mini Manuel d'

# Analyse

François Liret
Charlotte Scribot

→ L1
→ IUT

Cours + exos corrigés

DUNOD

# mini Manuel d'Analyse

Cours et exercices corrigés

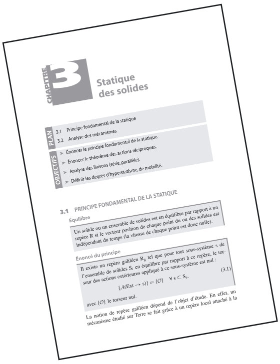
François Liret
Maître de conférences à l'université Paris Diderot

Charlotte Scribot
Professeure agrégée au Lycée de Créteil

DUNOD

ISBN 978-2-10-055447-8

## La page d'entrée de chapitre

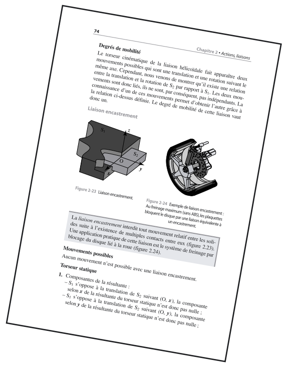

CHAPITRE 3

Statique des solides

PLAN
3.1 Principe fondamental de la statique
3.2 Analyse des mécanismes

OBJECTIFS
➢ Énoncer le principe fondamental de la statique.
➢ Énoncer le théorème des actions réciproques.
➢ Analyse des liaisons (série, parallèle).
➢ Définir les degrés d'hyperstatisme, de mobilité.

Elle rappelle les objectifs pédagogiques du chapitre.



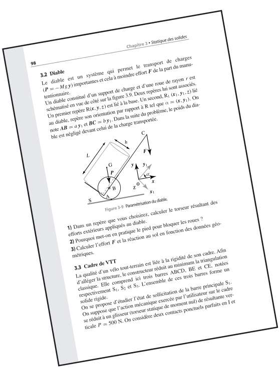
## Le cours

Le cours, concis et structuré, expose les notions importantes du programme.

## Les rubriques

Un exemple pour comprendre


Les conseils, les méthodes



## Les exercices

Ils sont regroupés en fin de chapitre, avec leur solution, pour se tester tout au long de l'année.

# Table des matières

CHAPITRE 1

# Suites et fonctions

OBJECTIFS

Dans ce chapitre, nous rappelons les propriétés de la limite, des fonctions continues et des fonctions dérivables.

Nous revenons aussi sur les fonctions sinus, cosinus, tangente et nous présentons les fonctions trigonométriques réciproques. Enfin, nous introduisons et étudions les fonctions hyperboliques.

## 1.1 DES THÉORÈMES GÉNÉRAUX

### 1.1.1 Limites, fonctions continues

**Définition : limite d'une suite**

➤ Soit $(u_n)$ une suite de nombres et soit $\ell$ un nombre réel ou complexe. On dit que *la suite* $(u_n)$ *a pour limite* $\ell$, ou que $u_n$ tend vers $\ell$ quand $n$ tend vers $+\infty$, si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier $N$ tel qu'on ait l'implication

$$n \geqslant N \Longrightarrow u_n \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]\,.$$

Cela se note $\lim u_n = \ell$.
On a l'équivalence : $\lim u_n = \ell \Longleftrightarrow \lim |u_n - \ell| = 0$.

➤ Une suite est *convergente* si elle a une limite.

**Définition : limite d'une fonction, fonction continue**

➤ Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. Soit $a$ un élément de $D$ ou une borne de $D$. On dit que $f(x)$ *tend vers le nombre réel* $\ell$ *quand* $x$ *tend vers* $a$, ou que *la fonction* $f$ *a pour limite* $\ell$ *en* $a$, si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre $\alpha > 0$ tel qu'on ait l'implication

$$x \in D \text{ et } x \in [a-\alpha, a+\alpha] \Longrightarrow f(x) \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]\,.$$

Cela se note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

- On dit que $f$ *est continue en* $a$ si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que $f$ *est continue* si pour tout $a \in D$, $f$ est continue en $a$.

### Propriétés des limites

- *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = \ell'$, *alors*

$$\lim_{x\to a} f(x)+g(x) = \ell+\ell' \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = \ell\ell'.$$

- *Si de plus* $\ell' \neq 0$, *alors* $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \ell/\ell'$.
- *On a les mêmes propriétés pour les limites de suites.*

### Fonctions continues et limites

**a)** *Toute fonction polynôme est continue sur* $\mathbb{R}$.

**b)** *La somme et le produit de deux fonctions continues est continue. Si $f$ est continue en $a$ et si $f(a) \neq 0$, alors la fonction* $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ *est continue en* $a$.

**c)** *Si $f$ et $g$ sont des fonctions continues et si la fonction composée* $g \circ f : x \mapsto g\big(f(x)\big)$ *est définie, alors $g \circ f$ est continue.*

**d)** *Soit $(u_n)$ une suite et $f$ une fonction telle que la suite $\big(f(u_n)\big)$ est définie. Si* $\lim u_n = \ell$ *et si $f$ est continue en $\ell$, alors* $\lim f(u_n) = f(\ell)$.

## 1.1.2 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

**Théorème des valeurs intermédiaires**. *Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $a, b \in I$. Pour tout nombre $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un nombre $c$ compris entre $a$ et $b$ tel que $f(c) = k$.*

Le nombre $c$ est une solution de l'équation $f(x) = k$. Pour trouver une valeur approchée de $c$, on peut pratiquer la « méthode du partage en deux » qui permet dailleurs de démontrer le théorème.

**Méthode du partage en deux.** Pratiquons-la sur un exemple en cherchant une solution de l'équation $x^3 - x - 1 = 0$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3 - x - 1$. C'est une fonction polynôme, donc elle est continue. On a

$$f(1) = 1-1-1 = -1 < 0 \quad \text{et} \quad f(2) = 2^3-2-1 = 5 > 0$$

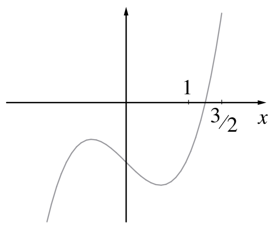
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un nombre $c \in [1,2]$ tel que $f(c) = 0$: ce nombre $c$ est une solution de l'équation $f(x) = 0$. Le milieu du segment $[1,2]$ est $3/2$. Comme on a

$$f(1) < 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{8} > 0$$

on en déduit de même que l'équation $f(x) = 0$ a une solution dans le segment $[1,3/2]$.
Poursuivons : le milieu du segment $[1,3/2]$ est $5/4$ et l'on a

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{19}{64} < 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{3}{2}\right) > 0$$

L'équation $f(x) = 0$ a donc une solution dans le segment $[5/4,3/2] = [1{,}25\,;\ 1{,}5]$. En continuant de cette manière, on obtient des valeurs de plus en plus précises pour une solution de l'équation.




Courbe de la fonction $\boldsymbol{f : x \mapsto x^3 - x - 1}$

**Théorème de l'extremum.** *Soit $a,b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f$ a un maximum et un minimum, c'est-à-dire qu'il existe des nombres $u,v \in [a,b]$ tels que*

$$f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v) \quad \textit{pour tout } x \in [a,b].$$

**Principe de la démonstration.** On commence par montrer que $f$ est majorée en raisonnant par l'absurde (la définition d'une fonction majorée se trouve page 4). Supposons $f$ non majorée, c'est-à-dire qu'il y a des valeurs de $f$ aussi grandes qu'on veut. Soit $m$ le milieu de $[a,b]$. Il y a au moins un des deux intervalles $[a,m]$ ou $[m,b]$ sur lequel $f$ n'est pas majoréee (sinon elle serait majorée sur leur réunion $[a,b]$) : notons $I_1 = [a_1,b_1]$ cet intervalle. On considère la fonction $f$ sur $I_1$ et l'on recommence : on coupe $I_1$ en deux, etc. On obtient ainsi des intervalles emboîtés $I_1, I_2, \ldots$ de plus en plus petits, donc leurs bornes $a_n$ et $b_n$ tendent vers un nombre $c \in [a,b]$. Par construction, $f$ n'est pas majorée sur

$[a_n, b_n]$, donc il existe $c_n \in [a_n, b_n]$ tel que $f(c_n) > n$. On a $\lim f(c_n) = +\infty$. Or $\lim c_n = c$ et $f$ est continue en $c$, donc $\lim f(c_n) = f(c)$ : c'est une contradiction. Ce qu'on a supposé n'est pas vrai, autrement dit $f$ est majorée.
Il reste à montrer (ce que nous admettons) qu'il y a un majorant plus petit que tous les autres et que ce majorant est un maximum de la fonction. ❑

### 1.1.3 Fonctions monotones

**Définitions : suite et fonction croissante, décroissante**

Soit $D$ une partie de $\mathbb{R}$.

- Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est *croissante* si pour tous $x, y \in D$, on a l'implication $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
- Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est *décroissante* si pour tous $x, y \in D$, on a l'implication $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
- Une suite $(u_n)$ est croissante (ou décroissante) si la fonction $n \mapsto u_n$ est croissante (ou décroissante).
- On dit qu'une suite ou une fonction est *monotone* si elle est ou bien croissante, ou bien décroissante.

**Définitions : suite et fonction majorée, minorée, bornée**

- Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est *majorée* s'il existe un nombre $M$ (appelé majorant) tel que, pour tout $x \in D$, on ait $f(x) \leqslant M$.
  Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est *minorée* s'il existe un nombre $m$ (appelé minorant) tel que, pour tout $x \in D$, on ait $f(x) \geqslant m$.
  On définit de même une suite majorée et une suite minorée.
- On dit qu'une suite, ou une fonction, est *bornée* si elle est majorée et minorée.

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est bornée si et seulement s'il existe un nombre $K$ tel que pour tout $x \in D$, $\left|f(x)\right| \leqslant K$.

**Théorème**

**a)** *Toute suite croissante et majorée est convergente.*
*Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.*
*Toute suite décroissante et minorée est convergente.*
*Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.*

**b)** *Soit $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ une fonction croissante (éventuellement $a$ est le symbole $-\infty$, ou $b$ est le symbole $+\infty$).*

- *Si $f$ est majorée, alors $f(x)$ a une limite finie quand $x$ tend vers $b$. Si $f$ n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{x \to b} = +\infty$.*

➤ *Si $f$ est minorée, alors $f(x)$ a une limite finie quand $x$ tend vers $a$. Si $f$ n'est pas minorée, alors $\lim_{x\to a} = -\infty$.*

On a les résultats analogues pour une fonction décroissante.

**Théorème de la bijection.** *Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors $f$ définit une bijection $I \to J$, où $J$ est un intervalle.*
*La bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et a le même sens de variation que $f$.*
*Si $I$ est ouvert (ou semi-ouvert, ou fermé), alors $J$ aussi.*

### 1.1.4 Fonctions dérivables

Rappelons qu'une fonction $f$ est *dérivable en $a$* si le rapport $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie quand $x$ tend vers $a$. Dans ce cas, le nombre

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

s'appelle le *nombre dérivé* de $f$ en $a$. On dit que $f$ est dérivable si $f$ est dérivable en tout point de son ensemble de définition.

**Proposition.** *Toute fonction dérivable en $a$ est continue en $a$.*

**Dérivée et sens de variation.** *Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*
➤ *$f$ est constante si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.*
➤ *Si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors $f$ est croissante sur $I$.*
➤ *Si $f'(x) > 0$ sauf pour un nombre fini de valeurs de $x$, alors $f$ est strictement croissante sur $I$.*

En changeant le sens des inégalités pour $f'(x)$, on obtient bien sûr les résultats analogues pour les fonctions décroissantes.

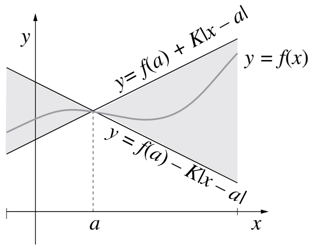
**Inégalités des accroissements finis.** *Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Supposons qu'il existe des nombres $m$ et $M$ tels que $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ pour tout $x \in I$. Si $a,b \in I$ sont tels que $a < b$, alors on a*

$$m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$$

**Démonstration.** La fonction $g : x \mapsto Mx - f(x)$ a pour dérivée $g'(x) = M - f'(x) \geqslant 0$, donc $g$ est croissante. Puisque $a < b$, on en déduit $Ma - f(a) = g(a) \leqslant g(b) = Mb - f(b)$, d'où $f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$. On raisonne de même pour montrer l'autre inégalité. ❑

**Corollaire.** *Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Supposons qu'il existe un nombre $K$ tel que $\left|f'(x)\right| \leqslant K$ pour tout $x \in I$. Alors pour tout $a \in I$ et pour tout $x \in I$, on a*

$$\left|f(x) - f(a)\right| \leqslant K|x-a|$$




La courbe de $f$ reste dans le cône coloré.

Pensez aux inégalités des accroissements finis pour encadrer une expression de la forme $f(b) - f(a)$.

**Exemple.** Pour la fonction $f : x \mapsto \sin x$, on a $f'(x) = \cos x$, donc $\left|f'(x)\right| = |\cos x| \leqslant 1$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$. On en déduit :

$$\text{pour tous } a, b \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin b - \sin a\right| \leqslant |b-a|.$$

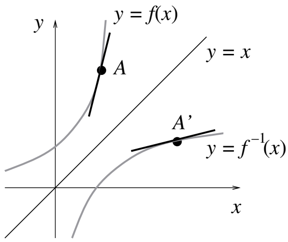
**Dérivée de la bijection réciproque**

*Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Alors $f$ définit une bijection strictement croissante de $I$ sur un intervalle $J$, la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est dérivable et pour tout $b \in J$, on a*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}, \text{ où } a \in I \text{ est le nombre tel que } f(a) = b.$$

Dans un repère orthonormé, les courbes de $f$ et de $f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la bissectrice des axes, d'équation $y = x$.

Soit $A$ un point de la courbe de $f$ et soit $A'$ le point de la courbe de $f^{-1}$, symétrique de $A'$. En $A$ et $A'$, les tangentes ont des pentes inverses, d'après l'égalité ci-dessus.




Si la pente en $A$ est $t$, la pente en $A'$ est $1/t$.

**Démonstration.** La fonction $f$ est continue (car dérivable) et elle est strictement croissante par hypothèse sur le signe de $f'$. D'après le théorème de la bijection, $f$ définit une bijection de $I$ sur un intervalle $J$. Pour tout $y \in J \setminus \{b\}$, posons $\varphi(y) = \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$. On a

$$\varphi\big(f(x)\big) = \frac{f^{-1}\big(f(x)\big) - f^{-1}(b)}{f(x) - b} = \frac{x - a}{f(x) - b}, \quad \text{pour tout } x \in I \setminus \{a\}.$$

Passons à la limite quand $y$ tend vers $b$. Puisque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = b$, il vient

$$\lim_{y \to b} \varphi(y) = \lim_{x \to a} \varphi\big(f(x)\big) = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

car $f'(a) \neq 0$. La fonction $f^{-1}$ a donc pour dérivée en $b$ le nombre $\dfrac{1}{f'(a)}$. ❑

## 1.2 SUITES ITÉRATIVES

Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in I$. Si $u_0 \in I$, alors $u_1 = f(u_0)$ et $u_2 = f(u_1)$ appartiennent à $I$, et l'on peut définir de proche en proche $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

### Rappels

- Si la suite $(u_n)$ a pour limite un nombre $\alpha \in I$ et si $f$ est continue en $\alpha$, alors $\alpha$ est un *point fixe* de la fonction $f$, c'est-à-dire que l'on a $f(\alpha) = \alpha$.
- Si la fonction $f$ est croissante, alors la suite $(u_n)$ est monotone (croissante si $u_1 \geqslant u_0$, décroissante si $u_1 \leqslant u_0$).

Mettons en évidence un cas où la suite $(u_n)$ est convergente.

**Proposition.** *Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in I$. Supposons que*
(i) *il existe $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ ;*
(ii) *la fonction $f$ est dérivable sur $I$ ;*
(iii) *il existe un nombre $K < 1$ tel que, pour tout $x \in I$, $\left|f'(x)\right| \leqslant K$.*
*Alors quel que soit $u_0 \in I$, la suite itérative définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ a pour limite $\alpha$.*

Dans ces conditions, on dit que $\alpha$ est un *point fixe attractif.*

**Démonstration.** On a $u_{n+1} - \alpha = f(u_n) - f(\alpha)$ car $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\alpha) = \alpha$. Appliquons l'inégalité des accroissements finis à la fonction $f$ entre $u_n$ et $\alpha$ : puisqu'on a $\left|f'(x)\right| \leqslant K$ pour tout $x \in I$, il vient

$$\begin{gathered}\left|f(u_n) - f(\alpha)\right| \leqslant K|u_n - \alpha| \\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant K|u_n - \alpha|\end{gathered} \tag{1}$$

Il s'ensuit (démonstration par récurrence) que

$$\text{pour tout } n \geqslant 1, \quad |u_n - \alpha| \leqslant K^n|u_0 - \alpha| \tag{2}$$

Puisqu'on a supposé $0 \leqslant K < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} K^n = 0$, donc aussi $\lim |u_n - \alpha| = 0$, ou encore $\lim u_n = \alpha$. ❑

**Remarques**

**a)** L'inégalité (1) montre que pour tout $n$, on a $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant |u_n - \alpha|$ : la distance de $u_n$ à $\alpha$ est donc décroissante.

**b)** L'inégalité (2) permet de majorer cette distance : par exemple, si $p$ est un entier positif tel que $K^p|u_0 - \alpha| < 10^{-3}$, alors pour tout $n \geqslant p$, on a l'encadrement $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$.

## 1.3 FONCTIONS ET ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

### 1.3.1 Équations $\cos x = \cos\alpha$ et $\sin x = \sin\alpha$

➤ Les solutions de l'équation $\cos x = \cos\alpha$ sont les nombres $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

➤ Les solutions de l'équation $\sin x = \sin\alpha$ sont les nombres $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

### 1.3.2 Fonction $x \mapsto a\cos x + b\sin x$

Soient $a, b$ des nombres réels non tous deux nuls. Posons $K = \sqrt{a^2 + b^2}$. On a alors $\left(\frac{a}{K}\right)^2 + \left(\frac{b}{K}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{K^2} = 1$, donc le point de coordonnées

$\left(\frac{a}{K}, \frac{b}{K}\right)$ est sur le cercle trigonométrique. On en déduit qu'il existe un (unique) nombre $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\frac{a}{K} = \cos\theta \quad \text{et} \quad \frac{b}{K} = \sin\theta$$

Il vient $a\cos x + b\sin x = K(\cos\theta\cos x + \sin\theta\sin x)$, c'est-à-dire

$$a\cos x + b\sin x = K\cos(x-\theta) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

**Équation $a\cos x + b\sin x = c$**

Puisque $K \neq 0$, on a pour tout $x$ l'équivalence :

$$a\cos x + b\sin x = c \iff \cos(x-\theta) = \frac{c}{K}$$

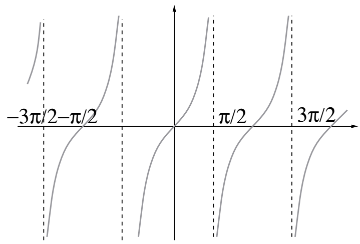
*Premier cas* : $\left|\frac{c}{K}\right| > 1$. L'équation $a\cos x + b\sin x = c$ n'a aucune solution, car la fonction cosinus ne prend que des valeurs dans $[-1, 1]$.
*Second cas* : $\left|\frac{c}{K}\right| \leqslant 1$. Il existe un nombre $\alpha$ tel que $\frac{c}{K} = \cos\alpha$. Les solutions de l'équation $a\cos x + b\sin x = c$ sont alors les nombres $\theta+\alpha+2k\pi$ et $\theta-\alpha+2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

### 1.3.3 Fonction tangente

La fonction *tangente* est définie par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Son ensemble de définition est $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

**Propriétés de la fonction tangente**

- La fonction tangente est $\pi$-périodique, car $\cos(x+\pi) = -\cos x$ et $\sin(x+\pi) = -\sin x$, donc $\tan(x+\pi) = \tan x$.
- La fonction tangente est impaire, car la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.
- On a $\tan'(x) = 1 + (\tan x)^2$. La fonction tangente est donc strictement croissante sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ et aussi, par périodicité, sur tous les intervalles $]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[$, où $k \in \mathbb{Z}$.
- $\lim\limits_{x\to\pi/2} \tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\pi/2} \tan x = -\infty$ : la courbe de tangente a donc une asymptote verticale en $\pi/2$ et en $-\pi/2$.




Courbe de la fonction tangente

## 1.4 FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES RÉCIPROQUES

### 1.4.1 La fonction Arc sinus

**Définition.** Pour tout $x \in [-1,1]$, on note $\text{Arcsin}\, x$ l'unique nombre $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $x = \sin \alpha$.
La fonction $\text{Arcsin} : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ s'appelle la fonction *Arc sinus*.

➤ Pour tout $x \in [-1,1]$, on a $\sin(\text{Arcsin}\, x) = x$.
➤ Pour tout $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a $\text{Arcsin}(\sin\alpha) = \alpha$.

La fonction Arcsin est la bijection réciproque de la fonction $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$.

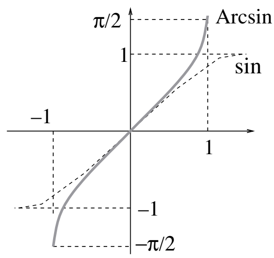
On en déduit les propriétés suivantes.

- La fonction Arcsin est continue et strictement croissante.
- La fonction Arcsin est impaire, car sinus est impaire.
- Soit $b \in ]-1,1[$ et soit $a = \text{Arcsin}\, b$. On a $a \in ]-\pi/2, \pi/2[$, donc $\sin'(a) = \cos a > 0$. Par suite (dérivée de la bijection réciproque)

$$\text{Arcsin}'(b) = \frac{1}{\sin'(a)} = \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}}$$

$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \text{pour tout } x \in ]-1,1[$$

La courbe de Arc sinus a des demi-tangentes verticales aux points $(1, \pi/2)$ et $(-1, -\pi/2)$.




Courbe de Arcsin

### 1.4.2 La fonction Arc tangente

**Définition.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\operatorname{Arctan} x$ l'unique nombre $\alpha \in\, ]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $x = \tan \alpha$.
La fonction $\operatorname{Arctan} : \mathbb{R} \to ]-\pi/2, \pi/2[$ s'appelle la fonction *Arc tangente*.

➤ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$.
➤ Pour tout $\alpha \in\, ]-\pi/2, \pi/2[$, on a $\operatorname{Arctan}(\tan \alpha) = \alpha$.

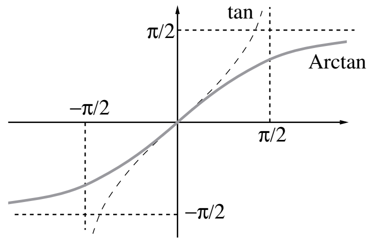
La fonction Arctan est la bijection réciproque de la fonction $\tan : ]-\pi/2, \pi/2[ \to \mathbb{R}$.

On en déduit les propriétés suivantes.

