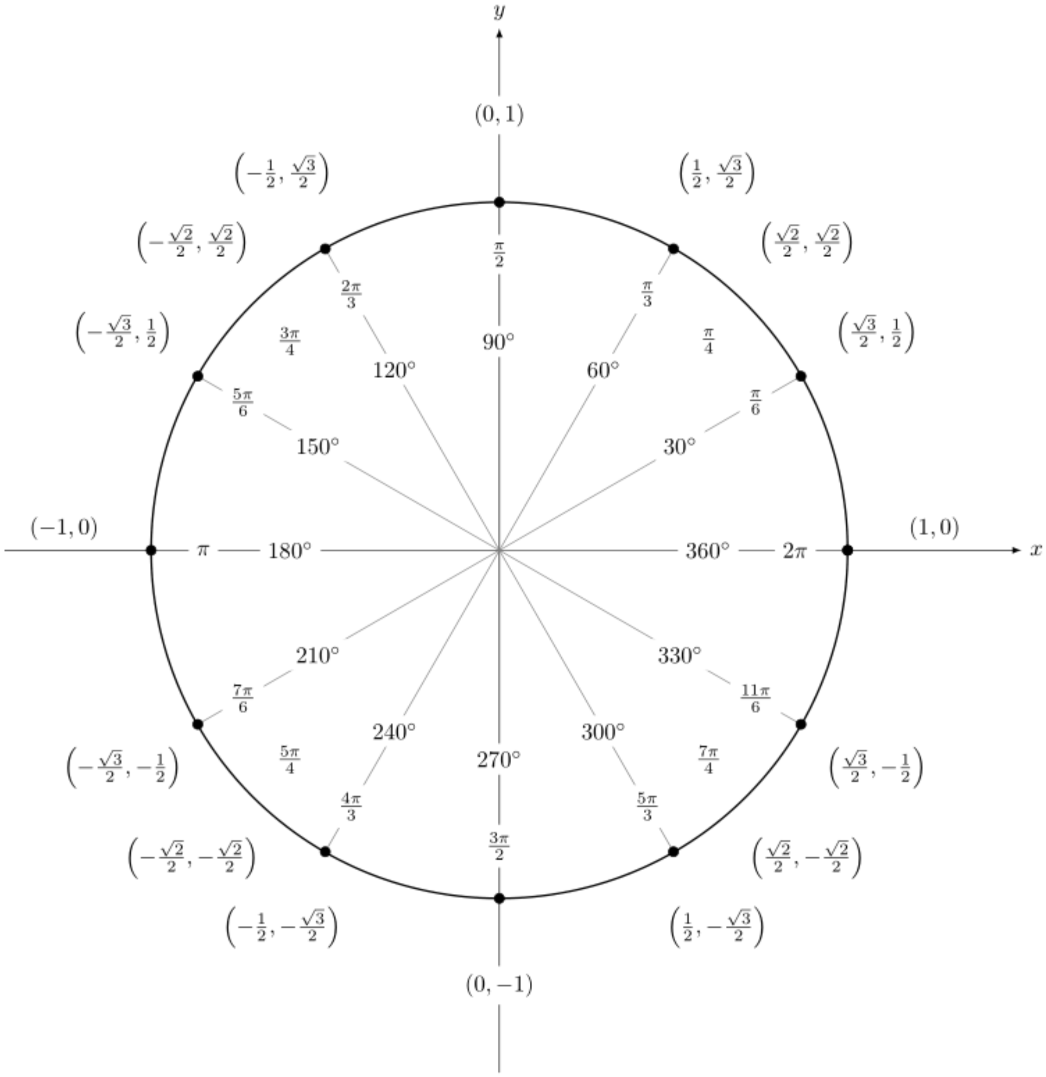


FIGURE 1.3 – Cercle Trigonométrique sur $[0, 2\pi]$.

Argument principal

L'argument de z possède une infinité de valeurs possibles, cependant il y a une valeur unique de θ dans l'intervalle $(-\pi, \pi]$. Cette valeur est appelée l'argument principal de z et on la note $\operatorname{Arg} z$. Évidement $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Pour trouver $\operatorname{Arg} z$ on doit résoudre les équations

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \text{ et } \sin\theta = \frac{y}{|z|} \text{ pour } \theta \in (-\pi, \pi] \tag{3}$$

Exemple 3. Trouver la forme polaire de $z = 1 - i\sqrt{3}$.
Solution. Le module $|z| = \sqrt{1+3} = 2$ et $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$; $\sin\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.
Donc $\operatorname{Arg} z = -\dfrac{\pi}{3}$, $\arg z = -\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$ et

$$z = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

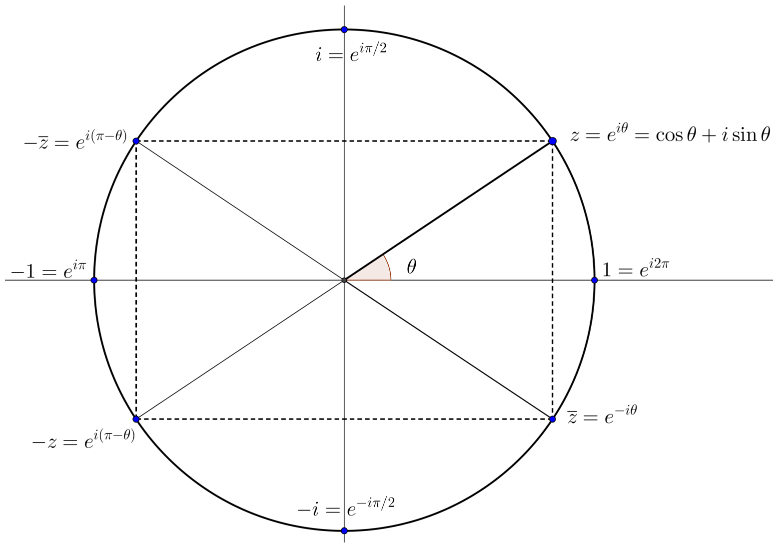


FIGURE 1.4 – Représentation de $z = e^{i\theta}$.

Exponentielle d'un nombre complexe

Dans le cours d'analyse élémentaire, nous avons vu la formule d'Euler pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \tag{4}$$

donc si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, alors e^z est défini par :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + isiny) \tag{5}$$

On donne ci-dessous quelques propriétés.

Proposition 1.3. *Pour tout $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.*

(1) $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_1} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

(2) $1/e^{i\theta} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$

(3) $e^{i(\theta+2\pi)} = e^{i\theta}$

(4) $|e^{i\theta}| = 1$

En utilisant la formule d'Euler dans la forme polaire (1) on obtient

$$z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta} \tag{6}$$

$$\overline{z} = x - iy = |z|(\cos\theta - i\sin\theta) = |z|(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = |z|e^{-i\theta} \tag{7}$$

Voici quelques nombres complexes fondamentaux et leurs formes trigonométriques.

(1) $1 = e^{i0} = e^{i2k\pi}$

(2) $i = e^{i\pi/2}$

(3) $-1 = e^{i\pi}$

(4) $-i = e^{-i\pi/2}$

(5) $1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\pi/4}$

(6) $-1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i3\pi/4}$

(7) $(1 \pm i\sqrt{3}) = 2e^{\pm i\pi/3}$

(8) $(-1 \pm i\sqrt{3}) = 2e^{\pm 2i\pi/3}$

(9) $(\sqrt{3} \pm i) = 2e^{\pm i\pi/6}$

(10) $(-\sqrt{3} \pm i) = 2e^{\pm 5i\pi/6}$

(A vérifier à titre d'exercices).

Proposition 1.4. *Soient $z_k = |z_k|e^{i\theta_k}$ pour $k = 1, 2, \ldots, m$ et $z = |z|e^{i\theta}$. Alors ;*

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{8}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdots z_m &= |z_1| \cdots |z_m| \{\cos(\theta_1 + \cdots + \theta_m) + i\sin(\theta_1 + \cdots + \theta_m)\} \\ &= |z_1| \cdots |z_m| e^{i(\theta_1+\cdots+\theta_m)} \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} z^n &= \{|z|(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n \\ &= |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \\ &= |z|^n e^{in\theta} \text{pour } n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{11}$$

L'équation (11) est la fameuse formule De Moivre. En particulier, on a

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = (\cos n\theta + i\sin n\theta) \text{ pour } n \in \mathbb{Z} \tag{12}$$

Remarque : En utilisant la formule d'Euler, on obtient les formules suivantes :

(1) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

(2) $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

(3) $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

(4) $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

(5) $e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$

(6) $e^{-in\theta} = \cos n\theta - in\sin\theta$

(7) $\cos n\theta = \dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$

(8) $\sin\theta = \dfrac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$

Exemple 4. Calculer $w = (1 - i\sqrt{3})^{12}$ et $z = (1 - i\sqrt{3})^{-1}$.
Solution. On sait a partir de l'exemple (3) que $(1 - i\sqrt{3}) = 2e^{-i\pi/3}$, donc

$$w = 2^{12}e^{-i12\pi/3} = 2^{12}e^{-4i\pi} = 2^{12} = 2^{12}(\cos 4\pi - i \sin 4\pi) = 2^{12}.$$

$$z = 2^{-1}e^{+i\pi/3} = 2^{-1}(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)) = (1 + i\sqrt{3})/4.$$

Exemple 5. Utiliser la formule De Moivre (1) pour déduire des formules pour $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$.
Solution.

$$\begin{aligned}(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2i\cos\theta\sin\theta\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta &= 2\cos\theta\sin\theta\end{aligned}$$

Exemple 6. Utiliser les formules d'Euler pour linéariser $\cos^3 x$.
Solution.

$$\begin{aligned}\cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 \\ &= 2^{-3}(e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}) \\ &= 2^{-3}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) \\ &= 2^{-3}(2\cos 3x + 6\cos x) \\ &= 2^{-2}(\cos 3x + 3\cos x)\end{aligned}$$

1.3 Racines n-ième d'un nombre complexe

Racines carrées d'un nombre complexe

Considérons l'équation $z^2 = a + ib; a, b \in \mathbb{R}$. Les solutions de cette équation sont appelés les racines carrées de $a + ib$. Posons $z = x + iy$. Alors on a

$$(x^2 - y^2) + 2ixy = a + ib.$$

En égalant les parties réelles et imaginaires respectives et en calculant les modules on obtient

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ces équations nous donnent

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \quad \text{et} \quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

- Si $b > 0$ alors on prend les deux cas $(u > 0, v > 0)$ et $(u < 0, v < 0)$.

- Si $b < 0$ alors on prend les deux cas $(u > 0, v < 0)$ et $(u < 0, v > 0)$.

Exemple 7. Trouver les racines carrées de $-3 - 4i$.

Solution. Si $z = x + iy$, alors on a

$$x^2 - y^2 = -3 \quad 2xy = -4 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = 5.$$

Ces équations nous donnent

$$x = \pm\sqrt{\frac{5 - 3}{2}} = \pm 1 \quad \text{et} \quad y = \pm\sqrt{\frac{5 + 3}{2}} = \pm 2.$$

Puisque $xy < 0$, alors les solutions sont : $z = \pm(1 - 2i)$.

$$z = \pm\sqrt{\frac{5 - 3}{2}} = \pm 1 \quad \text{et} \quad v = \pm\sqrt{\frac{5 + 3}{2}} = \pm 2.$$

Racines n-ièmes de l'unité

Considérons l'équation $z^4 = 1$. Les racines de cette équations sont appelées les quatrièmes racines de l'unité. Notons que si $|z| = 1$, alors $z = e^{i\theta}$.

$$z^4 = 1 \Leftrightarrow e^{4i\theta} = e^{2ik\pi} \Leftrightarrow z = e^{i\theta} = e^{ik\pi/2} = z_{k+1}; \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Donc les solutions sont $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1$ et $z_4 = -i$.
Notons que la somme de ces racines est nulle : $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$.
Notons de plus que les racines sont les sommets du polygone régulier à quatre cotés inscrit dans le cercle unité.
Les solutions de $z^n = 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, appelées les racines n-ièmes de l'unité, sont

$$z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right); k = 0, 1, \ldots, n - 1. \tag{13}$$

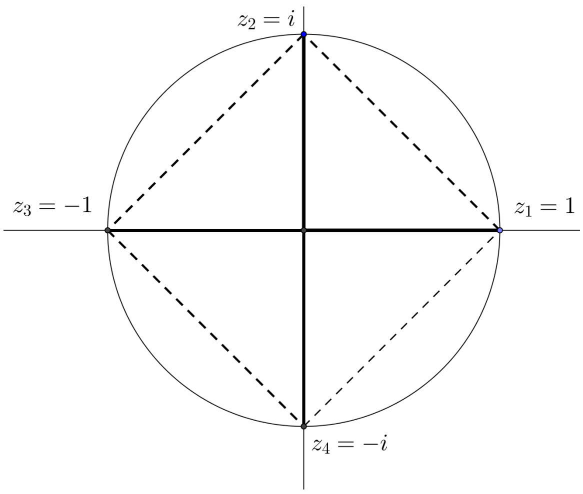


FIGURE 1.5 – Quatrièmes racines de l'unité.

Si on pose $w = e^{\frac{2i\pi}{n}} = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, les racines sont $1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}$. De plus, les n-ièmes racines de l'unité vérifient la propriété :

$$1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0. \tag{14}$$

Géométriquement, ces racines représentent les n sommets d'un polygone régulier à n cotés, inscrit dans le cercle unité ($|z| = 1$).

Exemple 8. Les racines de $z^n = 1$ pour $n = 3, 4, 6$.
Solution.

(1) $z^3 = 1 \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = e^{2i\pi/3} = (-1 + i\sqrt{3})/2$ et $z_3 = e^{4i\pi/3} = (-1 - i\sqrt{3})/2$.

(2) $z^4 = 1 \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = e^{i\pi/2} = i$, $z_3 = e^{i\pi} = -1$ et $z_3 = e^{3i\pi/2} = -i$.

(3) $z^6 = 1 \Rightarrow z_1 = 1, z_{k+1} = (e^{i\pi/3})^k = e^{ik\pi/3}, k = 1, \ldots, 5$.

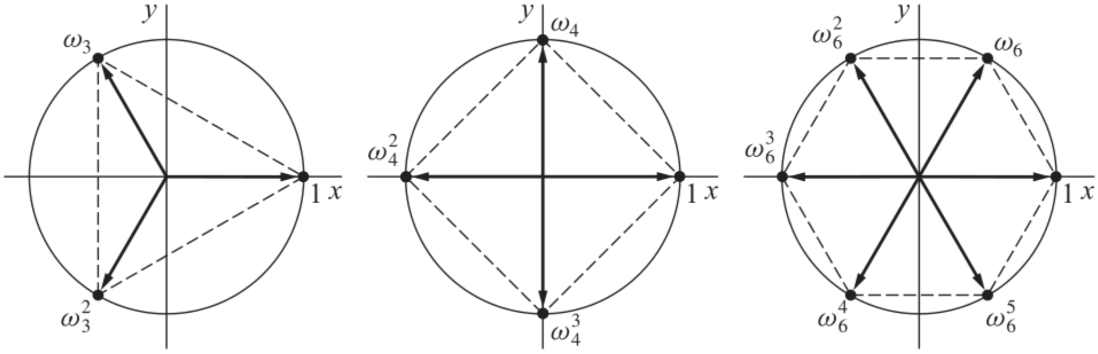


FIGURE 1.6 – Racines de l'unité pour $n = 3, 4, 6$.

Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Considérons l'équation $z^n = w$. Si on pose $z = |z|e^{i\theta}$ et $w = |w|e^{i\alpha}$, l'équation sera équivalente à

$$|z|^n e^{in\theta} = |w|e^{i\alpha}.$$

On aura donc

$$|z|^n = |w| \text{ et } n\theta = \alpha + 2k\pi \Rightarrow |z| = \sqrt[n]{|w|} \text{ et } \theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}.$$

Les solutions sont donc ;

$$z = z_k = \sqrt[n]{|w|} \exp\left[i\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right] ; k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

L'exemple suivant nous montre comment résoudre une équation de la forme $z^n = w$, c'est à dire, comment déterminer les n-ièmes racines de $w \in \mathbb{C}$.

Exemple 9. Trouver les solutions de $z^3 = -8i$.
Solution. Si on pose $z = re^{i\theta}$ alors on doit résoudre

$$z^3 = r^3 e^{3i\theta} = -8i = 8e^{i(-\pi/2+2k\pi)}$$

donc

$$z = z_k = 2\exp\left[i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right] ; k = 0, 1, 2$$

après calcul on obtient

$$z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = 2i, z_3 = -\sqrt{3} - i.$$

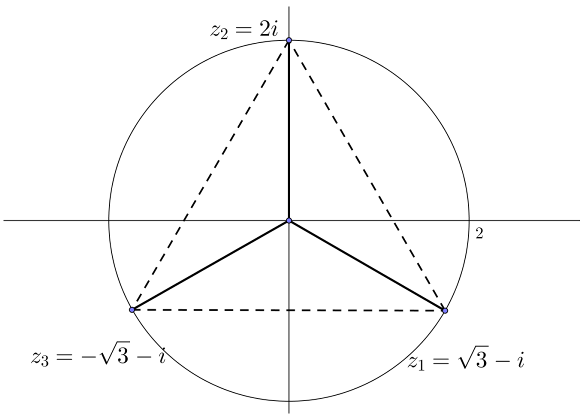


FIGURE 1.7 – Racines cubiques de $-8i$.

1.4 Topologie de $\mathbb{C}$

Les concepts d'analyse dans le cadre de $\mathbb{R}$, comme la convergence des suites ou la continuité et la dérivabilité des fonctions, reposent toutes sur la notion de proximité ou distance des points de $\mathbb{R}$. Ces concepts sont reliés à la topologie de l'ensemble sur lequel on travaille.

Métrique sur $\mathbb{C}$

Puisque $\mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$, on utilise sur $\mathbb{C}$ la distance Euclidienne. Donc, pour les nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ on définit la distance par :

$$d(z_1, z_2) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |z_1 - z_2| \tag{15}$$

$(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est un espace métrique complet (espace de Banach).
Avec la notation (15) l'équation du cercle de centre a et de rayon r est définie par

$$|z - a| = r.$$

Autrement dit l'ensemble des points sur ce cercle est

$$C(a; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}.$$

Ensembles ouverts, fermés et compacts

(1) **Voisinage.** L'ensemble $V(a; \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \epsilon\}$ est appelé un ϵ-voisinage du point $a \in \mathbb{C}$, et $\widehat{V}(a; \epsilon) = V(a; \epsilon) \setminus \{a\}$ est appelée voisinage "privé de a".

(2) **Points intérieurs, extérieurs et frontières.** Soit $S \subset \mathbb{C}$.

- On dit que a est un point intérieur de S s'il existe un voisinage $V(a; \epsilon) \subset S$.
- On dit que b est un point extérieur de S si b est un point intérieur de $\mathbb{C} \setminus S$.
- On dit que $c \in \partial S$ est un point frontière de S si tout voisinage de c rencontre S et $\mathbb{C} \setminus S$.

(3) **Disque ouvert.** L'ensemble $D(a; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ est appelé disque ouvert (boule ouverte) de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$. Tout disque ouvert est un voisinage de tout ces points.

(4) **Disque unité.** $D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ est appelé disque unité de $\mathbb{C}$.

(5) **Ensemble ouvert.** Un ensemble $U \subset \mathbb{C}$ est dit ouvert dans $\mathbb{C}$ si pour tout $z \in U$ il existe $r > 0$ tel que $D(z;r) \subset U$.
Si $U \subset \mathbb{C}$ et $\partial U \cap U = \varnothing$ alors U est un ouvert de $\mathbb{C}$.
Tout disque ouvert $D(a;r)$ est un ouvert dans $\mathbb{C}$.
Les demi-plans $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > a\}$ et $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > b\}$ sont aussi des ouverts de $\mathbb{C}$.

(6) **Ensemble fermé.** Un ensemble $F \subset \mathbb{C}$ est dit **fermé** dans $\mathbb{C}$ si son complémentaire $\mathbb{C} \setminus F$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.
Si $F \subset \mathbb{C}$ et $\partial F \subset F = \varnothing$ alors F est un fermé de $\mathbb{C}$.
Un ensemble est fermé s'il contient tous ses points de frontière.
$\overline{D}(a;r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$ est un fermé de $\mathbb{C}$, appelé le disque fermé.
La couronne $A(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z - a| \leq R\}$ est un fermé dans $\mathbb{C}$.
On peut aussi lier la notion d'ensemble fermé à la convergence des suites : un ensemble $F \subset \mathbb{C}$ est fermé si et seulement si toute suite convergente (z_n) de F admet une limite dans F, $z_n \to z \in F$.

(7) **Adhérence ou Fermeture d'un ensemble.** Soit $S \subset \mathbb{C}$ alors l'ensemble $\overline{S} = S \cup \partial S$ est appelé l'adhérence ou la fermeture de S.
L'adhérence de disque ouvert $D(a;r)$ est le disque fermé $\overline{D}(a;r)$.

(8) **Ensemble borné.** Un ensemble $S \subset \mathbb{C}$ est dit borné s'il existe $M > 0$ tel que $|z| < M$ pour tout $z \in S$. On dit aussi que S est borné si $S \subset D(0;r)$ pour un certain $r > 0$.
L'ensemble $|z| < 4$ est borné, mais $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ ne l'est pas.

(9) **Ensemble compact.** Un ensemble $K \subset \mathbb{C}$ est dit compact dans $\mathbb{C}$ s'il est borné et fermé dans $\mathbb{C}$. L'ensemble $|z| \leq 4$ est compact, mais $|z| < 4$ ne l'est pas.

(10) **Ensemble connexe par arcs.** Un ensemble ouvert $S \subset \mathbb{C}$ est dit connexe par arcs si deux points quelconques peuvent être reliés par un chemin qui se trouve entièrement dans S.

(11) **Ensemble connexe.** Un ensemble ouvert $S \subset \mathbb{C}$ est dit connexe s'il ne peut être pas la réunion de deux ouverts disjoints non vides.
Toute partie de $\mathbb{C}$ connexe par arcs est connexe.
Le disque unité ouvert $|z| < 1$ et la couronne $1 < |z| < 2$ sont connexes car ils sont connexes par arcs.

(12) **Région simplement connexe.** Une région connexe par arcs $S \subset \mathbb{C}$ est dite simplement connexe si tout chemin fermé sur S peut être réduit continûment (c'est-à-dire par homotopie) à un point. Intuitivement, on peut rétrécir le chemin fermé jusqu'à ce qu'il ne forme plus qu'un point, il n'y a pas d'obstacle (c'est-à-dire de trou).

Le disque $|z| < 1$ est simplement connexe, mais la couronne $1 < |z| < 2$ ne l'est pas. Le plan privé d'un point $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ est connexe mais n'est pas simplement connexe. Autrement dit , une région simplement connexe n'a pas de «**trous**». Si la région possède des trous on l'appelle **multi-connexe**. La couronne est un exemple de région multi-connexe.

(13) **Domaine.** Un ensemble $D \in \mathbb{C}$ qui est non vide, ouvert et connexe est appelé un **domaine** ou bien une **région ouverte**. D est un domaine si et seulement s'il n'est pas la réunion de deux ouverts non vides et disjoints .

Le disque unité $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, le demi plan $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ et la couronne $1 < |z| < 2$ sont des domaines, mais $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| \neq 1\}$ n'est pas un domaine car il n'est pas connexe.

Exemple 10. Trouver la courbe ou la région dans le plan complexe représentée par chacune des équations ou inégalités suivantes. Déterminer si l'ensemble est ouvert, fermé, borné ou connexe.

(a) $|z| = 2$

(b) $\operatorname{Re}(1/z) = 2$

(c) $|z| + \operatorname{Re} z \leq 1$

(d) $0 < \operatorname{Arg} \dfrac{z-i}{z+i} < \dfrac{\pi}{2}$

(e) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \leq 1$

Solution.

(a) $|z| = 2 \Leftrightarrow |z|^2 = x^2 + y^2 = 4$ est le cercle centré à l'origine et de rayon 2. Cet ensemble est fermé, borné et connexe par arcs donc connexe.

(b) $2 = \operatorname{Re}(1/z) = \operatorname{Re}(\overline{z}/z\overline{z}) = x/z\overline{z} = (z+\overline{z})/(2z\overline{z}) \Leftrightarrow z\overline{z} = (z+\overline{z})/4 \Leftrightarrow$ $(z-1/4)(\overline{z}-1/4) = (1/4)^2 \Leftrightarrow |z-1/4| = 1/4$ qui est le cercle de centre 1/4 et de rayon 1/4. Cet ensemble est fermé, borné et connexe par arcs donc connexe.

(c) $|z| + \operatorname{Re} z \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 - x \Leftrightarrow y^2 \leq 1 - 2x \Leftrightarrow x \leq (1-y^2)/2$.

La région illustrée dans la figure 1.8–(1), est fermée, non bornée et connexe.

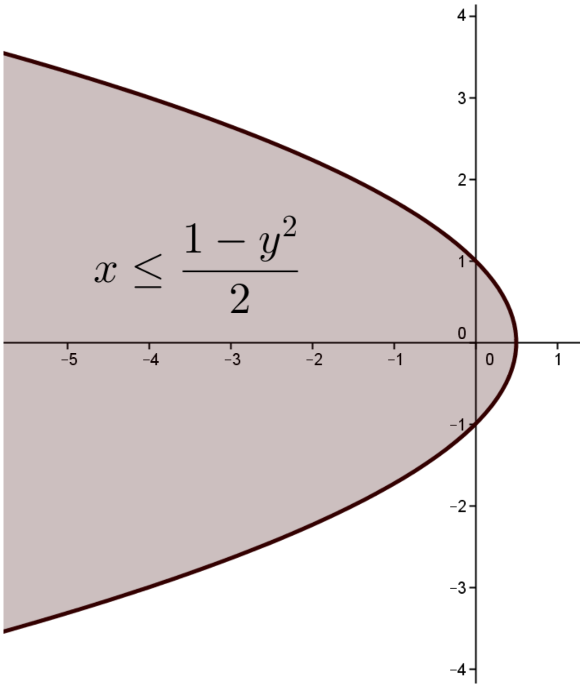


FIGURE 1.8 – Région de $|z| + \operatorname{Re} z \leq 1$.

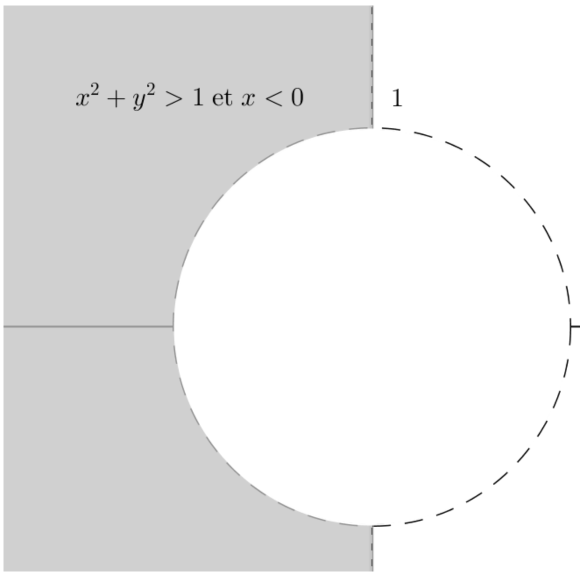


FIGURE 1.9 – Région de $0 < \operatorname{Arg} \dfrac{z-i}{z+i} < \dfrac{\pi}{2}$.

(d) $0 < \operatorname{Arg}\dfrac{z-i}{z+i} < \dfrac{\pi}{2}$

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{(x^2+y^2-1-2ix)}{x^2+(y+1)^2}$$

Notons que $\operatorname{Arg}\dfrac{z-i}{z+i} \in (0,\pi/2)$ si et seulement si $\operatorname{Re}\dfrac{z-i}{z+i}$ et $\operatorname{Im}\dfrac{z-i}{z+i}$ sont positifs.
Donc $x < 0$ et $x^2+y^2 > 1$. La région illustrée dans la figure 1.8–(2), est ouverte, non bornée et connexe.

(e) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \leq 1 \Leftrightarrow |z-1|^2 \leq |z+1|^2 \Leftrightarrow (z-1)(\overline{z}-1) \leq (z+1)(\overline{z}+1) \Leftrightarrow z+\overline{z} \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z \geq 0$. La région représentée par l'inégalité est le demi-plan droit et l'axe des y.

1.5 Exercices

1. Soient $z = 1 + 2i$ et $w = 3 - i$, représenter les nombres suivants sous la forme $a + ib$.

(a) $2z + 5w$

(b) $iz + 3w$

(c) $z^3 + \overline{(w^2)}$

(d) $\mathrm{Re}(z^2 + iz) + \mathrm{Im}(w^2 + w)$

(e) $z^2 + \overline{z} + i$

(f) $z/w + w/z$

2. Trouver les parties réelles et imaginaires de chacun des nombres complexes suivants :

(a) $(z - 2)/(z + 2)$

(b) $(2 + 5i)/(4 + 2i)$

(c) $(\sqrt{3} + i)^6$

(d) $(1 + i\sqrt{3})^6$

(e) $(1 + i)^n, n \in \mathbb{N}$

(f) $i^n, n \in \mathbb{N}$

3. Trouver le module et le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

(a) $-3 + 2i$

(b) $(2 + i)(-4 + 3i)$

(c) $(1 + i)^8$

(d) $(2 + 7i)/(1 - i)$

4. Écrire sous forme polaire chacun des nombres complexes suivants :

(a) $3i$

(b) $2 - 2i$

(c) $-1 + i\sqrt{3}$

(d) $(3 + i)^2$

(e) $\sqrt{5} - i$

(f) $(1 - i)^4/5$

5. Écrire sous forme cartésienne chacun des nombres complexes suivants :

(a) $\sqrt{2}e^{i21\pi/4}$ (b) $11e^{i15\pi/2}$ (c) $-e^{-i200\pi}$ (d) $-3e^{i5\pi}2$

6. Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants :

(a) $u = (\sqrt{6} - i\sqrt{2})/2$

(b) $v = 1 - i$

(c) $u^6 \cdot v^8$

(d) u^3/v^4

7. Écrire sous forme cartésienne et polaire chacun des nombres complexes suivants :

(a) 3^i

(b) $ie^{\ln 3}$

(c) $e^{1+i\pi/2}$

(d) $\ln(3) + i$

8. Trouver les solutions des équations suivantes :

(a) $2z^2+2z+5=0$

(b) $5z^2+4z+1=0$

(c) $z^2-z+1=0$

(d) $z^2-2z+5=0$

(e) $z^4-z^2-2=0$

(f) $z^6-z^3-2=0$

9. Trouver toutes les solutions des équations suivantes et puis préciser leurs répartitions dans le plan complexe.

(a) $z^4=1$

(b) $z^5=1$

(c) $z^6=1$

(d) $z^5=-32$

(e) $z^7=-1$

(f) $z^6=-64$

10. Étant donné $(2+i)(3+i)$, montrer que $\dfrac{\pi}{4}=\tan^{-1}\dfrac{1}{2}+\tan^{-1}\dfrac{1}{3}$.

11. Monter que z est réel si et seulement si $z=\overline{z}$.

12. Montrer que $|z|=1$ si et seulement si $1/z=\overline{z}$.

13. Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|z|=|\overline{z}|$, $|\operatorname{Re}(z)|\leq|z|$ et $|\operatorname{Im}(z)|\leq|z|$.

14. Si $z,a\in\mathbb{C}$ et $|a|<1,|z|\leq 1$, montrer que $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|\leq 1$.

15. Utiliser la formule de De Moivre pour montrer :

(a) $\cos(3x)=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x$

(b) $\sin(3x)=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x$

(c) $\cos^3 x=(3/4)\cos x+(1/4)\cos 3x$

(d) $\sin^3 x=(3/4)\sin x-(1/4)\sin 3x$

16. Si $z,w\in\mathbb{C}$, montrer que :

(a) $|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$

(b) $|z+w|^2=|z|^2+|w|^2+2\operatorname{Re}(z\overline{w})$

(c) $|z+w|\leq|z|+|w|$

(d) $||z|-|w||\leq|z-w|$

17. Démontrer les formules suivantes :

(a) $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

(b) $\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$

(c) $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$ $(z_2\neq 0)$

18. Soit z un nombre complexe de module ρ, d'argument θ et soit $\overline{z}$ son conjugué. Calculer $(z+\overline{z})\left(z^2+\overline{z}^2\right)\ldots..(z^n+\overline{z}^n)$ en fonction de ρ et θ.

19. Déterminer l'ensemble des points du plan complexe défini par :

(a) $|1+z|=2|1-z|$

(b) $\operatorname{Im} z^2<2$

(c) $|z|+\operatorname{Re} z<1$

(d) $\operatorname{Re}(1/z)=\dfrac{1}{4}$

(e) $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right|<2$

(f) $-\dfrac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z+1-i) \leq \dfrac{3\pi}{4}$

20. Illustrer géométriquement les ensembles suivants dans le plan complexe et identifier parmi eux les ensembles ouverts, fermés, bornés et connexes.

Soit $a = 1 - i$.

(a) $|z-a| = 3$

(b) $|z-a| < 3$

(c) $|z-a| \geq 3$

(d) $2 < |z-a| < 3$

(e) $\operatorname{Re}(z-a) = 3$

(f) $|\operatorname{Im}(z-a)| < 3$

(g) $|z-a| = |z-\overline{a}|$

(h) $|z-i| + |z+i| = 3$

(i) $|z-a| + |z-\overline{a}| < 3$

2 Fonctions analytiques

Dans ce chapitre, nous allons introduire la notion d'une fonction d'une variable complexe, à valeur complexe $w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Comme pour les fonctions réelles d'une variable réelle, nous pouvons développer les notions de dérivées et intégrales de fonctions complexes en se basant sur le concept fondamental de la limite. Dans ce chapitre, notre objectif principal sera d'établir la relation entre les notions **de différentiabilité**, **d'holomorphie** et **d'analyticité** d'une fonction complexe. La différence fondamentale entre l'analyse réelle et l'analyse complexe est que la géométrie du plan complexe $\mathbb{C}$ est beaucoup plus riche que celle de la droite réelle $\mathbb{R}$. Par exemple, les seules parties connexes de $\mathbb{R}$ sont des intervalles, alors qu'il y a des sous-ensembles connexes beaucoup plus compliqués dans $\mathbb{C}$ tel que la couronne. Dans $\mathbb{R}$, quand on dit que x tend vers x_0, cela signifie que x tends ver x_0^+ (à droite) ou bien x tends ver x_0^- (à gauche). Cependant dans $\mathbb{C}$, quand on dit que z tend vers z_0, cela a lieu sur une infinité de directions dans $\mathbb{R}^2$.

2.1 Fonction d'une variable complexe à valeur complexe

Soit $S \subset \mathbb{C}$. Une **fonction à valeur complexe** $f : S \to \mathbb{C}$ est une règle qui associe à chaque nombre complexe $z \in S$ un nombre complexe w. Ce nombre w est appelé la valeur de f au point z, dénotée par $f(z)$.

$$w = f(z) \tag{1}$$

La partie S est appelée l'ensemble de définition de f.

Exemple 1. Voici des exemples de fonctions complexes et leurs domaines.

(1) $f_1(z) = z^2, D_{f_1} = \mathbb{C}$

(2) $f_2(z) = \operatorname{Im} z, D_{f_2} = \mathbb{C}$

(3) $f_3(z) = \operatorname{Arg} z, D_{f_3} = \mathbb{C}$

(4) $f_4(z) = \sinh z, D_{f_4} = \mathbb{C}$

(5) $f_5(z) = |z|^2, D_{f_5} = \mathbb{C}$

(6) $f_6(z) = \dfrac{z+1}{z^2+1}, D_{f_6} = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$

Partie réelle et partie imaginaire d'une fonction complexe

Si $w = u + iv$ est la valeur de f au point $z = x + iy$, alors on peut écrire

$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y). \tag{2}$$

Chacun des nombres réels u et v dépend de deux variables réelles x et y. Si $v(x, y) = 0$ pour tout x, y, alors la fonction $f(z)$ est réelle, comme par exemple $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$.

Si $z = re^{i\theta}$, alors on peut écrire

$$w = f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta). \tag{3}$$

Exemple 2. Si $f(z) = z^2$, alors

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy).$$

Donc

$$u(x, y) = x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(f) \quad \text{et} \quad v(x, y) = 2xy = \mathrm{Im}(f).$$

Si on utilise la forme polaire de z, on obtient

$$f(re^{i\theta}) = (re^{i\theta})^2 = r^2e^{i2\theta} = r^2\cos(2\theta) + ir^2\sin(2\theta).$$

Donc

$$u(r, \theta) = r^2\cos(2\theta) = \mathrm{Re}(f) \quad \text{et} \quad v(r, \theta) = r^2\sin(2\theta) = \mathrm{Im}(f).$$

La fonction $f(z) = z^2$ prend une seule valeur pour chaque z. On appelle une telle fonction **univaluée** (**univoque**). Cependant, comme on a vu dans chapitre 1, la fonction $f(z) = z^{1/2}$ a deux images à chaque valeur de z autre que $z = 0$. La fonction $f(z) = z^{1/n}$ a n images à chaque valeur de z autre que $z = 0$. La fonction $f(z) = \arg z$ possède une infinité dénombrable d'images à chaque valeur de z. On appelle ce type de fonctions, fonctions **multivaluées** (**multivoques**).

Dans la théorie des variables complexes, nous pouvons traiter une fonction multivaluée comme une collection de fonctions univaluées. Chacune de ces fonctions univaluée est appelée **branche**. Dans les exemples ci-dessus, $f(z) = z^{1/2}$ a deux branches, $f(z) = z^{1/n}$ possède n branches, et $f(z) = \arg z$ possède une infinité dénombrable de branches. Habituellement, nous choisissons une des branches comme la branche principale de la fonction multivoques. Par exemple, $\mathrm{Arg}\, z$ est choisie comme la branche principale de $f(z) = \arg z$.

2.2 Limite et continuité

Le concept le plus important dans l'analyse élémentaire est celui de la limite. Rappelons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ signifie intuitivement que les valeurs $f(x)$ de la fonction f peuvent être faites arbitrairement proches du nombre réel L si les valeurs de x sont choisis suffisamment proches de x_0, mais différents de ce dernier. En analyse réelle, les concepts de continuité, dérivabilité et intégrabilité sont définis en utilisant le concept de la limite. La limite dans le plan complexe joue un rôle tout aussi important dans l'analyse complexe. Le concept de limite d'une fonction complexe est similaire à celui d'une fonction réelle dans le sens que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ signifie que la valeur $f(z)$ de la fonction complexe f peut être rendue arbitrairement proche du nombre complexe L si les valeurs de z sont choisis suffisamment proche de z_0, mais différents de ce dernier. Bien que similaire, il y a une importante différence entre ces deux concepts de limite. Dans $\mathbb{R}$, il y a seulement deux directions d'approches vers x_0, limite à gauche et limite à droite. Cependant dans le cas complexe, il y a une infinité de directions où z peut approcher z_0. Pour qu'une limite complexe existe, elle doit être la même pour n'importe qu'elle direction d'approche. Dans cette section, nous allons définir la limite d'une fonction complexe, examiner certaines de ses propriétés et introduire la notion de continuité pour les fonctions d'une variable complexe.

Limites

Définition 2.1. Soit D un domaine, $z_0 \in D$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $z \in D$ et $0 < |z - z_0| < \delta$ alors $|f(z) - l| < \varepsilon$.

Remarque.

(1) f a une limite si elle tend vers la même limite suivant toutes les directions du plan.

(2) Pour prouver que f n'admet pas de limite en un point, il suffit de trouver deux directions d'approches de ce point donnant deux limites différentes.

(3) Lorsque $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ on pose $l = l_1 + il_2$, où l_1 et l_2 sont deux réels, alors

$$|f(z) - l| = |u(x, y) - l_1 + i\,(v(x, y) - l_2)| \leq |u(x, y) - l_1| + |v(x, y) - l_2|$$

D'autre part, on a :

$$|u(x,y)-l_1| \leq \sqrt{(u(x,y)-l_1)^2+(v(x,y)-l_2)^2} = |f(z)-l|$$
$$|v(x,y)-l_2| \leq \sqrt{(u(x,y)-l_1)^2+(v(x,y)-l_2)^2} = |f(z)-l|$$

Ce qui montre que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = l$ si et seulement si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = l_1$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = l_2$.

Exemple 3. $f(z) = az+b$ avec $a,b \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = az_0+b$.
en effet, $|f(z)-(az_0+b)| = |a(z-z_0)| < \varepsilon \Rightarrow |z-z_0| < \dfrac{\varepsilon}{|a|} = \delta$.

Exemple 4. Si $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ avec $f(z) = \dfrac{z}{\bar{z}}$, alors $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ n'existe pas.
Soit $z = x+iy$, lorsque $y=0$ et $x\to 0$, on a

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{x+i0}{x-i0} = 1.$$

lorsque $x=0$ et $y\to 0$, on a

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{y\to 0} \frac{0+iy}{0-iy} = -1.$$

On a trouvé deux directions d'approche du point $z_0 = 0$, telles que la fonction ne tend pas vers la même limite, ce qui prouve que f n'admet pas de limite en $z_0 = 0$.

Définition 2.2.
• On dit que f admet une limite l lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$ si et seulement si

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0 : \text{ il existe } A > 0 \text{ tel que } |z| > A \Rightarrow |f(z)-l| < \varepsilon.$$

• On dit que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = +\infty$ si et seulement si :

$$\text{pour tout } A > 0 : \text{ il existe } \delta > 0 \text{ tel que } |z-z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > A.$$

• On dit que $\lim\limits_{z\to +\infty} f(z) = +\infty$ si et seulement si :

$$\text{pour tout } A > 0 : \text{ il existe } B > 0 \text{ tel que } |z| > B \Rightarrow |f(z)| > A.$$

Continuité

Définition 2.3. Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine, $z_0 \in D$ et $f : D \to \mathbb{C}$. On dit que la fonction f est continue au point z_0 de D si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

On dit que f est continue sur D si f est continue en tout z_0 de D.

Remarque. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ veut dire que :

1. f admet une limite finie en z_0,

2. f est définie en z_0,

3. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Les propriétés de continuité d'une fonction complexe sont similaires à celles d'une fonction d'une variable réelle.

Proposition 2.4. (1) *Si f et g sont deux fonctions continues en z_0, alors les fonctions :*
(a) $f + g$, *(b) fg,* *(c) $f \circ g$* *(d) $\dfrac{f}{g}$ si $g(z_0) \neq 0$*
sont continues en z_0.

(2) *$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est continue en $z_0 = (x_0, y_0)$ si et seulement si les fonctions réelles $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont continues en (x_0, y_0).*

Exemple 5.

(1) La fonction $f(z) = \overline{z} = x - iy$ est continue sur $\mathbb{C}$ car les fonction $u(x, y) = x$ et $v(x, y) = -y$ sont continues en tout point $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{C}$.

(2) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ si $z \neq i$ et $f(z) = 0$ si $z = i$.
Cette fonction est discontinue en $z_0 = i$ car $\lim\limits_{z \to i} f(z) = -1 \neq f(i) = 0$.

(3) La fonction $f(z) = \dfrac{z}{1 + z^2}$ est continue en tout point z_0 de $\mathbb{C}$ sauf en $z_0 = \pm i$.

(4) La fonction $f(z) = \mathrm{Arg}(z)$ est continue dans $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Théorème 2.5.