- La fonction Arctan est continue et strictement croissante.
- La fonction Arctan est impaire, car tangente est impaire.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Arctan} x = \pi/2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{Arctan} x = -\pi/2$.
  La courbe de Arctan a donc une asymptote horizontale d'équation $y = \pi/2$ en $+\infty$, et une asymptote horizontale d'équation $y = -\pi/2$ en $-\infty$.
- Soit $b \in \mathbb{R}$ et soit $a = \operatorname{Arctan} b$. Alors $a \in\, ]-\pi/2, \pi/2[$ et $\tan'(a) = 1 + (\tan a)^2 \neq 0$, donc (dérivée de la bijection réciproque)

$$\operatorname{Arctan}'(b) = \frac{1}{\tan'(a)} = \frac{1}{1 + (\tan a)^2} = \frac{1}{1 + b^2}$$

$$\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$




Courbe de Arctan

## 1.5 FONCTIONS HYPERBOLIQUES

**Définitions**

➤ La fonction *sinus hyperbolique*, notée sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

➤ La fonction *cosinus hyperbolique*, notée ch : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

➤ La fonction *tangente hyperbolique*, notée th : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

### 1.5.1 Propriétés des fonctions hyperboliques

**(1)** Les fonctions sh, ch et th sont dérivables et l'on a

$$\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch} x\,, \quad \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh} x \quad \text{et} \quad \operatorname{th}'(x) = 1-(\operatorname{th} x)^2$$

**(2)** $\operatorname{sh}(0) = 0$, $\operatorname{ch}(0) = 1$ et $(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**(3)** Pour tout $x$, on a

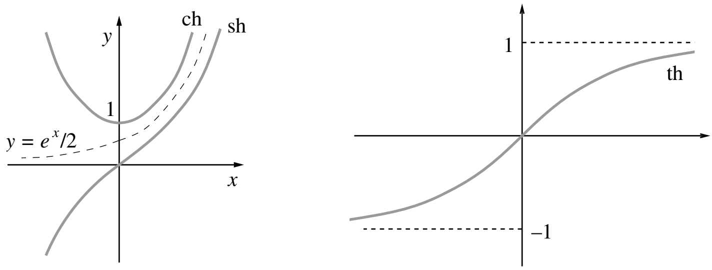
$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x\,, \quad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x\,, \quad \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$$

$$\operatorname{ch} x \geqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 < \operatorname{th} x < 1$$

**(4)** La fonction sh est impaire et strictement croissante ;
elle définit une bijection sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

**(5)** La fonction ch est paire, et elle est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ ; ch définit une bijection $[0,+\infty[\to [1,+\infty[$.

**(6)** La fonction th est impaire et strictement croissante ; elle définit une bijection th : $\mathbb{R} \to ]-1,1[$.




**Démonstration.** Les propriétés **(1)** et **(2)** se vérifient aisément par le calcul, de même que la parité de la fonction ch et l'imparité de sh et th. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(\operatorname{ch} x)^2 = 1+(\operatorname{sh} x)^2 \geqslant 1$. Puisque $\operatorname{ch} x$ est par définition positif, on en déduit $\operatorname{ch} x \geqslant 1$.

Pour tout $x$, on a $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} > 0$, donc $\operatorname{sh} x < \operatorname{ch} x$. Comme on a aussi $-\operatorname{sh} x = \operatorname{sh}(-x) < \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$, il vient $|\operatorname{sh} x| < \operatorname{ch} x$. Puisque $\operatorname{ch} x > 0$, on en déduit $|\operatorname{th} x| = \dfrac{|\operatorname{sh} x|}{\operatorname{ch} x} < 1$.

Puisque $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch} x > 0$, la fonction sh est strictement croissante. On a $\operatorname{sh}(0) = 0$, donc $\operatorname{sh} x > 0$ pour $x > 0$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$. La fonction sh étant dérivable, elle est continue. Etant strictement croissante, elle définit une bijection $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Pour tout $x > 0$, on a $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh} x > 0$, donc ch est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. De plus, $\operatorname{ch}(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$, donc ch définit une bijection strictement croissante $[0,+\infty[\to [1,+\infty[$.
Enfin, on a $(\operatorname{th} x)^2 < 1$, donc $\operatorname{th}'(x) = 1-(\operatorname{th} x)^2 > 0$, donc th est strictement croissante. Puisque $\operatorname{th} x = \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = 1$. La fonction th est donc une bijection $\mathbb{R} \to ]-1,1[$. ❑

### 1.5.2 Trigonométrie hyperbolique

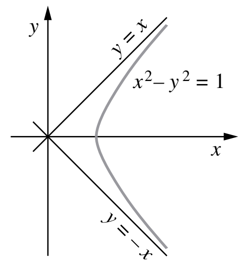
Pour les fonctions hyperboliques, il y a des formules analogues aux formules de trigonométrie, comme $(\operatorname{ch} x)^2-(\operatorname{sh} x)^2 = 1$. En voici quelques-unes :

| | |
|---|---|
| $\mathrm{ch}(2x) = (\mathrm{ch}\,x)^2 + (\mathrm{sh}\,x)^2$ | $\mathrm{sh}\,2x = 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x$ |
| $\mathrm{ch}(2x) + 1 = 2(\mathrm{ch}\,x)^2$ | $\mathrm{ch}(2x) - 1 = 2(\mathrm{sh}\,x)^2$ |
| $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b$ | $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,b$ |

**Remarque :** supposons que $a$ et $b$ sont des nombres réels tels que $a^2-b^2 = 1$ et $a \geqslant 0$ ; il existe un unique nombre $t \in \mathbb{R}$ tel que $b = \mathrm{sh}\,t$, car $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection ; on a alors $a^2 = 1+(\mathrm{sh}\,t)^2 = (\mathrm{ch}\,t)^2$ et comme $a \geqslant 0$, on en déduit $a = \mathrm{ch}\,t$.

*Les solutions de l'équation $x^2-y^2 = 1,\ x \geqslant 0$ sont les couples $(x, y) = (\mathrm{ch}\,t, \mathrm{sh}\,t)$, où $t \in \mathbb{R}$.*

La courbe d'équation $x^2-y^2 = 1,\ x \geqslant 0$ est une branche d'hyperbole ayant pour asymptotes les droites d'équation $y = x$ et $y = -x$ (figure ci-contre).
C'est cette propriété qui a donné aux fonctions sh et ch le nom d'*hyperbolique*.




### 1.5.3 Équations hyperboliques

#### Équation $\mathrm{sh}\,x = a$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Puisque sh est une bijection $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'équation $\mathrm{sh}\,x = a$ a une unique solution. Pour la calculer, on écrit

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}\,x = a &\Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = a\\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 2ae^x - 1 = 0 \quad \text{en multipliant par } 2e^x\\ &\Leftrightarrow X^2 - 2aX - 1 = 0 \quad \text{en posant } X = e^x.\end{aligned}$$

L'équation $X^2 - 2aX - 1 = 0$ a deux solutions réelles de signes contraires, car le coefficient de $X^2$ et le terme constant sont de signes contraires. Puisque $e^x > 0$, on ne retient que la solution positive qui est $X = a+\sqrt{a^2+1}$. On en déduit que pour tout $a \in \mathbb{R}$ :

$$\boxed{\mathrm{sh}\,x = a \Longleftrightarrow x = \ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}$$

On pose $\mathrm{Argsh}\,a = \ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$.

La fonction $\mathrm{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, appelée *argument sinus hyperbolique*, est la bijection réciproque de sh.

### Équation $\operatorname{ch} x = a$

La fonction ch définit une bijection $[0,+\infty[\to[1,+\infty[$. On en déduit que l'équation $\operatorname{ch} x = a$ n'a pas de solution si $a < 1$ et a une seule solution positive ou nulle si $a \geqslant 1$.
Supposons $a > 1$. Puisque ch est paire, l'équation $\operatorname{ch} x = a$ a deux solutions opposées. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x = a &\Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = a \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 2ae^x + 1 = 0 \quad \text{en multipliant par } 2e^x \\ &\Leftrightarrow X^2 - 2aX + 1 = 0 \quad \text{en posant } X = e^x. \end{aligned}$$

Les racines $X_1 = a + \sqrt{a^2-1}$ et $X_2 = a - \sqrt{a^2-1} = 1/X_1$ sont positives. Puisque $X_1 > a > 1$, le nombre $x_1 = \ln X_1$ est la solution positive de l'équation $\operatorname{ch} x = a$.

$$\operatorname{ch} x = a \text{ et } x > 0 \Longleftrightarrow x = \ln\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)$$

Pour tout $a \geqslant 1$, on pose $\operatorname{Argch} a = \ln\left(a + \sqrt{a^2-1}\right)$.
La fonction $\operatorname{Argch} : [1,+\infty[\to[0,+\infty[$, appelée *argument cosinus hyperbolique*, est la bijection réciproque de la fonction $[0,+\infty[\to[1,+\infty[$ définie par ch.

### Équation $\operatorname{th} x = a$

Si $|a| \geqslant 1$, l'équation n'a pas de solution car la fonction th prend ses valeurs dans $]-1,1[$.
Supposons $-1 < a < 1$. On a

$$\operatorname{th} x = a \Longleftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = a \Longleftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = a \Longleftrightarrow e^{2x} = \frac{1+a}{1-a}$$

$$\operatorname{th} x = a \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+a}{1-a}$$

Pour tout $a \in\, ]-1,1[$, on pose $\operatorname{Argth} a = \frac{1}{2}\ln\frac{1+a}{1-a}$.
La fonction $\operatorname{Argth} : ]-1,1[\to\mathbb{R}$, appelée *argument tangente hyperbolique*, est la bijection réciproque de la fonction $\operatorname{th} : \mathbb{R}\to]-1,1[$.

## EXERCICES

**1.1** **a)** Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, il y a un unique nombre $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\cos\theta = x$. On note $\operatorname{Arccos} x$ ce nombre $\theta$.

**b)** Montrer que la fonction $\operatorname{Arccos} : [-1,1] \to [0,\pi]$ est décroissante.

**c)** Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, on a $\operatorname{Arccos} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x$.

**1.2** **a)** Trouver les nombres $x \in [0,2\pi]$ tels que

$$(\cos x)^2 + 3(\sin x)^2 - 5\cos x = 0$$

**b)** Trouver les nombres $x \in [0,2\pi]$ tels que $6\cos x - 8\sin x = 5$ (on exprimera les solutions au moyen de $\alpha = \operatorname{Arcsin}(3/5)$ ).

**1.3** Soit $a > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = a + \frac{x}{2(1+x^2)} \quad \text{et} \quad \varphi(x) = x - f(x).$$

**a)** Montrer que $\left|f'(x)\right| \leqslant 1/2$. Montrer que la fonction $\varphi$ est strictement croissante et calculer ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$. En déduire que $f$ a un unique point fixe qu'on notera $s(a)$.

**b)** Quel est le signe de $\varphi(a)$ ? En déduire l'inégalité $a < s(a)$.

**c)** Montrer que pour $x > 0$, on a $0 < f(x) - a < \dfrac{1}{2x}$. En déduire que $a < s(a) < a + \dfrac{1}{2a}$.

**d)** On définit la suite $(u_n)$ en posant $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = a + \dfrac{u_n}{2(1+u_n^2)}$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que $\lim u_n = s(a)$.

**e)** Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - 2ax^2 + x - 2a$. Montrer l'équivalence $P(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = x$. En déduire que $P$ a une unique racine réelle. On suppose $a = 1$: utiliser la suite $(u_n)$ pour calculer une valeur approchée à $10^{-2}$ près de cette racine.

**1.4** **a)** Calculer $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{x - \pi/2}{\cos x}$. Montrer qu'il existe une fonction continue $u : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ telle que $u(x) = \dfrac{x-\pi/2}{\cos x}$ pour tout $x \neq \pi/2$ appartenant à $[0,\pi]$.

**b)** Montrer que le graphe de $u$ a un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées.
**c)** Montrer la fonction $x \mapsto x + \cos x$ est strictement croissante sur $[0,\pi/2]$ et que l'on a $x + \cos x < \pi/2$ pour tout $x \in [0,\pi/2[$.
En déduire que $u(x) < -1$ pour tout $x \in [0,\pi/2[$. Quel est le maximum de la fonction $u$ ? En quel(s) point(s) est-il atteint ?

**d)** Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, on a $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$.
Utiliser **(a)** pour en déduire $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\pi/2 - \operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} = 1$.

**1.5** Posons $f(x) = \ln \operatorname{ch} x$.

**a)** Montrer que la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$, qu'elle est paire et que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**b)** Étudier les variations de $f$.

**c)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = x - \ln 2 + \ln(1+e^{-2x})$.
En déduire que la courbe de $f$ a une asymptote en $+\infty$ ; donner l'équation de cette asymptote et la position de la courbe par rapport celle-ci. Dessiner la courbe de $f$.

**d)** Soit $a > 0$ et soit $(u_n)$ la suite telle que

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \ln \operatorname{ch} u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

**(i)** Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant x$. En déduire que $u_n \in [0,a]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)$ ?
**(ii)** En utilisant **(c)**, montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a l'équivalence $(f(x) = x \iff x = 0)$. En déduire $\lim u_n = 0$.

**1.6** On pose $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.
**a)** Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $4t(1-t) \leqslant 1$. En déduire que l'ensemble de définition de la fonction $f$ est $[-1,1]$. Montrer que $f$ est impaire.

**b)** Montrer que

$$f(x) = \begin{cases} 2 \operatorname{Arcsin} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}/2 \\ \pi - 2 \operatorname{Arcsin} x & \text{si } \sqrt{2}/2 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

**c)** La fonction $f$ est-elle continue ? Quelles est la pente de la tangente en 0 ? Préciser les demi-tangentes aux points d'abscisse $\sqrt{2}/2$ et 1. Dessiner la courbe de $f$.

**1.7** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $(u_n)$ une suite dont tous les termes appartiennent à $[a,b]$.

**a)** On suppose que pour tout $x \in [a,b]$, on a $-1 < f(x) < 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(f(u_n)\big)^n = 0$.

**b)** On suppose que pour tout $x \in [a,b]$, on a $f(x) > 0$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{f(u_n)} = 1$.

## SOLUTIONS

**1.1 a)** La fonction $\cos : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ est continue et strictement décroissante, car pour tout $x \in ]0,\pi[$, on a $\cos'(x) = -\sin x < 0$. Puisque $\cos 0 = 1$ et $\cos\pi = -1$, on a une bijection $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$. Par cette bijection, tout nombre $x \in [-1,1]$a un unique antécédent $\theta \in [0,\pi]$.

**b)** La fonction $x \mapsto \operatorname{Arccos} x$ est la bijection réciproque de la bijection décroissante $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$, donc Arccos est décroissante.

**c)** Soit $x \in [-1,1]$. Puisqu'on a $0 \leqslant \operatorname{Arccos} x \leqslant \pi$, on en déduit $-\pi/2 = \pi/2 - \pi \leqslant \pi/2 - \operatorname{Arccos} x \leqslant \pi/2 - 0 = \pi/2$.
On sait que pour tout $\alpha$, on a $\sin(\pi/2-\alpha) = \cos\alpha$, donc $\sin(\pi/2 - \operatorname{Arccos} x) = \cos(\operatorname{Arccos} x) = x$. Puisque $(\pi/2 - \operatorname{Arccos} x) \in [-\pi/2,\pi/2]$, on en déduit $\pi/2 - \operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arcsin} x$, par définition de Arc sinus.

**1.2 a)** On a

$$\begin{aligned}(\cos x)^2+3(\sin x)^2-5\cos x &= (\cos x)^2+3-3(\cos x)^2-5\cos x\\ &= -2(\cos x)^2 - 5\cos x + 3\,.\end{aligned}$$

En posant $t = \cos x$, il vient l'équation $2t^2 + 5t - 3 = 0$ dont les racines sont $1/2$ et $-3$. Puisque $|\cos x| \leqslant 1$, les nombres cherchés sont les $x \in [0,2\pi]$ tels que $\cos x = 1/2$, c'est-à-dire $\dfrac{\pi}{3}$ et $2\pi-\dfrac{\pi}{3}$.

**b)** Pour tout $x$, on a (en divisant par $\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10$) :

$$6\cos x - 8\sin x = 5 \iff \frac{3}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x = \frac{1}{2}$$

Puisqu'on a posé $\alpha = \text{Arcsin}(3/5)$, il vient $\sin\alpha = 3/5$. De plus, $\alpha \in [0,\pi/2]$ car $0 < 3/5 < 1$, donc $\cos\alpha > 0$. On en déduit $\cos\alpha = \sqrt{1-(3/5)^2} = 4/5$. Comme $1/2 = \sin(\pi/6)$, l'équation s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha\cos x - \cos\alpha\sin x = 1/2\\
&\iff \sin(\alpha - x) = \sin(\pi/6)\\
&\iff \alpha - x = \pi/6 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \alpha - x = 5\pi/6 + 2k\pi, \text{ où } k \in \mathbb{Z}\\
&\iff x = \alpha - \pi/6 - 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \alpha - 5\pi/6 - 2k\pi, \text{ où } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Puisque $\alpha \in [0,\pi/2]$ et $\sin(\pi/6) = 1/2 < 3/5 = \sin\alpha < 1$, on a

$$\pi/6 < \alpha < \pi/2$$

On en déduit $\alpha - \pi/6 \in [0,\pi/2]$ et aussi $-4\pi/6 < \alpha - 5\pi/6 < \pi/2 - 5\pi/6$, d'où $4\pi/3 < \alpha - 5\pi/6 + 2\pi < 5\pi/3$. On a donc $\alpha - 5\pi/6 + 2\pi \in [0,2\pi]$.
Les nombres $x \in [0,2\pi]$ solutions de l'équation sont $\alpha - \pi/6$ et $\alpha - 5\pi/6 + 2\pi = \alpha + 7\pi/6$.

**1.3 a)** On calcule $f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. D'après l'inégalité triangulaire, on a $|1-x^2| \leqslant 1+x^2$, donc

$$\left|f'(x)\right| = \frac{1}{2}\frac{|1-x^2|}{(1+x^2)^2} \leqslant \frac{1}{2}\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

Ainsi, on a $-\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$. Comme $\varphi'(x) = 1 - f'(x)$, il vient $\varphi'(x) \geqslant 1 - \dfrac{1}{2} > 0$, donc $\varphi$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$, donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = \pm\infty$.
La fonction $\varphi$ étant continue, il existe un unique nombre $s(a)$ tel que $\varphi\big(s(a)\big) = 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

On a l'équivalence $f(x) = x \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$. Donc $s(a)$ est l'unique point fixe de $f$ (figure **1.1**).

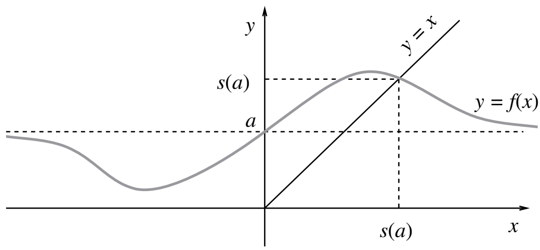



Figure 1.1

**b)** On a $\varphi(a) = -\dfrac{a}{2(1+a^2)} < 0 = \varphi\big(s(a)\big)$. Puisque $\varphi$ est strictement croissante, on en déduit $a < s(a)$.

**c)** Pour tout $x > 0$, on a $f(x) - a = \dfrac{x}{2(1+x^2)} > 0$. De plus,

$$\frac{x}{2(1+x^2)} = \frac{1}{2x}\frac{x^2}{1+x^2} < \frac{1}{2x}, \text{ car } 0 < \frac{x^2}{1+x^2} < 1.$$

Appliquons l'encadrement $0 < f(x) - a < \dfrac{1}{2x}$ au nombre positif $s(a)$ :

$$0 < f\big(s(a)\big) - a < \frac{1}{2s(a)}$$

On a $\dfrac{1}{s(a)} < \dfrac{1}{a}$ d'après **(b)**, et $f\big(s(a)\big) = s(a)$, d'où $0 < s(a) - a < \dfrac{1}{2a}$.

**d)** On applique la proposition page 8. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a un point fixe $s(a)$ et d'après la question **(a)**, on a $\left|f'(x)\right| \leqslant 1/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ a pour limite $s(a)$.

**e)**

On a $$f(x) = x \Longleftrightarrow x - a = \frac{x}{2(x^2+1)} \Longleftrightarrow 2(x-a)(x^2+1) = x$$
$$\Longleftrightarrow P(x) = 0 \quad \text{en développant.}$$

Puisque $s(a)$ est l'unique point fixe de $f$, $s(a)$ est l'unique solution réelle de l'équation $P(x) = 0$.
Prenons $a = 1$. Le polynôme $P$ a donc pour racine $\alpha = s(1)$. La fonction $x \mapsto |f'(x)|$ est majorée par $1/2$, donc pour tout entier $n \geqslant 1$, on a (remarque page 8)

$$|u_n - \alpha| \leqslant (1/2)^n |u_0 - \alpha| = \alpha/(2^n)\,, \text{ car } u_0 = 0 \text{ et } \alpha > 0.$$

D'après **(c)**, on a $\alpha = s(1) < 1 + \dfrac{1}{2} = 3/2$, donc $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{3}{2 \times (2^n)}$.

Cherchons $n$ pour que $\dfrac{3}{2 \times (2^n)} < 10^{-2}$ c'est-à-dire $2^n > \dfrac{3 \times 10^2}{2}$ $= 150$. Puisque $2^8 = 256$, l'entier $n = 8$ convient. Le terme $u_8$ est une valeur approchée à $10^{-2}$ près de $\alpha$. Avec une calculatrice, on peut calculer successivement $u_1 = f(0) = 1$, $u_2 = f(1), \ldots, u_8$. On trouve que $u_8$ est peu différent de $1{,}2441$. La racine réelle de $P = 2x^3 - 2x^2 + x - 2$ vaut donc $1{,}24$ à $10^{-2}$près. La courbe de $P$ est représentée figure **1.2**.

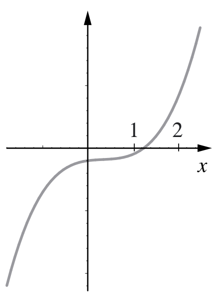



**Figure 1.2** Courbe de *P*.

**1.4 a)** Par définition de la dérivée de cosinus en $\pi/2$, on a

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{x - \pi/2} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x - \cos \pi/2}{x - \pi/2}$$
$$= \cos'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$$

Par suite, $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{x - \pi/2}{\cos x} = -1$. En posant $u(\pi/2) = -1$, on obtient donc une fonction $u$ continue en $\pi/2$. Puisque $u$ est aussi continue en tout autre point de $[0, \pi]$, $u$ est continue sur $[0, \pi]$.

**b)** Pour tout $x \neq \pi/2$ appartenant à $[0,\pi]$, on a $\pi - x \in [0,\pi]$ et

$$u(\pi - x) = \frac{(\pi - x) - \pi/2}{\cos(\pi - x)} = \frac{\pi/2 - x}{-\cos x} = u(x)$$

Cela veut-dire que la droite verticale d'équation $x = \pi/2$ est axe de symétrie du graphe de $u$.

**c)** Posons $h(x) = x + \cos x$ pour tout $x \in [0,\pi/2]$. Pour tout $x \in [0,\pi/2[$, on a $h'(x) = 1 - \sin x > 0$, donc $h$ est strictement croissante sur $[0,\pi/2]$. Pour tout $x \in [0,\pi/2[$, on en déduit $h(0) \leqslant h(x) < h(\pi/2)$, c'est-à-dire $1 \leqslant x + \cos x < \pi/2$, donc $x - \pi/2 < -\cos x$. Pour tout $x \in [0,\pi/2[$, on peut diviser par $\cos x > 0$, ce qui donne $u(x) = \dfrac{x - \pi/2}{\cos x} < -1$. D'après **(b)**, on en déduit $u(x) < -1$pour tout $x \neq \pi/2$appartenant à $[0,\pi]$. Puisque $u(\pi/2) = -1$, le maximum de $u$ sur $[0,\pi]$ vaut $-1$ et est atteint seulement en $\pi/2$. La courbe de $u$ est représentée figure **1.3**.

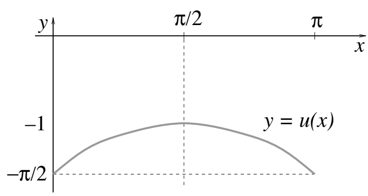



**Figure 1.3**

**d)** Soit $x \in ]-1,1[$. Posons $\theta = \operatorname{Arcsin} x$, de sorte que $x = \sin\theta$ et $\theta \in [-\pi/2,\pi/2]$. On en déduit $1 - x^2 = (\cos\theta)^2$ et $\cos\theta \geqslant 0$, donc $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$.

Pour tout $x \in [0,1]$, on a $\operatorname{Arcsin} x \in [0,\pi/2]$. La fonction Arcsin est continue sur $[0,1]$ et $u$ est continue sur $[0,\pi/2]$, donc la composée $x \mapsto u(\operatorname{Arcsin} x)$ est continue sur $[0,1]$. Par suite,

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} u(\operatorname{Arcsin} x) = u(\operatorname{Arcsin} 1) = u(\pi/2) = -1$$

D'après le calcul précédent, on a $u(\operatorname{Arcsin} x) = \dfrac{\operatorname{Arcsin} x - \pi/2}{\sqrt{1-x^2}}$, d'où le résultat.

**1.5 a)** Puisqu'on a $\operatorname{ch} x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fontion $f$ est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction ch étant paire, la fonction $f$ l'est aussi. Comme on a de plus $\operatorname{ch} x \geqslant 1$ pour tout $x$, il vient $f(x) = \ln \operatorname{ch} x \geqslant 0$.

**b)** Sur $\mathbb{R}^+$, $f$ est la composée $\mathbb{R}^+ \xrightarrow{\text{ch}} \mathbb{R}^{*+} \xrightarrow{\ln} \mathbb{R}$ de deux fonctions croissantes, donc $f$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $f$ est paire, il s'ensuit qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

**c)** On écrit $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2} e^x (1+e^{-2x})$ et il vient $\ln \operatorname{ch} x = -\ln 2 + x + \ln(1+e^{-2x})$.
On a $\ln \operatorname{ch} x - (x - \ln 2) = \ln(1+e^{-2x})$ et puisque $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$, il vient $\lim_{x\to+\infty} \big(\ln \operatorname{ch} x - (x - \ln 2)\big) = 0$ : la droite $D$ d'équation $y = x - \ln 2$ est asymptote à la courbe de $f$ en $+\infty$. Pour tout $x$, la différence $\ln \operatorname{ch} x - (x - \ln 2)$ est positive, car $\ln(1+e^{-2x}) > \ln 1 = 0$, donc la courbe est toute entière au dessus de $D$.
Puisque la fonction $f$ est paire, la droite $D'$ symétrique de $D$ par rapport à $Oy$ est asymptote en $-\infty$, et la courbe est au dessus de $D'$ ; l'équation de $D'$ est $y = -x - \ln 2$. La courbe de $f$ est repésentée figure **1.4**.

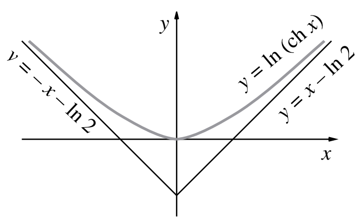



Figure 1.4

**d) (i)** On a $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x$, donc $-1 < f'(x) < 1$ pour tout $x$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis, on en déduit $\big|f(x) - f(0)\big| \leqslant |x - 0|$. Comme $f(0) = 0$, il vient $|\ln \operatorname{ch} x| \leqslant |x|$. Puisque $\ln \operatorname{ch} x \geqslant 0$ pour tout $x$, on en déduit que pour tout $x \geqslant 0$, on a $0 \leqslant \ln \operatorname{ch} x \leqslant x$.
Pour tout $n$, on a $u_n \geqslant 0$, donc $\ln \operatorname{ch} u_n \leqslant u_n$, d'après ce qui précède, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_n$ : la suite $(u_n)$ est décroissante. Il s'ensuit $u_n \leqslant u_0 = a$, donc $u_n \in [0,a]$.

**d) (ii)** D'après **(c)**, on a, pour tout $x$, les équivalences

$$f(x) = x \Leftrightarrow \ln(1+e^{-2x}) = \ln 2 \Leftrightarrow 1+e^{-2x} = 2$$
$$\Leftrightarrow e^{-2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

La suite $(u_n)$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un nombre $\alpha \geqslant 0$. Puisque $f$ est continue, on a $f(\alpha) = \alpha$, donc $\alpha = 0$ d'après l'équivalence ci-dessus. Ainsi $\lim u_n = 0$.

**1.6 a)** Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $1 - 4t(1-t) = 4t^2-4t+1 = (2t-1)^2 \geqslant 0$, donc $4t(1-t) \leqslant 1$ (voir figure **1.5**). Pour que $\sqrt{1-x^2}$ soit défini, il faut que $1-x^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \in [-1,1]$. Réciproquement, supposons $x \in [-1,1]$. Alors en appliquant l'inégalité $4t(1-t) \leqslant 1$ à $t = x^2$, on a $4x^2(1-x^2) \leqslant 1$, ou encore $2|x|\sqrt{1-x^2} \leqslant 1$, donc $-1 \leqslant 2x\sqrt{1-x^2} \leqslant 1$. L'ensemble de définition de $f$ est donc $[-1,1]$.

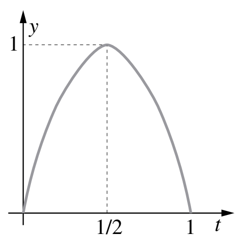



**Figure 1.5** Courbe de $t \mapsto 4t(1-t)$

Les fonctions $x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$ et Arcsin étant impaires, leur composée $f$ est impaire.

**b)** Soit $x \in [0,1]$. Posons $\theta = \operatorname{Arcsin} x$, donc $\theta \in [0,\pi/2]$ et $\sin\theta = x$. Alors $\cos\theta \geqslant 0$, donc $\sqrt{1-x^2} = \cos\theta$ et il vient

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}(2\sin\theta\cos\theta) = \operatorname{Arcsin}(\sin 2\theta)$$

<u>Supposons $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}/2$.</u> Alors on a $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$, donc $0 \leqslant 2\theta \leqslant \pi/2$ et par suite

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin 2\theta) = 2\theta = 2\operatorname{Arcsin} x\,.$$

<u>Supposons $\sqrt{2}/2 < x \leqslant 1$.</u> Alors on a $\pi/4 < \theta \leqslant \pi/2$, donc $\pi/2 < 2\theta \leqslant \pi$, donc

$$f(x) = \text{Arcsin}(\sin 2\theta) = \pi - 2\theta = \pi - 2\,\text{Arcsin}\, x\,.$$

**c)** La fonction $x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1,1]$ et Arcsin est continue, donc $f$ est continue comme composée de deux fonctions continues. On voit aussi sur les expressions ci-dessus que

$$\lim_{\substack{x\to\sqrt{2}/2\\ x<\sqrt{2}/2}} f(x) = 2\,\text{Arcsin}(\sqrt{2}/2) = 2(\pi/4) = \pi/2$$

$$\lim_{\substack{x\to\sqrt{2}/2\\ x>\sqrt{2}/2}} f(x) = \pi - 2\,\text{Arcsin}(\sqrt{2}/2) = \pi - 2(\pi/4) = \pi/2$$

ce qui montre à nouveau que $f$ est continue en $\sqrt{2}/2$. Remarquons enfin que $f(0) = 0 = f(1)$.

Pour tout $x \in \left]-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right[$, on a $f'(x) = 2\text{Arcsin}'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$, donc la tangente en 0 a pour pente $f'(0) = 2$.

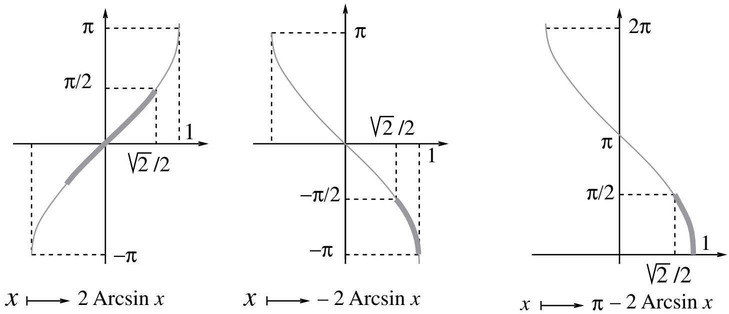
Pour $x \in \left]\sqrt{2}/2, 1\right[$, on a $f'(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$. Par suite

$$\lim_{\substack{x\to\sqrt{2}/2\\ x<\sqrt{2}/2}} f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1/2}} = 2\sqrt{2} \text{ et } \lim_{\substack{x\to\sqrt{2}/2\\ x>\sqrt{2}/2}} f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1/2}} = -2\sqrt{2}$$

Ce sont les pentes des demi-tangentes à la courbe de $f$ en $\sqrt{2}/2$.

Puisque la courbe de Arcsin a une tangente verticale au point d'abscisse 1, il en va de même de la courbe de $x \mapsto \pi - 2\,\text{Arcsin}\, x$, donc de la courbe de $f$. Voici comment dessiner aisément la courbe de $f$ qui est représentée figure 1.7 page 26 :

– On part de la courbe de $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$ et en multipliant par 2 les ordonnées de chaque point, on obtient la courbe de $x \mapsto 2\,\text{Arcsin}(x)$ (figures 1.6 page 26) ; sur l'intervalle $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$, c'est la courbe de $f$.
– On obtient la courbe de $x \mapsto -2\,\text{Arcsin}(x)$ par symétrie par rapport à $Ox$ ; puis, en baissant de $\pi$ l'axe des abscisses, on obtient la courbe de $x \mapsto \pi - 2\,\text{Arcsin}(x)$ (figures 1.6 page 26) ; sur l'intervalle $[\sqrt{2}/2, 1]$, c'est la courbe de $f$.




Figures 1.6

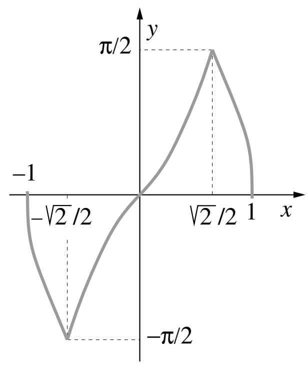



Figure 1.7 Courbe de *f*.

– Sur l'intervalle $[-1,-\sqrt{2}/2]$, on complète par symétrie par rapport à l'origine, car *f* est une fonction impaire.

**1.7 a)** Puisque *f* est continue sur le segment $[a,b]$, *f* a un maximum $M$ et un minimum $m$ sur $[a,b]$ : il existe des nombres $u$ et $v$ appartenant à $[a,b]$ tels que, pour tout $x \in [a,b]$, on a $m = f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v) = M$. On a donc $m \leqslant f(u_n) \leqslant M$ pour tout $n$ et par suite

$$m^n \leqslant \big(f(u_n)\big)^n \leqslant M^n \quad \text{pour tout } n.$$

Par hypothèse, on a $-1 < f(u) = m \leqslant M = f(v) < 1$, donc les suites géométriques $(m^n)$ et $(M^n)$ ont pour limite 0. On en déduit que $\big(f(u_n)\big)^n$ tend vers 0.

**b)** Notons encore $m = f(u)$ et $M = f(v)$ le minimum et le maximum de $f$ sur $[a,b]$. Par hypothèse, on a $0 < f(u) = m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a,b]$, donc $0 < m \leqslant f(u_n) \leqslant M$ pour tout $n$. On en déduit

$$\sqrt[n]{m} \leqslant \sqrt[n]{f(u_n)} \leqslant \sqrt[n]{M} \qquad \text{pour tout } n.$$

On sait que si $r$ est un nombre strictement positif, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{r} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln r} = e^0 = 1\,.$$

Donc $\sqrt[n]{m}$ et $\sqrt[n]{M}$ tendent vers 1 et par conséquent $\sqrt[n]{f(u_n)}$ tend vers 1.

CHAPITRE 2

# Formules de Taylor

OBJECTIFS

Si $f$ est une fonction dérivable, nous montrons que les différences $f(b) - f(a)$ peuvent s'exprimer au moyen de $f'$ (égalité des accroissements finis).
Si $f$ possède une dérivée seconde, ou troisième, etc., on obtiendra aussi des formules faisant intervenir $f''$, $f^{(3)}$, etc. (formules de Taylor).

Ces résultats permettent de démontrer des inégalités et calculer certaines limites (règle de l'Hospital).

Commençons par énoncer la propriété qui, bien que particulière, est à l'origine de tous les résultats de ce chapitre.

**Théorème de Rolle**. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$. Alors il existe un nombre $c \in ]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

**Démonstration.** Si $f$ est la fonction nulle, alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$ et l'on peut prendre pour $c$ n'importe quel nombre de l'intervalle $]a,b[$. Supposons maintenant que $f$ prend au moins une valeur non nulle, par exemple une valeur positive. Puisque $f$ est continue sur le segment $[a,b]$, $f$ atteint son maximum en un certain point $c \in [a,b]$ (théorème page 3). Ce maximum étant strictement positif, on a $c \neq a$ et $c \neq b$, donc $c \in ]a,b[$. Alors puisque $f$ est dérivable en $c$, on en déduit $f'(c) = 0$. ❑

Il peut exister plusieurs nombres $c$ tels que $f'(c) = 0$.

## 2.1 LA FORMULE DES ACCROISSEMENTS FINIS

Elle permet d'estimer, au moyen de la dérivée, la différence $f(b) - f(a)$ des valeurs prises par une fonction $f$ en deux points $a$ et $b$.

**Théorème des accroissements finis.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe au moins un nombre $c \in \,]a,b[$ tel que (formule des accroissements finis)*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

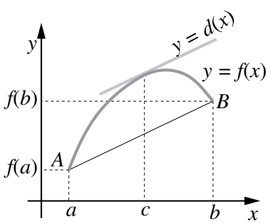
C'est ce théorème qui permet de montrer que si une fonction a une dérivée positive ou nulle sur un intervalle, alors elle est croissante.

En effet, soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$. Soient $a,b \in I$ tels que $a < b$. En appliquant la formule des accroissements finis entre $a$ et $b$, il vient

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \geqslant 0, \quad \text{car} \quad b-a > 0 \quad \text{et} \quad f'(c) \geqslant 0$$

donc $f(a) \leqslant f(b)$. Cela montre que $f$ est croissante sur $I$.

**Démonstration.** Sur le graphe de $f$, on considère les points $A : \big(a, f(a)\big)$ et $B : \big(b, f(b)\big)$. La droite $(AB)$ a pour pente $p = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et pour équation $y = f(a) + p(x-a)$. Posons $d(x) = f(a) + p(x-a)$. L'écart algébrique entre le graphe de $f$ et la corde $AB$ est mesuré par la différence $e(x) = f(x) - d(x)$. La fonction $e : [a,b] \to \mathbb{R}$ est, comme $f$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Puisque le graphe de $d$ passe par $A$ et $B$, on a $e(a) = e(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe donc un nombre $c \in \,]a,b[$ tel que $e'(c) = 0$. Or $e'(x) = f'(x) - d'(x) = f'(x) - p$, donc il vient $0 = e'(c) = f'(c) - p$, d'où $f'(c) = p = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ❑




L'égalité $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$
affirme qu'au point d'abscisse $c$,
la tangente est parallèle à $(AB)$.

Si l'on peut trouver un encadrement $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ valable pour tout $x \in ]a,b[$, on obtient les inégalités des accroissements finis rappelées page 5.

**Exemple.** Montrons que pour tous nombres $a$ et $b$ tels que $0 < a < b$, on a l'encadrement $\dfrac{b-a}{3\sqrt[3]{b^2}} \leqslant \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} \leqslant \dfrac{b-a}{3\sqrt[3]{a^2}}$.

Posons en effet $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pour tout $x$, de sorte qu'on a $\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} = f(b) - f(a)$. La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ car pour tout $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe un nombre $c \in [a,b]$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$. Il reste à encadrer $f'(c)$. Pour tout $x \in [a,b]$, on a $0 < a^2 \leqslant x^2 \leqslant b^2$. Puisque $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante, il vient $0 < \sqrt[3]{a^2} \leqslant \sqrt[3]{x^2} \leqslant \sqrt[3]{b^2}$ et finalement $\frac{1}{3\sqrt[3]{b^2}} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$.

Ainsi $f'(c)$ est compris entre $\frac{1}{3\sqrt[3]{b^2}}$ et $\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$. Puisqu'on a $b - a > 0$, on en déduit $\frac{b-a}{3\sqrt[3]{b^2}} \leqslant (b-a)f'(c) \leqslant \frac{b-a}{3\sqrt[3]{a^2}}$, d'où l'encadrement cherché.

## 2.2 LE THÉORÈME DE L'HOSPITAL

C'est une variante de la formule des accroissements finis.

**Théorème.** *Soit $f$ et $g$ des fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ quel que soit $x \in ]a,b[$. Alors il existe un nombre $c \in ]a,b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

**Démonstration.** Puisque la fonction $g'$ ne s'annule pas sur $]a,b[$, c'est que $g(b) - g(a) \neq 0$, d'après la contraposée du théorème de Rolle. Posons $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et soit $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$u(x) = f(x) - f(a) - p\big[g(x) - g(a)\big].$$

La fonction $u$ est, comme $f$ et $g$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. De plus, on a $u(a) = 0$ et $u(b) = f(b) - f(a) - p\big[g(b) - g(a)\big] = 0$ par définition du nombre $p$. D'après le théorème de Rolle, il existe donc un nombre $c \in ]a,b[$ tel que $u'(c) = 0$. Or $u'(x) = f'(x) - pg'(x)$, d'où $f'(c) = pg'(c)$ et $p = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. ❑

On peut quelquefois re-appliquer le théorème de l'Hospital aux dérivées $f'$ et $g'$, puis aux dérivées secondes, etc, comme dans la proposition suivante.

**Corollaire.** *Soit $f$ et $g$ des fonctions définies sur $[a,b]$.*
*On suppose que*
- *les dérivées $f'$, $g'$, $f''$, $g''$, etc jusqu'à l'ordre $n-1$ existent sur $[a,b]$ et les dérivées de $g$ ne s'annulent pas sur $]a,b[$,*
- $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$
  $g'(a) = g''(a) = \cdots = g^{(n-1)}(a) = 0$
- *les dérivées $n$-ièmes $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ existent sur $]a,b[$ et pour tout $x \in ]a,b[$, $g^{(n)}(x) \neq 0$.*

*Alors il existe un nombre $c \in ]a,b[$ tel que* $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}$.

**Démonstration.** En appliquant successivement le théorème de l'Hospital, on obtient

$$
\begin{aligned}
\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} &= \frac{f'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{f'(c_1)-f'(a)}{g'(c_1)-g'(a)} && \text{car } f'(a) = g'(a) = 0 \\
&= \frac{f''(c_2)}{g''(c_2)} = \frac{f''(c_2)-f''(a)}{g''(c_2)-g''(a)} && \text{car } f''(a) = g''(a) = 0 \\
&\quad \vdots \\
&= \frac{f^{(n-1)}(c_{n-1})}{g^{(n-1)}(c_{n-1})} = \frac{f^{(n-1)}(c_{n-1})-f^{(n-1)}(a)}{g^{(n-1)}(c_{n-1})-g^{(n-1)}(a)} && \text{car } \begin{cases} f^{(n-1)}(a) & = 0 \\ g^{(n-1)}(a) & = 0 \end{cases} \\
&= \frac{f^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)}
\end{aligned}
$$

où les nombres $c_1,\ldots,c_n$ vérifient $a < c_n < c_{n-1} < \ldots < c_1 < b$. On pose donc $c = c_n$, nombre qui appartient bien à l'intarvalle $]a,b[$. ❑

## 2.3 LES FORMULES DE TAYLOR

### 2.3.1 Formule de Taylor à l'ordre 2

Soit $I$ un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si $f$ est dérivable, son approximation affine en un point $a \in I$ est $x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a)$. Nous allons étudier la différence

$$f(x) - \big[f(a) + (x-a)f'(a)\big]$$

et pour cela, nous supposons que la dérivée seconde $f''(x)$ existe pour tout $x \in I$. Posons :

$$
\begin{aligned}
P(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) \\
u(x) &= f(x) - P(x) \\
v(x) &= (x-a)^2
\end{aligned}
$$

Les fonctions $u$ et $v$ sont deux fois dérivables sur $I$.
On a

$$\begin{aligned} u'(x) &= f'(x) - P'(x) = f'(x) - f'(a) \quad && \text{donc } u'(a) = 0 \\ v'(x) &= 2(x-a) && \text{donc } v'(a) = 0 \end{aligned}$$

De plus, $v'(x) \neq 0$ si $x \neq a$, et $v''(x) = 2$. D'après le corollaire du théorème de l'Hospital, pour tout $b \in I$, il existe un nombre $c$ compris entre $a$ et $b$ tel que

$$\frac{u(b)-u(a)}{v(b)-v(a)} = \frac{u''(c)}{v''(c)}$$

On a

$$\begin{aligned} &u(a) = f(a)-P(a) = 0 \quad \text{et} \quad v(a) = 0 \\ &u''(x) = f''(x) \quad \text{et} \quad v''(x) = 2 \end{aligned}$$

donc il vient

$$\frac{u(b)-u(a)}{v(b)-v(a)} = \frac{u(b)}{v(b)} = \frac{f(b)-P(b)}{(b-a)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{u''(c)}{v''(c)} = \frac{f''(c)}{2}$$

On en déduit $\dfrac{f(b)-P(b)}{(b-a)^2} = \dfrac{f''(c)}{2}$,

d'où $f(b) = P(b) + \dfrac{(b-a)^2}{2} f''(c)$.

Puisque $P(b) = f(a) + (b-a)f'(a)$, on obtient finalement

$$\boxed{f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c)}$$

C'est la formule de Taylor à l'ordre 2 au point $a$, pour la fonction $f$.

### 2.3.2 Formule de Taylor à l'ordre 3

On veut cette fois étudier la différence

$$f(x) - \left[ f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) \right]$$

et pour cela, nous supposons que la dérivée troisième $f^{(3)}(x)$ existe pour tout $x \in I$. Posons :

$$P(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a)$$
$$u(x) = f(x) - P(x)$$
$$v(x) = (x-a)^3$$

Les fonctions $u$ et $v$ sont trois fois dérivables sur $I$. On a

$$P'(x) = f'(a) + (x-a)f''(a)\ ,\ P''(x) = f''(a) \text{ et } u'(x) = f'(x) - P'(x)$$

$$\begin{array}{lll} u'(x) = f'(x) - f'(a) - (x-a)f''(a) & \text{donc} & u'(a) = 0 \\ u''(x) = f''(x) - f''(a) & \text{donc} & u''(a) = 0 \\ v'(x) = 3(x-a)^2 & \text{donc} & v'(a) = 0 \\ v''(x) = 6(x-a) & \text{donc} & v''(a) = 0 \end{array}$$

De plus, $v'(x) \neq 0$ et $v''(x) \neq 0$ si $x \neq a$, et l'on a $v^{(3)}(x) = 6$. Il existe donc un nombre $c$ compris entre $a$ et $b$ tel que $\dfrac{u(b) - u(a)}{v(b) - v(a)} = \dfrac{u^{(3)}(c)}{v^{(3)}(c)}$. Or

$$u(a) = f(a) - P(a) = 0 \quad \text{et} \quad v(a) = 0$$
$$u^{(3)}(x) = f^{(3)}(x) \quad \text{et} \quad v^{(3)}(x) = 6$$

donc il vient

$$\frac{u(b)-u(a)}{v(b)-v(a)} = \frac{u(b)}{v(b)} = \frac{f(b)-P(b)}{(b-a)^3} \qquad \text{et} \qquad \frac{u^{(3)}(c)}{v^{(3)}(c)} = \frac{f^{(3)}(c)}{6}$$

Ainsi, $f(b) = P(b) + \frac{f^{(3)}(c)}{6}(b-a)^3$.

Puisque $P(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a)$, on obtient

$$\boxed{f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(b-a)^3}{6}f^{(3)}(c)}$$

C'est la formule de Taylor à l'ordre 3 au point $a$, pour la fonction $f$.