(1) *Les fonctions polynômiales sont continues sur tout le plan complexe $\mathbb{C}$.*

(2) *Les fonctions rationnelles sont continues sur leurs domaines de définition.*

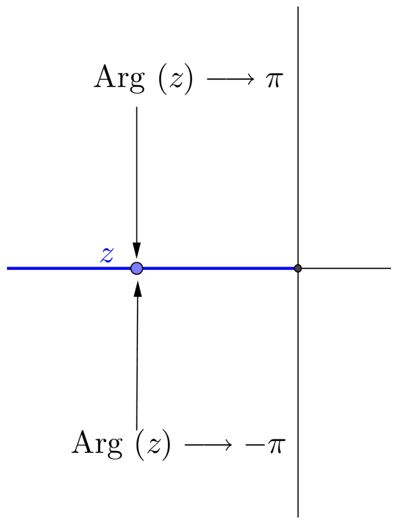


FIGURE 2.1 – $f(z) = \operatorname{Arg} z$ est discontinue sur l'axe réel négatif et $z = 0$.

2.3 Différentiabilité, analyticité et holomorphie

L'analyse complexe traite des concepts familiers comme les dérivées et les intégrales de fonctions complexes. Dans cette section, nous allons donner la définition de la dérivée d'une fonction complexe $f(z)$. Bien que de nombreux concepts semblent familiers, tels que les formules du produit et quotient, il y a des différences importantes entre les concepts d'analyse complexe et ceux d'analyse réelle. Nous verrons que, hormis la similitude dans la définition, il y a une différence de fond entre la dérivée réelle $f'(x)$ et la dérivée complexe $f'(z)$ ou plus précisément entre $\mathbb{R}$–différentiabilité et $\mathbb{C}$–différentiabilité.

Fonctions $\mathbb{C}$-différentiables

Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction complexe. On dit que la fonction f est $\mathbb{C}$–**différentiable** en $z_0 \in D$ si

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

pourvu que la limite existe. Notons que la limite doit exister dans toute direction du plan complexe $\mathbb{C}$. On dit alors que $f'(z_0)$ est la dérivée de f en z_0.
Si on pose $\Delta z = z - z_0$ avec $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, alors f est $\mathbb{C}$–différentiable en z_0 est équivalent à

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

existe.

Exemple 6.

(1) La fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^2$ est partout différentiable.
En effet, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ on a

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0 = f'(z_0).$$

(2) On peut utiliser un argument d'induction pour montrer que $(z^n)' = nz^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Plus tard on montrera que sous certaines conditions, $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$.

(3) La fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \overline{z}$ est partout continue et nulle part différentiable.
Puisque, pour $z_0 \in \mathbb{C}$ on a $\lim\limits_{z \to z_0} \overline{z} = \overline{z_0}$ alors f est partout continue. Cependant on a

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad \Delta y = 0 \\ -1 & \text{si} \quad \Delta x = 0 \end{cases},$$

qui montre que la limite n'existe pas pour tout point $z_0 \in \mathbb{C}$ et donc f est nulle part différentiable.

(4) La fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = x + 3iy$ est nulle part différentiable.
En effet on a

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 3i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \Delta y = 0 \\ 3 & \text{si} \quad \Delta x = 0 \end{cases},$$

la limite n'existe pas pour tout point $z_0 \in \mathbb{C}$ et donc f est nulle part différentiable.

Proposition 2.6. *Toute fonction f différentiable en un point z_0 est continue au point z_0.*

Démonstration. Supposons que f est différentiable au point z_0. Alors,

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z0} (f(z) - f(z_0)) &= \lim_{z \to z0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0) \\
&= \lim_{z \to z0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \to z0} (z - z_0) \\
&= \lim_{z \to z0} f'(z_0) \cdot \lim_{z \to z0} (z - z_0) = 0
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{z \to z0} f(z) = f(z_0)$ montre que f est continue au point z_0.

$$\boxed{\text{Différentiabilité} \Longrightarrow \text{Continuité}}$$

□

Proposition 2.7. *Soient $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables sur l'ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$, une constante. Alors on a*

(1) $(c)' = 0$

(2) $(cf)' = cf'$

(3) $(f \pm g)' = f' \pm g'$

(4) $(fg)' = f'g + fg'$

(5) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ quand $g(z) \neq 0$

(6) $(f \circ g)' = [f(g)]' = f'(g)g'$.

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du cas réel. Nous donnons seulement la démonstration de la dernière propriété. Soient $h = f \circ g$ et $\alpha_0 = f(z_0)$. Alors pour z (resp. α) assez proche de z_0 (resp. α_0) , on peut écrire

$$f(\alpha) - f(\alpha_0) = (f'(\alpha_0) + \varepsilon_1(\alpha))(\alpha - \alpha_0)$$
$$g(z) - g(z_0) = (g'(z_0) + \varepsilon_2(z))(z - z_0)$$

où $\lim_{\alpha \to \alpha_0} \varepsilon_1(\alpha) = 0$ et $\lim_{z \to z_0} \varepsilon_2(z) = 0$. Posons $\alpha = g(z)$, alors on obtient

$$\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = (f'(g(z_0)) + \varepsilon_1(g(z)))(g(z) - g(z_0)).$$

Puisque g est dérivable en z_0, elle est continue en z_0, ce qui donne

$$h'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0).$$

□

Exemple 7. Trouver les dérivées des fonctions suivantes :
(a) $f(z) = 4z^3 - 3z^2 + \pi z + 11$ (b) $f(z) = \dfrac{z^2}{3z+1}$ (c) $f(z) = (iz^3 + 3z)^5$

Réponse.
(a) $f'(z) = 12z^2 - 6z + \pi$ (b) $f'(z) = \dfrac{3z^2 + 2z}{(3z+1)^2}$ (c) $f'(z) = 5(iz^3 + 3z)^4(3iz^2 + 3)$

Fonctions analytiques ou holomorphes

Définition 2.8. Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine (ouvert et connexe), $z_0 \in D$ et $f : D \to \mathbb{C}$ définie par $w = f(z)$ une fonction complexe. On dit alors que f :

(1) est **différentiable** au point z_0 si la limite $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe.

(2) est **holomorphe ou analytique** au point z_0 si elle est différentiable aussi bien au point z_0 lui-même que dans un certain voisinage de ce point.

(3) est **analytique dans un domaine** D si elle est analytique en tout point de D.

(4) est **entière** si elle est analytique en tout point $z \in \mathbb{C}$.

(5) possède une **singularité** ou bien un **point singulier** en z_0 si f n'est pas analytique au point z_0.

(6) possède une **singularité isolée** en z_0 si f n'est pas analytique au point z_0 et il existe un $r > 0$ tel que f soit analytique dans le disque épointé $D(z_0, r) \setminus \{0\}$.

D'après la définition précédente on a en tout point $z_0 \in \mathbb{C}$ les implications suivantes :

$$\boxed{\text{Analyticité} \Longrightarrow \text{Différentiabilité} \Longrightarrow \text{Continuité} \Longrightarrow \text{Limite}}$$

Remarque.

1. L'holomorphie et l'analyticité sont des concepts équivalents. Beaucoup de mathématiciens les utilisent comme synonymes.

2. Il est clair que sur un domaine D : différentiabilité $\Longleftrightarrow$ analyticité.

3. La région d'analyticité ne contient que des points intérieurs, donc les fonctions analytiques sont définies seulement dans des domaines (ouverts et connexes).

4. Nous verrons dans l'exercice (10) que la fonction $f(z) = |z|^2$ est différentiable seulement au point $z_0 = 0$. Mais cette fonction n'est pas analytique au point $z_0 = 0$ car il n'existe pas de voisinage de $z_0 = 0$ ou la fonction est différentiable. On a donc : analyticité $\Longrightarrow$ différentiabilité mais la réciproque est fausse.

5. La fonction $g(z) = z^2$ est partout différentiable. Elle est donc partout analytique et par conséquent est entière.

6. La fonction $g(z) = \overline{z}$ est partout non-différentiable. Elle est donc partout non-analytique.

7. Puisque la dérivée d'un polynôme existe pour tout $z \in \mathbb{C}$, tout polynôme est une fonction entière.

8. La fonction $f(z) = \dfrac{1}{z}$ est analytique partout sauf au point $z = 0$, donc $z = 0$ est une singularité isolée de f.

Théorème 2.9.

(1) *Une fonction polynômiale* $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ *où* $n \in \mathbb{N}$*, est une fonction entière.*

(2) *Si* $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ *où* p *et* q *sont des polynômes, alors* f *est analytique dans tout domaine* D *ne contenant aucun zéro du polynôme* q*. Les zéros de* q *sont tous des singularités isolées de* f*.*

2.4 Conditions de Cauchy-Riemann et Fonctions Harmoniques

Conditions de Cauchy-Riemann

Dans la section précédente, nous avons vu qu'une fonction f d'une variable complexe z est analytique en un point z lorsque f est différentiable en tout point d'un voisinage de z. Cette exigence est plus stricte que la différentiabilité en un point car une fonction complexe peut être différentiable en un point z mais non analytique nulle part ailleurs. Une fonction f est analytique dans un domaine D si f est différentiable en tout point de D. Nous allons maintenant développer un moyen pour tester l'analyticité d'une fonction complexe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, basé sur les dérivées partielles de ses parties réelles et imaginaires u et v.

Une condition nécessaire d'analyticité.

Dans le théorème suivant, on va donner une condition nécessaire de dérivabilité d'une fonction $f(z)$ en un point z_0.

Théorème 2.10 (Théorème de Cauchy-Riemann).
Supposons que la fonction complexe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *est* $\mathbb{C}$*-différentiable au*

*point $z_0 = x_0 + iy_0$, alors les conditions de **Cauchy-Riemann** sont satisfaites en (x_0, y_0)*

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \tag{CCR}$$

et la valeur de la dérivée en $z_0 = x_0 + iy_0$ est donnée par

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0).$$

Démonstration. Par hypothèse f est dérivable en z_0, donc $f'(z_0)$ existe. Pour démontrer les conditions de Cauchy-Riemann, on va procéder comme suit :

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} + i\,\frac{v(x,y) - v(x_0,y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} \end{aligned}$$

Fixons $y = y_0$. Alors,

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0)}{(x - x_0)} + i\frac{v(x,y) - v(x_0,y_0)}{(x - x_0)} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Fixons $x = x_0$. Alors,

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0)}{i(y - y_0)} + i\frac{v(x,y) - v(x_0,y_0)}{i(y - y_0)} \\ &= -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Puisque la limite de $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ est unique suivant toutes les directions, on obtient les conditions de Cauchy-Riemann en égalant les deux résultats. □

Critère de non-analyticité

Si les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas satisfaites en tout point d'un certain domaine D, alors la fonction $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ n'est pas analytique dans D.

Exemple 8. Montrer que $f(z) = \overline{z} = x - iy$ est nulle part analytique .

Solution. $f(z) = \overline{z} = x - iy$, on a $u_x = 1 \neq -1 = v_y$. Donc la fonction f n'est pas $\mathbb{C}$–différentiable pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exemple 9. Montrer que conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites pour $f(z) = z^2 + z$ en tout point du plan complexe $\mathbb{C}$.

Solution. $f(z) = z^2 + z = (x^2 - y^2 + x) + i(2xy + y)$. Donc $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ et $v(x, y) = 2xy + y$. Les équations de Cauchy-Riemann

$$u_x = 2x + 1 = v_y \quad \text{et} \quad u_y = -2y = -v_x$$

sont satisfaites pour point du plan complexe $\mathbb{C}$.

Exemple 10. Montrer que la fonction $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ n'est différentiable qu'au point $z = 0$.

Solution. Les conditions de Cauchy-Riemann sont

$$\begin{aligned} u_x &= 2x \quad \text{et} \quad v_y = 0 \\ u_y &= 2y \quad \text{et} \quad v_x = 0 \end{aligned}$$

Notons les conditions de Cauchy-Riemann ne sont satisfaites que quand $x = y = 0$. Donc f n'est différentiable qu'au point $z = 0$..

Exemple 11. Montrer que la fonction $f(z) = 2x^2 + y + i(y^2 - x)$ est différentiable sur la ligne $y = 2x$ mais elle est nulle part analytique.

Solution. Les conditions de Cauchy-Riemann sont

$$\begin{aligned} u_x &= 4x \quad \text{et} \quad v_y = 2y \\ u_y &= 1 \quad \text{et} \quad v_x = -1 \end{aligned}$$

Notons que $u_y = -v_x$ mais $u_x = v_y$ est satisfaite seulement si $y = 2x$. Cependant, pour tout point z sur la ligne $y = 2x$ il n'existe aucun voisinage de z où les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites. On conclut donc que f est nulle part analytique.

Attention. La réciproque du théorème précédent est fausse.
Considérons la fonction

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 = u(x, y).$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites en $z = 0$ car

$$u_x(0,0) = v_y(0,0) = 0, \quad u_y(0,0) = -v_x(0,0) = 0$$

mais f est nulle part analytique.

Une condition suffisante d'analyticité

Seules, les équations de Cauchy-Riemann ne garantissent pas l'analyticité d'une fonction $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ en un point $z = x + iy$. Il est possible que les équations de Cauchy-Riemann soient satisfaites en un point z et pourtant $f(z)$ peut être non différentiable en z, où $f(z)$ peut être différentiable en z, mais nulle part ailleurs. Dans les deux cas, f n'est pas analytique en z. Cependant, lorsque on ajoute la condition de continuité de u et v et celles des quatre dérivées partielles u_x, u_y, v_x et v_y, on peut montrer que les équations de Cauchy-Riemann ne sont pas seulement nécessaires mais elles sont aussi suffisantes pour garantir l'analyticité de $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ au point z. La démonstration étant longue et compliquée, nous indiquons ci-dessous le résultat seulement.

Théorème 2.11 (Réciproque du théorème de Cauchy-Riemann).
Soit D un domaine, $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$. Supposons que :

- *les conditions de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$ sont satisfaites dans D,*
- *les dérivées partielles u_x, u_y, v_x et v_y continues dans D,*

alors la fonction complexe $f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ est analytique dans D et sa dérivée est donnée par $f'(x + iy) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$.

Exemple 12. Montrer que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^2$ est entière et que $f'(z) = 2z$.

Solution. $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ donc $u(x,y) = x^2 - y^2$ et $v(x,y) = 2xy$ sont continument différentiables et de plus

$$u_x = 2x = v_y \quad \text{et} \quad u_y = -2y = -v_x$$

qui monte que les conditions de Cauchy Riemann sont satisfaites pour $z = x+iy \in \mathbb{C}$. D'après le théorème précèdent $f(z) = z^2$ est entière. En outre on a

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + i2y = 2z.$$

Exemple 13. Montrer que $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$ est analytique dans $\mathbb{C} - \{0\}$.

Solution. Les fonctions $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ et $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ sont partout continues sauf pour $x = y = 0$, c'est à dire, sauf pour $z = 0$. En outre, on a

$$u_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = v_y \quad \text{et} \quad u_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -v_x,$$

qui montrent que u_x, u_y, v_x et v_y sont partout continues sauf pour $z = 0$ et que les conditions de Cauchy–Riemann sont vérifiées. Alors, d'après le théorème précédent, la fonction f est analytique en tout point du domaine D qui ne contient pas $z = 0$.

Conditions suffisantes de différentiabilité

Rappelons que l'analyticité implique la différentiabilité mais la réciproque est fausse. Le théorème (2.11) possède un analogue qui donne un critère de différentiabilité. Soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ définie en $z_0 \in D$ et supposons que :

- les conditions de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$ sont satisfaites en z_0,
- les dérivées partielles u_x, u_y, v_x et v_y continues en z_0,

alors la fonction complexe $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ est différentiable en z_0 et sa dérivée est donnée par $f'(x_0 + iy_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$.

Fonction différentiable sur une courbe mais nulle part analytique

D'après l'exemple 11 la fonction $f(z) = 2x^2 + y + i(y^2 - x)$ est nulle part analytique, cependant les conditions de Cauchy-Riemann étaient satisfaites sur la ligne $y = 2x$. Puisque les fonction $u = 2x^2 + y, v = y^2 - x, u_x = 4x, v_x - 1, u_y = 2y, v_y = 1$ sont continues pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors f est dérivable sur la ligne $y = 2x$. De plus $f'(z) = u_x + iv_x = 4x - i = 2y - i$.
La proposition suivante est conséquence directe des conditions de Cauchy-Riemann.

Proposition 2.12. *Soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction analytique (holomorphe) sur un domaine (ouvert plus connexe) D de $\mathbb{C}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *f est constante,*

(2) *$u(x,y)$ est constante,*

(3) $v(x,y)$ *est constante,*

(4) $|f|$ *est constante,*

(5) $f' = 0$.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) : il est clair que si f est une fonction constante, alors les parties réelle et imaginaire sont constantes.
(2) $\Rightarrow$ (3) : si $u(x,y) =$ constante, alors $u_x = v_y = 0$ ce qui implique que $v_x = v_y = 0$, et par conséquent $v(x,y) =$ constante.
(3) $\Rightarrow$ (4) : la preuve est similaire à celle de (2) $\Rightarrow$ (3).
(4) $\Rightarrow$ (1) : on a $|f|^2 = u^2 + v^2 =$ constante. En dérivant par rapport à x puis à y, et en utilisant les conditions de Cauchy Riemann, on trouve

$$\begin{aligned} uu_x - vu_y &= 0 \\ vu_x + uu_y &= 0 \end{aligned}$$

La résolution de ce système donne

$$|f|^2 u_x = 0 \quad \text{et} \quad |f|^2 u_y = 0$$

Comme $|f| \neq 0$, il en résulte $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$, ce qui prouve que $u(x,y) = v(x,y) =$ constante. D'où f est constante. $\square$

Opérateur d-bar

Les équations de Cauchy Riemann peuvent être écrites comme une seule équation en introduisant l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ appelé le ■d-bar■ opérateur.
Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et U un ouvert dans $\mathbb{R}^2$. On défini les opérateurs différentiels suivant :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right).$$

En outre si u, v sont des fonctions dérivables dans U, on défini

$$\frac{\partial}{\partial z}(u+iv) := \frac{\partial u}{\partial z} + i\frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(u+iv) := \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \overline{z}}.$$

Avec cette notation, si $f = u + iv$ est holomorphe dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ et en utilisant les équations de Cauchy Riemann on a

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(u+iv) = \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \overline{z}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&= 0 + i0 = 0,
\end{aligned}
$$

nous avons aussi,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(u+iv) = \frac{\partial u}{\partial z} + i\frac{\partial v}{\partial z} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\right) + i\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = f'.
\end{aligned}
$$

On peut donc résumer le résultat ci-dessus par le théorème suivant.

Théorème 2.13. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, Si $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe alors,*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z).$$

Remarque. Nous devons penser aux fonctions holomorphes comme fonctions indépendantes de $\overline{z}$.

Exemple 14. Utiliser théorème 2.13 pour vérifier que la fonction $f(z) = z^2$ est entière et que $f'(z) = 2z$.

Réponse. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

Donc f est entière et $f'(z) = 2z$.

Exemple 15. La fonction $f(z) = \overline{z}$ est nulle part analytique car pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 1 \neq 0$.

Exemple 16. La fonction $g(z) = |z|^2 = z\overline{z}$ est non-analytique dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ car pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}} = z \neq 0$ si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Cependant la fonction $g(z) = |z|^2 = z\overline{z}$ est différentiable seulement quand $z = 0$.

Exemple 17. Étudier la dérivabilité de la fonction : $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, où $f(z) = \dfrac{1}{z} + z \operatorname{Re} z$.
En utilisant théorème (2.13),
On a : $f(z) = \dfrac{1}{z} + z \operatorname{Re} z = \dfrac{1}{z} + z\left(\dfrac{z+\overline{z}}{2}\right)$ et donc $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{z}{2} \neq 0$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.
Ce qui montre que f n'est pas dérivable sur $\mathbb{C}^*$.

Remarque. Si f ne contient pas le terme $\overline{z}$, alors $f'(z)$ ne contient pas $\overline{z}$, on a donc $f'(z)$ est aussi dérivable. Par récurrence, on a le résultat important suivant qu'on montrera dans le chapitre 5.

Théorème 2.14. *Si $D \subset \mathbb{C}$ est un domaine et f est dérivable dans D, alors f est infiniment dérivable dans D. En d'autres termes si f est analytique dans D, alors*

$$f', f'', \ldots, f^{(n)}, \ldots$$

sont toutes analytiques dans D pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. Il n'y a pas de résultat analogue pour les fonctions réelles.

Conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires

Proposition 2.15. *Soit $f(r,\theta) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ une fonction analytique en $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$. Alors les équations de Cauchy Riemann en coordonnées polaires s'écrivent sous la forme :*

$$ru_r = v_\theta \quad \text{et} \quad rv_r = -u_\theta \tag{4}$$

Démonstration. Posons $z = re^{i\theta}$ où $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, on a donc $\theta = \arg z$ et $|z| = r$.
D'autre part, il est clair que pour $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta},$$

ou bien

$$u_r = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta \quad \text{et} \quad u_\theta = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta. \tag{5}$$

De même on obtient

$$v_r = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta \quad \text{et} \quad v_\theta = -v_x r \sin\theta + v_y r \cos\theta. \tag{6}$$

Puisque f est analytique en z_0 alors les conditions de Cauchy-Riemann $u_x = v_y,\ u_y = -v_x$ sont satisfaites et (6) devient

$$v_r = -u_y \cos\theta + u_x \sin\theta \quad \text{et} \quad v_\theta = u_y r \sin\theta + u_x r \cos\theta. \tag{7}$$

Il maintenant évident des équations (5) et (7) que $ru_r = v_\theta \quad \text{et} \quad rv_r = -u_\theta.$ $\square$

Corollaire 2.16. *Si $f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$, la forme polaire de $f'(z)$ devient*

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}(v_\theta - iv_\theta) \tag{8}$$

Exemple 18. Considérons la fonction complexe $f(z) = \dfrac{1}{z}$ dans $\mathbb{C} - \{0\}$.
Si on laisse $z = re^{i\theta}$ alors on obtient

$$f(z) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{r} = r^{-1}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

et donc on a

$$u(r,\theta) = r^{-1}\cos\theta \quad v(r,\theta) = -r^{-1}\sin\theta$$

les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites car

$$u_r = -r^{-2}\cos\theta = r^{-1}v_\theta \quad \text{et} \quad v_r = r^{-2}\sin\theta = -r^{-1}u_\theta.$$

Donc la dérivée existe et vaut

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r - iv_r) = e^{-i\theta}(-r^{-2}\cos\theta + ir^{-2}\sin\theta) = -r^{-2}e^{-2i\theta} = -z^{-2}.$$

2.5 Fonctions harmoniques

On a vu que quand une fonction complexe $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est analytique en un point z, alors tous les dérivés de f : $f', f'', f''', \ldots$ sont également analytiques en z. Par conséquent, on peut conclure que tous les dérivées partielles des fonctions réelles $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont continues en z. De la continuité des dérivées partielles nous savons alors que les dérivées partielles mixtes de second ordre sont égales, c'est à dire $u_{xy} = u_{yx}$ et $v_{xy} = v_{yx}$. La combinaison de ce fait et les équations de Cauchy–Riemann sera utilisée dans cette section pour démontrer l'existence d'un lien entre les parties réelles et imaginaires d'une fonction analytique $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ et ses dérivées partielles du second ordre.

Définition 2.17. Soient U un ensemble de $\mathbb{R}^2$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$. La fonction f est dite de classe C^2 sur U si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existent et sont continues pour tout x, y de U. On note par $f \in C^2(U, \mathbb{R})$.

Définition 2.18. Soit $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. On dit que f est harmonique dans U si pour tout $(x, y) \in U$ on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Notation 1. *La fonction* $\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ *est appelée le Laplacien de* f*. On peut le noter aussi par* $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ *où* $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ *et* $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Exemple 19. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, où $f(x, y) = e^{-y} \sin x$. Il est clair que cette fonction est dans $C^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$, de plus

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = -e^y \sin x \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = e^y \sin x.$$

Le laplacien $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$, ce qui montre que cette fonction est harmonique.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire de la dérivabilité d'une fonction.

Théorème 2.19. *Soit* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *une fonction holomorphe sur* $D \subset \mathbb{C}$*. Alors les fonctions réelles* $u(x, y)$ *et* $v(x, y)$ *sont harmoniques.*

Démonstration. La fonction f est holomorphe, donc les équations de Cauchy Riemann sont satisfaites

$$u_x = v_y \Rightarrow u_{xx} = v_{xy}$$
$$u_y = -v_x \Rightarrow u_{yy} = -v_{xy}$$

et donc $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$. Ce qui prouve que la fonction réelle $u(x, y)$ est harmonique.
Pour montrer que $v(x, y)$ est harmonique on procède exactement de la même manière. □

Exemple 20. La fonction $w = f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ est entière et donc les fonctions $u(x, u) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = 2xy$ sont nécessairement harmoniques sur tout domaine $U \subset \mathbb{C}$. En effet

$$u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0 \qquad \text{et} \qquad v_{xx} + v_{yy} = 0 - 0 = 0.$$

Conjuguée harmonique

Si $f(z) = u(x, u) + iv(x, y)$ est holomorphe dans un domaine D, alors u et v sont harmoniques dans D. Maintenant, supposons que $u(x, y)$ est une fonction réelle harmonique dans D. Si on peut trouver une fonction $v(x, y)$ telle que $u(x, y)+iv(x, y)$ est holomorphe dans D, alors $v(x, y)$ sera apellée **la fonction conjuguée harmonique** de $u(x, y)$.

Exemple 21.

(a) Vérifier que la fonction $u(x, y) = x^3 - 3x^2y - 5y$ est harmonique dans $\mathbb{C}$.

(b) Trouver la conjuguée harmonique de u.

Réponse.

(a) On a $u_x = 3x^2 - 6xy, u_{xx} = 6x, u_y = -6xy - 5, u_{yy} = -6x$, donc $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(b) En utilisant les équations de Cauchy-Riemann on a :
$v_y = u_x = 3x^2 - 6xy$ et $v_x = -u_y = 6xy + 5$. En intégrant la première équation par rapport à y on obtient, $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + h(x)$.
Maintenant $v_x = 6xy + h'(x) = -u_y = 6xy + 5$ nous donne que $h'(x) = 5$ et donc $h(x) = 5x + C$. Donc la fonction harmonique conjuguée est

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 5x + C.$$

et la fonction analytique est donc

$$f(z) = (x^3 - 3x^2y - 5y) + i(3x^2y - y^3 + 5x + C).$$

Exemple 22. Trouver en fonction de z la fonction entière $h(z)$ dont la partie réelle est $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$ et $h(0) = 0$.

Réponse : Puisque h est entière, elle satisfait les équations de Cauchy Riemann et on a :
$h'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y = (3x^2 - 3y^2) - i(-6xy - 5) = 3[(x^2 - y^2) + i(2xy)] + 5 = 3z^2 + 5$.
Donc $h(z) = z^3 + 5z + C$ et puisque $h(0) = 0$ alors $h(z) = z^3 + 5z$ qui est en effet une fonction entière étant un polynôme.

2.6 Exercices

1. En utilisant la définition de la limite, montrer que :
(a) $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{2z+1}{z+2}=1$ (b) $\lim\limits_{z\to(3-4i)}|z|=5$

2. Calculer les limites suivantes :
(a) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2+3iz-2}{z+i}$ (b) $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos(2z)}{\cosh(iz)+i\sinh(iz)}$ (c) $\lim\limits_{z\to-\frac{\pi}{2}i}\dfrac{e^{2z}+1}{e^z+i}$

3. Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{C}$:
(a) $f_1(z)=\overline{z}$ (b)$f_2(z)=\operatorname{Re} z$ (c) $f_3(z)=\operatorname{Im} z$ (d) $f_4(z)=e^z$.

Déterminer si les fonctions suivantes sont analytiques.

4. $f_1(z)=5\overline{z}+2z$

5. $f_2(z)=3|z|^2-2z$

6. $f_3(z)=ze^z$

7. $f_4(z)=\dfrac{1}{z}$

8. $f_5(z)=|z|+i\operatorname{Re} z$

9. $f_6(z)=e^{-x}\left(x\sin y-y\cos x\right)+ie^{-x}\left(y\sin y+x\cos y\right)$

Montrer que les fonctions suivante sont nulle part analytiques.

10. $f(z)=\operatorname{Re}(z)$

11. $f(z)=y+ix$

12. $f(z)=3z-5\overline{z}+7$

13. $f(z)=\overline{z}^2$

14. $f(z)=x^2+y^2$

15. $f(z)=\dfrac{x}{x^2+y^2}+i\dfrac{y}{x^2+y^2}$

Montrer que les fonctions sont analytiques. Donner le domaine d'analyticité.

16. $f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y$

17. $f(z)=(x+\sin x\cosh y)+i(y+\cos x\sinh y)$

18. $f(z)=e^{x^2-y^2}\cos(2xy)+ie^{x^2-y^2}\sin(2xy)$

19. $f(z)=(4x^2+5x-4y^2+9)+i(8xy+5y-1)$

20. $f(z)=\dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2}-i\dfrac{y}{(x-1)^2+y^2}$

21. $f(z) = \dfrac{x^3 + xy^2 + x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{x^2y + y^3 - y}{x^2 + y^2}$

Trouver les réels a, b, c, et d tels que f soit partout analytique.

22. $f(z) = (3x - y + 5) + i(ax + by - 3)$

23. $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$

Montrer que les fonctions suivantes sont nulle-part analytiques mais sont dérivables sur les courbes indiquées.

24. $f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy; \quad y = 0$

25. $f(z) = 3x^2y^2 - 6ix^2y^2; \quad xy = 0$

26. $f(z) = x^3 + 3xy^2 - x + i(y^3 + 3x^2y - y); \quad xy = 0$

27. $f(z) = x^2 - x + y + i(y^2 - 5y - x); \quad y = x + 2$

28. Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction holomorphe sur un ouvert D connexe de $\mathbb{C}$. Supposons que $c_1u(x, y) + c_1v(x, y) = c_3$ dans D (c_j, $j = 1, 2, 3$ étant des constantes réelles non toutes nulles). Montrer que f est constante dans D.

29. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur l'ouvert et connexe D. On suppose que $g \neq 0$ sur D et $f(z).g(z) \in \mathbb{R}$ sur D. Prouver qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = \lambda g(z)$, pour tout $z \in D$.

30. Soit la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, définie par $f(z) = \overline{z}$ et soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $f(D) \subset D$. Soient g une fonction holomorphe sur D et $\psi = f \circ g \circ f$. Prouver que ψ est holomorphe sur D.

31. On pose $\theta(z) = y + ix$. Soient D un ouvert de $\mathbb{C}$ avec $\theta(D) \subset D$, f holomorphe sur D et $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, telle que $g(z) = \overline{f(\theta(z))}$. Montrer que g est holomorphe sur D.

(a) Montrer que $u(x, y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos x)$ est harmonique.

(b) Déterminer $v(x, y)$ telle que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ soit holomorphe avec $f(0) = 0$.

(c) Donner l'expression de f en fonction de z par trois méthodes différentes.

32. Montrer que si $f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, la forme polaire de $f'(z)$ est

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}(v_\theta - iv_\theta)$$

33. Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction holomorphe sur un domaine D de $\mathbb{C}$. Supposons que $c_1 u(x, y) + c_1 v(x, y) = c_3$ dans D (c_j, $j = 1$ *à* 3 étant des constantes réelles non toutes nulles). Montrer que f est constante dans D.

34. Est-ce que la fonction $v(x, y) = (x^2 + 1)y^2$ peut former la partie imaginaire de la fonction holomorphe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$?

35. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(z) = x^2 + ixy^3$. Existe-t-il un ouvert non vide U de $\mathbb{C}$ tel que $f|_U$ soit holomorphe ?

36. Soit $U = \{z \in C; \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Si $z = x + iy \in U$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Monter que $f(z) = \ln|z| + i \arctan \dfrac{y}{x}$ est holomorphe sur $\mathbb{U}$.

37. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Déterminer toutes les applications f holomorphes sur U qui vérifient $\mathrm{Im}\, f(z) = [\mathrm{Re}\, f(z)]^2$ pour tout $z \in U$.

38. Montrer que si f est analytique sur un domaine D et $f'(z) = 0$ pour tout $z \in D$ alors f est constante dans D.

39. Montrer que si les fonctions holomorphes $f(z)$ et $g(z)$ satisfont la condition $f'(z) = g'(z)$, alors $f(z) = g(z) + c$.

40. Montrer que si f est analytique sur un domaine D et $|f'(z)| = c$ pour tout $z \in D$ alors f est constante dans D.

41. Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analytique sur un domaine D. Est ce que les fonctions $g_1(z) = u(x, y) - iv(x, y)$, $g_2(z) = v(x, y) + iu(x, y)$ et $g_3(z) = v(x, y) - iu(x, y)$ peuvent être analytiques sur le domaine D ? Justifier vos réponses.

42. Montrer que si la fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est holomorphe dans un domaine D, l'égalité $u_x v_x + u_y v_y = 0$ est vérifiée dans D.

43. Montrer que si f est analytique alors $|f'(z)|^2 = u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2$.

44. Monter que les équations de Cauchy Riemann en coordonnées polaires s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \text{avec} \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Monter que la fonction donnée $u(x, y)$ est harmonique dans un domaine approprié D. Trouver une conjuguée harmonique $v(x, y)$ de u telle que $f = u + iv$ soit analytique.

45. $u(x, y) = x$

46. $u(x, y) = y$

47. $u(x, u) = x^2 - y^2$

48. $u(x, u) = 2x - 2xy$

49. $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$

50. $u(x, y) = \cos x \cosh y$

51. Trouver la fonction holomorphe $f(z)$ si l'on connait :

(a) $\operatorname{Re} f = u(x, y) = 2e^x \cos y$, avec $f(0) = 2$

(b) $\operatorname{Im} f = v(x, y) = 3x + 2xy$, avec $f(-i) = 2$

(c) $\operatorname{Im} f = v(x, y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$, avec $x > 0$ et $f(1) = 0$

(d) $\operatorname{Re} f = u(x, y) = \cos x \cosh y$.

3 Fonctions élémentaires

Les fonctions complexes sont un prolongement naturel des fonctions réelles sur le plan des nombres complexes $\mathbb{C}$. Par un tel prolongement, ces fonctions s'enrichissent de nouvelles propriétés. Par exemple, la fonction exponentielle d'une variable complexe e^z devient périodique, les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ cessent d'être bornées, le logarithme des nombres négatifs (et, en général, de tout nombre complexe non nul) prend un sens. Dans ce chapitre nous étudierons les propriétés principales des fonctions élémentaires complexes, leurs domaines d'analycité et leurs dérivées.

3.1 Polynômes et fractions rationnelles

Si $n \in \mathbb{N}$, et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes complexes, la fonction

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \quad (a_n \neq 0) \tag{1}$$

est un polynôme de degré n. Le domaine de définition de $p(z)$ est $\mathbb{C}$ le plan des nombres complexes tout entier.
Les quotients de polynômes sont appelés fractions rationnelles

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m} \tag{2}$$

$r(z)$ est définie en tout point $z \in \mathbb{C}$ sauf aux points où $q(z) = 0$.

Théorème 3.1.
(a) La fonction $p(z)$ dans (1) est entière et $p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}$.
(b) La fonction $r(z)$ dans (2) est analytique dans tout domaine qui ne contient pas de z_0 tel que $q(z_0) = 0$ et $r' = \dfrac{p'q - pq'}{q^2}$.

Théorème 3.2 (Théorème fondamental d'algèbre)**.** *Tout polynôme non-constant avec coefficients complexes admet au moins une racine complexe.*

Si $p_n(z) = a_n^z + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, a_n \neq 0$ est un polynôme complexe non constant de dégrée n alors la conclusion du théorème est qu'il existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $p_n(z_1) = 0$. On peut donc écrire $p_n(z)$ comme :

$$p_n(z) = (z - z_1) p_{n-1}(z).$$

Mais puisque $p_{n-1}(z)$ est aussi un polynôme de degré $n-1$, il existe $z_2 \in \mathbb{C}$ tel que $p_{n-1}(z_2) = 0$ et donc on peut écrire :

$$p_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)p_{n-2}(z).$$

Cela entraîne que

$$p_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Corollaire 3.3. *Tout polynôme complexe de degré n possède n racines complexes (comptées avec leur multiplicité), de plus*

$$p_n(z) = a_n(z - z_1)^{n_1}(z - z_2)^{n_2} \cdots (z - z_k)^{n_k}.$$

avec $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ et n_i est la multiplicité de la racine z_i.

Remarque. Les racines de l'unité de $z^n = 1$ est cas particulier de ce phénomène.

Exemple 1. Donner la factorisation complète de $p(z) = z^3 + (2-i)z^2 - 2iz$.
Solution. Puisque $z_1 = 0$ est une racine de p, la première factorisation est

$$p(z) = z(z^2 + (2-i)z - 2i).$$

Les racines de polynôme de deuxième degré sont données par :

$$z_2, z_3 = \frac{-(2-i) \pm \sqrt{(2-i)^2 - 4(1)(-2i)}}{2} = -2, i.$$

Donc

$$p(z) = z(z+2)(z-i).$$

3.2 Fonctions exponentielle et logarithmique complexes

Fonction exponentielle complexe

Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, où x et y sont des réels, on défini la fonction exponentielle complexe par la relation

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{3}$$

Si $y = 0$ alors $z = x$, cette définition coïncide avec la définition dans les réels. Donc la fonction complexe e^z un prolongement de la fonction réelle e^x.

Théorème 3.4. *La fonction exponentielle complexe e^z est entière et sa dérivée est égale à*

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z.$$

Démonstration. Notons que $\mathrm{Re}(e^z) = u(x,y) = e^x \cos y$ et $\mathrm{Im}(e^z) = v(x,y) = e^x \sin y$. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann on a pour tout $z = x+iy \in \mathbb{C}$

$$u_x = e^x \cos y = v_y \quad \text{et} \quad u_y = -e^x \sin y = v_x.$$

Donc e^z est entière et on a

$$\frac{d}{dz}e^z = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z.$$

$\square$

Exemple 2. Trouver les dérivées de chacune des fonctions :
(a) $iz^4(z^2 - e^z)$ (b) $e^{z^2-(1+i)z+3}$

Solution.
(a) $6iz^5 - iz^4e^z - 4iz^3e^z$.
(b) $e^{z^2-(1+i)z+3} \cdot (2z - 1 - i)$.

Proposition 3.5.
(a) $e^z = 1$ *si et seulement si* $z = 2ki\pi, k \in \mathbb{Z}$.
(b) $e^{z_1} = e^{z_2}$ *si et seulement si* $z_1 = z_2 + 2ki\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 3. Trouver les solutions de $e^z = i\pi$.
Solution. $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y = i\pi$ donc $e^x \cos y = 0$ et $e^x \sin y = \pi$.
Puisque $e^x > 0$ alors $\cos y = 0 \Rightarrow y = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
Puisque $e^x \sin(-\frac{\pi}{2}+2k\pi) = -e^x < 0$ seules les valeurs $y = \frac{\pi}{2}+2k\pi$ sont admissibles.
Alors, $e^x \sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \pi \Rightarrow e^x = \pi \Rightarrow x = \ln \pi$.
Les solutions sont donc $z = \ln \pi + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$.

Exemple 4. Simplifier : (a) $e^{4+i\pi}$ (b) $e^{i9\pi/2}$.
Solution.
(a) $e^{4+i\pi} = e^4(\cos \pi + i \sin \pi) = -e^4 < 0$.
(b) $e^{i9\pi/2} = \cos 9\pi/2 + i \sin 9\pi/2 = i$.
On remarque donc que $w = e^z$ peut avoir n'importe quelle valeur complexe sauf $w = 0$.

Propriétés. L'exponentielle complexe e^z possède les propriétés suivantes :

(1) $e^0 = 1$

(2) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

(3) $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$

(4) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$

(5) $(e^z)^n = e^{nz}; n \in \mathbb{Z}$

(6) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} = e^x > 0$

(7) $e^z \neq 0$

(8) $e^{z+2\pi i} = e^z$

(9) $(e^z)' = e^z,$ pour tout $z \in \mathbb{C}$

(10) $a^z = e^{z \ln a},$ pour tout $a > 0.$

Attention ! La fonction exponentielle complexe e^z

- est périodique de période $2\pi i$,
- n'est pas injective comme dans les réels,
- ne s'annule pour aucune valeur complexe.

Exemple 5. Tracer la courbe $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ définie par $t \mapsto f(t) = e^{it}$.

Solution. Puisque $e^{it} = \cos t + i \sin t$, les points $(\cos t, \sin t)$ ne sont que les point du cercle unité.

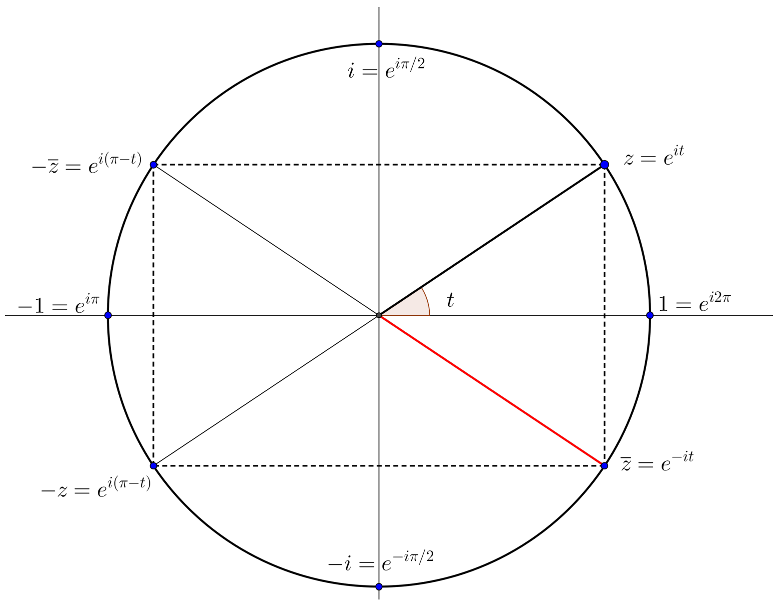


FIGURE 3.1 – Courbe de $f(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi)$

Exemple 6. Soient α, β des constantes réelles, $w = f(z) = e^z$, $A = \{z \in \mathbb{C} : z = \alpha + iy\}$ et $B = \{z \in \mathbb{C} : z = x + i\beta, \beta \in \mathbb{R}\}$. Trouver les image $f(A)$ et $f(B)$.

Solution.
$f(A) = \{w \in \mathbb{C} : w = e^z = e^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = e^\alpha\}$ est le cercle de centre

l'origine et de rayon e^{α}.

$f(B) = \{w \in \mathbb{C} : w = e^{z} = e^{i\beta}, \beta \in \mathbb{R}\} = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Arg} w = \beta, \beta \in \mathbb{R}\}$ est la demi-droite d'origine et d'angle β.

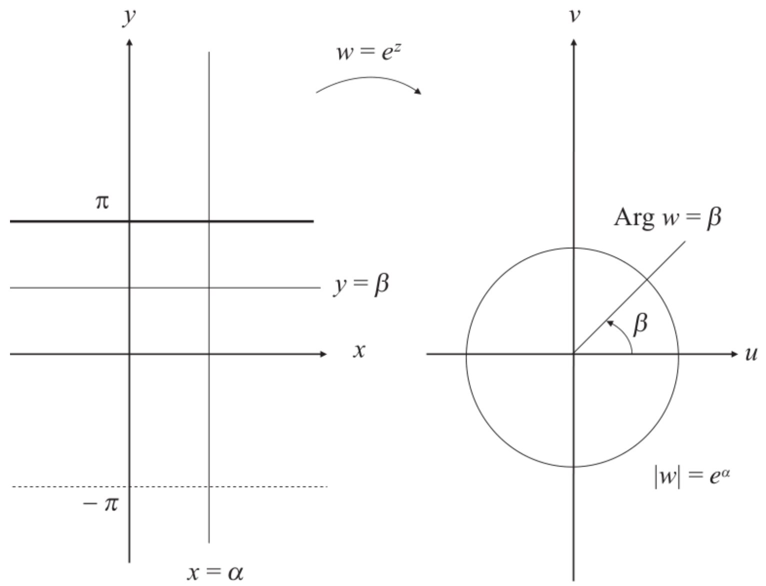


FIGURE 3.2 – Images des lignes verticales et horizontales via e^{z}.