**Résumons**

*Soit $I$ un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.*

➤ *Si $f$ est dérivable sur $I$, alors pour tout $b \in I$, il existe $c$ compris entre $a$ et $b$ tel que*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$$

➤ *Si $f$ a une dérivée seconde sur $I$, alors pour tout $b \in I$, il existe $c$ compris entre $a$ et $b$ tel que*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b+a)^2}{2} f''(c)$$

➤ *Si $f$ a une dérivée troisième sur $I$, alors pour tout $b \in I$, il existe $c$ compris entre $a$ et $b$ tel que*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \frac{(b-a)^3}{6} f'''(c)$$

### 2.3.3 Formule de Taylor à l'ordre $n$

En raisonnant de même, ces formules se généralisent à une fonction $f$ ayant des dérivées jusqu'à un ordre $n$ quelconque.

**Théorème.** *Soit $I$ un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction ayant des dérivées $f', f'', \ldots, f^{(n)}$. Alors pour tout $b \in I$, il existe un nombre $c$ compris entre $a$ et $b$ tel que*

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) &+ \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots \\ &+ \frac{(b-a)^k}{k!} f^k(a) + \cdots \\ &+ \frac{(b-a)^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^n(c) \end{aligned}$$

Cette égalité s'appelle *la formule de Taylor à l'ordre $n$ au point $a$*.

## APPLICATIONS

**Exemple 1.** Posons $f(x) = \ln(1+x)$. La fonction $f$ est définie et dérivable autant de fois qu'on veut sur $]-1,+\infty[$. Écrivons pour cette fonction la formule de Taylor à l'ordre 2 au point 0. On a

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ |
|---|---|---|
| $\ln(1+x)$ | $\frac{1}{1+x}$ | $\frac{-1}{(1+x)^2}$ |

$f(0) = \ln(1) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Pour tout $x > -1$, il existe un nombre $c$ entre $0$ et $x$ tel que $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(c)$, c'est-à-dire

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}\frac{1}{(1+c)^2}$$

Cherchons un encadrement de $\ln(1+x)$ pour $x \geqslant 0$. Pour cela, il faut majorer et minorer le terme $-\frac{1}{(1+c)^2}$. Puisque $0 \leqslant c \leqslant x$, on a $1+c \geqslant 1$ donc $0 < \frac{1}{(1+c)^2} \leqslant 1$. En multipliant par $-\frac{x^2}{2} \leqslant 0$, il vient

$$-\frac{x^2}{2} \leqslant -\frac{x^2}{2}\frac{1}{(1+c)^2} \leqslant 0$$

On en déduit l'encadrement

$$\boxed{x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x \quad \text{pour tout } \ x \geqslant 0}$$

**Exemple 2.** Prenons la fonction $x \mapsto \sin x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ autant de fois qu'on veut. On a $\sin'(x) = \cos x$ et $\sin''(x) = \cos'(x) = -\sin x$ : les dérivées d'ordre pair de la fonction sinus sont $\pm \sin x$, donc valent 0 pour $x = 0$. Pour les dérivées d'ordre impair, on a $\sin^{(3)}(x) = -\cos x$, $\sin^{(5)}(x) = \cos x$, etc (les signes changent chaque fois). Puisque $\cos 0 = 1$, on en déduit la valeur des premières dérivées de $x \mapsto \sin x$ en $0$ :

| $\sin(0)$ | $\sin'(0)$ | $\sin''(0)$ | $\sin^{(3)}(0)$ | $\sin^{(4)}(0)$ | $\sin^{(5)}(0)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |

On a ainsi les formules de Taylor suivantes :

à l'ordre 3 : $\sin x = x - \frac{x^3}{3!}\cos(c)$, où $c$ est entre 0 et $x$

à l'ordre 5 : $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\cos(d)$, où $d$ est entre 0 et $x$

On en déduit des encadrements de $\sin x$ : par exemple, la première inégalité donne $|\sin x - x| = \left|-\frac{x^3}{3!}\cos(c)\right| = \frac{|x|^3}{3!}|\cos c|$ et en utilisant $|\cos c| \leqslant 1$, il vient

$$|\sin x - x| \leqslant \frac{|x|^3}{3!} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Avec la formule à l'ordre 5, on a de même

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\right| \leqslant \frac{|x|^5}{5!} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Définissons les polynômes

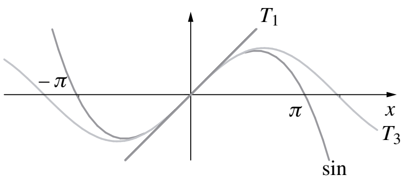
$$T_1(x) = x \qquad T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} \qquad T_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

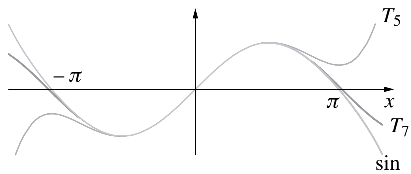
et majorons, pour tout $x \in [-\pi,\pi]$, l'écart entre $\sin x$ et l'un de ces polynômes. D'après les formules de Taylor à l'ordre 7 ou 9, on a les inégalités

$$|\sin x - T_5(x)| \leqslant \frac{|x|^7}{7!} \leqslant \frac{\pi^7}{7!} < 6 \times 10^{-1} \quad \text{pour tout } x \in [-\pi,\pi]$$

$$|\sin x - T_7(x)| \leqslant \frac{|x|^9}{9!} \leqslant \frac{\pi^9}{9!} < 10^{-1} \quad \text{pour tout } x \in [-\pi,\pi]$$




Graphes de $\sin$, $T_1$ et $T_3$




Graphes de $\sin$, $T_5$ et $T_7$

Sur ces figures, on voit que l'approximation de sinus sur $[-\pi,\pi]$ par les fonctions polynômes $T_1$, $T_3$, $T_5$, $T_7$ est d'autant meilleure qu'on a pris un plus grand ordre pour la formule de Taylor. Avec la formule à l'ordre $n$, l'erreur est majorée par $\frac{\pi^n}{n!}$, des nombres qui tendent vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$ (exercice **2.3 (d)**).

**Exemple 3.** Écrivons la formule de Taylor au point 0 pour la fonction $f : x \mapsto e^x$. On a $f = f' = f'' = \cdots = f^{(k)}$ pour tout entier $k \geqslant 1$, donc $f^{(k)}(0) = 1$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un nombre $c$ entre 0 et $a$ tel que

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}e^c \qquad (*)$$

Posons $u_n = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}$.

- Si $a \geqslant 0$, alors $0 \leqslant c \leqslant a$, donc $0 < e^c \leqslant e^a$.
- Si $a \leqslant 0$, alors $c \leqslant 0$, donc $e^c \leqslant 1$.

Posons $m = e^a$ si $a \geqslant 0$ et $m = 1$ si $a < 0$. D'après (*), on a alors

$$|e^a - u_n| = \left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}e^c\right| = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

$$|e^a - u_n| \leqslant \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}m \qquad \text{car } e^c \leqslant m.$$

Or la suite de terme général $\frac{|a|^n}{n!}$ a pour limite 0 (voir page 39, exercice **2.3 (d)**), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |e^a - u_n| = 0$, ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^a$.

$$\text{Pour tout } a \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\right) = e^a$$

En particulier, pour $a = 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e$$

## CONSEILS

- Attention : dans la formule des accroissements finis ou les formules de Taylor, le nombre $c$ qui intervient dépend des points où l'on applique la formule.
- Pour comparer $f(x)-f(y)$ et $x-y$, pensez à la formule des accroissements finis.
- Pour comparer une fonction à une fonction polynôme, pensez aux formules de Taylor.

## EXERCICES

**2.1** On veut étudier les sommes $s_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

**a)** En utilisant la formule des accroissements finis pour la fonction ln, montrer que pour tout $x > 0$, on a $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$.

**b)** Soit $n$ un entier au moins égal à 2. Écrire cet encadrement pour $x = 1, x = 2, \ldots, x = n-1$. En déduire que l'on a :

$$s_n - 1 < \ln n < s_{n-1}$$

**c)** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\ln(n+1) \leqslant s_n \leqslant 1 + \ln n$. En déduire $\lim s_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{s_n}{\ln n} = 1$.

**2.2** Posons $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$.

**a)** Calculer $f(1)$ et $f'(x)$ pour tout $x$.

**b)** En utilisant la formule des accroissements finis, montrer que pour tout $h > 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 < \ & f(1+h) - \frac{e}{2} && \leqslant \frac{e^h}{4} e h^3 \\ 0 < \ & \frac{e}{2} - f(1-h) && \leqslant e h^3 \end{aligned}$$

**2.3** Pour tout $x > 0$, posons $f(x) = x \ln x - x$.

**a)** Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x > 1$, on a

$$f(x) - f(x-1) \leqslant \ln x\,.$$

**b)** En procédant comme dans l'exercice **2.1**, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n \geqslant f(n) - f(1) = 1 + n \ln n - n\,.$$

**c)** En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $n! \geqslant e \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

**d)** Soit $a \in \mathbb{R}^{*+}$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\ln \dfrac{a^n}{n!} \leqslant n(1 + \ln a - \ln n)$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$.

**2.4** **a)** Écrire la formule de Taylor à l'ordre 4 pour la fonction $x \mapsto \cos x$ au point 0.

**b)** En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les inégalités

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

**2.5** **a)** Écrire l'équation de la tangente au graphe de sinus au point d'abscisse $\pi/6$.

**b)** On pose $u(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/3]$, on a l'inégalité

$$\left|\sin x - u(x)\right| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2$$

## SOLUTIONS

**2.1 a)** La dérivée de $x \mapsto \ln x$ est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Pour tout $x > 0$, il existe donc un nombre $c$ tel que

$$x < c < x+1 \quad \text{et} \quad \ln(x+1) - \ln x = [(x+1) - x]\,\frac{1}{c} = \frac{1}{c}.$$

Puisque $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{x}$, on en déduit $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$.

**b)** Écrivons cet encadrement pour $x = 1, x = 2, \dots, x = n-1$, où $n \geqslant 2$ :

$$\begin{array}{lcl}
\dfrac{1}{2} < & \ln 2 - \ln 1 & < \dfrac{1}{1} \\
\dfrac{1}{3} < & \ln 3 - \ln 2 & < \dfrac{1}{2} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\dfrac{1}{n} < & \ln n - \ln (n-1) & < \dfrac{1}{n-1}
\end{array}$$

et ajoutons ces inégalités : la plupart des termes $\ln k$ se simplifient et il reste $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n} < \ln n - \ln 1 < \dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}$, c'est-à-dire $s_n - 1 < \ln n < s_{n-1}$.

**c)** Puisque $s_1 = 1$, l'inégalité $s_n \leqslant 1 + \ln n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, d'après **(b)**. On a $\ln n < s_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 2$, donc on a $\ln(n+1) < s_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Puisque $1 + \ln n$ et $\ln(n+1)$ tendent vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.

Pour tout $n \geqslant 2$, en divisant par $\ln n > 0$ dans l'encadrement précédent, il vient

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} < \frac{s_n}{\ln n} < \frac{1}{\ln n} + 1 \tag{$*$}$$

On a montré dans **(b)** que $\ln(n+1) - \ln n < \dfrac{1}{n}$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} [\ln(n+1) - \ln n] = 0$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}-1\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln n}\right]=0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}=1$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\ln n}=0$, les inégalités $(*)$ montrent que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{s_n}{\ln n}=1$.

**2.2 a)** $f(1)=\dfrac{e}{2}$ et $f'(x)=\dfrac{e^x(1+x^2)-e^x(2x)}{(1+x^2)^2}=\dfrac{e^x}{(1+x^2)^2}(1-x)^2$.

**b)** Pour tout $h>0$, il existe $c$ tel que

$$1<c<1+h$$

et

$$f(1+h)-f(1)=[(1+h)-1]\,f'(c)=h\frac{e^c}{(1+c^2)^2}(1-c)^2.$$

On a $0<\dfrac{e^c}{(1+c^2)^2}<\dfrac{e^{1+h}}{(1+1)^2}$ et comme $|1-c|<h$, on a $(1-c)^2=|1-c|^2<h^2$. Il vient $0<\dfrac{e^c}{(1+c^2)^2}(1-c)^2\leqslant\dfrac{e^{1+h}}{4}h^2=\dfrac{e}{4}h^2e^h$, d'où

$$0<f(1+h)-\frac{e}{2}=f(1+h)-f(1)\leqslant\frac{e}{4}h^3e^h.$$

De même, il existe $d$ tel que

$$1-h<d<1$$

et

$$f(1)-f(1-h)=[1-(1-h)]\,f'(d)=h\frac{e^d}{(1+d^2)^2}(1-d)^2.$$

On a $1+d^2\geqslant 1$, $(1-d)^2<h^2$ et $e^d<e$, donc

$$0<\frac{e}{2}-f(1-h)<heh^2=eh^3.$$

**2.3 a)** Appliquons le théorème des accroissements finis : on a $f'(x)=\ln x$, donc pour tout $x>1$, il existe $c$ entre $x-1$ et $x$ tel que

$$f(x)-f(x-1)=[x-(x-1]\ln c=\ln c.$$

Puisque $\ln c\leqslant\ln x$, il vient $f(x)-f(x-1)\leqslant\ln x$.

**b)** On ajoute les inégalités

$$\begin{aligned} f(2) - f(1) &\leqslant \ln 2 \\ f(3) - f(2) &\leqslant \ln 3 \\ \cdots & \quad \cdots \\ f(n) - f(n-1) &\leqslant \ln n \end{aligned}$$

ce qui donne $f(n) - f(1) \leqslant \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n$. D'où le résultat puisque $f(n) - f(1) = (n \ln n - n) - (0-1) = 1 + n \ln n - n$.

**c)** On a $\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n = \ln(n!)$. D'après **(b)**, il vient

$$\ln(n!) \geqslant 1 + n \ln n - n = 1 + n \ln \frac{n}{e} = 1 + \ln\left[\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]$$

donc en prenant l'exponentielle, on obtient $n! \geqslant e\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

**d)** On a $\ln \frac{a^n}{n!} = n \ln a - \ln(n!)$.

D'après l'inégalité $\ln(n!) \geqslant 1 + n \ln n - n$ démontrée en **(c)**, on a

$$\begin{aligned} \ln \frac{a^n}{n!} = n \ln a - \ln(n!) &\leqslant n \ln a - 1 - n \ln n + n \\ &\leqslant n(1 + \ln a - \ln n) \end{aligned}$$

On a $\lim_{n \to +\infty} (1 + \ln a - \ln n) = -\infty$,

donc $\lim_{n \to +\infty} n(1 + \ln a - \ln n) = -\infty$, et par suite $\lim_{n \to +\infty} \ln \frac{a^n}{n!} = -\infty$.

En prenant l'exponentielle, on en déduit $\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, alors la suite $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ est nulle. Supposons $x \neq 0$.

Alors on a $|x| > 0$, donc $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$, d'après ce qui précède. Par conséquent, $\lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

**2.4 a)** On a $\cos(0) = 1$, $\cos'(0) = 0$, $\cos''(0) = -1$ et $\cos^{(3)}(0) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe donc $c$ tel que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\cos(c)$, ou encore

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\cos(c)$$

**b)** Puisque $x^4 \geqslant 0$, l'inégalité $\cos c \leqslant 1$ implique $\frac{x^4}{24}\cos(c) \leqslant \frac{x^4}{24}$, d'où $\cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

Pour l'autre inégalité demandée, écrivons la formule de Taylor à l'ordre 2 seulement : pour tout $x$, il existe $d$ tel que

$$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2}(-\cos d)$$

On a $\frac{x^2}{2}(-\cos d) \geqslant \frac{x^2}{2} \times (-1)$, donc $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$.

**2.5 a)** Puisque $\sin(\pi/6) = 1/2$ et $\sin'(\pi/6) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, l'équation de la tangente à sinus au point d'abscisse $\pi/6$ est

$$y = 1/2 + (\sqrt{3}/2)(x - \pi/6)$$

**b)** À l'abscisse $x$, la distance entre le graphe de sinus et sa tangente au point d'abscisse $\pi/6$ est $\left|\sin x - u(x)\right|$. Pour majorer cet écart, écrivons la formule de Taylor à l'ordre 2, au point $\pi/6$ :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $c$ compris entre $x$ et $\pi/6$ tel que

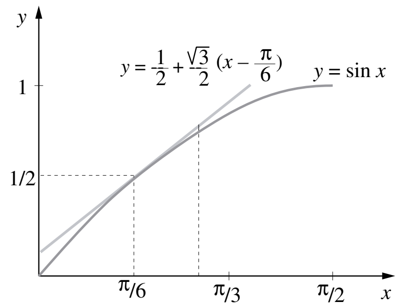
$$\sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 (-\sin c)$$

$$\left|\sin x - u(x)\right| = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 |\sin c|$$

Supposons $x \in [0,\pi/3]$. Puisque $c$ est entre $x$ et $\pi/6$, on a $c \in [0,\pi/3]$, donc $0 \leqslant \sin c \leqslant \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. On en déduit

$$\left|\sin x - u(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2$$

Voici le graphe de sinus et sa tangente au point $(\pi/6, 1/2)$ ; la quantité $\left|\sin x - u(x)\right|$ est l'écart, à l'abscisse $x$, entre la courbe et la tangente.


y
$y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
$y = \sin x$
1
1/2
π/6
π/3
π/2
x

CHAPITRE 3

# Développement limité

**OBJECTIFS**

Nous présentons dans ce chapitre la notion de fonction négligeable devant une autre et celle de développement limité.

Nous montrerons les développements limités à connaître ou à savoir retrouver rapidement

## 3.1 FONCTION NÉGLIGEABLE DEVANT UNE AUTRE

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on sait que $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$. Plus précisément, quand $x > 0$ est très petit, il est clair que $x^2$ est très petit devant $x$, car $\frac{x^2}{x} = x$ tend vers 0 ; de même $x^3$ est très petit devant $x^2$, et ainsi de suite. Les fonctions $x \mapsto x^n$ forment une échelle de comparaison qui permet d'estimer l'ordre de grandeur, quand $x$ tend vers 0, de certaines fonctions $x \mapsto f(x)$ tendant vers 0 quand $x$ tend vers 0.

**Définition.** Soient $f$ et $g$ des fonctions. On dit que $f(x)$ *est négligeable devant $g(x)$ quand $x$ tend vers $a$ si* $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
Cette propriété se note $f(x) \underset{x \to a}{=} o\big(g(x)\big)$ et se lit « $f(x)$ égale petit $o$ de $g(x)$ quand $x$ tend vers $a$ ».

**Exemples**

**1)** On a $x^2 \underset{x \to 0}{=} o(x)$, $x^3 \underset{x \to 0}{=} o(x^2)$ et plus généralement,

$$\text{si } n > p, \text{ alors } x^n \underset{x \to 0}{=} o(x^p).$$

En effet, si $n > p$, alors $\lim\limits_{x \to 0}(x^n/x^p) = \lim\limits_{x \to 0} x^{n-p} = 0$.

**2)** On a $\ln x \underset{x \to 0}{=} o(1/x)$, car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim\limits_{x \to 0}(x \ln x) = 0$.

**3)** Pour tout $\alpha > 0$, on a $\ln x \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha)$ et $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$.
En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^\alpha e^{-x}) = 0$.

Nous nous intéresserons surtout à des fonctions $f$ négligeables devant $x^n$ quand $x$ tend vers 0, avec $n \in \mathbb{N}$. On écrira

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n) \quad \text{ou simplement} \quad f(x) = o(x^n)$$

Pour $n = 0$, on a $x^0 = 1$, d'où les équivalences :

$$f \underset{x\to 0}{=} o(x^0) \iff f \underset{x\to 0}{=} o(1) \iff \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f$ une fonction définie au voisinage de 0 sauf peut-être en 0. Posons $\varepsilon(x) = f(x)/x^n$ si $x \neq 0$ et $\varepsilon(0) = 0$.

Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$, alors par définition, $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Puisque $\varepsilon(0) = 0$, la fonction $\varepsilon$ est continue en 0. Et l'on a l'égalité $f(x) = x^n\varepsilon(x)$ pour tout $x \neq 0$. On en déduit la formulation suivante.

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n) \text{ si et seulement si } \begin{cases} f(x) = x^n\varepsilon(x), \\ \text{avec } \varepsilon \text{ continue en } 0 \\ \text{et } \varepsilon(0) = 0 \end{cases}}$$

## 3.2 DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

**Définition.** Soit $f$ une fonction définie au voisinage de 0 sauf peut-être en 0, et soit $n \in \mathbb{N}$. S'il existe une fonction polynôme réelle de degré au plus $n$ : $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, telle que

$$f(x) - p(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n),$$

l'égalité $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$ s'appelle *un développement limité de f à l'ordre n au point 0.*

**Exemple.** L'identité $\dfrac{1-x^3}{1-x} = 1+x+x^2$ est vraie pour tout $x \neq 1$. Écrivons-la sous la forme

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

On a $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\frac{x^3}{1-x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{1-x} = 0$, donc $\frac{x^3}{1-x} \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$. On en déduit

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$$

qui est un développement limité de la fonction $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 2 au point 0.

**Proposition.** *Soit $f$ une fonction.*

- *$f$ a un développement limité à l'ordre 0 au point 0 : $f(x) = a_0 + o(1)$, si et seulement si $\lim_{x\to 0} f(x) = a_0$.*
- *Supposons $f$ continue en 0. Alors $f$ est dérivable en 0 si et seulement si $f$ a un développement limité à l'ordre 1 au point 0. Dans ce cas, ce développement est $f(x) = f(0)+f'(0)x+o(x)$*

**Démonstration.** Si $f(x) = a_0 + o(1)$, alors $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\big(a_0+o(1)\big) = a_0$, car $\lim_{x\to 0} o(1) = 0$. Réciproquement, supposons $\lim_{x\to 0} f(x) = a_0$. Alors $\lim_{x\to 0}\big(f(x)-a_0\big) = 0$, donc $f(x)-a_0 = o(1)$, ou encore $f(x) = a_0+o(1)$.

Si $f$ est dérivable en 0, alors en posant $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0)$, il vient $f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$. Par définition de la dérivée, $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, donc $x\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$. Réciproquement, supposons $f$ continue en 0 et $f(x) = a_0 + a_1x + o(x)$. Puisque $\lim_{x\to 0}\big(a_1x+o(x)\big)=0$, on a $a_0 = \lim_{x\to 0} f(x)$ ; et puisque $f$ est continue en 0, on a $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Il s'ensuit $f(0) = a_0$ et $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)-a_0}{x} = a_1 + \frac{o(x)}{x}$. Par suite $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = a_1$, c'est-à-dire $f'(0) = a_1$. ❑

**Unicité du développement limité.** *Si une fonction a un développement limité à l'ordre $n$ au point 0, alors ce développement est unique.*

**Démonstration.** Supposons que $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions polynômes de degré au plus $n$ telles que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-p(x)}{x^n} = 0 = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-q(x)}{x^n}$. En soustrayant, il vient $\lim_{x\to 0}\frac{q(x)-p(x)}{x^n} = 0$. Raisonnons par l'absurde en supposant que le polynôme $q - p$ est non nul. Il s'écrit

$$\begin{aligned} q(x) - p(x) &= c_kx^k + c_{k+1}x^{k+1} + \cdots + c_nx^n \\ &= x^k(c_k + c_{k+1}x + \cdots + c_nx^{n-k}) \text{, où } k \leqslant n \text{ et } c_k \neq 0. \end{aligned}$$

On a

$$\frac{q(x)-p(x)}{x^n} = x^{k-n}(c_k + c_{k+1}x + \cdots + c_n x^{n-k}) \qquad (*)$$

Quand $x$ tend vers 0, le facteur entre parenthèses tend vers $c_k \neq 0$. Si $k = n$, alors $x^{k-n} = 1$ ; si $k < n$, $x^{k-n}$ ne reste pas borné quand $x$ tend vers 0, puisque l'exposant est négatif. Dans les deux cas, le membre de droite dans $(*)$ ne tend pas vers 0, ce qui est une contradiction. Ce qu'on a supposé n'est pas vrai, autrement dit le polynôme $q - p$ est nul. Ainsi $p = q$, donc les polynômes $p$ et $q$ ont les mêmes coefficients. ❏

**Existence d'un développement limité.** *Soit $I$ un intervalle ouvert contenant 0 et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction ayant des dérivées continues jusqu'à l'ordre $n$. Alors $f$ a un développement limité à l'ordre $n$ au point 0 :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^n + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

*où* $a_0 = f(0)\,, a_1 = f'(0)\,, \ldots, a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,, \ldots, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

**Démonstration.** Écrivons la formule de Taylor pour $f$, à l'ordre $n$, au point 0 : pour tout $x \in I$, il existe un nombre $c(x)$ tel que $0 \leqslant |c(x)| \leqslant |x|$ et

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}\big(c(x)\big)}{n!}x^n\,.$$

Posons $\varepsilon(x) = f^{(n)}\big(c(x)\big) - f^{(n)}(0)$. On a $\lim_{x\to 0} c(x) = 0$ et comme $f^{(n)}$ est continue en 0, on en déduit $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, c'est-à-dire $\varepsilon(x)x^n = o(x^n)$. Il s'ensuit

$$f^{(n)}\big(c(x)\big)x^n = f^{(n)}(0)x^n + \varepsilon(x)x^n = f^{(n)}(0)x^n + o(x^n)$$

d'où

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)\,.$$ ❏

**Intégration d'un développement limité.** *Soit $I$ un intervalle ouvert contenant 0, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de $f$. Si $f$ a pour développement limité à l'ordre $n$ en 0 :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

*alors $F$ a pour développement limité à l'ordre $n+1$ :*

$$F(x) = F(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

On peut donc intégrer terme à terme un développement limité (sans oublier la constante d'intégration $F(0)$).

**Démonstration.** Dans le développement limité de $f$, posons $\varepsilon(x) = o(x^n)/x^n$ pour $x \neq 0$ et $\varepsilon(0) = 0$. La fonction $\varepsilon$ est continue en tout $x \neq 0$ et aussi en 0, car $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. D'après le théorème p. 104, la fonction $x \mapsto x^n \varepsilon(x)$ a donc une primitive $R : I \to \mathbb{R}$ telle que $R(0) = 0$. En prenant les primitives terme à terme dans le développement limité $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$, il vient

$$F(x) - F(0) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + R(x)$$

Il reste à montrer que $R(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n+1})$. Appliquons en effet à $R$ le théorème des accroissements finis : pour tout $x \in I$, il existe $c(x)$ tel que $0 \leqslant |c(x)| \leqslant |x|$ et

$$R(x) = R(x) - R(0) = (x-0)R'\big(c(x)\big) = x c(x)^n \varepsilon\big(c(x)\big)$$

$$\big|R(x)\big| = |x|\big|c(x)\big|^n \big|\varepsilon\big(c(x)\big)\big| \leqslant |x||x|^n \big|\varepsilon\big(c(x)\big)\big| = |x^{n+1}|\big|\varepsilon\big(c(x)\big)\big|$$

On a $\lim\limits_{x\to 0} c(x) = 0$ et la fonction $\varepsilon$ est continue en 0, donc $\varepsilon\big(c(x)\big)$ tend vers $\varepsilon(0) = 0$ quand $x$ tend vers 0. On a donc bien $\lim\limits_{x\to 0} \frac{R(x)}{x^{n+1}} = 0$. ❏

**Propriétés de parité.** *Soit $f : ]-a,a[ \to \mathbb{R}$ une fonction ayant un développement limité à l'ordre $n$ en 0 : $f(x) = p(x) + o(x^n)$, où $p$ est un polynôme de degré au plus $n$.*

- *Si la fonction $f$ est paire, alors le polynôme $p$ est pair, c'est-à-dire que n'y figurent, avec des coefficients non nuls, que des monomes d'exposant pair.*
- *Si la fonction $f$ est impaire, alors le polynôme $p$ est impair, c'est-à-dire que n'y figurent, avec des coefficients non nuls, que des monomes d'exposant impair.*

**Démonstration.** Supposons $f$ paire, c'est-à-dire $f(x) = f(-x)$ quel que soit $x \in ]-a,a[$. Le développement limité de la fonction $x \mapsto f(-x)$ s'obtient en remplaçant $x$ par $-x$ dans celui de $f$. On a ainsi les deux développements à l'ordre $n$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + o(x^n) \\ f(-x) &= p(-x) + o(x^n) \end{aligned}$$

Or les fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto f(-x)$ sont égales. Par unicité du développement limité, on en déduit que les fonctions polynômes $x \mapsto p(x)$ et $x \mapsto p(-x)$ sont égales. Ainsi le polynôme $p$ est pair.
On raisonne de même pour montrer que, si la fonction $f$ est impaire, alors le polynôme $p$ aussi. ❑

## 3.3 LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS

➤ Pour tout $x \neq 1$, on a l'identité $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$. En raisonnant comme dans l'exemple page 46, on en déduit le développement limité à l'ordre $n$ :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

En changeant $x$ en $-x$, on obtient :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^k x^k + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

➤ La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et elle prend la valeur 0 en 0. Le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre $n$ s'obtient donc en intégrant terme à terme le développement limité à l'ordre $n-1$ de $\frac{1}{1+x}$ et en tenant compte de $\ln 1 = 0$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

➤ Si l'on pose $f(x) = e^x$, alors $f$ est dérivable autant de fois qu'on veut et $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$. Le dévelopement limité de l'exponentielle à l'ordre $n$ en 0 est donc :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

➤ La fonction cosinus est dérivable autant de fois qu'on veut et l'on a $\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k$ et $\cos^{(2k+1)}(0) = 0$ pour tout entier $k \geqslant 0$. Le dévelopement limité de cosinus à l'ordre $2n+1$ en 0 est donc :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

➤ La fonction sinus est une primitive de cosinus et $\sin(0) = 0$. On obtient donc le développement limité de sinus en intégrant terme à terme celui de cosinus et en tenant compte de $\sin 0 = 0$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

➤ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $f(x) = (1+x)^\alpha$ pour tout $x > -1$.

Rappelons que par définition, on a $(1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$.

La fonction $f$ est dérivable autant de fois qu'on veut sur $]-1, +\infty[$, $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ et

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \text{ pour tout entier } k \geqslant 1.$$

On a $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$, donc le dévelopement limité de $(1+x)^\alpha$ à l'ordre $n$ en 0 est :

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x &+ \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

L'exposant $\alpha$ peut être n'importe quel réel positif ou négatif.

Par exemple, si $\alpha = -1$, on retrouve le développement de $\frac{1}{1+x}$.

• Pour $\alpha = 1/2$, on obtient le développement limité de $\sqrt{1+x}$.

• Pour $\alpha = -1/2$, on a le développement de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

**Un conseil.** Pour se souvenir des coefficients, il suffit de penser à la formule du binôme pour $(1+x)^m$, où $m$ est entier positif :
le coefficient de $x^k$ est $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$.
On remplace simplement $m$ par $\alpha$ pour avoir les coefficients du développement limité de $(1+x)^\alpha$.

➤ Écrivons le développement limité de $\frac{1}{1+x^2}$. Pour cela, on change $x$ en $x^2$ dans le développement limité à l'ordre $n$ de $\frac{1}{1+x}$ et l'on obtient un développement à l'ordre $2n$ :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n-2} + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

La fonction Arctan a pour dérivée $\frac{1}{1+x^2}$(page 11) et $\text{Arctan}(0) = 0$. Par intégration terme à terme, on a donc le développement limité :

$$\begin{aligned}\text{Arctan}(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})\end{aligned}$$

La somme des deux derniers termes étant $o(x^{2n})$, il vient

$$\boxed{\text{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n})}$$

➤ La fonction Arcsin est une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$ (page 10). On a le développement limité

$$\begin{aligned}(1+x)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

En changeant $x$ en $-x^2$, $x^2$ devient $x^4$ et il vient

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$$

Intégrons en tenant compte de $\text{Arcsin}(0) = 0$ :

$$\boxed{\text{Arcsin}\, x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)}$$

## 3.4 DÉVELOPPEMENT LIMITÉ EN UN POINT *a*

Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $a$ sauf peut-être en $a$. Alors la fonction $t \mapsto f(a+t)$ est définie au voisinage de 0 sauf peut-être en 0.

**Définition.** Si la fonction $t \mapsto f(a+t)$ a un développement limité à l'ordre $n$ en 0 :

$$f(a+t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_n t^n + o(t^n)$$

cette égalité s'appelle *le développement limité de $f$ à l'ordre $n$ au point $a$*.

Écrivons $o(t^n){=}t^n\varepsilon(t)$, où $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$, et posons $x = a + t$ ; on a alors $t = x - a$ et le développement limité prend la forme

$$\begin{aligned} f(x) = p_0 + p_1(x-a) + p_2(x-a)^2 + \cdots \\ + p_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x-a) \end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x-a) = 0$.

Les développements limités en un point $a$ ont les mêmes propriétés qu'au point 0 :

➤ Le développement limité de $f$ au point $a$, s'il existe, est unique.

➤ Si $f$ a un développement limité à l'ordre 0 en $a$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ est égal au terme constant du développement.

➤ Supposons $f$ continue en $a$. Alors $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $f$ a un développement limité à l'ordre 1 en $a$, et dans ce cas, le développement est $f(a+t) = f(a) + f'(a)t + o(t)$.

➤ Si $f$ a des dérivées continues jusqu'à l'ordre $n$, alors $f$ a pour développement limité à l'ordre $n$ en $a$

$$f(a+t) = f(a) + f'(a)t + \frac{f''(a)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}t^n + o(t^n)$$

Seule la dernière formule mérite une explication. Posons $f_a(t){=}f(a+t)$.

On a $f_a(0)=f(a)$, $f_a'(0)=f'(a)$ et plus généralement $f_a^{(k)}(0)=f^{(k)}(a)$ pour tout entier $k$ entre 1 et $n$. Le développement limité à l'ordre $n$ de $f_a$ au point 0 est donc bien

$$\begin{aligned} f(a+t) &= f_a(t) \\ &= f(a) + f_a'(0)t + \frac{f_a''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{f_a^{(n)}(0)}{n!}t^n + o(t^n)\,. \end{aligned}$$

**Exemple.** Écrivons le développement limité à l'ordre 3 de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ au point 2. On a

$$f(2+t) = \frac{1}{2+t} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t/2}$$

Le développement limité de $\frac{1}{1+(t/2)}$ à l'ordre 3 au point 0 s'obtient en remplaçant $t$ par $t/2$ dans celui de $\frac{1}{1+t}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+(t/2)} &= 1 - \frac{t}{2} + \left(\frac{t}{2}\right)^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^3 + o(t^3) \\ \frac{1}{2+t} &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{t}{2} + \left(\frac{t}{2}\right)^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^3 + o(t^3)\right] \\ \frac{1}{2+t} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{16}t^3 + o(t^3) \end{aligned}$$

Cette égalité s'écrit aussi bien :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + (x-2)^3\varepsilon(x)\,,$$

où $\lim\limits_{x\to 2} \varepsilon(x) = 0$.

**CONSEIL**

➤ Apprenez par coeur les premiers termes des développements limités usuels.

## EXERCICES

**3.1** Soit $u$ une fonction telle que $u(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$, où $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$, on a $x^p u(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n+p})$.

**3.2** **a)** Montrer qu'il existe une unique fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ pour tout $x \neq 0$. Quelle est la valeur de $f(0)$ ?

**b)** Quel est le développement limité de $f$ à l'ordre 1 au point 0. En déduire que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Quelle est la valeur de $f'(0)$ ?

**c)** Montrer qu'il existe une unique fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ pour tout $x \neq 0$. Quelle est la valeur de $g(0)$ ?

**d)** Montrer que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Quelle est la valeur de $g'(0)$ ?

**3.3** Posons $g(x) = x^3 \ln(1+x)$.

**a)** Écrire le développement limité de $g$ à l'ordre 6 en 0.

**b)** Montrer que $g$ est dérivable autant de fois qu'on veut sur $]-1,+\infty[$. Calculer $g^{(k)}(0)$ pour $k = 2, 3, 4, 5$.

**3.4** **a)** Montrer que $\ln(2+t) = \ln 2 + \ln(1+t/2)$. En déduire le développement limité de $\ln(x)$ à l'ordre 4 au point 2.

**b)** Montrer que $\sqrt{4-x} = 2\sqrt{1-x/4}$. En déduire le développement limité de $\sqrt{4-x}$ à l'ordre 2 au point 0.

**c)** Écrire le développement limité de $e^{1-x}$ à l'ordre 3 au point 0.

**3.5** Posons $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

**a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F$ a un développement limité à l'ordre $n$ au point 0.

**b)** Écrire le développement limité de $F$ à l'ordre 6 au point 0.

**c)** Calculer $F''(0)$, $F^{(3)}(0)$ et $F^{(5)}(0)$.

**3.6** Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = e^{-1/x^2} \text{ pour tout } x \neq 0.$$

**a)** Montrer que $f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ ; quelle est la valeur de $f'(0)$ ?
**b)** Montrer que $f$ est croissante sur $[0,+\infty[$. La courbe de $f$ a-t-elle une asymptote en $+\infty$ ? Dessiner la courbe de $f$.
**c)** Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x\to 0} |x|^\alpha f(x) = 0$.
**d)** En raisonnant par récurrence, démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante :

$$\begin{cases} \text{il y a un polynôme } U_n \text{ tel que pour tout } x \in \mathbb{R}^*, \\ \qquad f^{(n)}(x) = x^{-3n} U_n(x) e^{-1/x^2} \\ f^{(n)}(0) = 0 \end{cases}$$

**e)** Pour tout entier $n \geqslant 1$, écrire le développement limité de $f$ à l'ordre $n$ en 0.

## SOLUTIONS

**3.1** Par hypothèse, on a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{u(x)}{x^n} = 0$. Par suite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^p u(x)}{x^{n+p}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{u(x)}{x^n} = 0$, donc $x^p u(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n+p})$.

**3.2** **a)** Puisque $f$ doit être continue en 0, on doit avoir

$$f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \ln'(1) = 1$$

Réciproquement, si l'on pose $f(0) = 1$, alors $f$ est continue en 0 et comme $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**b)** Le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2 au point 0 est :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\left[x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right] \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}o(x^2) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + o(x) \end{aligned}$$

car, d'après l'exercice précédent, la fonction $\frac{1}{x}o(x^2)$ est $o\left(\frac{x^2}{x}\right) = o(x)$. La fonction $f$ est continue en 0 et a un développement limité à l'ordre 1 en 0, donc $f$ est dérivable en 0 et $f'(0)$ est le coefficient de $x$ : ainsi $f'(0) = -1/2$. Puisque $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, il s'ensuit que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**c)** Le développement limité de $\cos x$ à l'ordre 3 au point 0 est

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

On a donc

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}o(x^3) = \frac{1}{2} + o(x) \qquad (*)$$

Pour que $g$ soit continue en 0, on doit avoir

$$g(0) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2} + o(x)\right] = \frac{1}{2}$$

car $\lim\limits_{x\to 0} o(x) = 0$. Réciproquement, si l'on pose $g(0) = 1/2$, alors $g$ est continue en 0 et comme $g$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, elle est continue sur $\mathbb{R}$.

**d)** L'égalité $(*)$ est le développement limité de $g$ à l'ordre 1 au point 0. La fonction $g$ est donc dérivable en 0 et $g'(0) = 0$ car dans le développement, le coefficient de $x$ est nul. Puisque $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**3.3** **a)** Le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 en 0 est

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

Multiplions par $x^3$ :

$$\begin{aligned} g(x) = x^3\ln(1+x) &= x^4 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{3}x^6 + x^3o(x^3) \\ &= x^4 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

car d'après l'exercice **3.1**, on a $x^3o(x^3) = o(x^6)$.

**b)** Chacune des fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ sont dérivables autant de fois qu'on veut sur $]-1,+\infty[$, donc aussi la fonction $g$. Dans le développement limité de $g$, le coefficient de $x^k$ est donc $\frac{g^{(k)}(0)}{k!}$. On en déduit

$$g''(0) = 2! \times 0 = 0 \qquad g^{(3)}(0) = 3! \times 0 = 0$$
$$g^{(4)}(0) = 4! \times 1 = 24 \qquad g^{(5)}(0) = 5! \times (-1/2) = -60$$

**3.4 a)** On a $\ln 2 + \ln(1+t/2) = \ln\big(2(1+t/2)\big) = \ln(2+t)$. En changeant $t$ en $t/2$ dans le développement limité de $\ln(1+t)$à l'ordre 4 en 0, on obtient

$$\ln(1+t/2) = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{t}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{t}{2}\right)^4 + o(t^4)$$

d'où le développement limité demandé :

$$\ln(2+t) = \ln 2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{24}t^3 - \frac{1}{64}t^4 + o(t^4)$$

**b)** On a $\sqrt{4-x} = \sqrt{4(1-x/4)} = 2\sqrt{1-x/4}$. Le développement limité à l'ordre 2 au point 0 de $\sqrt{1-x}$ est

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(-x) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-x)^2 + o(x^2)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

En changeant $x$ en $x/4$ dans ce développement limité, on obtient

$$\sqrt{1-x/4} = 1 - \frac{1}{2}\frac{x}{4} - \frac{1}{2^3}\frac{x^2}{4^2} + o(x^2)$$
$$2\sqrt{1-x/4} = 2\left[1 - \frac{1}{2^3}x - \frac{1}{2^7}x^2 + o(x^2)\right]$$

et finalement

$$\sqrt{4-x} = 2 - \frac{1}{2^2}x - \frac{1}{2^6}x^2 + o(x^2)$$

**c)** On a $e^{1-x} = e\,e^{-x}$. Le développement limité de $e^{-x}$ à l'ordre 3 au point 0 s'obtient en changeant $x$ en $-x$ dans celui de $e^x$ :

$$\begin{aligned} e^{-x} &= 1 + (-x) + \frac{1}{2!}(-x)^2 + \frac{1}{3!}(-x)^3 + o(x^3) \\ &= 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

On obtient donc

$$e^{1-x} = e - ex + \frac{e}{2}x^2 - \frac{e}{6}x^3 + o(x^3)$$

**3.5** **a)** Posons $f(x) = e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puisque $f$ est continue, la fonction $F$ est une primitive de $f$. Comme $f$ est dérivable autant de fois qu'on veut, on a $F' = f$, $F'' = f'$ et $F^{(k)} = f^{(k-1)}$ pour tout entier $k \geqslant 2$. La fonction $F$ est donc dérivable autant de fois qu'on veut et par suite, $F$ possède en tout point un développement limité à n'importe quel ordre $n$.

**b)** Le développement limité à l'ordre 3 de $e^x$ au point 0 est

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$$

En changeant $x$ en $-x^2$, on obtient

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + o(x^6)$$

Intégrons maintenant terme à terme pour avoir le développement de $F$, en tenant compte de $F(0) = 0$ :

$$F(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2! \times 5}x^5 - \frac{1}{3! \times 7}x^7 + o(x^7)$$

La somme des deux derniers termes est $o(x^6)$, car on a $\frac{1}{3!\times 7}x^7 + o(x^7) = x^6\left[\frac{1}{3!\times 7}x + x\frac{o(x^7)}{x^7}\right]$ et dans le crochet, chaque terme tend vers 0 quand $x$ tend vers 0. On en déduit que le développement limité de $F$ à l'ordre 6 au point 0 est

$$F(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^6)$$

La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ étant paire, sa primitive $F$ qui s'annule en 0 est impaire. On aurait donc pu prévoir que figurent seulement des termes impairs dans la partie polynôme de ce développement limité.

**c)** Puisque $F$ est dérivable autant qu'on veut en 0, on sait que dans le développement ci-dessus,

– le coefficient de $x^2$ est $\frac{F''(0)}{2!}$, donc $F''(0) = 0$,

– le coefficient de $x^3$ est $\frac{F^{(3)}(0)}{3!}$, donc $F^{(3)}(0) = 3!\left(-\frac{1}{3}\right) = -2$,

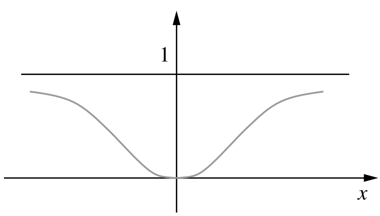
– le coefficient de $x^5$ est $\frac{F^{(5)}(0)}{5!}$, donc $F^{(5)}(0) = 5!\left(\frac{1}{10}\right) = 12$.

**3.6 a)** Puisque $\lim\limits_{x\to 0}(-1/x^2) = -\infty$ , on a $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0 = f(0)$, donc $f$ est continue en 0. Comme $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{|x|} = \lim_{t\to+\infty} te^{-t^2} = \lim_{u\to+\infty}\sqrt{u}e^{-u} = 0$$

car on sait que, pour tout nombre $\alpha$, $\lim\limits_{u\to+\infty} u^\alpha e^{-u} = 0$. Cela montre que $f'(0) = 0$. Comme $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, il s'ensuit qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**b)** Sur l'intervalle $]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante et positive, donc $x \mapsto 1/x^2$ est décroissante, $x \mapsto -1/x^2$ est croissante et donc $f$ est croissante. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-1/x^2} = 1$, car $\lim\limits_{x\to+\infty}(1/x^2) = 0$. La courbe de $f$ a donc, en $+\infty$, une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.
La fonction $f$ étant paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.




**c)** Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{x\to 0}|x|^\alpha e^{-1/x^2} = \lim_{t\to+\infty} t^{-\alpha}e^{-t^2} = \lim_{u\to+\infty} u^{-\alpha/2}e^{-u} = 0$$

**d)** Pour tout $x \neq 0$, on a $f'(x) = 2x^{-3}e^{-1/x^2}$. Puisque $f'(0) = 0$ d'après la question **(b)**, la propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit $n \geqslant 1$ un entier tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a alors

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \frac{x^{-3n} U_n(x) e^{-1/x^2}}{x} = x^{-3n-1} U_n(x) e^{-1/x^2}$$

La fonction $U_n$ est continue et d'après **(c)**, on sait que $\lim\limits_{x \to 0} |x|^{-3n-1} e^{-1/x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = 0$. Cela montre que $f^{(n+1)}(0) = 0$. De plus, en dérivant $f^{(n)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, il vient

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \big[-3nx^{-3n-1} U_n(x) + x^{-3n} U_n'(x) \\ &\qquad + 2x^{-3} x^{-3n} U_n(x)\big] e^{-1/x^2} \\ &= x^{-3n-3} \left[-3nx^2 U_n(x) + x^3 U_n'(x) + 2U_n(x)\right] e^{-1/x^2} \end{aligned}$$

En posant $U_{n+1}(x) = -3nx^2 U_n(x) + x^3 U_n'(x) + 2U_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit un polynôme $U_{n+1}$ tel que $f^{(n+1)}(x) = x^{-3(n+1)} U_{n+1}(x) e^{-1/x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit $n \geqslant 1$.

**e)** D'après **(d)**, la fonction $f$ est dérivable autant de fois qu'on veut sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, elle a donc, en tout point, un développement limité à l'ordre $n$. Au point 0, le coefficient de $x^k$ dans ce développement limité est $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0$, car $f^{(k)}(0) = 0$. Le développement limité de $f$ à l'ordre $n$ en 0 s'écrit donc $f(x) = o(x^n)$ : tous les coefficients sont nuls.

CHAPITRE 4

# Calcul des développements limités

**OBJECTIFS**

Nous allons établir les règles de calcul sur les développements limités et montrer comment ceux-ci permettent de calculer très efficacement les limites.

## 4.1 QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA NOTATION $o(\ )$

Les propriétés de la notation $o(\ )$ introduite au chapitre pécédent résultent des règles de calcul sur les limites.

### Propriétés

**a)** Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} o\big(g(x)\big)$ et si $g(x) \underset{x\to 0}{=} o\big(h(x)\big)$, *alors* $f(x) \underset{x\to 0}{=} o\big(h(x)\big)$.

**b)** Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$ *pour tout* $p \leqslant n$.

**c)** *Si* $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$ *et si* $g(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$, *alors* $f(x)+g(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$.

**d)** *Si* $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$ *et si* $g(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$, *alors* $f(x)g(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n+p})$.