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont des constantes, alors on a :

- L'image de $\{z \in \mathbb{C} : -\infty < x < \infty, -\pi < y < \pi\}$ par $w = e^{z}$ est $\{w \in \mathbb{C} : |w| > 0\}$.
- L'image de $\{z \in \mathbb{C} : x = \alpha, -\pi < y < \pi\}$ par $w = e^{z}$ est $\{w \in \mathbb{C} : |w| = e^{\alpha}\}$.
- L'image de $\{z \in \mathbb{C} : -\infty < x < \infty, y = \beta\}$ par $w = e^{z}$ est $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Arg} w = \beta\}$.

La fonction logarithme complexe et ses branches

- On défini le logarithme d'une variable complexe non nulle $z = re^{i\theta}$ par :

$$\log z := \ln r + i\theta. \tag{4}$$

Autrement dit, on a :

$$\log z := \ln |z| + i \arg z, \qquad (z \neq 0). \tag{5}$$

Dans la formule (5), le symbole $\arg z$ représente une détermination arbitraire de l'argument de z. Puisque pour chaque nombre complexe $z \neq 0$, $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, alors z possède un ensemble infini de logarithmes. Le logarithme est donc une fonction à une infinité dénombrable de déterminations, c'est-à-dire que $\log z$ est une fonction **multivaluée**. Sa partie réelle est unique, mais sa partie imaginaire à un terme additif multiple de 2π près.

Proposition 3.6. *Le logarithme d'une variable complexe z possède les propriétés suivantes :*

(a) $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$

(b) $\log(z_1/z_2) = \log(z_1) - \log(z_2)$

(c) $e^{\log z} = z$

(d) $\log(e^z) = e^z + i2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Démonstration. (a) Par définition

$$\begin{aligned}\log(z_1) + \log(z_2) &= \ln|z_1| + i\arg(z_1) + \ln|z_2| + i\arg(z_2)\\ &= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(\arg(z_1) + \arg(z_2))\\ &= \ln|z_1 z_2| + i\arg(z_1 z_2)\\ &= \log(z_1 z_2)\end{aligned}$$

Les démonstrations des partie (b)-(d) sont similaires. □

Exemple 7. Écrire les nombres suivants sous la forme $a + ib$:
(a) $\log 4$ (b) $\log(-1)$ (c) $\log(1+i)$
Solution.
(a) $\log 4 = \ln 4 + i\arg(4) = \ln 4 + i2k\pi$.
(b) $\log(-1) = \ln 1 + i\arg(-1) = i(2k+1)\pi$
(c) $\log(1+i) = \ln|1+i| + i\arg(1+i) = \ln\sqrt{2} + i(\pi/4 + 2k\pi)$.

- La **détermination principale** de $\log z$ est définie par

$$\operatorname{Log} z := \ln|z| + i\operatorname{Arg} z, \quad z \neq 0, \quad -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi, \tag{6}$$

où $\operatorname{Arg} z$ est évidement la détermination principale de $\arg z$. La fonction $\operatorname{Log} z$ est **univaluée** sur la région fondamentale $R_{\text{fond}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0, -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi\}$, mais elle est discontinue sur l'axe réel négatif $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$. La fonction $\operatorname{Log} z$ de (6) n'est pas une branche de $\log z$ de (5), mais la fonction $\operatorname{Log} z$, restreinte au domaine

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| > 0, -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\} \tag{7}$$

(c.a.d $\operatorname{Arg} z \neq \pi$) est une **branche** de la fonction $\log z$ dans (5). Cette branche est appelée **branche principale**.

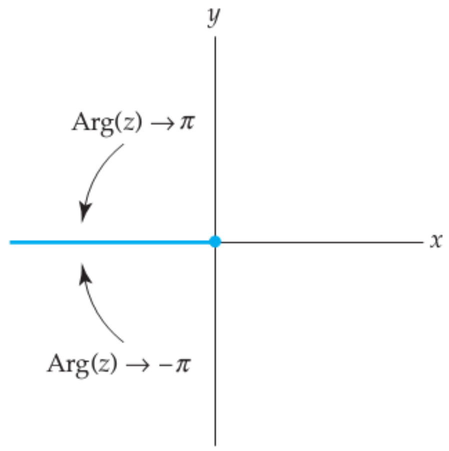


FIGURE 3.3 – $\operatorname{Log} z$ est discontinue sur l'axe réel négatif et $z = 0$.

Exemple 8. Calculer la détermination principale du logarithme complexe $\operatorname{Log} z$ pour :
(a) $z = i$ (b) $z = 1 + i$ (c) $z = -2$
Solution.
(a) $\operatorname{Log}(i) = \ln |i| + i \operatorname{Arg}(i) = i\dfrac{\pi}{2}$,
(b) $\operatorname{Log}(1 + i) = \ln |1 + i| + i \operatorname{Arg}(1 + i) = \ln \sqrt{2} + i\dfrac{\pi}{4}$,
(c) $\operatorname{Log}(-2) = \ln 2 + i \operatorname{Arg}(-2) = \ln 2 + i\pi$.

Attention. Si $z_1 = z_2 = -1$ alors,

- $\operatorname{Log}(z_1) = \operatorname{Log}(z_2) = \operatorname{Log}(-1) = \ln |-1| + i \operatorname{Arg}(-1) = i\pi$,
- $\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log}(1) = \ln |1| + i \operatorname{Arg}(1) = 0$, et
- $\operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2) = 2i\pi$.

Donc en général

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2).$$

Proposition 3.7. *Si la fonction exponentielle complexe $f(z) = e^z$ est définie sur la région $R_{\text{fond}} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : -\infty < x < \infty, -\pi < y \leq \pi\}$, alors f est injective* *et son inverse est la représentation principale de la fonction logarithme complexe* $f^{-1}(z) = \operatorname{Log} z$.

Démonstration. On sait à partir de la proposition (3.6) que $e^{\log z} = z$ et puisque $\operatorname{Log} z$ est une des branche de $\log z$, alors on a $e^{\operatorname{Log} z} = z$. De plus on a,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log} e^z &= \ln |e^z| + i \operatorname{Arg}(e^z) \\
&= \ln |e^{x+iy}| + i \operatorname{Arg}(e^{x+iy}) \\
&= \ln e^x + iy \\
&= x + iy = z.
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Log} z$ est l'inverse de e^z définie sur la région fondamentale. □

Théorème 3.8. *La branche principale de la fonction logarithme* $\log z$ *définie par* $f(z) = \operatorname{Log} z$ *sur la région* $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 0, \pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}$ *est analytique et sa dérivée est donnée par :*

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Log} z = \frac{1}{z}.$$

Démonstration. Si $z = re^{i\theta}$ est dans la région définie par (7), alors $-\pi < \theta < \pi$ et $\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}(re^{i\theta}) = u + iv = \ln r + i\theta$, on trouve que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r} & \frac{\partial v}{\partial \theta} &= 1, \\
\frac{\partial v}{\partial r} &= 0 & \frac{\partial u}{\partial \theta} &= 0.
\end{aligned}$$

Donc u et v satisfont les équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Ce qui montre que $\operatorname{Log} z$ est analytique dans ce domaine et sa dérivée est

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

□

Remarque. La région $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 0, \pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}$ est souvent appelée le domaine d'analyticité de $\operatorname{Log} z$. Elle est équivalente à $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \leq 0, y = 0\}$.

Chaque point du demi-axe réel négatif, aussi bien que l'origine, est un point singulier de la branche principale de la fonction logarithme. Le demi-axe réel négatif est la **coupure** de la branche principale, une coupure étant par définition une ligne, constituée de points singuliers, introduite de manière à définir une branche d'une fonction multivaluée. Un point singulier commun à toutes les coupures pour une fonction multivaluée est appelé un point de **branchement**. L'origine est un point de branchement pour la fonction logarithme.

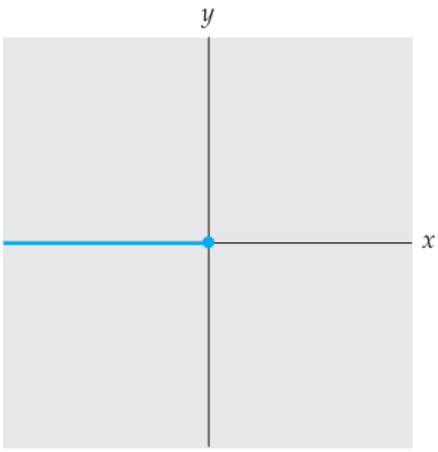


FIGURE 3.4 – Coupure et point de branchement pour $\operatorname{Log} z$.

Exemple 9. Trouver le domaine d'analyticité et la dérivée des fonctions :
(a) $f(z) = z \operatorname{Log} z$ (b) $g(z) = \operatorname{Log}(z+1)$
Solution.

(a) La fonction z est entière et $\operatorname{Log} z$ est analytique sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 0, -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}$ donc le domaine d'analyticité est le même que celui de $\operatorname{Log} z$ et $f'(z) = 1 + \operatorname{Log} z$.

(b) Le domaine d'analyticité est donné par $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \leq -1, y = 0\}$ et la dérivée est $g'(z) = \dfrac{1}{z+1}$.

- On aurait pu définir une fonction :

$$\log z = \ln |z| + i\theta, \quad z \neq 0, \quad \alpha < \theta < \alpha + 2\pi. \tag{8}$$

Cette fonction est une branche de la fonction logarithme dans (5), et sa coupure est la demi-droite $\theta = \alpha$.

Images de région par $\operatorname{Log} z$
Si $z = re^{i\theta}$ et $w = f(z) = u + iv = \operatorname{Log} z$, alors on a :

- L'image de $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 0\}$ par $w = \operatorname{Log} z$ est $\{w \in \mathbb{C} : -\infty < u < \infty, -\pi < v \leq \pi\}$.
- L'image de $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ par $w = \operatorname{Log} z$ est $\{w \in \mathbb{C} : u = \ln r, , -\pi < v \leq \pi\}$.
- L'image de $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \theta\}$ par $w = \operatorname{Log} z$ est $\{w \in \mathbb{C} : -\infty < u < \infty, v = \theta\}$.

Exemple 10. Trouver l'image de la couronne $e \leq |z| \leq e^5$ par la fonction $w = \operatorname{Log} z$.

Solution. Puisque $w = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$ alors $u = \ln|z|$ et $v = \operatorname{Arg} z$.
De plus, puisque $e \leq |z| \leq e^5$, alors $\ln e = 1 \leq u = \ln|z| \leq \ln e^5 = 5$ et $-\pi < v = \operatorname{Arg} z \leq \pi$.

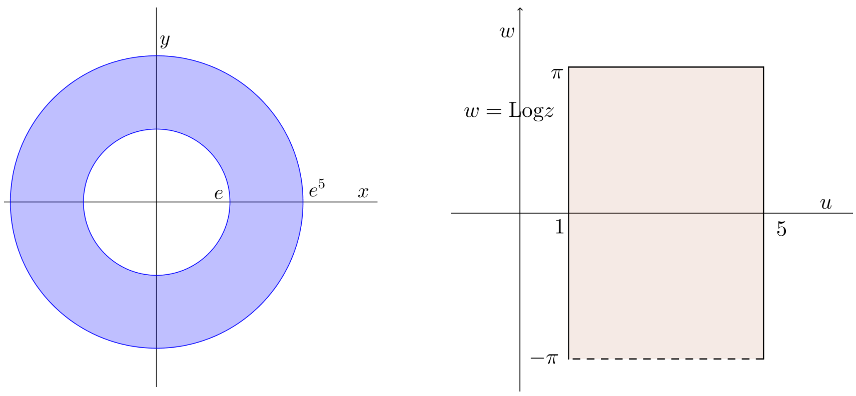


FIGURE 3.5 – Images de la couronne par $\operatorname{Log} z$.

3.3 La fonction puissance générale

- La fonction puissance générale $w = z^a$, où $a \in \mathbb{C}$ est définie par :

$$z^a := e^{a \log z}, \tag{9}$$

où $\log z$ est la fonction logarithme multivaluée, et donc la fonction dans (9) est multivaluée aussi.
- Si on choisi une branche quelconque de $\log z$, alors la fonction $z^a = e^{a \log z}$ sera univaluée et analytique dans le même domaine de la branche choisie.
- Si on choisi la branche principale de $\log z$, alors on a

$$f(z) = z^a = e^{a \operatorname{Log} z}$$

et sa dérivée est

$$\frac{d}{dz} z^a = a z^{a-1}.$$

Exemple 11. Trouver toutes les valeurs de :
(a) $(-3)^i$ (b) $(-3)^{1/2}$ (c) $(-3)^{-2}$ (d) i^{2i}
Solution.

(a) Puisque $\log(-3) = \operatorname{Log} 3 + i(\pi + 2k\pi)$, on aura
$(-3)^i = e^{i\log(-3)} = e^{i\operatorname{Log} 3}e^{-\pi-2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$.
Donc $(-3)^i$ possède une infinité dénombrable de valeurs.

(b) $(-3)^{1/2} = (3i^2)^{1/2} = \pm i\sqrt{3}$, donc possède deux valeurs.

(c) $(-3)^{-2} = 1/(-3)^2 = 1/9$ possède une seule valeur.

(d) $i^{2i} = e^{2i\log i} = e^{2i(i(\pi/2+2k\pi))} = e^{-(4k+1)\pi}, k \in \mathbb{Z}$.

On a les cas suivants pour la fonction z^a :

- z^a possède une seule valeur, si $a = n \in \mathbb{Z}$.
- z^a possède m valeur, si $a = n/m; n, m \in \mathbb{Z}$.
- z^a possède une infinité dénombrable de valeurs dans les autres cas.

• La **détermination principale** de z^a est définie par la fonction :

$$z^a = e^{a\operatorname{Log} z}, \tag{10}$$

et le point de branchement de la fonction puissance générale est $z = 0$.

3.4 Fonctions trigonométriques et hyperboliques complexes

• Tout comme nous avons étendu la fonction exponentielle réelle, nous étendons maintenant les fonctions trigonométriques réelles aux fonctions trigonométriques complexes.
En utilisant la formule d'Euler $e^{it} = \cos t + i\sin t$, on défini le sinus et cosinus d'une variable complexe z par les formules :

(1) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

(2) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

(3) $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = -i\dfrac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$

(4) $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z} = i\dfrac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}$

Il est clair que ces définitions sont des extensions des fonctions trigonométriques réelles, car si nous posons $z = x$, nous obtenons $\cos z = \cos x$ et $\sin z = \sin x$.

$$\sin z = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{(\cos x + i\sin x) - (\cos x - i\sin x)}{2i} = \sin x.$$

• On défini les fonctions hyperboliques comme dans le cas des variables réelles.

(5) $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ (7) $\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z} = \dfrac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$

(6) $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ (8) $\coth z = \dfrac{\cosh z}{\sinh z} = \dfrac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}$

• Les identités trigonométriques fondamentales suivantes restent valides.
Pour tout $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a

(9) $\sin(-z) = -\sin(z)$ (14) $\cos(-z) = \cos(z)$

(10) $\sin(z + 2\pi) = \sin(z)$ (15) $\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$

(11) $\tan(z + \pi) = \tan(z)$ (16) $\cot(z + \pi) = \cot(z)$

(12) $\sin(z + \pi/2) = \cos(z)$ (17) $\cos(z + \pi/2) = -\sin(z)$

(13) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ (18) $\cos^2(z) - \sin^2(z) = \cos(2z)$

(19) $\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$

(20) $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$

Théorème 3.9. *Les fonctions* $\sin z$ *et* $\cos z$ *sont entières et leurs dérivées sont :*

(21) $\dfrac{d}{dz}\sin z = \cos z$ (22) $\dfrac{d}{dz}\cos z = -\sin z$

• Les parties réelles et imaginaires de $\sin z$ et $\cos z$ sont données par les formules :

(23) $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ (24) $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

• Beaucoup de propriétés importantes de $\sin z$ et de $\cos z$ se déduisent à partir de ces formules. Par exemple on a :

(25) $\sin(iy) = i \sinh y$ (27) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$

(26) $\cos(iy) = \cosh y$ (28) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$

• Les zéros de $\sin z$ et $\cos z$ sont tous réels.

(29) Les zéros de $\sin z$ sont $z = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

(30) Les zéros de $\cos z$ sont $z = (n + \frac{1}{2})\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Attention.

- Les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ **ne sont pas bornées**.

(31) $\cos(iy) = \dfrac{e^{i^2y} + e^{-i^2y}}{2} = \dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2}; |\cos(iy)| \to \infty \quad \text{quand} \quad y \to \pm\infty.$

(32) $\sin(iy) = \dfrac{e^{i^2y} - e^{-i^2y}}{2i} = \dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2i}; |\sin(iy)| \to \infty \quad \text{quand} \quad y \to \pm\infty$

- Les relations entres les fonctions trigonométriques et hyperboliques sont étroites comme on le constate dans les formules suivantes :

(33) $\sinh(iz) = i\sin z$ (36) $\cos(iz) = \cosh z$

(34) $\sin(iz) = i\sinh z$ (37) $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$

(35) $\cosh(iz) = \cos z$ (38) $|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$

- Les parties réelles et imaginaires de $\sinh z$ et $\cosh z$ sont données par les formules :

(39) $\sinh z = \sinh x \cos y + i\cosh x \sin y$ (40) $\cosh z = \cosh x \cos y - i \sinh x \sin y$

- Les zéros de $\sinh z$ et $\cosh z$ sont tous imaginaires.

(41) Les zéros de $\sinh z$ sont $z = n\pi i, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

(42) Les zéros de $\cosh z$ sont $z = (n + \frac{1}{2})\pi i, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Théorème 3.10. *Les fonctions* $\sinh z$ *et* $\cosh z$ *sont entières et leurs dérivées sont :*

(43) $\dfrac{d}{dz}\sinh z = \cosh z$ (44) $\dfrac{d}{dz}\cosh z = \sinh z$

Fonctions trigonométriques et hyperboliques inverses

- On défini les fonctions trigonométriques inverses et hyperboliques inverses par :

(45) $\sin^{-1} z := -i\log[iz + (1 - z^2)^{1/2}]$

(46) $\cos^{-1} z := -i\log[z + (z^2 - 1)^{1/2}]$

(47) $\tan^{-1} z := \dfrac{i}{2}\log\dfrac{i+z}{i-z}, z \neq \pm i$

(48) $\sinh^{-1} z := \log[z + (z^2 + 1)^{1/2}]$

(49) $\cosh^{-1} z := \log[z + (z^2 - 1)^{1/2}]$

(50) $\tanh^{-1} z := \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+z}{1-z}, z \neq \pm1$

On obtient une branche de la fonction multivaluée $\sin^{-1} z$ en choisissant une branche de la racine au carrée puis une branche appropriée de la fonction logarithme.

1. $\dfrac{d}{dz}(c) = 0$

2. $\dfrac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$

3. $\dfrac{d}{dz} e^z = e^z$

4. $\dfrac{d}{dz} a^z = a^z \ln a$

5. $\dfrac{d}{dz} \sin z = \cos z$

6. $\dfrac{d}{dz} \cos z = -\sin z$

7. $\dfrac{d}{dz} \tan z = \sec^2 z$

8. $\dfrac{d}{dz} \cot z = -\csc^2 z$

9. $\dfrac{d}{dz} \sec z = \sec z \tan z$

10. $\dfrac{d}{dz} \csc z = -\csc z \cot z$

11. $\dfrac{d}{dz} \log_e z = \dfrac{d}{dz} \ln z = \dfrac{1}{z}$

12. $\dfrac{d}{dz} \log_a z = \dfrac{\log_a e}{z}$

13. $\dfrac{d}{dz} \sin^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

14. $\dfrac{d}{dz} \cos^{-1} z = \dfrac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$

15. $\dfrac{d}{dz} \tan^{-1} z = \dfrac{1}{1+z^2}$

16. $\dfrac{d}{dz} \cot^{-1} z = \dfrac{-1}{1+z^2}$

17. $\dfrac{d}{dz} \sec^{-1} z = \dfrac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$

18. $\dfrac{d}{dz} \csc^{-1} z = \dfrac{-1}{z\sqrt{z^2-1}}$

19. $\dfrac{d}{dz} \sinh z = \cosh z$

20. $\dfrac{d}{dz} \cosh z = \sinh z$

21. $\dfrac{d}{dz} \tanh z = \operatorname{sech}^2 z$

22. $\dfrac{d}{dz} \coth z = -\operatorname{csch}^2 z$

23. $\dfrac{d}{dz} \operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z$

24. $\dfrac{d}{dz} \operatorname{csch} z = -\operatorname{csch} z \coth z$

25. $\dfrac{d}{dz} \sinh^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

26. $\dfrac{d}{dz} \cosh^{-1} z = \dfrac{1}{\sqrt{z^2-1}}$

27. $\dfrac{d}{dz} \tanh^{-1} z = \dfrac{1}{1-z^2}$

28. $\dfrac{d}{dz} \coth^{-1} z = \dfrac{1}{1-z^2}$

29. $\dfrac{d}{dz} \operatorname{sech}^{-1} z = \dfrac{-1}{z\sqrt{1-z^2}}$

30. $\dfrac{d}{dz} \operatorname{csch}^{-1} z = \dfrac{-1}{z\sqrt{z^2+1}}$

3.5 Exercices

1. Trouver $\operatorname{Re} w$ et $\operatorname{Im} w$ où $w = f(x+iy)$.

(a) $w = f(z) = 2z^3 - 3z$ (b) $w = f(z) = \dfrac{1}{z}$ (c) $w = f(z) = \dfrac{i+z}{i-z}$

2. Trouver les domaines de définitions des fonctions suivantes :

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - z + 1+}$ (b) $f(z) = \dfrac{1}{z\sqrt{z^2+i}}$ (c) $f(z) = \dfrac{i}{z^4 - 1}$

3. Représenter en fonctions de z et $\overline{z}$.

(a) $w = x^2 - y^2 + 2ixy$

(b) $w = x(x^2 - 3y^3) - iy(3x^2 - y^2)$

(c) $w = \dfrac{2(x^2+y^2) - (x+iy)}{4(x^2+y^2) - 4x + 1}$

4. Trouver l'image de $|z| = 1$ via la fonction $w = f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

5. Un polynôme $p(z)$ de degré 4 possède les zéros -1 avec multiplicité 2, $-3i$ et $3i$.

Trouver $p(z)$ si $p(1) = 80$.