**e)** *Si* $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$, *alors pour tout* $p \in \mathbb{Z}$, $x^p f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n+p})$.

**Démonstration.** Pour **(a)**, on écrit $\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}\frac{g(x)}{h(x)}$ et l'on sait que le produit de deux fonctions tendant vers 0 tend vers 0. Pour **(c),** on utilise que la somme de deux fonctions tendant vers 0 tend vers 0. Pour **(b)**, on a $\frac{f(x)}{x^p} = \frac{f(x)}{x^n}x^{n-p}$ et l'on peut supposer $n > p$ (si $n = p$, il n'y a rien à montrer) ; alors $\lim\limits_{x\to 0} x^{n-p} = 0$ ; si $\frac{f(x)}{x^n}$ tend vers 0, il en va donc de même de $\frac{f(x)}{x^p}$. La propriété **(d)** s'obtient par l'égalité $\frac{f(x)g(x)}{x^{n+p}} = \frac{f(x)}{x^n}\frac{g(x)}{x^p}$. Enfin, on a **(e)** en écrivant $\frac{x^p f(x)}{x^{n+p}} = \frac{f(x)}{x^n}$ (voir aussi l'exercice 3.1 page 55). ❑

## 4.2 CALCUL DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

### Tronquer un polynôme

Soit $A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ un polynôme et soit $p$ un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$. Supprimons dans $A$ tous les monomes de degré supérieurs à $p$. On obtient le polynôme

$$\lfloor A \rfloor_p = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$$

On dit que $\lfloor A \rfloor_p$ est un *tronqué du polynôme $A$*.

**Exemple.** Si $A(x) = 1+2x + 3x^2 + 5x^4 + 7x^6$, alors

$$\lfloor A \rfloor_5(x) = \lfloor A \rfloor_4(x) = 1+2x+3x^2+5x^4 \quad \text{et} \quad \lfloor A \rfloor_1(x) = 1+2x$$

### Tronquer un développement limité

*Soit $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$ le développement limité d'une fonction $f$ à l'ordre $n$ en $0$. Pour tout entier $p$ tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, le développement limité de $f$ à l'ordre $p$ en $0$ est*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + o(x^p) \\ &= \lfloor a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \rfloor_p + o(x^p) \end{aligned}$$

*On dit qu'on a tronqué à l'ordre $p$ le développement de $f$.*

**Démonstration.** Si $p = n$, il n'y a rien à montrer. Supposons $p < n$. Écrivons

$$\begin{aligned} a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n &= a_0+a_1x+\cdots+a_px^p+x^p(a_{p+1}x+\cdots+a_nx^{n-p}) \\ &= \lfloor a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \rfloor_p + x^p\varepsilon(x) \end{aligned}$$

où l'on a posé $\varepsilon(x) = a_{p+1}x + \cdots + a_n x^{n-p}$. On a $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, donc $x^p\varepsilon(x) = o(x^p)$ et

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n = \lfloor a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \rfloor_p + o(x^p)$$

Par suite, on a aussi

$$f(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n + o(x^n) = \lfloor a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \rfloor_p + o(x^p)$$

car toute fonction $o(x^n)$ est $o(x^p)$ et la somme de deux fonctions $o(x^p)$ est $o(x^p)$. ❑

### Développement limité d'une somme, d'un produit ou d'une composée de fonctions

**Théorème.** *Soit $f$ et $g$ des fonctions ayant au point $0$ un développement limité au même ordre $n \geqslant 1$ :*

$$f(x) = A(x) + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad g(x) = B(x) + o(x^n)$$

*où $A$ et $B$ sont des polynômes de degré au plus $n$. Alors*

- *le développement limité de la fonction somme $f+g$ à l'ordre $n$ en $0$ est $f(x) + g(x) = A(x) + B(x) + o(x^n)$ ;*
- *le développement limité de la fonction produit $fg$ à l'ordre $n$ en $0$ est $f(x)g(x) = \lfloor A(x)B(x) \rfloor_n + o(x^n)$.*
- *Si $g(0) = 0$, alors le développement limité de la composée $f \circ g$ à l'ordre $n$ en $0$ est $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \lfloor A\big(B(x)\big) \rfloor_n + o(x^n)$.*

Ainsi, les règles de calcul sur les développements limités à l'ordre $n$ sont simples :

– Pour calculer la somme de deux développements limités à l'ordre $n \geqslant 1$, on ajoute les parties polynômes.

– Pour calculer le produit de deux développements limités à l'ordre $n$, on multiplie les parties polynômes et l'on tronque le résultat à l'ordre $n$.

– Pour composer deux développements limités à l'ordre $n$, on compose les parties polynômes et l'on tronque le résultat à l'ordre $n$.

**Démonstration.** Pour le premier point, il suffit de remarquer que la somme de deux fonctions $o(x^n)$ est $o(x^n)$. Ecrivons

$$f(x) = A(x) + x^n \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = B(x) + x^n \varepsilon_2(x)$$

où $\varepsilon_1(x)$ et $\varepsilon_2(x)$ tendent vers 0 quand $x$ tend vers 0. Alors

$$f(x)g(x) = A(x)B(x) + x^n\big[A(x)\varepsilon_2(x) + B(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\big]$$

Le terme entre crochets tend vers 0 quand $x$ tend vers 0, donc $f(x)g(x) = A(x)B(x) + o(x^n)$. On a aussi $A(x)B(x) = \lfloor A(x)B(x) \rfloor_n + o(x^n)$, d'où finalement $f(x)g(x) = \lfloor A(x)B(x) \rfloor_n + o(x^n)$.
Pour la composée $f\big(g(x)\big)$, on a

$$f\big(g(x)\big) = A\big(g(x)\big) + g(x)^n \varepsilon_1\big(g(x)\big) \tag{1}$$

Pour tout entier $k \geqslant 1$, le développement limité à l'ordre $n$ de $g(x)^k$ est

$$g(x)^k = \lfloor B(x)^k \rfloor_n + o(x^n) \quad \text{(développement d'un produit)}$$

Si l'on pose $A(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, on en déduit

$$\begin{aligned} A\big(g(x)\big) &= a_0+a_1g(x)+a_2g(x)^2+\cdots+a_ng(x)^n \\ &= \lfloor a_0 + a_1B(x) + a_2B(x)^2+\cdots+a_nB(x)^n\rfloor_n + o(x^n) \end{aligned}$$

ou encore

$$A\big(g(x)\big) = \lfloor A\big(B(x)\big)\rfloor_n + o(x^n) \qquad (2)$$

Puisqu'on a supposé $g(0) = 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ et par suite

$$\lim_{x\to 0} \varepsilon_1\big(g(x)\big) = 0$$

Plus précisément, le développement de $g$ s'écrit

$$\begin{aligned} g(x) &= b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + x^n\varepsilon_2(x) \\ &= x\big[b_1 + b_2x + \cdots + b_nx^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon_2(x)\big] \\ &= xu(x)\ , \quad \text{où } u(x) \text{ a pour limite } b_1 \text{ quand } x \text{ tend vers } 0. \end{aligned}$$

On en déduit $g(x)^n = x^nu(x)^n$ et

$$g(x)^n\varepsilon_1\big(g(x)\big) = x^nu(x)^n\varepsilon_1\big(g(x)\big) = x^nv(x)\ , \text{ où } \lim_{x\to 0} v(x) = 0.$$

Cela montre que :

$$g(x)^n\varepsilon_1\big(g(x)\big) = o(x^n) \qquad (3)$$

En reportant (2) et (3) dans (1) et en utilisant que la somme de deux fonctions $o(x^n)$ est $o(x^n)$, on obtient $f\big(g(x)\big) = \lfloor A\big(B(x)\big)\rfloor_n + o(x^n)$. ❑

**Exemple 1.** Développement limité de $e^{-x}\cos x$ à l'ordre 4 en 0.

On a les développements limité à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned} e^{-x} &= 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Dans le produit des polynômes

$$A(x) = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \text{ et } B(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4,$$

on calcule les coefficients des puissances successives de $x$ en s'arrètant à l'ordre 4 :

– le terme constant est $1\times 1 = 1$,

– le coefficient de $x$ est $-1\times 1 = -1$,

– le coefficient de $x^2$ est $\frac{1}{2!} \times 1 + 1 \times \left(-\frac{1}{2!}\right) = 0$,

– le coefficient de $x^3$ est $-\frac{1}{3!} \times 1 + (-1) \times \left(-\frac{1}{2!}\right) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$,

– le terme en $x^4$ est $\frac{1}{4!} \times 1 + \frac{1}{2!} \times \left(-\frac{1}{2!}\right) + 1 \times \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = -\frac{1}{6}$.

On a donc $e^{-x} \cos x = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$.

**Exemple 2.** Développement limité de $h(x) = \ln \cos x$ à l'ordre 6 en 0.

Tout d'abord, la fonction $h$ est définie au voisinage de 0 puisque $\cos x > 0$ pour tout $x \in ]-\pi/2, \pi/2[$. De plus, la fonction cosinus étant paire, *h* est paire : dans son développement limité, tous les monomes d'exposant impairs ont donc un coefficient nul. On connaît les développements limités suivant à l'ordre 6 en 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)$$

Posons $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = \cos x - 1$, de sorte que

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(\cos x) = \ln\big(1+g(x)\big) = f\big(g(x)\big)$$

On a

$$g(x) = -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6) = B(x) + o(x^6)$$

$$f(x) = A(x) + o(x^6)$$

où l'on a noté :

$$A(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6$$

$$B(x) = -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6$$

Calculons les termes successifs de $A\big(B(x)\big)$ en supprimant tous les monomes de degré supérieurs à 6 :

$$\begin{aligned}\lfloor A\big(B(x)\big)\rfloor_6 = B(x) - \frac{1}{2}\lfloor B(x)^2\rfloor_6 \quad &+ \frac{1}{3}\lfloor B(x)^3\rfloor_6 - \frac{1}{4}\lfloor B(x)^4\rfloor_6 \\ &+ \frac{1}{5}\lfloor B(x)^5\rfloor_6 - \frac{1}{6}\lfloor B(x)^6\rfloor_6\end{aligned}$$

$$\lfloor B(x)^2\rfloor_6 = \left(-\frac{1}{2!}\right)^2 x^4 + 2\left(-\frac{1}{2!}\frac{1}{4!}\right)x^6 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6$$

$$\lfloor B(x)^3\rfloor_6 = \left(-\frac{1}{2!}\right)^3 x^6 = -\frac{1}{8}x^6$$

Puisque $B(x)$ est multiple de $x^2$, les polynômes $B(x)^4$, $B(x)^5$ et $B(x)^6$ sont multiples de $x^8$, donc leur tronqué au degré 6 est nul. On obtient

$$\lfloor A\big(B(x)\big)\rfloor_6 = \left[-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{24}x^6\right]+\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{8}x^6\right]$$
$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6$$

et finalement

$$\ln\,(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)$$

**Exemple 3.** Développement limité de $\dfrac{x}{\sin x}$ à l'ordre $4$ au point $0$.

Ecrivons le développement limité de $\sin\, x$ à l'ordre $5$ en $0$ (le choix de l'ordre $5$ sera expliqué en fin de calcul).

$$\begin{aligned}\sin x \quad &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)\\ &= x\left[1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + o(x^4)\right] \quad \text{car } xo(x^4) = o(x^5)\end{aligned}$$

En posant $u(x) = \frac{1}{3!}x^2 - \frac{1}{5!}x^4 - o(x^4)$, il vient donc

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1-u(x)}$$

On a $u(0) = 0$ et $u(x) = B(x) + o(x^4)$, où $B(x) = \frac{1}{3!}x^2 - \frac{1}{5!}x^4$.
Le développement de $\frac{1}{1-u(x)}$ s'obtient en composant le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et celui de $u$. Puisque $B(x)$ est multiple de $x^2$, il suffit de développer $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre $2$ :

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sin x} &= 1 + B(x) + \lfloor B(x)^2\rfloor_2 + \lfloor B(x)^3\rfloor_3 + \lfloor B(x)^4\rfloor_4 + o(x^4)\\ &= 1 + \left[\frac{1}{3!}x^2 - \frac{1}{5!}x^4\right] + \left(\frac{1}{3!}\right)^2 x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

car $B(x)^3$ et $B(x)^4$ sont multiples de $x^6$. D'où le développement limité cherché :

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + o(x^4)$$

Il a fallu partir du développement de $\sin\, x$ à l'ordre $5$, car dans le quotient $\frac{x}{\sin\, x}$, on a perdu un ordre.

## CONSEILS

Pour calculer un développement limité à l'ordre $n$ d'une fonction $f$ :

- Procédez par étapes en commençant par développer les différentes fonctions qui composent $f$ ; tous ces développements doivent absolument être au même ordre $n$.
- Si vous calculez un développement limité de $f \circ g$ en 0 à partir des développements de $f$ et $g$ en 0, n'oubliez pas de vérifier la condition $g(0) = 0$.
- Disposez clairement vos calculs : vous y repérerez plus facilement les fautes éventuelles.
- Si les calculs conduisent à une diminution de l'ordre (par exemple à cause d'une division par $x$ dans un développement en 0), reprendre depuis le début avec des développements à un ordre plus élevé.
- Si l'on intègre un développement limité ou si l'on multiplie par $x$ un développement en 0, on gagne un ordre ; en multipliant par $x^2$, on gagne deux ordres, etc.

## 4.3 CALCUL DE LIMITES

Quand une limite se présente sous forme indéterminée, un développement limité permet le plus souvent de trouver la réponse.

**Exemple 1.** Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(ax)}{\operatorname{ch}(bx)-1}$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

C'est une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». Ecrivons les développements limités de $1-\cos(ax)$ et de $\operatorname{ch}(bx)-1$ à l'ordre 2 au point 0.

$$\cos(ax) = 1 - \frac{1}{2!}(ax)^2 + o(x^2)$$

$$1-\cos(ax) = \frac{1}{2}a^2x^2 + o(x^2)$$

$$e^{bx} = 1 + bx + \frac{1}{2!}(bx)^2 + o(x^2)$$

$$e^{-bx} = 1 - bx + \frac{1}{2!}(-bx)^2 + o(x^2)$$

$$\operatorname{ch}(bx) = \frac{1}{2}(e^{bx}+e^{-bx}) = 1 + \frac{1}{2!}(bx)^2 + o(x^2)$$

$$\operatorname{ch}(bx)-1 = \frac{1}{2}b^2x^2 + o(x^2)$$

Il vient donc :

$$\frac{1-\cos(ax)}{\mathrm{ch}(bx)-1}=\frac{(a^2/2)x^2+o(x^2)}{(b^2/2)x^2+o(x^2)}=\frac{x^2\left(a^2/2+\dfrac{o(x^2)}{x^2}\right)}{x^2\left(b^2/2+\dfrac{o(x^2)}{x^2}\right)}=\frac{a^2/2+\dfrac{o(x^2)}{x^2}}{b^2/2+\dfrac{o(x^2)}{x^2}}$$

Dans la dernière expression, les rapports $\frac{o(x^2)}{x^2}$ tendent vers $0$ quand $x$ tend vers $0$, donc le numérateur tend vers $a^2/2$ et le dénominateur vers $b^2/2$. On en déduit

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{\mathrm{ch}(bx)-1}=\frac{a^2}{b^2}$$

**Exemple 2.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$.

Il s'agit d'une forme indéterminée « $\infty\times 0$ ». En posant $t=1/x$, on a $\frac{1}{x+1}=\frac{t}{1+t}$ et la limite demandée est

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{1}{t^2}\left(e^t-e^{\frac{t}{1+t}}\right)$$

Calculons le développement limité à l'ordre $2$ au point $0$ du terme entre parenthèses.

$$\begin{aligned}
e^t&=1+t+\frac{1}{2}t^2+o(t^2)\\
\frac{t}{1+t}&=t\big(1-t+o(t)\big)=t-t^2+o(t^2)\\
e^{\frac{t}{1+t}}&=1+(t-t^2)+\frac{1}{2}\lfloor(t-t^2)^2\rfloor_2+o(t^2)\\
&=1+t-t^2+\frac{1}{2}t^2+o(t^2)=1+t-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)
\end{aligned}$$

donc $e^t-e^{\frac{t}{1+t}}=t^2+o(t^2)$ et par suite $\frac{1}{t^2}\left(e^t-e^{\frac{t}{1+t}}\right)=1+o(1)$. Puisque $o(1)$ est par définition une fonction qui tend vers $0$ quand $t$ tend vers $0$, on en déduit

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{1}{t^2}\left(e^t-e^{\frac{t}{1+t}}\right)=1$$

**Exemple 3.** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\frac{1+x}{3-x}\right)^{\frac{1}{(x-1)^2}}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(\frac{1+x}{3-x}\right)^{\frac{1}{(x-1)^2}}$.

Si $x\in]-1,3[$, $\dfrac{1+x}{3-x}$ est positif, donc l'expression dont on veut la limite est bien définie au voisinage de $1$. C'est un forme indéterminée « $1^\infty$ ». En prenant le logarithme, on considère $\dfrac{1}{(x-1)^2}\ \ln\left(\dfrac{1+x}{3-x}\right)$. Posons $x = 1+t$, d'où

$$\frac{1}{(x-1)^2}\ \ln\frac{1+x}{3-x} = \frac{1}{t^2}\ \ln\frac{2+t}{2-t} = \frac{1}{t^2}\ \ln\frac{1+t/2}{1-t/2}$$

On doit calculer la limite de cette dernière expression quand $t$ tend vers 0. On a les développements limités à l'ordre 1 au point 0 :

$$\ln(1+t/2) = t/2 + o(t) \qquad , \qquad \ln(1-t/2) = -t/2 + o(t)$$

d'où
$$\ln\frac{1+t/2}{1-t/2} = \ln\,(1+t/2) - \ln\,(1-t/2) = t + o(t)$$

$$\frac{1}{t^2}\ \ln\frac{1+t/2}{1-t/2} = \frac{1}{t}\left(1+\frac{o(t)}{t}\right)$$

Quand $t$ tend vers 0, $\dfrac{o(t)}{t}$ tend par définition vers 0, donc $1+\dfrac{o(t)}{t}$ tend vers 1. Par suite

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{1}{t^2}\ \ln\frac{1+t/2}{1-t/2} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{1}{t} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \frac{1}{t^2}\ \ln\frac{1+t/2}{1-t/2} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \frac{1}{t} = -\infty$$

En prenant l'exponentielle, on en déduit

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\frac{1+x}{3-x}\right)^{\frac{1}{(x-1)^2}} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(\frac{1+x}{3-x}\right)^{\frac{1}{(x-1)^2}} = 0$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

## CONSEILS

➤ Calcul de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ quand la forme est indéterminée :

poser $x = a+t$ et faire un développement limité de $t \mapsto f(a+t)$ au point 0 à un ordre suffisant pour pouvoir calculer $\lim\limits_{t\to 0} f(a+t)$.

➤ Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ quand la forme est indéterminée :

poser $x = 1/t$ et faire un développement limité de $t \mapsto f(1/t)$ au point 0 à un ordre suffisant pour pouvoir calculer $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(1/t)$.

➤ Pour $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, on calcule de même $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t<0}} f(1/t)$.

## EXERCICES

**4.1** Calculer le développement limité de la fonction $x \mapsto \tan x$ à l'ordre 5 au point 0. En déduire la valeur des nombres dérivés $\tan^{(3)}(0)$, $\tan^{(4)}(0)$ et $\tan^{(5)}(0)$.

**4.2** **a)** Posons $f(x) = \sin(x+x^2)$. Calculer $f^{(k)}(0)$ pour $1 \leqslant k \leqslant 4$.
**b)** Calculer les développements limités des fonctions suivantes au point 0 :
**(i)** $\operatorname{sh} x$ à l'ordre 3.
**(ii)** $\sqrt{\cos x}$ à l'ordre 5.
**(iii)** $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3.

**4.3** Calculer les limites suivantes :

**(a)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\tan x - \sin(2x)}{(\sin x)^3}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{1-\tan x}{\cos(2x)}$

**(c)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\right)^{1/x^2}$ **(d)** $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^\alpha}\left(\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}\right)$, où $\alpha > 0$

**4.4** Calculer la limite des suites suivantes :

**(a)** $\displaystyle\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$, où a > 0 et b > 0 **(b)** $\displaystyle\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

**4.5** Trouver un nombre $a$ tel que $\sin x = \dfrac{x}{1+ax^2} + o(x^4)$ au voisinage de 0.

**4.6** Posons $f(x) = \dfrac{1}{1+bx+cx^2}$, où $b$ et $c$ sont des nombres et $c \neq 0$. Soit $n$ un entier au moins égal à 2.

**a)** Montrer que $f$ a un développement limité à l'ordre $n$ au point 0.
**b)** On note $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$ le développement limité de $f$ à l'ordre $n$ au point 0. Montrer que $a_0 = 1$, $a_1 = -b$ et que les coefficients vérifient la relation $a_k = -ba_{k-1} - ca_{k-2}$ pour tout entier $k$ tel que $2 \leqslant k \leqslant n$.
**c)** On suppose $b = c = 1$. Montrer que $a_{3p} = 1$, $a_{3p+1} = -1$ et $a_{3p+2} = 0$ pour tout entier $p$ tel que $0 \leqslant 3p \leqslant n-2$.

**d)** On suppose $b = -3/2$ et $c = 1/2$. Calculer $a_k$ pour tout entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ (on pourra décomposer $\frac{1}{1-(3/2)x+(1/2)x^2}$ en éléments simples).

## SOLUTIONS

**4.1** On a $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et les développements limités à l'ordre 5 en 0 :

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)$$
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)$$

Posons $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{1-u(x)}$,
où $u(x) = 1-\cos x = \dfrac{1}{2!}x^2 - \dfrac{1}{4!}x^4 + o(x^5)$.
Puisque $u(0) = 0$, on peut développer $\frac{1}{1-u(x)}$ en utilisant le développement de $\frac{1}{1-x}$ au point 0. En posant $B(x) = \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4$, il vient

$$\frac{1}{1-u(x)} = 1 + B(x) + \lfloor B(x)^2 \rfloor_5 + o(x^5)$$

car les polynômes $B(x)^3$, $B(x)^4$ et $B(x)^5$ étant multiples de $x^6$, leur tronqué à l'ordre 5 est nul. On a $B(x)^2 = x^4\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}x^2\right)^2$, donc $\lfloor B(x)^2 \rfloor_5 = x^4\left(\frac{1}{2!}\right)^2 = \frac{1}{4}x^4$ et

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4\right) + \frac{1}{4}x^4 + o(x^5)$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$$

Faisons le produit avec le développement de $\sin x$ :

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\cos x} &= \left[x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5\right]\left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4\right] + o(x^5)\\ &= x + x^3\left[-\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}\right] + x^5\left[\frac{1}{5!}+\left(-\frac{1}{3!}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{24}\right] + o(x^5)\end{aligned}$$

ou encore

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

Puisque la fonction tangente est dérivable autant de fois qu'on veut en 0, on en déduit que les coefficients de $x^3$, $x^4$ et $x^5$ sont (page 48) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= \frac{\tan^{(3)}(0)}{3!} &\quad \text{donc} \quad \tan^{(3)}(0) &= \frac{1}{3} \times 3! = 2\\ 0 &= \frac{\tan^{(4)}(0)}{4!} &\quad \text{donc} \quad \tan^{(4)}(0) &= 0\\ \frac{2}{15} &= \frac{\tan^{(5)}(0)}{5!} &\quad \text{donc} \quad \tan^{(5)}(0) &= \frac{2}{15} \times 5! = 16.\end{aligned}$$

**4.2 a)** Calculons le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 4 en 0. On a

$$\begin{aligned}\sin(x+x^2) &= (x + x^2) - \frac{1}{3!}\lfloor (x + x^2)^3 \rfloor_4 + o(x^4)\\ &= x + x^2 - \frac{1}{3!}(x^3 + 3x^4) + o(x^4)\end{aligned}$$

$$\sin(x+x^2) = x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

On en déduit
$f'(0) = 1, f''(0) = (2!) \times 1 = 2,\ \ f^{(3)}(0) = (3!) \times (-1/6) = -1$
et $f^{(4)}(0) = (4!) \times (-1/2) = -12$.

**b) (i)** On part des développements limités

$$\begin{aligned}e^x &= 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\\ e^{-x} &= 1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

En soustrayant le second du premier, le terme constant et le terme en $x^2$ se simplifient et il reste $e^x - e^{-x} = 2x + 2\frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$ . D'où

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = x + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$$

**b) (ii)** Le développement limité de $\cos x$ à l'ordre 5 en 0 est

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)$$

Posons $\cos x = 1 - u(x)$ , c'est-à-dire

$$u(x) = 1 - \cos x = \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)$$

On a $u(0) = 0$ et $\sqrt{\cos x} = \sqrt{1 - u(x)}$.
Écrivons le développement de la composée $\sqrt{1 - u(x)}$ à l'ordre 5. Puisque le premier terme non nul du développement de $u(x)$ est de degré 2, il suffit d'utiliser le développement limité de $\sqrt{1-x}$ à l'ordre 2.

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x} &= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \\
\sqrt{1-u(x)} &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4\right) - \frac{1}{8}\Bigg\lfloor \left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4\right)^2 \Bigg\rfloor_4 + o(x^5) \\
&= 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{8}\frac{1}{4}x^4 + o(x^5)
\end{aligned}$$

Finalement, $\sqrt{\cos x} = 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o(x^5)$ .

**b) (ii)** Le développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3 en 0 est

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

On a

$$1 + \sqrt{1+x} = 2 + u(x) \text{ ,avec } u(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

et il vient

$$\sqrt{1 + \sqrt{1+x}} = \sqrt{2 + u(x)} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{u(x)}{2}} \qquad (*)$$

Puisque $u(0) = 0$, utilisons le développement d'une composée. En posant

$$B(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3\right) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3$$

on a

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{u(x)}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}B(x) - \frac{1}{8}\lfloor B(x)^2\rfloor_3 + \frac{1}{16}\lfloor B(x)^3\rfloor_3 + o(x^3)\\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{32}x^3\right)\\ &\quad + \frac{1}{16}\frac{1}{64}x^3 + o(x^3)\\ &= 1 + \frac{1}{8}x - \frac{5}{128}x^2 + \frac{21}{1024}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

En reportant dans $(*)$, on obtient finalement

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}x - \frac{5\sqrt{2}}{128}x^2 + \frac{21\sqrt{2}}{1024}x^3 + o(x^3)$$

**4.3** **a)** On a

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \ \text{ d'après l'exercice } \mathbf{4.1},$$

$$\sin(2x) = 2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + o(x^3) = 2x - \frac{8}{3!}x^3 + o(x^3)$$

d'où

$$2\tan x - \sin(2x) = \left(\frac{2}{3} + \frac{8}{3!}\right)x^3 + o(x^3) = 2x^3 + o(x^3)$$

Puisque $\sin x = x + o(x)$, on a $(\sin x)^3 = x^3 + o(x^3)$ et

$$\begin{aligned}\frac{2\tan x - \sin(2x)}{(\sin x)^3} &= \frac{2x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)}\\ &= \frac{2 + o(x^3)/x^3}{1 + o(x^3)/x^3} \ \text{ en divisant haut et bas par } x^3\end{aligned}$$

Dans la dernière expression, le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers 1. On a donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\tan x - \sin(2x)}{(\sin x)^3} = 2$.

**b)** Il s'agit d'une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». Calculons le développement limité de $1-\tan x$ et de $\cos 2x$ à l'ordre 1 au point $\pi/4$. En posant $x = \pi/4 + t$, on a :

$$\tan(\pi/4 + t) = 1 + \big(\tan'(\pi/4)\big)t + o(t) = 1 + 2t + o(t)$$

$$1-\tan(\pi/4 + t) = -2t + o(t)$$

$$\cos\big[2(\pi/4+t)\big] = \cos(\pi/2+2t) = -\sin(2t) = -2t + o(t)$$

On en déduit

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\tan(\pi/4+t)}{\cos(\pi/2+2t)} = \lim_{t\to 0} \frac{-2t + o(t)}{-2t + o(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{-2 + o(t)/t}{-2 + o(t)/t} = 1$$

d'où $\displaystyle \lim_{x\to\pi/4} \frac{1-\tan x}{\cos(2x)} = 1$.

**c)** On a le développement limité au point 0 :

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

d'où

$$\frac{\operatorname{Arctan} x}{x} = 1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$$

$$\ln\left(\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\right) = -\frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$$

$$\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\right) = -\frac{1}{3} + o(1)$$

Ainsi $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\right) = -\frac{1}{3}$, et en prenant l'exponentielle, on en déduit $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{-1/3}$.

**d)** Remarquons que pour $x \in ]0,\pi/2[$, on a bien $\sin x > 0$. En mettant $\sqrt{x}$ en facteur, il vient

$$\frac{1}{x^\alpha}\left[\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}\right] = \frac{\sqrt{x}}{x^\alpha}\left[1 - \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}}\right] = x^{1/2-\alpha}\left[1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/2}\right]$$

On a les développements limités en 0 :

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\right) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$$

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{6}x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$$

$$1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/2} = \frac{1}{12}x^2 + o(x^2) = \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{12}x^2\varepsilon(x)\,,\text{ où } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Par suite

$$\frac{1}{x^\alpha}\left[\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}\right] = \frac{1}{12}x^{1/2-\alpha}\left(x^2+x^2\varepsilon(x)\right) = \frac{1}{12}x^{5/2-\alpha}\left(1+\varepsilon(x)\right)$$

et l'on en déduit $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^\alpha}\left[\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 5/2 \\ 1/12 & \text{si } \alpha = 5/2 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 5/2 \end{cases}$

**4.4** **a)** Posons $f(x) = \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ pour tout $x > 0$, de sorte que

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = f(1/n)$$

Puisque $1/n$ tend vers 0, utilisons le développement limité de l'exponentielle au point 0:

$$a^x = e^{(\ln a)x} = 1 + (\ln a)x + o(x)$$

$$b^x = e^{(\ln b)x} = 1 + (\ln b)x + o(x)$$

$$\frac{a^x+b^x}{2} = 1 + \frac{\ln a + \ln b}{2}x + o(x)$$

D'après le développement limité $\ln(1+x) = x + o(x)$ au point 0, il vient

$$\ln\big(f(x)\big) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{\ln a+\ln b}{2}x + o(x)\right)$$
$$= \frac{\ln a+\ln b}{2} + o(1)$$

On a ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \ln\big(f(x)\big) = \dfrac{\ln a+\ln b}{2} = \ln\sqrt{ab}$. En prenant l'exponentielle, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \sqrt{ab}$$

**b)** Posons $f(x) = (\cos x)^{1/x^2}$ de sorte que $\big(\cos(1/n)\big)^{n^2} = f(1/n)$. Considérons $\ln f(x) = (1/x^2)\ln\cos x$. On a les développement limités au point 0 :

$$\cos x = 1 - (x^2/2) + o(x^2)$$
$$\ln\cos x = -x^2/2 + o(x^2)$$
$$\frac{1}{x^2}\ln\cos x = -1/2 + o(1)$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \ln f(x) = -1/2$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln f(1/n) = -1/2$ et en prenant l'exponentielle, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(\cos(1/n)\big)^{n^2} = e^{-1/2}$.

**4.5** Écrivons le développement limité de $\sin x - \dfrac{x}{1+ax^2}$ à l'ordre 4 au point 0 :

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$
$$\frac{1}{1+ax^2} = 1 - ax^2 + o(x^3)$$
$$\frac{x}{1+ax^2} = x - ax^3 + o(x^4)$$

$$\sin x - \frac{x}{1+ax^2} = \left(-\frac{1}{6}+a\right)x^3 + o(x^4)$$

Pour que cette fonction soit $o(x^4)$ au voisinage de 0, il faut et il suffit que $a = 1/6$. On a donc $\sin x = \dfrac{x}{1+(1/6)x^2} + o(x^4)$.

**4.6** **a)** La fonction $u : x \mapsto 1+bx+cx^2$ est continue et prend la valeur 1 en 0, donc il existe un intervalle ouvert $I$ contenant 0 tel que $1+bx+cx^2 \neq 0$ pour tout $x \in I$ (proposition page 83). Puisque $u$ est dérivable autant de fois qu'on veut sur $I$, il en va de même de la fonction $f : x \mapsto 1/u(x)$. La fonction $f$ a donc un développement limité à l'ordre $n$ au point 0.

**b)** Le développement limité de $f$ à l'ordre 1 au point 0 est $\frac{1}{1+bx+cx^2} = 1 - bx + o(x)$, donc $a_0 = 1$ et $a_1 = -b$. On a pour tout $x \in I$

$$1 = (1+bx+cx^2)\big(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n)\big)$$

Soit $k$ un entier tel que $2 \leqslant k \leqslant n$. Dans le produit de droite, le coefficient de $x^k$ est $a_k + ba_{k-1} + ca_{k-2}$. Or dans le développement limité de la fonction constante $x \mapsto 1$, le coefficient de $x^k$ est nul. On en déduit

$$a_k + ba_{k-1} + ca_{k-2} = 0$$

**c)** D'après **b)**, on a

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = -1 \quad \text{et} \quad a_k = -a_{k-1} - a_{k-2} \text{ si } 2 \leqslant k \leqslant n.$$

En particulier $a_2 = -a_1 - a_0 = 0$. Les égalités demandées sont donc vraies si $p = 0$. Si $k \geqslant 3$, alors d'après la relation de récurrence, on a

$$a_k = -a_{k-1} - a_{k-2} = -[-a_{k-2} - a_{k-3}] - a_{k-2} = a_{k-3}$$

Si $p$ est un entier tel que $0 \leqslant 3p \leqslant n-2$, il vient donc

$$a_{3p} = a_0 = 1\,,\ a_{3p+1} = a_1 = -1 \ \text{ et } \ a_{3p+2} = a_2 = 0$$

**d)** On a $1-(3/2)x+(1/2)x^2 = (1/2)(1-x)(2-x)$. La décomposition de $\frac{1}{1-(3/2)x+(1/2)x^2} = \frac{2}{(1-x)(2-x)}$ en éléments simples est

$$\frac{1}{1-(3/2)x+(1/2)x^2} = \frac{2}{1-x} - \frac{2}{2-x}$$

Calculons le développement limité à l'ordre $n$ au point 0 :

$$\frac{2}{1-x} = 2 + 2x + 2x^2 + \cdots + 2x^n + o(x^n)$$

$$\frac{2}{2-x} = \frac{1}{1-x/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2^2}x^2 + \cdots + \frac{1}{2^n}x^n + o(x^n)$$

d'où

$$\frac{1}{1-(3/2)x+(1/2)x^2}$$

$$= 1 + \left(2-\frac{1}{2}\right)x + \left(2-\frac{1}{2^2}\right)x^2 + \cdots + \left(2-\frac{1}{2^n}\right)x^n + o(x^n)$$

On a donc $a_k = 2-\frac{1}{2^k} = \frac{2^{k+1}-1}{2^k}$ pour tout entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

CHAPITRE 5

# Étude locale d'une fonction

OBJECTIFS

Dans ce chapitre, nous utilisons les développements limités pour étudier l'allure d'une courbe au voisinage d'un point. Nous saurons en particulier déterminer la position de la courbe par rapport à la tangente, et aussi par rapport à une asymptote oblique.

## 5.1 SIGNE D'UNE FONCTION AU VOISINAGE D'UN POINT

Voici la propriété-clef qu'on utilisera tout au long du chapitre.

**Proposition.** *Soit u une fonction telle* $\lim_{x\to a} u(x) = \ell$*, où* $\ell$ *est un nombre réel non nul. Alors pour tout x assez proche de* $a$*,* $u(x)$ *a le signe de* $\ell$*.*

**Démonstration.** Supposons par exemple $\ell > 0$ et choisissons un nombre $\varepsilon$ tel que $0 < \varepsilon < \ell$ . Par définition de la limite, on sait que pour tout $x$ assez proche de $a$, on a $\ell - \varepsilon < u(x) < \ell + \varepsilon$. Puisque $\ell - \varepsilon > 0$, il s'ensuit que pour tout $x$ assez proche de $a$, on a $u(x) > 0$. On raisonne de même si $\ell < 0$. ❑

Soit $f$ une fonction ayant au point $a$ un développement limité à l'ordre $n$. Supposons que dans ce développement, il y a un monome non nul de plus bas degré :

$f(a+t) = a_k t^k + a_{k+1} t^{k+1} + \cdots + a_n t^n + o(t^n)$, où $a_k \neq 0$ et $n \geqslant k$.

En tronquant à l'ordre $k$, il vient

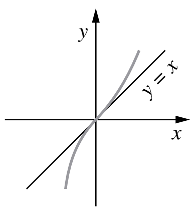
$$f(a+t) = a_k t^k + o(t^k) = t^k \left( a_k + \frac{o(t^k)}{t^k} \right)$$

Puisque $\lim_{t \to 0} o(t^k)/t^k = 0$, on a $\lim_{t \to 0}\big(a_k + o(t^k)/t^k\big) = a_k \neq 0$. D'après la proposition précédente, $a_k + o(t^k)/t^k$ a le signe de $a_k$ pour tout $t$ est assez proche de 0. Par conséquent, $f(a+t)$ a le signe de $a_k t^k$ pour tout $t$ assez proche de 0. En posant $x = a+t$, cette propriété se formule : $f(x)$ a le signe de $a_k(x-a)^k$ pour tout $x$ assez proche de $a$. Enonçons ce qu'on vient de montrer.

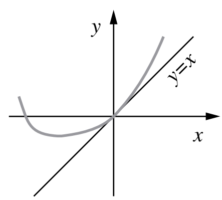
**Proposition.** *Soit $f$ une fonction ayant au point $a$ un développement limité $f(a+t) = ct^k + o(t^k)$, où $c \neq 0$. Alors pour tout $x$ assez proche de $a$, $f(x)$ a le signe de $c(x-a)^k$.*

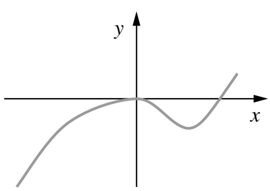
Précisons ce résultat.

- Si l'entier $k$ est pair, alors pour tout $x$ assez proche de $a$, $f(x)$ a le signe de $c$.
- Si $k$ est impair, $f(x)$ a le signe de $c$ pour tout $x > a$ assez proche de $a$, et $f(x)$ a le signe de $-c$ pour tout $x < a$ assez proche de $a$.

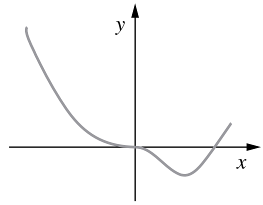



des allures locales pour $f(x) = x + o(x)$




allure locale pour $f(x) = -x^2 + o(x^3)$




allure focale pour $f(x) = -x^3 + o(x^3)$

**Exemple.** Pour tout $x > 0$, posons $f(x) = \dfrac{2(x-1)}{x+1}$. On veut étudier le signe de la différence $\varphi(x) = \ln x - f(x)$ pour tout $x$ assez proche de 1.
On a $\varphi(1) = \ln 1 - f(1) = 0$. Ecrivons les développements limités de ln et de $f$ au point 1 :

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$$

$$f(1+t) = \frac{2t}{2+t} = \frac{t}{1+t/2} = t\left(1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 + o(t^2)\right)$$

$$= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t^3 + o(t^3)$$

Il vient

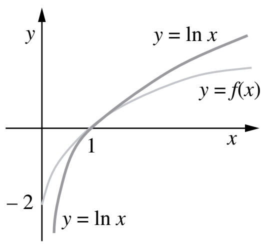
$$\varphi(1+t) = \ln(1+t) - f(1+t) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)t^3 + o(t^3) = \frac{1}{12}t^3 + o(t^3)$$

Pour tout $x$ assez proche de 1, $\varphi(x)$ est donc du signe de $\frac{1}{12}(x-1)^3$.

On en conclut que

– pour tout $x > 1$ et assez proche de 1, on a $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$,

– pour tout $x < 1$ et assez proche de 1, on a $\ln x < \frac{2(x-1)}{x+1}$.




la courbe de $f$ et celle du logarithme ont la même tangente en $(1,0)$, mais les deux courbes se croisent.

## 5.2 ÉTUDE LOCALE D'UNE FONCTION

### Dérivabilité en un point

Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $a$. Pour étudier si $f$ est dérivable en $a$ lorsqu'on ne peut pas pratiquer au point $a$ les formules de dérivation, il faut revenir à la définition de la dérivée et étudier la limite de $\frac{f(a+t)-f(a)}{t}$ quand $t$ tend vers 0. Pour cela, on calcule le développement limité de $f$ à l'ordre 1 en $a$.

Supposons $f$ continue en $a$. D'après la proposition page 47, $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $f$ a un développement limité à l'ordre 1 en $a$, et dans ce cas, le développement limité est

$$f(a+t) = f(a) + f'(a)t + o(t)$$

On a donc la proposition suivante.

**Proposition.** *Soit $f$ une fonction continue ayant un développement limité à l'ordre 1 au point $a$ : $f(a+t) = a_0 + a_1 t + o(t)$. Alors*

- *$f$ est dérivable en $a$, $f(a) = a_0$ et $f'(a) = a_1$.*
- *Au point d'abscisse $a$, l'équation de la tangente au graphe de $f$ est $y = a_0 + a_1(x - a)$.*

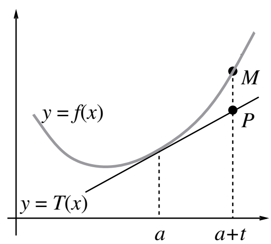
### Position du graphe par rapport à la tangente

**A)** Supposons que $f$ a un développement limité à l'ordre 2 au point $a$ :

$$f(a+t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + o(t^2), \text{ où } a_2 \neq 0.$$

La tangente au point d'abscisse $a$ est le graphe de la fonction

$$T(x) = a_0 + a_1(x - a)$$




Si $M$ est le point d'abscisse $x$ sur le graphe de $f$ et si $P$ est le point d'abscisse $x$ sur la tangente en $a$, la différence $d(x) = f(x) - T(x)$ est la mesure algébrique $\overline{PM}$.
On a $T(a+t) = a_0 + a_1 t$ et

$$d(a+t) = f(a+t) - T(a+t) = a_2 t^2 + o(t^2)$$

Comme on a supposé $a_2 \neq 0$, on en déduit que $d(a+t)$ est du signe de $a_2 t^2$ pour tout $t$ assez proche de 0. Ainsi $f(x) - T(x)$ est du signe de $a_2$ pour tout $x$ assez proche de $a$.

- Si $a_2 > 0$, alors au voisinage du point d'abscisse $a$, la courbe de $f$ est au dessus de la tangente en $a$ (figure 5.1 ci-dessous).
- Si $a_2 < 0$, alors au voisinage du point d'abscisse $a$, la courbe de $f$ est en dessous de la tangente en $a$ (figure 5.2 ci-dessous).

### Cas d'une dérivée nulle

Cela veut dire que la tangente en $a$ est horizontale. On a $a_1 = 0$, donc le développement limité de $f$ s'écrit

$$f(a+t) = a_0 + a_2 t^2 + o(t^2)$$

- Si $a_2 > 0$, la courbe de $f$ a un *minimum local* en $a$.
- Si $a_2 < 0$, la courbe de $f$ a un *maximum local* en $a$.

**B)** Supposons que, dans le développement limité de $f(a+t)$ en 0, le coefficient de $t^2$ est nul, mais que $f$ a un développement limité à l'ordre 3 :

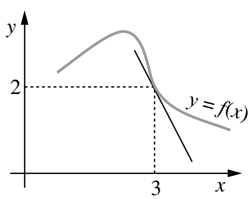
$$f(a+t) = a_0 + a_1 t + a_3 t^3 + o(t^3)\,,\ \text{où } a_3 \neq 0.$$

Alors pour tout $t$ assez proche de 0, $d(a+t)$ a le signe de $a_3 t^3$. Puisque $a_3 t^3$ change de signe quand $t$ change de signe, on en déduit que la courbe de $f$ traverse sa tangente au point d'abscisse $a$ : on dit que c'est un *point d'inflexion* (figure 5.3 ci-dessous).
Pour trouver un point d'inflexion, on cherche parmi les points d'abscisse $x$ telle que $f''(x) = 0$.
On montre de même le résultat général suivant.

**Proposition.** *Si $f$ a un développement limité en $a$, à un ordre $k \geqslant 2$ :*

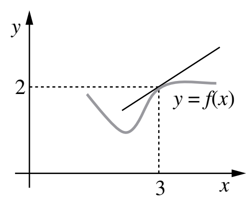
$$f(a+t) = a_0 + a_1 t + a_k t^k + o(t^k)\,,\ \text{où } a_k \neq 0,$$

*alors au voisinage de $a$, la position de la courbe de $f$ par rapport à sa tangente en $a$ est donnée par le signe de $a_k(x-a)^k$.*



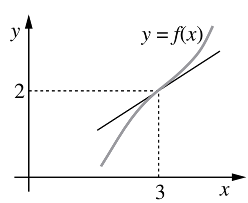

$f(3+t) = 2-2t+t^2+o(t^2)$

Figure 5.1




$f(3+t) = 2+(1/2)t-t^2+o(t^2)$

Figure 5.2




$f(3+t) = 2+(1/2)t+t^3+o(t^3)$

Figure 5.3

**Exemple.** Posons $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \in ]0,\pi[$.

• Montrons que $f(x)$ a une limite quand $x$ tend vers 0.

On a $f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{\sin x} - 1\right)$ et les développement limités

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + o(x^2)$$
$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{1}{3!}x^2 + o(x^2)$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3!}x^2 + o(x^2)\right) = \frac{1}{6}x + o(x)$$

On a ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

• Posons $f(0) = 0$, de sorte que la fonction $f$ est maintenant définie et continue sur $[0,\pi[$. Le développement limité ci-dessus montre que $f'(0) = 1/6$. La courbe de $f$ a donc une demi-tangente en 0 d'équation $y = (1/6)x$.

• Quelle est, au voisinage de 0, la position de la courbe de $f$ par rapport à sa demi-tangente en 0 ?

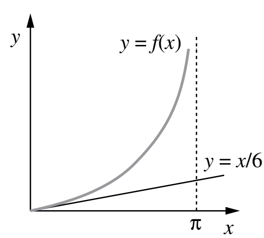
Écrivons le développement de $f(x)$ à l'ordre 3 en partant de

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + o(x^5)\,.$$

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{1}{3!}x^2 + \left[\left(\frac{1}{3!}\right)^2 - \frac{1}{5!}\right]x^4 + o(x^4)$$
$$= 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + o(x^4)$$

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + o(x^4)\right) = \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + o(x^3)$$

Puisqu'on a $\frac{7}{360}x^3 > 0$ pour $x > 0$, on en déduit qu'au voisinage de 0, la courbe de $f$ est au dessus de sa tangente à l'origine.




Graphe de *f*

## 5.3 DROITE ASYMPTOTE

Rappelons que si $a$ est un nombre réel et si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, alors la courbe de $f$ a une *asymptote verticale* en $a$.

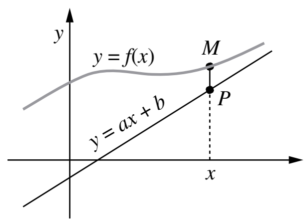
### Recherche d'une asymptote oblique

Voici les définitions dans le cas d'une fonction $f$ définie sur un intervalle $[r, +\infty[$.

- Si $\frac{f(x)}{x}$ a une limite finie $a$ quand $x$ tend vers $+\infty$, on dit que la courbe de $f$ a, *en* $+\infty$*, une direction asymptotique de pente* $a$.
- Si de plus $f(x) - ax$ a une limite finie $b$ quand $x$ tend vers $+\infty$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est *asymptote à la courbe de $f$ en* $+\infty$.