6. Montrer que le polynôme $f(z) = (\cos\alpha + z\sin\alpha)^n - \cos(n\alpha) - z\sin(n\alpha)$ est divisible par z^2+1, $(z \in \mathbb{C})$.

7. Montrer que si le polynôme $p(z) = a_n z^+ a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ peut ce factoriser sous la forme $p(z) = a_n(z-z_1)^{d_1}(z-z_2)^{d_2}\cdots(z-z_r)^{d_r}$, alors

(a) $n = d_1 + d_2 + \cdots + d_r$,

(b) $a_{n-1} = -a_n(d_1 z_1 + d_2 z_2 + \cdots + d_r z_r)$,

(c) $a_0 = a_n(-1)^n z_1^{d_1} z_2^{d_2} \cdots z_r^{d_r}$.

8. Factoriser les polynômes suivants complètement.

(a) $z^5 + (2+2i)z^4 + 2iz^3$,

(b) $z^4 - 16$,

(c) $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$.

9. Montrer que si $p_n(z)$ est un polynôme de degré n, alors pour tout z avec $|z| > M$, il existent des constantes positives c_1 et c_2 tel que $c_1|z|^n < |p_n(z)| < c_2|z|^n$.

10. Montrer que :

(a) $e^z = 1$ si et seulement si $z = 2ki\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(b) $e^{z_1} = e^{z_2}$ si et seulement si $z_1 = z_2 + 2ki\pi, k \in \mathbb{Z}$.

11. Écrire sous la forme $a + ib$.

(a) $e^{2+i\pi/4}$

(b) $\dfrac{e^{1+i3\pi}}{e^{-1+i\pi/2}}$

(c) $\sin(2i)$

(d) $\cos(1-i)$

(e) $\sinh(1+i\pi)$

(f) $\cosh(i\pi/2)$

12. Trouver toutes les solutions des équations suivantes :

(a) $e^z = 2$

(b) $e^z = -3$

(c) $e^z = 4i$

(d) $e^z = -5i$

(e) $e^z = -1-i$

(f) $e^z = 1+2i$

(g) $e^{iz} = 4$

(h) $e^{4z} = 1$

(i) $\cos z = i\sin z$

13. Exprimer $|\exp(2z+i)|$ et $|\exp(iz^2)|$ en fonctions de x et y, puis, montrer que

$$|\exp(2z+i)+\exp(iz^2)| \leq e^{2x} + 2^{-2xy}.$$

14. Monter que $|\exp(z^2)| \leq \exp(|z|^2)$.

15. Montrer que :

(a) $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}$

(b) $|\operatorname{Im} z| \leq |\sin z| \leq e^{|\operatorname{Im} z|}$

16. Trouver $\operatorname{Re} e^{e^z}$ et $\operatorname{Im} e^{e^z}$; ainsi que $\operatorname{Re} z^z$ et $\operatorname{Im} z^z$.

17. Montrer que $\overline{\sin(z)} = \sin(\overline{z})$.

18. Soit $z = x+iy$, montrer les propriétés suivantes :

(a) $\sin(-z) = -\sin(z)$

(b) $\cos(-z) = \cos(z)$

(c) $e^{iz} = \cos z + i\sin z$

(d) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$

(e) $\sin(iy) = i\sinh y$

(f) $\cos(iy) = \cosh y$

(g) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$

(h) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$

(i) $\sin z = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$

(j) $\cos z = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$

19. Montrer que $\sin(z_1+z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$.

20. Montrer que les zéros de :

(a) $\sin z$ sont $z = n\pi, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

(b) $\cos z$ sont $z = (n+\frac{1}{2})\pi, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

21. Montrer les propriétés suivantes :

(a) $\sinh(iz) = i\sin z$

(b) $\sin(iz) = i\sinh z$

(c) $\cosh(iz) = \cos z$

(d) $\cos(iz) = \cosh z$

(e) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

(f) $|\sinh z|^2 = \sinh^2 z + \sin^2 y$

(g) $|\cosh z|^2 = \sinh^2 z + \cos^2 y$ (h) $\sinh(2z) = 2\sinh(z)\cosh(z)$

22. Monter que les zéros de :

(a) $\sinh z$ sont $z = n\pi i, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

(b) $\cosh z$ sont $z = (n + \frac{1}{2})\pi i, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

23. Trouver les périodes des fonctions périodiques suivantes :

(a) $f(z) = e^{iz}$ (c) $f(z) = \sinh z$

(b) $f(z) = \tan z$ (d) $f(z) = \tanh z$

24. Soit $w = f(z) = e^z$ et $A = \{z \in \mathbb{C} : -1 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 < y \leq \pi i\}$.
Représenter A sur le z-plan et $B = f(A)$ sur le w-plan.

25. Écrire sous la forme $a + ib$:

(a) $\log i$ (c) $\mathrm{Log}(-2i)$

(b) $\log(-1 - i)$ (d) $\mathrm{Log}(1 - \sqrt{3})$

26. Vérifier les propriétés suivantes :

(a) $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$ (b) $\log(z_1/z_2) = \log(z_1) - \log(z_2)$

27. Montrer que si $z_1 = i$ et $z_2 = i - 1$, alors $\mathrm{Log}(z_1 z_2) \neq \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2)$.

28. Monter que $\mathrm{Log}\, e^z = z$ si et seulement si $-\pi < \mathrm{Im}\, z < \pi$.

29. Trouver toutes les valeurs de nombres suivants :

(a) i^i (c) $3^{i\pi}$ (e) $(1 + i)^5$

(b) $(-8)^{2/3}$ (d) $(1 + i)^{1-i}$ (f) $(1 + i\sqrt{3})^{1/3}$

30. Trouver les valeurs principales de chacun des nombres suivants :

(a) $4^{1/2}$ (b) $(i)^{2i}$ (c) $(1 + i)^{1+i}$

31. Est ce que $1^a = 1$ pour tout a ?

32. Trouver toutes les solutions de : (a) $\sin z = 2$ (b) $\sin z = \cos z$.

33. Trouver un domaine d'analyticité et la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(z) = 3z^2 - e^{3iz} + i\,\mathrm{Log}\, z$ (f) $f(z) = z^{1+i}$

(b) $f(z) = (2z + 1)\,\mathrm{Log}\, z$ (g) $f(z) = \sin(z^2)$

(c) $f(z) = \dfrac{\mathrm{Log}(z - i)}{z^2 + 1}$ (h) $f(z) = \cos(ie^z)$

(d) $f(z) = \mathrm{Log}(z^2 + 1)$

(e) $f(z) = z^{3/2}$ (i) $f(z) = z\tan(1/z)$

4 Intégration complexe

Les méthodes d'intégration des fonctions complexes et leurs théories sont abordées dans ce chapitre. Ce chapitre contient certains des résultats les plus importants de l'analyse complexe. On cite parmi ces résultats le théorème de Cauchy-Goursat et la formule intégrale de Cauchy. Un résultat fascinant déduit de la formule intégrale de Cauchy est que si une fonction complexe est dérivable une fois en un point, alors les dérivés de n'importe quel ordre existent et ces dérivées sont elles mêmes analytiques. Autres théorèmes importants de ce chapitre sont, le théorème de la valeur moyenne de Gauss, le théorème de Liouville, et le théorème de module maximum. De nombreuses propriétés des intégrales de fonctions d'une variable complexe sont très semblables à celles des intégrales de fonctions d'une variable réelle ; par exemple, lorsque l'intégrale remplit certaines conditions, l'intégrale peut être calculée en trouvant la fonction primitive de la fonction à intégrer et l'évaluation de la fonction primitive au niveau des deux points d'extrémité. Toutefois, il existe d'autres propriétés qui sont uniques à l'intégration dans le plan complexe.

4.1 Intégration curviligne

Chemin

Définition 4.1. Soit $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{C}$ une application définie par $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$.

- L'image $\gamma(I)$ est appelée **chemin** et γ est un **paramétrage** du chemin.
- $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont l'origine et l'extrémité du chemin respectivement.
- Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que γ est un chemin fermé ou bien est un **lacet**.
- Un lacet γ est dit **simple** si $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ quand $t_1 \neq t_2$ et $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- γ est dit **chemin différentiable** si $x(t)$ et $y(t)$ sont continûment différentiables sur $[a, b]$.
- On dit que γ est **un chemin différentiable par morceaux**, s'il existe une subdivision de $[a, b]$ ($a_0 = a < t_1 < t_2 ... < t_n = b$) tel que γ est un chemin différentiable sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$.

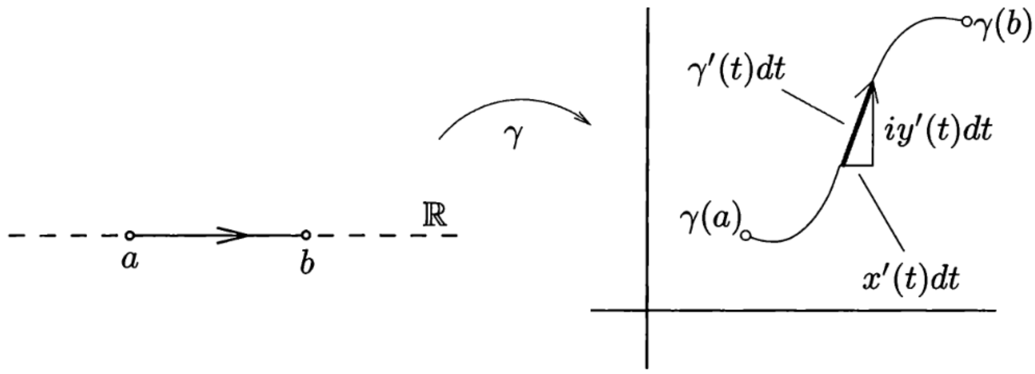


FIGURE 4.1 – Chemin

Exemple 1. Soient $z_0,\ z_1 \in \mathbb{C}$ on définit,

$$\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1,\ 0 \leq t \leq 1.$$

On a $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z_1$ et l'image de γ est le segment joignant z_0 et z_1.

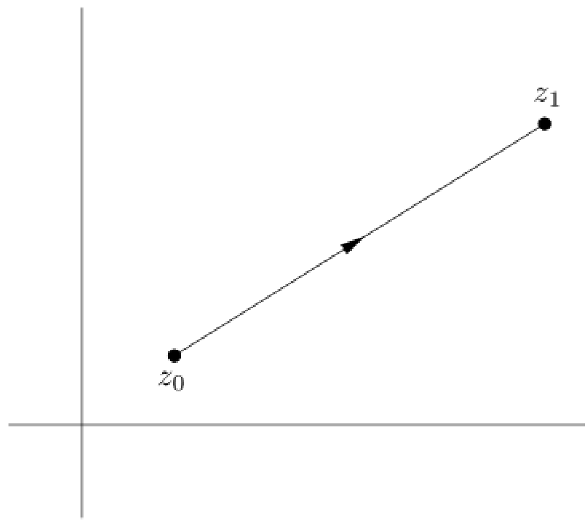


FIGURE 4.2 – Chemin paramétré par $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$ $0 \leq t \leq 1$.

Exemple 2.

$$\begin{aligned} \gamma &: [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t \end{aligned}$$

le chemin γ est le cercle de centre 0 et de rayon 1, qu'on note $C(0,1)$. Le cercle de centre a et de rayon r est paramétré par $\gamma(t) = a + re^{it}$.

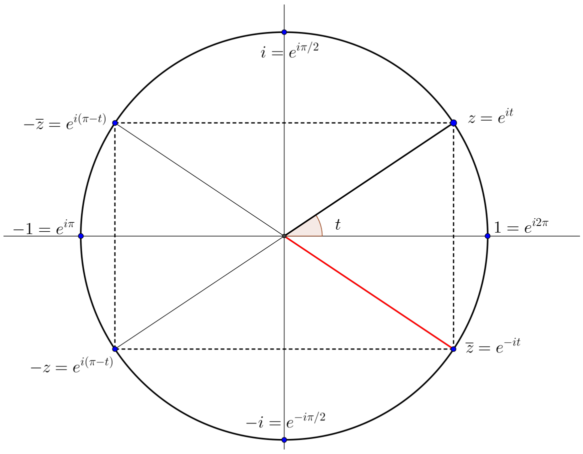


FIGURE 4.3 – Cercle unité paramétré par $\gamma(t) = e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

Exemple 3. L'ellipse est paramétrée par le chemin :

$$\begin{aligned} &\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \\ &t \mapsto \gamma(t) = z_1 \cos t + iz_2 \sin t \text{ où } z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Attention. Le paramétrage d'un chemin n'est pas unique. Vérifier que les équations suivantes sont toutes des paramétrages du cercle unité $|z| = 1$ orienté positivement.

1. $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.
2. $\gamma(t) = e^{2\pi it}, 0 \leq t \leq 1$.
3. $\gamma(t) = e^{i\pi t/2}, 0 \leq t \leq 4$.

La définition suivante nous donne la formule pour calculer la **longueur d'un chemin**.

Définition 4.2. Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin différentiable, défini par $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, alors la longueur $L(\gamma)$ du chemin γ est égale à

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_a^b \left|\frac{dz}{dt}\right| dt$$

pour n'importe quel paramétrage $\gamma(t), a \leq t \leq b$.

Exemple 4. Soient $\gamma_1(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ et $\gamma_2(t) = e^{2i\pi t}, 0 \leq t \leq 1$ deux paramétrages du cercle unité. Trouver les longueurs de γ_1 et γ_2.

Solution.

$L(\gamma_1) = \displaystyle\int_0^{2\pi} |\gamma_1'(t)| dt = \int_0^{2\pi} |ie^{it}|\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$

$L(\gamma_2) = \displaystyle\int_0^{1} |\gamma_2'(t)| dt = \int_0^{1} |i2\pi e^{2i\pi t}|\, dt = \int_0^{1} 2\pi\, dt = 2\pi.$

Définition 4.3. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin, on définit $-\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$-\gamma(t) = \gamma(a+b-t), a \leq t \leq b$$

comme le chemin opposé de γ d'origine $\gamma(b)$ et d'extrémité $\gamma(a)$.

Définition 4.4. Soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ des chemins différentiables tels que, l'extrémité de γ_k est l'origine de γ_{k+1} pour $k = 2, \ldots, n-1$, alors

$$\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$$

est un chemin différentiable par morceaux et la longueur de γ est définie par

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + \cdots + L(\gamma_n).$$

Exemple 5. Soit $0 < \epsilon < R$, on définit

$$\begin{array}{rl} \gamma_1 : [\varepsilon, R] \to \mathbb{C} & \gamma_1(t) = t \\ \gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C} & \gamma_2(t) = Re^{it} \\ \gamma_3 : [-R, -\varepsilon] \to \mathbb{C} & \gamma_3(t) = t \\ \gamma_4 : [-\pi, 0] \to \mathbb{C} & \gamma_4(t) = \varepsilon e^{-it} \end{array}$$

Alors $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ est le chemin fermé dans la figure .

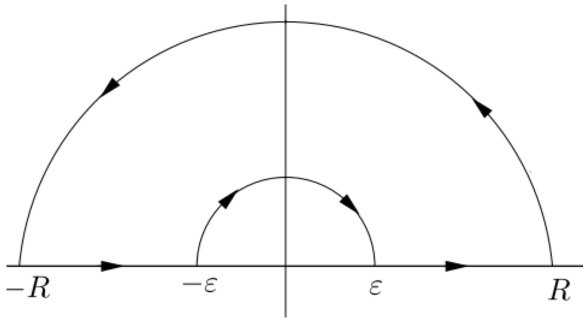


FIGURE 4.4 – Chemin $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$.

Intégration le long d'un chemin

On s'intéresse maintenant aux intégrales des fonctions f à valeurs complexes de la variable complexe z. Une telle intégrale est définie à l'aide des valeurs $f(z)$ le long d'un contour donné γ allant d'un point z_1 à un point z_2 dans le plan complexe. C'est donc une intégrale curviligne, dont la valeur dépend en général aussi bien du **contour** γ que de la **fonction** f.

Définition 4.5. Soit $f :\longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe définie dans un domaine D. Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ un chemin différentiable par morceaux dans D. On définit l'intégrale de f le **long du chemin** γ comme

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \tag{1}$$

Exemple 6. Soient $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ et $n \neq -1$. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_\gamma zdz$ (b) $\int_\gamma \frac{1}{z}dz$ (c) $\int_\gamma z^n dz$

Solution.

(a) $\int_\gamma zdz = \int_0^{2\pi} \gamma(t)\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} e^{it}ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} ie^{i2t}dt = \left[\frac{e^{i2t}}{2}\right]_0^{2\pi} = 0.$

(b) $\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i \neq 0.$

(c) $\int_\gamma z^n dz = \int_0^{2\pi} \gamma^n(t)\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} e^{int}ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} ie^{i(n+1)t}dt = \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{n+1}\right]_0^{2\pi} = 0.$

Une généralisation des résultats précédents est le théorème suivant, qui nous donne une intégrale très utile.

Théorème 4.6. *Soit $\gamma(t) = z_0 + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$, alors*

$$\oint\limits_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n = -1 \\ 0 & \text{si } n \neq -1 \end{cases}.$$

Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ et $dz = dx + idy$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) \\
&= \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma udy + vdx \\
&= \int_a^b u(x(t), y(t)x'(t)dt - v(x(t), y(t)y'(t)dt \\
&+ i\int_a^b u(x(t), y(t)y'(t)dt + v(x(t), y(t)x'(t)dt.
\end{aligned}$$

Exemple 7. Calculer $I = \int_{(0,3)}^{(2,4)} (2y+x^2)dx+(3x-y)dy$ le long de $\gamma(t) = 2t+i(t^2+3)$.

Les points $(0,3)$ et $(2,4)$ correspondent respectivement à $t=0$ et $t=1$.
Par conséquent on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(2(t^2+3)+(2t)^2\right) 2dt + \int_0^1 (3(2t)-(t^2+3))2tdt \\ &= \int_0^1 (24t^2+12-2t^3-6t)\, dt = \frac{33}{2}. \end{aligned}$$

Exemple 8. Soient $f(z)=z^2$, $g(z)=\overline{z}$, $\gamma_1(t)=t+it$, et $\gamma_2(t)=t+it^2$, où $0\leq t\leq 1$. Notons que les chemins sont différents, mais ont la même origine $z=0$ et la même extrémité $z=1+i$. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)dz$ (b) $\displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)dz$ (c) $\displaystyle\int_{\gamma_1} g(z)dz$ (d) $\displaystyle\int_{\gamma_2} g(z)dz$

Solution.

(a) $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^1 t^2(1+i)^2(1+i)dt = \tfrac{2}{3}(-1+i).$

(b) $\displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_0^1 (t+it^2)^2(1+2it)dt = \tfrac{2}{3}(-1+i).$

(c) $\displaystyle\int_{\gamma_1} g(z)dz = \int_0^1 (t-it)(1+i)dt = 1.$

(d) $\displaystyle\int_{\gamma_2} g(z)dz = \int_0^1 (t-it^2)(1+2it)dt = 1+i/3.$

Attention. Observons que $\displaystyle\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$ mais $\displaystyle\int_{\gamma_1} g \neq \int_{\gamma_2} g$.
Nous verrons plus tard que la raison est que f est analytique mais g ne l'est pas.
Si f est analytique dans un domaine contenant γ qui joint deux points z_0 et z_1, alors $\displaystyle\int_\gamma f dz$ est **indépendante** du choix de γ. Si f n'est pas analytique alors $\displaystyle\int_\gamma f dz$ **dépend** du choix du chemin γ qui joint deux points z_0 et z_1.

Le théorème suivant nous donne quelques propriétés importantes des intégrales sur un chemin. En particulier la propriété (5) nous donne une majoration de l'intégrale.

Théorème 4.7. *Supposons que :*

- *$\gamma(t), a\leq t\leq b$ est un chemin différentiable inclus dans un domaine D,*
- *f et g sont des fonctions complexes continues dans D,*
- *γ_1 et γ_2 sont des chemins joints bout à bout,*

alors,

(1) $\displaystyle\int_\gamma kf(z)\, dz = k\int_\gamma f(z)\, dz,$ *pour tout* $k\in\mathbb{C}$.

(2) $\displaystyle\int_\gamma [f(z)+g(z)]\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz + \int_\gamma g(z)\, dz.$

(3) $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_{\gamma} f(z)\,dz.$

(4) $\displaystyle\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$

(5) $\displaystyle\left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right| \leq \max_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot L(\gamma).$

Démonstration. On donne la démonstration de la propriété (5), les autres sont laissées comme exercices. D'après la proposition précédente, on a

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt,$$

donc

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\right| \\
&\leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt \\
&\leq \int_a^b \max_{z\in\gamma} |f(z)||\gamma'(t)|\,dt \\
&\leq \max_{z\in\gamma} |f(z)| \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \\
&\leq \max_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot L(\gamma).
\end{aligned}$$

□

Exemple 9. Montrer que $\displaystyle\left|\oint_{|z|=4} \frac{e^z}{z+1}\,dz\right| \leq \frac{8\pi e^4}{3}.$

Solution. La longueur du chemin $\gamma(t) = 4e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ est la circonférence du cercle de rayon 4 qui est 8π. De plus $|z+1| \geq |z| - 1 = 4 - 1 = 3$ et $|e^z| = |e^{\operatorname{Re} z}| \leq e^4$, donc

$$\left|\frac{e^z}{z+1}\right| \leq \frac{|e^z|}{|z|-1} \leq \frac{e^4}{3}$$

et

$$\left|\oint_{|z|=4} \frac{e^z}{z+1}\,dz\right| \leq \max_{z\in\gamma} \left|\frac{e^z}{z+1}\right| \cdot L(\gamma) \leq \frac{8\pi e^4}{3}.$$

Indice d'un point par rapport à un lacet

Définition 4.8. Soit γ un lacet dans un domaine D qui ne passe pas par z_0. On défini l'indice du point z_0 par rapport à γ et on note $I(\gamma, z_0)$ par :

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}. \tag{2}$$

Remarque. En utilisant la définition de l'intégration le long d'un chemin et en déformant le lacet en un cercle $\gamma(t) = z_0 + re^{int}, 0 \leq t \leq 2\pi$, on obtient

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{nie^{nit}}{e^{nit}} dt = n.$$

L'indice est une quantité qui mesure le « **nombre de tours algébrique** » réalisé par le lacet autour du point z_0 et donc $I(\gamma, z_0)$ est un nombre entier.

Exemple 10. Pour $0 \leq t \leq 2\pi$, soient $\gamma_1(t) = e^{2it}, \gamma_2(t) = e^{-3it}$ et $\gamma_3(t) = 3 + e^{it}$. Calculer $I(\gamma_k, 0), k = 1, 2, 3$.

Solution. Notons $\gamma_i, i = 1, 2, 3$, ne passe pas sur $z = 0$ car $|\gamma_i(t)| \geq 1$.

(1) $I(\gamma_1, 0) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2ie^{2it}}{e^{2it}} dt = 2$. En effet γ_1 fait 2 révolutions autour de $z = 0$.

(2) $I(\gamma_2, 0) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{-3ie^{-3it}}{e^{-3it}} dt = -3$. Dans ce cas γ_2 fait 3 révolutions au sens négatif autour de $z = 0$.

(3) $I(\gamma_3, 0) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{3 + e^{it}} dt = 0$, car $z = 0$ n'est pas à l'intérieur de γ_3.

Proposition 4.9. *Pour $r > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$, soit γ un lacet défini par $\gamma(t) = re^{kit}$, alors*

$$I(\gamma, z_0) = \begin{cases} k & \text{si } z_0 \text{ est à l'intérieur de } \gamma, \\ 0 & \text{si } z_0 \text{ n'est pas à l'intérieur de } \gamma. \end{cases}$$

Exemple 11. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, où $\gamma(t) = a + re^{it}$, $r > 0$ et $a \in \mathbb{C}$. On a les trois cas suivants :

- si $|a - z_0| = r \implies \gamma$ passe par z_0 et donc $I(\gamma, z_0)$ n'est pas défini.
- si $|a - z_0| > r \implies I(\gamma, z_0) = 0$

• si $|a - z_0| < r \implies I(\gamma, z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{a + re^{it} - z_0} dt = 1.$

Considérons la figure suivante. En utilisant la proposition précédente, on trouve que :

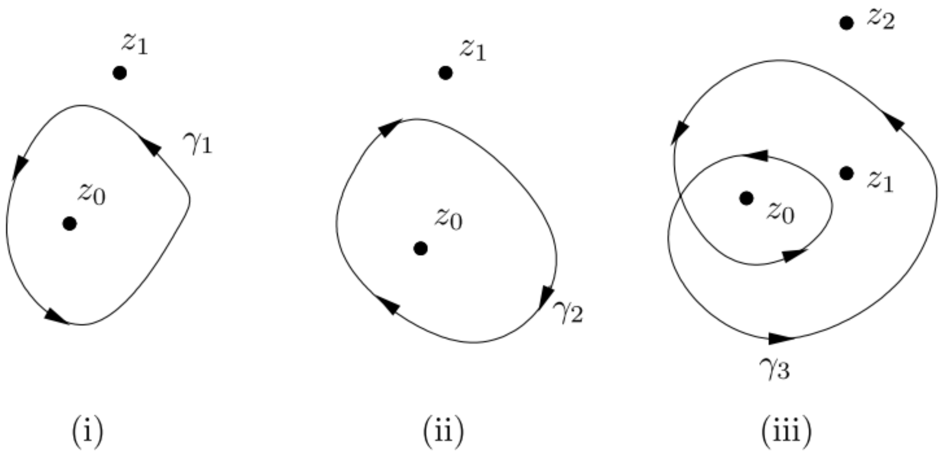


FIGURE 4.5 – Indice

(i) $I(\gamma_1, z_0) = 1$ et $I(\gamma_1, z_1) = 0$.

(ii) $I(\gamma_2, z_0) = -1$ et $I(\gamma_2, z_1) = 0$.

(iii) $I(\gamma_3, z_0) = 2$, $I(\gamma_3, z_1) = 1$ et $I(\gamma_3, z_2) = 0$.

Proposition 4.10. *Soient γ_1, γ_2 des lacets qui ne passent pas par z_0, alors*

(a) $I(-\gamma_1, z_0) = -I(\gamma_1, z_0)$.

(b) $I(\gamma_1 + \gamma_2, z_0) = I(\gamma_1, z_0) + I(\gamma_2, z_0)$.

Démonstration. En utilisant la définition de l'indice et les propriétés d'intégration, on a

(a) $I(-\gamma_1, z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_{-\gamma_1} \frac{dz}{z - z_0} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z - z_0} = -I(\gamma_1, z_0).$

(b) $I(\gamma_1 + \gamma_2, z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_{\gamma_1+\gamma_2} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z - z_0} + \oint_{\gamma_2} \frac{dz}{z - z_0} \right) = I(\gamma_1, z_0) +$ $I(\gamma_2, z_0)$.

□

4.2 Théorème de Cauchy

Dans le cas général, l'intégrale $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)dz$ dépend aussi bien de la fonction à intégrer $f(z)$ que du contour d'intégration γ. Cependant, si une fonction est analytique dans un domaine simplement connexe contenant un contour γ, son intégrale ne dépend que de la position des extrémités de γ et ne dépend pas de la forme du contour γ. En 1825, le mathématicien français Louis-Augustin Cauchy a démontré l'un des théorèmes les plus importants dans l'analyse complexe.

Théorème 4.11 (Théorème de Cauchy). *Supposons que f est une fonction analytique dans un domaine simplement connexe $D \subset \mathbb{C}$, que f' est continue sur D et soit γ un lacet dans D, alors*

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0. \tag{3}$$

Démonstration. Il y a beaucoup de preuves du théorème de Cauchy. Ici, nous donnons une démonstration basée sur le théorème de Green. Nous supposons (en plus des hypothèses énoncées) que f possède des dérivées partielles continues.
Le théorème de Green stipule ce qui suit : supposons que $\gamma = \partial\Gamma$ un lacet délimitant une région Γ, g, h sont des fonctions C^1 définie sur un ensemble ouvert contenant Γ, alors

$$\int_{\gamma} g(x,y)dx + h(x,y)dy = \int\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) dxdy.$$

Posons $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ et $dz = dx + idy$, alors

$$\begin{aligned}
\oint_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\gamma} (u+iv)(dx+idy) \\
&= \int_{\gamma} udx - vdy + i\int_{\gamma} vdx + udy \\
&= \iint_{\Gamma} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy \\
&= 0
\end{aligned}$$

puisque f est une fonction holomorphe, alors les conditions de Cauchy Riemann sont vérifiées d'où le résultat. □

Remarque. L'importance du théorème de Cauchy réside dans le fait que nous n'avons pas besoin de savoir si f a une primitive sur D. Si f avait une primitive sur D alors le résultat suit immédiatement du théorème fondamental de l'intégration sur un contour. Toutefois, possédant une primitive est une hypothèse extrêmement forte sur f.

En 1883, le mathématicien français Édouard Goursat a montré que l'hypothèse de la continuité de f' n'était pas nécessaire pour arriver à la conclusion du théorème de Cauchy. La version modifiée résultant du théorème de Cauchy est connu aujourd'hui sous le nom du théorème de **Cauchy-Goursat**.

Théorème 4.12 (**Théorème de Cauchy–Goursat**). *Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe D de $\mathbb{C}$ et γ un lacet de D, alors*

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0. \tag{4}$$

Remarque. Puisque l'intérieur d'un simple lacet est simplement connexe, le théorème de Cauchy-Goursat peut être formulé d'une manière plus pratique comme suit :

Si f est analytique sur et à l'intérieur d'un lacet simple γ, alors $\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$.

Un corollaire évident du théorème précédent est le suivant.

Corollaire 4.13. *Si f est entière et γ est un lacet alors $\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$.*

Théorème 4.14. *Supposons que C et C_1 sont deux lacet positivement orientés tel que C_1 est à l'intérieur de C comme dans la figure (4.6). Supposons que $f(z)$ est analytique sur et entre les deux lacets C et C_1. Alors on a*

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz.$$

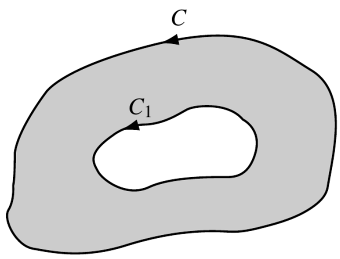


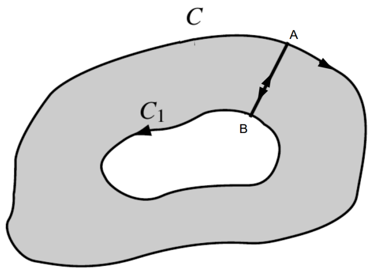
FIGURE 4.6 – Théorème de Cauchy-Goursat dans un domaine non simplement connexe

Démonstration. La fonction f est analytique dans la région entre les lacets C et C_1. On joint les deux lacets par le segment AB dans la figure dessous. En utilisant le théorème de Cauchy-Goursat on a

$$\oint_{-C} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz + \oint_{C_1} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz = 0,$$

et puisque $\int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz$ et $\oint_{-C} f(z)dz = -\oint_{C} f(z)dz$ on obtient

$$\oint_{C} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz = 0.$$



□

Corollaire 4.15. *Soit γ un lacet et z_0 est à l'intérieur de γ alors il existe $r > 0$ tel que $|z - z_0| = r$ est à l'intérieur de γ et*

$$\oint_{\gamma} (z-z_0)^n dz = \oint_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i I(\gamma, z_0) & \text{si } n = -1 \\ 0 & \text{si } n \neq -1 \end{cases}.$$

Exemple 12.

(1) $\oint_{\gamma} z^2 dz = 0$ pour n'importe quel lacet γ car z^2 est entière.

(2) $\oint_{|z|=1} e^z dz = 0$, puisque $f(z) = e^z$ est entière et que $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ est lacet dans $\mathbb{C}$.

(3) $\oint_{|z-3|=1} \frac{1}{z} dz = 0$ car $\frac{1}{z}$ est analytique dans le disque $|z - 3| \leq 1$.

(4) $\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ où Γ est le rectangle dont les sommets sont $2+2i, -2+2i, -2-2i$ et $2 - 2i$. On transforme le rectangle au cercle $|z| = 1$ et donc on aura

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = \frac{ie^{it}}{e^{it}}\, dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i.$$

Théorème 4.16. *Supposons que $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont des lacets positivement orientés tels que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont tous à l'intérieur de C comme dans la figure (4.7). Supposons que $f(z)$ est analytique sur et entre les lacets. Alors on a*

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz.$$

Ce théorème est une généralisation du théorème (4.14).

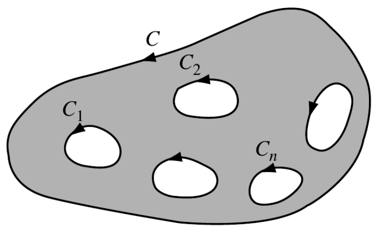


FIGURE 4.7 – Théorème de Cauchy-Goursat dans un domaine multi-connexe

Exemple 13. Calculer $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)}$.

Solution. On remarque que les deux singularités $z = \pm 3i$ sont à l'intérieur de $|z| = 4$ et donc on peut utiliser le théorème précédent pour obtenir

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)} &= \oint_{|z|=4} \frac{dz}{(z-3i)(z+3i)} \\
&= \frac{i}{6} \oint_{|z|=4} \frac{1}{(z+3i)} - \frac{1}{(z-3i)} dz \\
&= \frac{i}{6} \oint_{|z+3i|=1} \frac{1}{(z+3i)} dz - \frac{i}{6} \oint_{|z-3i|=1} \frac{1}{(z-3i)} dz \\
&= \frac{i}{6}(2\pi i) - \frac{i}{6}(2\pi i) = 0.
\end{aligned}$$

4.3 Primitives et indépendance du chemin d'intégration

Définition 4.17. Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction complexe continue. On dit que $F : D \to \mathbb{C}$ est une **primitive** de f sur D si $F' = f$.

Exemple 14. La fonction $F(z) = z + e^z$ est une primitive de $f(z) = 1 + e^z$.

Théorème 4.18 (Théorème fondamental d'intégration sur un chemin).
Supposons $D \subset \mathbb{C}$ est un domaine simplement connexe et que $f : D \to \mathbb{C}$ est continue, $F : D \to \mathbb{C}$ est une primitive de f sur D et $\gamma : [a, b] \to D$, $\gamma(a) = z_0, \gamma(b) = z_1$ un chemin joignant z_0 et z_1 alors,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0). \tag{5}$$

Si de plus le chemin γ est fermé c.a.d. $\gamma(a) = \gamma(b)$ alors

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0. \tag{6}$$

Démonstration. Soit $\gamma : [a, b] \to D$, $\gamma(a) = z_0, \gamma(b) = z_1$, un chemin différentiable. Soit $w(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$ et $F(t) = F(\gamma(t))$, alors on

$$W'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$$

Posons $w(t) = u(t) + iv(t)$ et $W(t) = U(t) + iV(t)$ tel que $U' = u, V' = v$, alors

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f\left(\gamma\left(t\right)\right)\gamma'\left(t\right)dt\\ &= \int_a^b w\left(t\right)dt\\ &= \int_a^b u\left(t\right)dt + i\int_a^b v\left(t\right)dt\\ &= U\left(t\right)\big|_a^b + i\,V\left(t\right)\big|_a^b\\ &= W\left(t\right)\big|_a^b\\ &= F(z_1) - F(z_0).\end{aligned}$$

Évidement si le chemin est fermé $z_0 = \gamma(a) = \gamma(b) = z_1$ et donc l'intégrale sera nulle. □

Remarque. Notons que (5) est indépendante du chemin qu'on choisi.

Théorème 4.19. *Soit D un ouvert simplement connexe et $\gamma \subset D$ est un chemin quelconque joignant $z_0 = \gamma(a)$ et $z_1 = \gamma(b)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *f est analytique sur D.*

(2) $F(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} f(s)\, ds$ *est analytique sur* D *et* $F'(z) = f(z)$.

(3) $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$ *est indépendante du chemin* $\gamma \subset D$.

(4) $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0$ *si* γ *est un lacet dans* D.

Exemple 15. Soient $f(z) = z^2$, et γ un chemin quelconque entre $z_0 = 0$ et $z_1 = 1+i$. Alors $F(z) = z^3/3$ est une primitive de f et

$$\int_{\gamma} z^2 dz = (z_1^3 - z_0^3)/3 = (1+i)^3/3 = (-2+2i)/3.$$

Cette réponse est la même que celle obtenue dans l'exemple (8) en utilisant les chemins $\gamma_1(t) = t + it, 0 \leq t \leq 1$ et $\gamma_2(t) = t + it^2, 0 \leq t \leq 1$.

Attention. Soit $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ et $f(z) = \dfrac{1}{z}$, qui est définie sur $D = \mathbb{C} - \{0\}$.

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \int_{0}^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\gamma'(t)dt = 2\pi i \neq 0.$$

Si f avait une primitive alors $\displaystyle\oint_{\gamma} f = 0$, donc f n'admet pas de primitive sur n'importe quel chemin fermé γ contenant $z = 0$ dans son intérieur. On peut penser que $F(z) = \operatorname{Log} z$ est une primitive de f, mais elle y est seulement sur $D_1 = \mathbb{C} - \{z : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\} \neq D$.

En général, la recherche d'une primitive n'est pas la meilleure façon de calculer des intégrales complexes. Il existent des techniques beaucoup plus puissantes qui nous permettent de calculer un grand nombre intégrales complexes sans avoir à se soucier de la primitive. Une telle technique est l'application du théorème de Cauchy sur γ qui est un contour fermé dans $\mathbb{C}$.

4.4 Formule d'intégration de Cauchy et ses conséquences

On sait que d'après le chapitre 2 que la fonction $f : D \to \mathbb{C}$ est dite analytique au point z_0 si elle est développable en série entière au voisinage de z_0.

Théorème 4.20 (Formule de Cauchy). *Soit* f *une fonction holomorphe (ou analytique) sur un ouvert simplement connexe* D *de* $\mathbb{C}$ *et* $z_0 \in D$ *et soit* $\gamma : [a, b] \to D$ *un* *lacet de D avec $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, alors :*

$$f(z_0) \cdot I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \tag{7}$$

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned} g : D &\to \mathbb{C} \\ z \longmapsto g(z) &= \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque f est holomorphe alors g est continue et holomorphe sur D. Ce qui donne d'après le théorème de Cauchy que $\int_{\gamma} g(z)dz = 0$, c-a-d, $\int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = (2\pi i)\, f(z_0).I(\gamma, z_0)$. Ce qui fallait prouver. □

Exemple 16. Calculer $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z - z_0} dz$, pour tout z_0 de $\mathbb{C}$.

Solution.
• si $|z_0| > 1 \implies$ la fonction $\frac{e^z}{z - z_0}$ est holomorphe à l'intérieur de $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ et donc d'après le théorème de Cauchy on a $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z - z_0} dz = 0$.
• si $|z_0| < 1$, on pose $f(z) = e^z$ qui est holomorphe à l'intérieur de $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, donc d'après la formule d'intégration de Cauchy, on trouve : $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z - z_0} dz = (2\pi i)\, e^{z_0}$.

Exemple 17. Calculer $\oint_{|z|=2} \frac{z^2 - 4z + 1}{z + i}\, dz$.

Solution. Soit $f(z) = z^2 - 4z + 1$, $z_0 = -i$ et notons que f est analytique dans $|z| \leq 2$ et que z_0 est à l'intérieur du disque $|z| \leq 2$. D'après la formule de Cauchy, on obtient :

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2 - 4z + 1}{z + i}\, dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i \times 4i = -8\pi.$$

Exemple 18. Calculer $\oint_{|z-2i|=4} \frac{z}{z^2 + 9}\, dz$.

Solution. Notons que $z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i)$ et que seul $z_0 = 3i$ est à l'intérieur de $|z - 2i| = 4$. Si on choisit $f(z) = \frac{z}{z + 3i}$ et en utilisant la formule de Cauchy, on obtient :

$$\oint\limits_{|z-2i|=4} \frac{z}{z^2+9}\,dz = \oint\limits_{|z-2i|=4} \frac{f(z)}{z-3i}\,dz = 2\pi i f(3i) = 2\pi i \times \frac{3i}{6i} = i\pi.$$

Dans le théorème suivant, on donnera une généralisation de la formule d'intégration de Cauchy.

Théorème 4.21 (**Formule de Cauchy pour la dérivée**). *Supposons que f est analytique sur un domaine simplement connexe D et γ est un lacet dans D. Alors la dérivée f' est analytique et pour tout z_0 dans l'intérieur de γ on a*

$$f'(z_0)I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz, \tag{8}$$

Démonstration. Le terme $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)}$ dans la formule de Cauchy est une fonction analytique de z_0 dans D. On peut donc dériver sous l'intégrale part rapport a z_0 pour obtenir

$$\begin{aligned}
f'(z_0)I(\gamma, z_0) &= \frac{d}{dz_0}[f(z_0)I(\gamma, z_0)] \\
&= \frac{d}{dz_0}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{d}{dz_0}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz.
\end{aligned}$$

□

Un argument simple d'induction nous donne le résultat fondamentale suivant.

Théorème 4.22 (**Formule de Cauchy pour les dérivées**). *Supposons que f est analytique sur un domaine simplement connexe D et γ est un lacet inclus dans D. Alors la dérivée f' est analytique et pour tout z_0 dans l'intérieur de γ et $n = 1, 2, 3, \ldots$ on a*

$$f^{(n)}(z_0)I(\gamma, z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \tag{9}$$

ou bien

$$\oint\limits_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)I(\gamma, z_0). \tag{10}$$

Une conséquence immédiate du théorème précédent est le résultat suivant qui affirme que si une fonction f est $\mathbb{C}$-différentiable sur un domaine D alors elle est infiniment $\mathbb{C}$-différentiable sur ce domaine.

Théorème 4.23 (Toute fonction analytique est infiniment $\mathbb{C}$-différentiable). *La dérivée d'une fonction analytique est aussi analytique. Donc toute fonction analytique est infiniment $\mathbb{C}$-différentiable. Si f est analytique sur un domaine D, alors toutes ses dérivées de n'importe quel ordre $f', f'', f''', \ldots$ sont également analytiques sur D.*

Exemple 19. Calculer les intégrales suivantes :
(a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z^2}\,dz$ (b) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^3}\,dz$

Solution.
(a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z^2}\,dz = 2\pi i \left.\frac{d}{dz}\sin(z)\right|_{z=0} = 2\pi i\cos(0) = 2\pi i.$

(b) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^3}\,dz = \pi i \left.\frac{d^2}{dz^2}\cos(z)\right|_{z=0} = -\pi i\cos(0) = -\pi i.$

Exemple 20. Calculer $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z+1}{z^4+2iz^3}\,dz.$

Solution. Par inspection on voit que les singularités sont $z = 0, -2i$ mais seulement $z = 0$ est à l'intérieur du lacet $|z| = 1$. Posons $f(z) = \dfrac{z+1}{z+2i}$ alors $f''(z) = \dfrac{2-4i}{(z+2i)^3}$ et en utilisant la formule (9) avec $z_0 = 0$ et $n = 2$ on aura

$$\oint_{|z|=1} \frac{z+1}{z^4+2iz^3}\,dz = \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}f''(0) = \frac{2\pi i}{2!}\frac{2i-1}{4i} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}i.$$

Exemple 21. Calculer $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{2016}}dz.$

Solution. La fonction $f(z) = e^z$ est une fonction entière. En utilisant la formule d'intégration de Cauchy (9), on trouve

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{2016}}dz = \frac{2\pi i}{2015!}f^{(2015)}(0) = \frac{2\pi i}{2015!}.$$

Exemple 22. Calculer $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$, où $\gamma(t) = 3e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Solution. La fonction $f(z) = e^{2z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Donc la formule d'intégration (9), nous donnons $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{f(z)}{(z+1)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(-1) = \frac{8\pi i}{3e^2}$.

Exemple 23. Calculer $\displaystyle\int_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\, dz$, où C est la courbe dans la figure dessous.

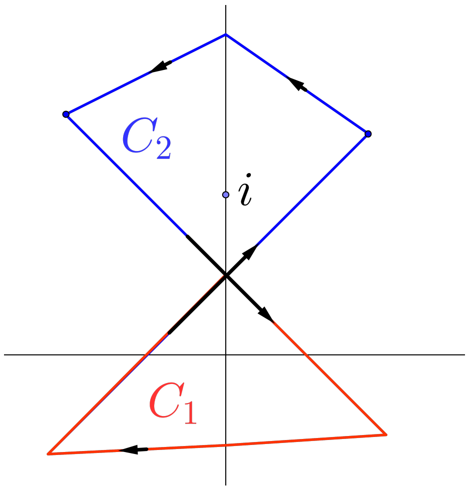


FIGURE 4.8 – Chemin en figure-8

Solution.

$$\int_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\, dz = -\int_{C_1} \frac{(z^3+3)/(z-i)^2}{z}\, dz + \int_{C_2} \frac{(z^3+3)/z}{(z-i)^2}\, dz = -I_1 + I_2.$$

Pour calculer I_1, on choisit $f_1(z) = \dfrac{(z^3+3)}{(z-i)^2}$, $z_0 = 0$ et on aura

$$I_1 = \int_{C_1} \frac{(z^3+3)/(z-i)^2}{z}\, dz = \int_{C_1} \frac{f_1(z)}{z}\, dz = 2\pi i f_1(0) = -6\pi i.$$

Pour calculer I_2 on choisit $f_2(z) = \dfrac{(z^3+3)}{z}$, $z_0 = i$ et on trouve

$$I_2 = \int_{C_2} \frac{(z^3+3)/z}{(z-i)^2}\, dz = \int_{C_2} \frac{f_2(z)}{z}\, dz = 2\pi i f_2'(i) = 2\pi i(3+2i) = (-4\pi + 6\pi i).$$

Finalement, on obtient

$$\int_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\, dz = -I_1 + I_2 = -4\pi + 12\pi i.$$

Théorème 4.24 (Inégalité de Cauchy).
Soit f une fonction holomorphe sur le disque $D(z_0, R)$, $R > 0$, alors $f(z)$ est développable en série entière sur ce disque, de plus on a l'inégalité :

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}, \text{ pour tout } 0 < r < R \tag{11}$$

où $M = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

Démonstration. Soit le lacet $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, où $\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$. On a

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}}d\theta \\
&\Longrightarrow |r^n a_n| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|e^{-in\theta}\right| . \left|f(z_0+re^{i\theta})\right| d\theta \leq \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&\Longrightarrow |a_n| \leq \frac{M}{r^n}.
\end{aligned}$$

Puisque $f^{(n)}(z_0) = n!a_n$ alors on aura

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}, \text{ pour tout } 0 < r < R$$

□

Théorème 4.25 (Théorème de Liouville).
Toute fonction entière et bornée est constante.

Démonstration. Soit $f(z)$ une fonction entière et bornée c.a.d. $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. D'après l'inégalité de Cauchy pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, on a

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r} \to 0 \quad \text{quand} \quad r \to \infty.$$

Donc $|f'(z_0)| = 0$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ ce qui montre que f est constante. □

Exemple 24. Soit f une fonction holomorphe sur le plan $\mathbb{C}$ et supposons que $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq M$ sur $\mathbb{C}$, avec $M > 0$. Montrer que $f(z)$ est un polynôme de degré ≤ 1 sur $\mathbb{C}$.
Solution. On pose $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, si $z \neq 0$ et $g(z) = 0$, si $z = 0$. Cette fonction vérifie les conditions de Liouville, donc elle est constante sur $\mathbb{C}$. Ce qui donne $\frac{f(z)}{z} = \lambda$, donc $f(z)$ est un polynôme de degré ≤ 1 sur $\mathbb{C}$.
On peut généraliser cet exemple dans le corollaire suivant.

Corollaire 4.26. *Si une fonction entière satisfait* $|f(z)| \leq M|z|^n$ *pour* $|z| \to +\infty$ *alors la fonction* f *est un polynôme de degré au plus* n.

Attention. Les fonction $\exp, \cos, \sin, \sinh$ et $\cosh$ sont des fonctions entières et non constantes, ne peuvent donc être bornées. Le théorème de Liouville est faux sur l'axe réel. En effet, les mêmes fonctions de la variable réelle cette fois sont entières et bornées sur $\mathbb{R}$ sans être constantes.

Théorème 4.27 (Théorème fondamental d'algèbre de D'Alembert-Gauss).
Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe.

Démonstration. Soit P un polynôme non constant de degré n tel que $P(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. La fonction $f = 1/P$ est donc non constante et analytique. On a

$$P(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right),$$

avec $a_n \neq 0$, donc $|P(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$. Il existe donc $M > 0$ tel que f est bornée à l'extérieur du disque $|z| \leq M$. Mais, puisque f est continue elle doit être bornée sur le disque $|z| \leq M$. En conclusion, f est une fonction entière bornée sur $\mathbb{C}$, donc doit être constante d'après le théorème de Liouville. Cela entraîne que P est aussi constant qui constitue une contradiction. $\square$

Remarque. Par récurrence sur le degré et division euclidienne, ce résultat entraîne qu'un polynôme de degré n admet exactement n racines complexes, comptées avec leurs multiplicités.

Corollaire 4.28. *Soit* $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ *un polynôme de degré* $n \geq 1$ *avec coefficients* $a_j \in \mathbb{C}$, *alors ils existent,* $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ *tels que*

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Maintenant on donne un théorème considéré comme la réciproque de théorème de Cauchy.

Théorème 4.29 (Théorème de Morera).
Supposons que f *est continue sur un domaine simplement connexe* D *et*

$$\oint_\gamma f(x)\, dz = 0$$

pour tout lacet γ de D. Alors f est analytique sur D.

Démonstration. Puisque f est continue alors elle admet une primitive

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds \quad \text{pout} \quad \text{tout} \quad z \in D,$$

où z_0 est un point fixe à l'intérieur de D. Donc F est analytique dans D et par conséquent sa dérivée f est aussi analytique. □

Théorème 4.30 (Formule de la moyenne de Gauss).
Supposons que f est analytique sur un domaine simplement connexe D et que $C(z_0, r) \subset D$, alors

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt.$$

Démonstration. Soit $\gamma(t) = z_0 + e^{it}$, avec $0 \le t \le 2\pi$ une paramétrisation du cercle $C(z_0, r)$. La formule de Cauchy nous donne

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z_0} rie^{it}\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt.$$

□

Une des conséquences importantes du théorème de Cauchy est le résultat connu sous le nom du **principe du module maximum** qui dit que pour une fonction holomorphe non constante f sur un domaine (ouvert et connexe) D, alors le module $|f|$ ne peux pas avoir un maximum (minimum) dans le domaine D.

Théorème 4.31 (Le principe du module maximum). *Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine (ouvert et connexe) et $f : D \to \mathbb{C}$ analytique. S'il existe $a \in D$ tel que $|f(a)| \ge |f(z)|$ pour tout $z \in D$, alors f est constante.*
En d'autres termes $|f(z)|$ ne peut pas avoir un maximum dans D, sauf si f est constante.

Démonstration. La démonstration dépend de ce résultat topologique qui stipule que toute fonction analytique non constante est une application ouverte. C'est à dite que l'image de tout ouvert par une fonction analytique est aussi un ouvert.
Supposons que $|f|$ atteint son maximum en $a \in D$ c.a.d. $|f(a)| = \max_{z \in D} |f(z)| > 0$. Comme f est analytique, c'est une application ouverte, d'où il existe $\delta > 0$ tel que le disque $D(f(a), \delta) \subset f(D)$. Soit $w = f(a)\left[1 + \frac{\delta}{2|f(a)|}\right]$. Alors $w \in D(f(a), \delta)$ et par conséquent il existe $z \in D$ tel que $w = f(z)$ et d'autre part, $|f(z)| = |w| > f(a)$, ce qui est une contradiction. □

Le principe du maximum oblige le module d'une fonction analytique non constante à ne pas avoir de maximum local sur un ouvert connexe D. Ce maximum va donc forcément être atteint sur la frontière ∂D. Le corollaire suivant est souvent nommé le principe du module maximum dû à ses divers applications aux problèmes d'optimisation.

Corollaire 4.32 (Le principe du module maximum). *Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine (ouvert et connexe) borné, $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ continue et f analytique sur D, alors*

$$\max_{z \in D} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

En d'autres termes $|f|$ atteint son maximum sur la frontière ∂D et nulle part ailleurs.

Démonstration. En effet $\overline{D}$ est fermé et borné dans $\mathbb{C}$, il est donc compact. La fonction continue $|f(z)|$ y atteint donc son maximum en un point z_0 qui ne peut être à l'intérieur de $\overline{D}$ d'après le principe du maximum. Le maximum de $|f(z)|$ est donc atteint sur la frontière ∂D. □

Exemple 25. Trouver le maximum de $f(z) = 2z + 5i$ sur $|z| \leq 2$.

Solution. On a

$$|2z + 5i|^2 = (2z + 5i)(2\overline{z} - 5i) = 4|z|^2 + 20 \operatorname{Im} z + 25.$$

D'après le principe du maximum on a

$$\max_{|z| \leq 2} |2z+5i| = \max_{|z|=2} |2z+5i| = \max_{|z|=2} \sqrt{4|z|^2 + 20 \operatorname{Im} z + 25} = \sqrt{4 \times 2^2 + 20 \times 2 + 25} = 9.$$

Exemple 26. Trouver le maximum et le minimum de $f(z) = z^2 - 2$ sur $|z| \leq 1$.

Solution. D'après le principe du maximum on a :
$\max_{|z| \leq 1} |z^2 - 1| = \max_{|z|=1} |z^2 - 1| = \max_{t \in [0,2\pi]} |\exp(2it) - 1| = |-1-2| = 3$ et
$\min_{|z| \leq 1} |z^2 - 1| = \min_{|z|=1} |z^2 - 1| = \min_{t \in [0,2\pi]} |\exp(2it) - 1| = |1-2| = 1.$

4.5 Exercices

Calculer les intégrales curvilignes $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ dans les suivants :

1. $f(z) = 2z+1, \quad \gamma(t) = (2t+i4t) \quad \text{et} \quad 1 \le t \le 3.$

2. $f(z) = 3\overline{z} - z, \quad \gamma(t) = (-t+it^2) \quad \text{et} \quad 0 \le t \le 2.$

3. $f(z) = (z-a)^{-2}, \quad \gamma(t) = a + e^{it} \quad \text{et} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

4. $f(z) = |z|^2, \quad \gamma(t) = t^2 + i/t \quad \text{et} \quad 1 \le t \le 2.$

5. $f(z) = \mathrm{Re}(z), \quad \gamma(t) = e^{it} \quad \text{et} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

6. $f(z) = z^2 + z\overline{z}$ et $\gamma(t) = e^{it}$ et $0 \le t \le \pi.$

7. $f(z) = e^{\overline{z}}$, avec γ le segment de $y = -x$ joignant $z_1 = 0$ et $z_2 = \pi(1-i)$.

8. $f(z) = 3z^2 + 2z$ avec γ un chemin joignant $z_1 = 1-i$ et $z_2 = 2+i$.

9. Calculer $\displaystyle\int_\gamma (1+i-2\overline{z})\,dz$ le long du chemin joignant les points $z_1 = 0$ et $z_2 = 1+i$:

(**a**) suivant une droite,

(**b**) suivant la parabole $y = x^2$.

(**c**) suivant la ligne polygonale $(0,0) \to (1,0) \to (1,1)$.

Trouver une borne supérieure de $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|$ dans les cas suivants :

10. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+1}$ et γ est le cercle $|z| = 3$.

11. $f(z) = \dfrac{1}{z^2-3i}$ et γ est le demi cercle droit de $|z| = 5$ de $z = -5i$ jusqu'à $z = 5i$.

12. $f(z) = z^2 + 3$ et γ le segment de $z = 0$ jusqu'à $z = 5+i$.

13. $f(z) = \dfrac{1}{z^3}$ et γ est le quart du cercle $|z| = 2$ de jusqu'à $z = 2i$.

14. Soit $0 < a < b$ sur l'axe réel positif et soit $C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, r > 0\}$ le cercle de rayon r centré en l'origine, parcouru dans le sens positif. Trouver toute les valeurs possible de l'intégrale $\displaystyle\oint_{C_r} \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$ en fonction du rayon r.

15. Sur $U = \mathbb{C} - [0,1]$, on considère la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$. Montrer que, pour tout lacet γ dans U, on a $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$.

16. Si C est l'arc de courbe d'équation $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ joignant les points $(1,1)$ et $(2,3)$. Trouver la valeur de $\displaystyle\int_C \left(12z^2 - 4iz\right) dz$.

17. Trouver tous les lacets possible γ pour que $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\, dz = 0$ dans les cas suivants :

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z^4 + z^2}$ (b) $f(z) = \mathrm{Ln}(z)$ (c) $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$

18. Trouver le plus grand r possible pour que $\displaystyle\oint_{|z+3-4i|=r} \mathrm{Ln}(z)\, dz = 0.$

19. Trouver le plus grand r possible pour que $\displaystyle\oint_{|z-3-4i|=r} \mathrm{Ln}(z)\, dz = 0.$

Calculer les intégrales suivantes.

20. $\displaystyle\oint_{|z|=5} \frac{\sin 3\pi z}{z + \pi/2}\, dz$

21. $\displaystyle\oint_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}\, dz$

22. $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \frac{\cosh(iz)}{z^2 + 4z + 3}\, dz$

23. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^{z^2}}{z - 2}\, dz$

24. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 + 2z}\, dz$

25. $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{\cos z}{z^2}\, dz$

26. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2 - 1)^2}\, dz$

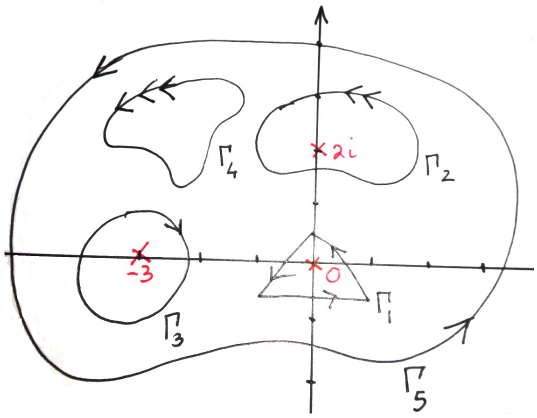
27. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\cosh z}{(z+1)^3 (z-1)}\, dz$

28. $\displaystyle\int_{|z|=1} \left(\frac{e^z}{z+3} - 3\overline{z}\right) dz$

29. $\displaystyle\int_{|2z-4i|=1} \left(\frac{3}{z+2} - \frac{1}{z-2i}\right) dz$

30. Calculer $\displaystyle\int_C \frac{z^3 \cosh z + \sin^3 z}{e^z + 1}\, dz$, où $C = C_1 + C_2$ et C_1, C_2 sont respectivement donnée par $\gamma_1(t) = e^{i\pi t}, 0 \le t \le 3/2$ et par $\gamma_2(t) = -i + t(1+i), 0 \le t \le 1$.

31. Soit $f(z) = \dfrac{z^2 + e^{iz}}{z(z-2i)^2} + \dfrac{1}{(z+3)^3}$ et $\Gamma_i, i = 1, \ldots, 5$ sont données dans la figure. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_{\Gamma_i} f(z)\, dz$ pour $, i = 1, \ldots, 5$.



Soi Γ le rectangle avec sommets $2+2i, -2+2i, -2-2i, 2-2i$ orienté positivement. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_\Gamma f_i(z)\,dz$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

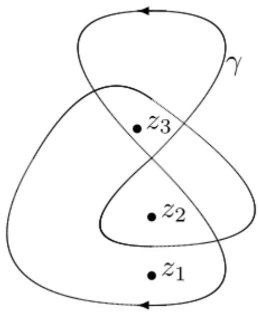
32. $f_1(z) = \dfrac{\sin(z^2+1)}{(z+3)^2 e^z}$

33. $f_2(z) = \dfrac{\sin(z^2+1)}{z(z+5)}$

34. $f_3(z) = \dfrac{\sin(z^2+1)}{(z-1)^3}$

35. $f_4(z) = \dfrac{\sin(z^2+1)}{z^2+2}$

36. Calculer l'indice $I(\gamma, z_i), i = 1, 2, 3$ pour le chemin fermé γ donné ci-dessous.



37. Soit γ un lacet différentiable par morceaux définie sur $[0,1]$; et soit $a \in \mathbb{C}/\operatorname{Image}\gamma$. On suppose qu'il existe une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ vérifiant $e^{f(z)} = \gamma(t) - a$. Montrer que $I(\gamma, a) = \dfrac{f(1)-f(0)}{2\pi i}$; puis en déduire que $I(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$.

38. Soit l'ellipse $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t$. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$ par deux méthodes différentes ; puis déduire que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$.

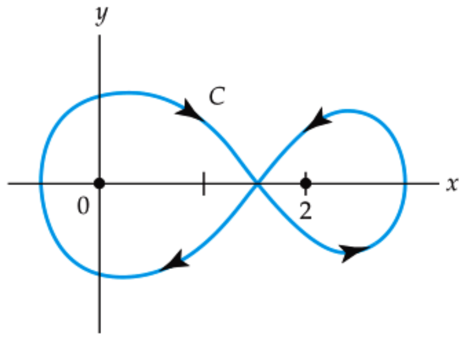
Soit C le chemin donné dans la figure dessous, calculer $\int_C f(z)\,dz$ si :

39. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z(z-2)}$

40. $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2(z-2)}$

41. $f(z) = \dfrac{\cos(z)}{z^2(z-2)^2}$

42. $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2(z+2)^3}$



43. Montrer que si $f(z)$ est analytique sur le disque $|z| \leq 1$ et

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$$

alors

$$|f^{(n)}(0)| \leq (n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

44. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert contenant le disque unité. Exprimer en fonction des valeurs de f l'intégrale $I_1 = \oint_{|z|=1} \left(2+z+\frac{1}{z}\right)\frac{f(z)}{z}\,dz$ et en déduire la valeur de $I_2 = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta.$

45. Vérifier que $\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \operatorname{Im}\left(\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}dz\right)$.

En déduire que, si 0 n'est pas dans l'image de γ, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ est un entier.

46. Soient $m, n \in \mathbb{Z}^*$, et γ_1, γ_2 deux lacets différentiables défini pour $0 \leq t \leq 1$ tel que $0 \notin \operatorname{Image}\gamma_1 \cup \operatorname{Image}\gamma_2$. Si $t \in [0,1]$, on pose $\gamma(t) = [\gamma_1(t)]^m\,[\gamma_2(t)]^n$.

- Vérifier que γ est un lacet et que $0 \notin \operatorname{Image}\gamma$.
- Calculer $I(\gamma, 0)$ en fonction de $I(\gamma_1, 0)$ et $I(\gamma_2, 0)$.

47. Soient $a, b \in \mathbb{C}$; $m, n \in \mathbb{Z}^*$ et $f(z) := (z-a)^n(z-b)^m$. Soit γ un lacet du plan avec $a, b \notin \operatorname{Image}\gamma$. Prouver que $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i\,(nI(\gamma,a) + mI(\gamma,b)\,.)$

48. Soit f une fonction holomorphe sur le plan $\mathbb{C}$ et supposons que $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq M$ sur $\mathbb{C}$, avec $M > 0$. Montrer par deux méthodes différentes que $f(z)$ est un polynôme de degré ≤ 1 sur $\mathbb{C}$.

49. Soit f une fonction holomorphe et non constante sur le plan $\mathbb{C}$, telle que $|f(z)| \geq 1, \quad$ pour tout $\quad z > 1$. Montrer que f admet au moins un zéro sur $\mathbb{C}$.

50. Montrer que si f est une fonction entière telle que $|f| > 1$, alors f est constante.

51. Soit f une fonction holomorphe sur le plan $\mathbb{C}$ et supposons que $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$, pour tout $\quad z \in \mathbb{C}$. Montrer que f est une fonction constante.

Trouver le module maximum de $\max\limits_{z \in D} |f(z)|$ et les points z sur D où cette valeur est atteinte.

52. $f(z) = iz - 1$ et $D : |z| \leq 5$.

53. $f(z) = z^2 - 2z$ et $D : |z| \leq 1$.

54. $f(z) = z^2 - 3z + 2$ et $D : |z| \leq 1$.

55. $f(z) = (iz + 3)^3$ et $D : |z| \leq 1$.

56. $f(z) = e^z$ et $D : |z - 1| \leq 1$.