### Position de la courbe par rapport à une asymptote

Supposons $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big) = b$.




La différence $f(x) - (ax + b)$ mesure l'écart algébrique $\overline{PM}$ entre le point $P$ d'abscisse $x$ sur l'asymptote et le point $M$ d'abscisse $x$ sur la courbe de $f$. La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donc donnée par le signe de $f(x) - (ax + b)$.

Souvent, on se contente de déterminer ce signe pour tout $x$ suffisamment grand : c'est cela qu'on entend par « position de la courbe par rapport à l'asymptote ». Dans la pratique,

> *pour trouver une éventuelle asymptote à la courbe de $f$ en $+\infty$ et la position de la courbe par rapport à l'asymptote, on pose $x = 1/t$ et l'on calcule le développement limité de $t \mapsto f(1/t)$ en 0.*

**Exemple.** Considérons la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^{1/x} + 1}{e^{1/x} - 1}$.

Posons $x = 1/t$ de sorte que $f(1/t) = \dfrac{e^t + 1}{e^t - 1}$, et calculons le développement limité en 0 de cette expression. On a

$$e^t + 1 = 1 + 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2) = 2 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$$

$$e^t - 1 = t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + o(t^3) = t\left[1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}t^2 + o(t^2)\right]$$

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{t}\left[1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{4}t^2 + o(t^2)\right]$$

$$= \frac{1}{t}\left[1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}t^2 + o(t^2)\right]$$

d'où

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\left\lfloor\left(2 + t + \frac{1}{2}t^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}t^2\right)\right\rfloor_2 + o(t^2)$$

$$= \frac{1}{t}\left[2 + \frac{1}{6}t^2 + o(t^2)\right]$$

$$= \frac{2}{t} + \frac{1}{6}t + o(t)$$

En posant $o(t) = t\varepsilon(t)$, où $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$, il vient

$$f(x) = 2x + \frac{1}{6x} + \frac{1}{x}\varepsilon(1/x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \varepsilon(1/x) = 0.$$

Ainsi $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 2$ et $\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - 2x\big) = 0$, donc la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

De plus, au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$, $f(x) - 2x$ a le signe de $\frac{1}{6x}$ :

– au voisinage de $+\infty$, la courbe de $f$ est au dessus de l'asymptote,

– au voisinage de $-\infty$, la courbe de $f$ est en dessous de l'asymptote.

Terminons l'étude de la fonction $f$.

• $f$ est impaire, car $f(x) = \dfrac{e^{1/x} + 1}{e^{1/x} - 1} = \dfrac{e^{1/x}(1 + e^{-1/x})}{e^{1/x}(1 - e^{-1/x})} = -f(-x)$.

• Sur $]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto 1/x$ est décroissante, donc aussi la fonction $v : x \mapsto e^{1/x}$. Pour tout $x > 0$, on a $e^{1/x} \in ]1, +\infty[$ et sur l'intervalle $]1, +\infty[$, la fonction $u : x \mapsto \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$ est décroissante. Puisqu'on a $f(x) = u \circ v(x)$, on en déduit que $f$ est croissante sur $]0, +\infty[$.

• On a $f(x) = \dfrac{1 + e^{-1/x}}{1 - e^{-1/x}}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{-1/x} = 0$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$.

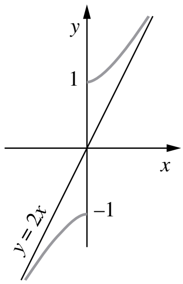
• Étudions la courbe au voisinage de l'origine.

On a $f(x) - 1 = \dfrac{1 + e^{-1/x}}{1 - e^{-1/x}} - 1 = \dfrac{2e^{-1/x}}{1 - e^{-1/x}}$, donc

$$\frac{f(x) - 1}{x} = 2\frac{e^{-1/x}}{x}\frac{1}{1 - e^{-1/x}}.$$

On sait que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim\limits_{t \to -\infty} \frac{e^t}{-1/t} = \lim\limits_{t \to -\infty} -te^t = 0$. Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (1 - e^{-1/x}) = 1$, on en déduit $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-1}{x} = 0$. Cela montre que la courbe de $f$ a une demi-tangente horizontale au point $(0,1)$.

On peut maintenant dessiner la courbe de $f$ sur $]0,+\infty[$ et compléter par symétrie par rapport à l'origine.





**CONSEIL**

➤ N'hésitez pas à faire une étude locale en quelques points remarquables : vous pourrez ainsi dessiner la courbe plus précisément.

## EXERCICES

**5.1** Posons $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2 + x^3}$.

**a)** Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f$ ?
Étudier les variations de $f$.

**b)** En quels points $f$ a-t-elle un maximum local ? un minimum local ?

**c)** Montrer que la courbe de $f$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, d'abscisse comprise entre $-1$ et $0$.

**d)** Montrer que la courbe de $f$ a une asymptote dont on calculera l'équation. Quelle est la position de la courbe par rapport à cette asymptote ?
Dessiner la courbe de $f$.

**5.2** Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Posons $f(x) = \ln \dfrac{1+ax}{1+x}$.

**a)** Trouver un intervalle ouvert contenant 0 sur lequel la fonction $f$ est définie.

**b)** Faire une étude locale de $f$ en 0. Dessiner l'allure de la courbe de $f$ au voisinage de 0 (tangente et position par rapport à la tangente) en discutant selon les valeurs de $a$.

**5.3** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x + 2$. Montrer que $f$ a deux points d'inflexion qu'on déterminera. Dessiner l'allure de la courbe de $f$ en chacun de ces points.

**5.4** Posons $f(x) = \text{Arcsin}(e^{-x^2})$.
**a)** Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f$ ?
Étudier les variations de $f$.
**b)** En utilisant la question **(d)** de l'exercice **1.4** page 17, montrer qu'en 0, le graphe de $f$ a deux demi-tangentes dont on calculera les pentes.
**c)** Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Dessiner la courbe de $f$.

**5.5** Posons $f(x) = (x^2 - 1)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$.
**a)** Montrer que la fonction $f$ est impaire.
**b)** Montrer que $f(x)$ a une limite quand $x$ tend vers 1. En déduire qu'il y a une une fonction continue $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $h(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$.
La fonction $h$ est-elle dérivable en 1 ? La courbe de $h$ a-t-elle une tangente au point d'abscisse 1 ?
**c)** Déterminer l'asymptote à la courbe de $f$ et la position de la courbe de $f$ par rapport à cette asymptote.
**d)** Soit $D = ]0,1[\cup]1,+\infty[$. Pour tout $x \in D$, posons

$$u(x) = \ln\frac{1+x}{|1-x|} - \frac{1}{x}$$

**(i)** En étudiant la fonction $u$, montrer que l'on a $u(x) > 0$ pour tout $x \in ]1,+\infty[$ et qu'il existe $\alpha \in ]0,1[$ tel que $u(x) < 0$ pour $x \in ]0,\alpha[$ et $u(x) > 0$ pour $x \in ]\alpha,1[$.
**(ii)** Montrer que pour tout $x \in D$, on a $f'(x) = 2xu(x)$. Dresser le tableau de variations de $f$.
**(iii)** Calculer $f'(0)$ et dessiner la courbe de $f$.

## SOLUTIONS

**5.1 a)** Posons $u(x) = 1 - x^2 + x^3$. La fonction $u$ et la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ sont définies sur $\mathbb{R}$, donc $f$ aussi.
Puisque la fonction racine cubique est croissante sur $\mathbb{R}$, $f$ a les mêmes variations que $u$. On a $u'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$, d'où le tableau de variation :

| | $-\infty$ | | $0$ | | $2/3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u'(x)$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**b)** La fonction $f$ a un maximum local au point $(0,1)$ et un minimum local au point d'abscisse $2/3$ ; la valeur de ce minimum local est $f(2/3) = \sqrt[3]{23}/3 > 0$.

**c)** Les variations de $f$ montrent que, pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant f(2/3) > 0$. De plus, $f$ est continue et strictement croissante sur $]-\infty, 0]$. Puisque $f(0) > 0$ et $f(-1) = -1^{1/3} = -1 < 0$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution $s \in \mathbb{R}$, et que l'on a $-1 < s < 0$.

**d)** Pour tout $x \neq 0$, on a $f(x) = x\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$. En posant $x = 1/t$, il vient $f(1/t) = (1/t)\sqrt[3]{1 - t + t^3}$. Puisque $\lfloor -t + t^3 \rfloor_2 = -t$, on a

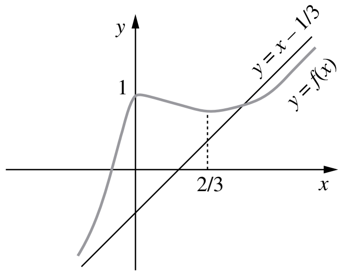
$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\left[1 - \frac{1}{3}t + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2}(-t)^2 + o(t^2)\right]$$

$$= \frac{1}{t}\left[1 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}t^2 + o(t^2)\right] = \frac{1}{t} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}t + o(t)$$

donc

$$f(x) = x - \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x), \text{ où } \lim_{x \to \pm\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

Ainsi la droite d'équation $y = x - \frac{1}{3}$ est asymptote à la courbe de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Puisque $-1/9x$ a le signe opposé de celui de $x$, la courbe est en dessous de l'asymtote au voisinage de $+\infty$, et au dessus au voisinage de$-\infty$.




Graphe de $f$ et de l'asymptote

**5.2** **a)** Si $|x| < 1$, on a $1 + x > 0$; si $|x| < 1/|a|$, alors $|ax| < 1$, donc $1 + ax > 0$. Posons $m = \min(1,1/|a|)$. Alors on a $m > 0$ et pour tout $x \in ]-m,m[$, on a $1 + x > 0$ et $1 + ax > 0$, donc $\frac{1+ax}{1+x} > 0$. La fonction $f$ est donc définie au moins sur l'intervalle $]-m,m[$.

**b)** Pour tout $x \in ]-m,m[$, on a $f(x) = \ln(1 + ax) - \ln(1 + x)$.

Le développement limité de $f$ à l'ordre 2 en 0 est

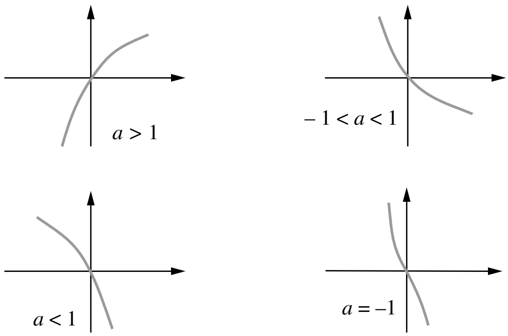
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(ax - \frac{1}{2}a^2x^2\right) - \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) + o(x^2) \\ &= (a-1)x + \frac{1}{2}(1-a^2)x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Au point $(0,0)$, la courbe de $f$ a une tangente de pente $a - 1$. Si $|a| < 1$, alors $1 - a^2 > 0$ et au voisinage de 0, la courbe de $f$ est au dessus de cette tangente. Si $|a| > 1$, alors au voisinage de 0, la courbe de $f$ est en dessous de la tangente.

Supposons $a = -1$. Alors le développement de $f$ à l'ordre 3 en 0 est

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) + o(x^3) \\ &= -2x - \tfrac{2}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

La tangente en 0 a pour pente $-2$ et l'origine est un point d'inflexion. En tout point $x > 0$ suffisamment proche de 0, la courbe est en dessous de sa tangente.

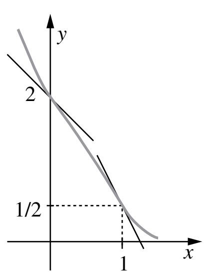



**5.3** On a $f'(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$, $f''(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ et $f'''(x) = 6(2x-1)$. L'équation $f''(x) = 0$ a pour solutions 0 et 1 : les éventuels points d'inflexion ont donc pour abscisse 0 ou 1.

- La fonction étant polynomiale, son développement limité en 0 à l'ordre 3 est $f(x) = \lfloor f(x) \rfloor_3 = 2 - x - x^3 + o(x^3)$. Le point (0,2) est donc un point d'inflexion de la courbe de $f$, la tangente en ce point a pour équation $y = 2 - x$ et pour tout $x > 0$ suffisamment petit, la courbe est en dessous de cette tangente.
- On a $f(1) = 1/2$, $f'(1) = -2$, $f''(1) = 0$ et $f'''(1) = 6$, donc au point 1, le développement limité de $f$ à l'ordre 3 est

  $$f(1+t) = 1/2 - 2t + t^3 + o(t^3)$$

  car on sait que le coefficient de $t^3$ est $(1/3!) f'''(1) = 1$. Le point $(1, 1/2)$ est donc un point d'inflexion de la courbe de $f$, la tangente en ce point a pour équation $y = 1/2 - 2(x-1)$, ou encore $y = 5/2 - 2x$. Pour tout $x > 1$ suffisamment proche de 1, la courbe est au dessus de cette tangente.



**5.4** **a)** La fonction Arcsinus est définie sur $[-1,1]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 < e^{-x^2} \leqslant e^0 = 1$, donc $f$ est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction exponentielle est croissante et $x \mapsto -x^2$ est décroissante sur $[0,+\infty[$, donc $f$ est décroissante sur $[0,+\infty[$. Puisque la fonction $f$ est paire, elle est croissante sur $]-\infty,0]$.

**b)** On a $f(0) = \operatorname{Arcsin} 1 = \pi/2$. Étudions la limite du rapport $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)-\pi/2}{x}$ quand $x$ tend vers 0 par valeurs positives. On a

$$\frac{f(x)-\pi/2}{x} = \frac{\operatorname{Arcsin}(e^{-x^2})-\pi/2}{x}$$
$$= \frac{\operatorname{Arcsin}(e^{-x^2})-\pi/2}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}\,\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x}$$

On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Arcsin}(e^{-x^2})-\pi/2}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}} = \lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \dfrac{\operatorname{Arcsin} t-\pi/2}{\sqrt{1-t^2}} = -1$ d'après la question **(d)** de l'exercice indiqué. D'autre part, le développement limité de l'exponentielle en 0 montre que $e^{-2x^2} = 1-2x^2+o(x^2)$, donc

$$\sqrt{1-e^{-2x^2}} = \sqrt{2x^2}+o(x) = |x|\sqrt{2}+o(x)$$

On a ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \sqrt{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = -\sqrt{2}$.

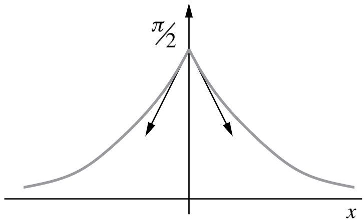
Par suite

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-\pi/2}{x} = -\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-\pi/2}{x} = \sqrt{2}$$

Ce sont les pentes des demi-tangentes au graphe de $f$ au point $(0,\pi/2)$ ; ces pentes sont opposées, en accord avec le fait que, $f$ étant paire, la courbe de $f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

**c)** On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Arcsin}(e^{-x^2}) = \operatorname{Arcsin}(0) = 0$.

La courbe de $f$ est asymptote à l'axe des abscisses en $+\infty$ et en $-\infty$.




Graphe de $f$

**5.5 a)** Pour tout $x \neq \pm 1$, on a $-x \neq \pm 1$ et

$$f(-x) = (x^2 - 1)\ln\frac{|-x+1|}{|-x-1|} = (x^2 - 1)\ln\frac{|x-1|}{|x+1|}$$
$$= -(x^2 - 1)\ln\frac{|x+1|}{|x-1|} = -f(x)$$

**b)** Posons $x = 1 + t$. Il vient, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$ :

$$f(1+t) = t(2+t)\big(\ln|2+t| - \ln|t|\big)$$

Quand $t$ tend vers 0, $t(2+t)\ln|2+t|$ tend vers 0. Puisque $\lim\limits_{t\to 0}\big(t\ln|t|\big) = 0$, on en déduit $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{t\to 0} f(1+t) = 0$.
Comme la fonction $f$ est impaire, on a aussi $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$. Posons $h(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ et $h(1) = h(-1) = 0$. Alors la fonction $h$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
Pour tout $t \neq 0$ suffisamment petit, on a

$$\frac{h(1+t)}{t} = \frac{f(1+t)}{t} = (2+t)\big(\ln|2+t| - \ln|t|\big)$$

Puisque $\lim\limits_{t\to 0} \ln|t| = -\infty$, il vient $\lim\limits_{t\to 0}\big(\ln|2+t| - \ln|t|\big) = +\infty$ et donc

$$\lim_{x\to 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{h(1+t)}{t} = +\infty$$

Ainsi la fonction $h$ n'est pas dérivable en 1. Mais la courbe de $h$ a une tangente verticale au point $(1,0)$.

**c)** Pour tout $x > 1$, posons $x = 1/t$, de sorte que

$$\begin{aligned}
f(1/t) &= \big((1/t)^2 - 1\big)\ln\frac{|1/t+1|}{|1/t-1|}\\
&= \frac{1}{t^2}(1-t^2)\ln\frac{1+t}{1-t} \qquad \text{car } 1+t>0 \text{ et } 1-t>0\\
&= \frac{1}{t^2}(1-t^2)\big[\ln(1+t)-\ln(1-t)\big]
\end{aligned}$$

On a le développement limité en 0 :

$$\begin{aligned}
\ln(1+t)-\ln(1-t) &= \left(t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3\right)-\left(-t-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right)+o(t^3)\\
&= 2t+\frac{2}{3}t^3+o(t^3)
\end{aligned}$$

d'où

$$(1-t^2)\big[\ln(1+t)-\ln(1-t)\big] = 2t-\frac{4}{3}t^3+o(t^3)$$

$$f(1/t) = \frac{1}{t^2}\left(2t-\frac{4}{3}t^3+o(t^3)\right) = \frac{2}{t}-\frac{4}{3}t+o(t)$$

En posant $o(t) = t\varepsilon(t)$, où $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$, on obtient

$$f(x) = 2x-\frac{4}{3x}+\frac{1}{x}\varepsilon(1/x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\varepsilon(1/x) = 0.$$

La droite d'équation $y = 2x$ est donc asymptote à la courbe de $f$ en $+\infty$. Puisque $-\frac{4}{3x} < 0$ pour $x > 0$, la courbe est sous l'asymptote en tout point d'abscisse $x$ suffisamment grande.
La fonction $f$ étant impaire, on en déduit que cette même droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe de $f$ en $-\infty$ et qu'en tout point d'abscisse $x < 0$ suffisamment grande en valeur absolue, la courbe est au dessus de l'asymptote.

**d) (i)** On a $u(x) = \ln(1+x)-\ln|1-x|-1/x$. Sur $\mathbb{R}^*$, la dérivée de $x\mapsto \ln|x|$ est $x\mapsto 1/x$, donc il vient

$$u'(x) = \frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}+\frac{1}{x^2} = \frac{2}{1-x^2}+\frac{1}{x^2} = \frac{1+x^2}{x^2(1-x^2)}$$

La fonction $u$ est donc strictement croissante sur $]0,1[$ et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$. On a

$$\lim_{x\to 0} u(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1} u(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} u(x) = 0$$

Puisque $u$ est continue, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un unique nombre $\alpha \in ]0,1[$ tel que $u(\alpha) = 0$. Voici le tableau de variations de la fonction $u$ où l'on voit aussi le signe de $u(x)$ :

| | $0$ | | $\alpha$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty \,\Vert\, +\infty$ | $\searrow$ | $0$ |

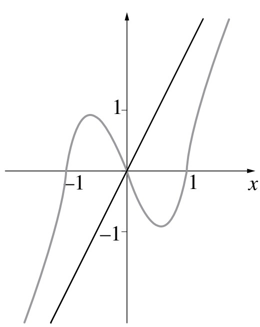
**d) (ii)** Pour tout $x \geqslant 0$ et $x \neq 1$, on a $f(x) = (x^2-1)\big(\ln(1+x) - \ln|1-x|\big)$, donc $f'(x) = 2x \ln\dfrac{1+x}{|1-x|} + (x^2-1)\left(\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{-1}{1-x}\right)$

$$= 2x \ln\frac{1+x}{|1-x|} - 2.$$

Il s'ensuit $f'(x) = 2xu(x)$ quelque soit $x \in D$. Pour tout $x \in D$, $f'(x)$ a le signe de $u(x)$, d'où le tableau de variations de $f$ sur $[0,+\infty[$ :

| | $0$ | | $\alpha$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | $0 \,\Vert\, 0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**d) (iii)** Le calcul de $f'(x)$ mené dans la question précédente montre que $f'(0) = -2$. Comme la fonction $f$ est impaire, la courbe de $f$ a pour centre de symétrie l'origine des axes. Voici le dessin de la courbe :



CHAPITRE 6

# Intégrale et primitive

OBJECTIFS

Nous présentons une approche de l'intégrale et de la notion de fonction intégrable. Nous ferons ensuite le lien, pour les fonctions continues, entre primitive et intégrale et nous montrerons les primitives à connaître.

## 6.1 L'INTÉGRALE

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. S'il y a des nombres $m$ et $M$ tels que $0 \leqslant m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a,b]$, alors, dans un repère orthonormé, la surface située entre la courbe de $f$ et l'axe des abscisses a une aire comprise entre $m(b-a)$ et $M(b-a)$ (ce sont les aires des rectangles de la figure **6.1**). Cherchons à approcher cette aire plus précisément. Puisqu'une fonction peut prendre des valeurs de signes quelconques, nous comptons positivement les portions d'aire situées au dessus de l'axe $Ox$ et négativement celles qui sont en dessous : le nombre obtenu est une *aire algébrique*.

Supposons que la fonction $f$ est bornée, partageons l'intervalle $[a,b]$ en $2^n$ intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_{2^n}$ de même longueur $L/2^n$ où $L = b - a$, et encadrons $f$ sur chacun de ceux-ci (figure **6.2**) :

$$m_k \leqslant f(x) \leqslant M_k \text{, pour tout } x \in I_k. \quad (1)$$

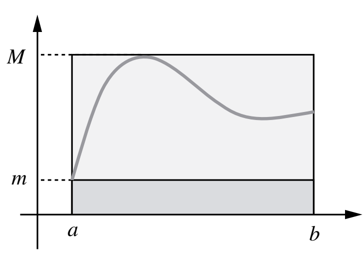



Figure 6.1

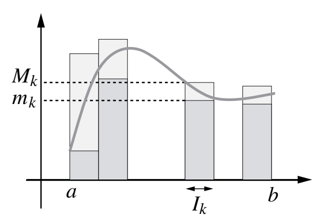



Figure 6.2

Posons

$$\begin{aligned} s_n &= (L/2^n)m_1 + (L/2^n)m_2 + \cdots + (L/2^n)m_{2^n} \\ S_n &= (L/2^n)M_1 + (L/2^n)M_2 + \cdots + (L/2^n)M_{2^n} \end{aligned} \qquad (2)$$

Dans des axes orthonormés, l'aire algébrique comprise entre la courbe et l'axe des abscisses est intuitivement comprise entre $s_n$ et $S_n$, pour tout $n$. En prenant $n$ de plus en plus grand et en choisissant convenablement les $m_k$ et $M_k$, on peut espérer encadrer cette aire de plus en plus précisément par $s_n$ et $S_n$.
Cela conduit à la notion de fonction intégrable.

**Définition.** La fonction $f$ est *intégrable* si pour tout entier $n \geqslant 1$, on peut trouver des encadrements (1) tel que les suites $(s_n)$ et $(S_n)$ définies par (2) aient une même limite $I$. Dans ce cas, le nombre $I$ se note $\int_a^b f(t)\,dt$ et s'appelle *l'intégrale de f*.

Si $f$ est intégrable, alors dans des axes orthonormés, l'aire algébrique comprise entre l'axe des abscisses et la courbe de $f$ est donc $I$.

Nous admettons les résultats suivants.

**Théorème.**
- *Toute fonction continue sur* $[a,b]$ *est intégrable.*
- *Toute fonction monotone sur* $[a,b]$ *est intégrable.*

**Propriétés de l'intégrale**
*Soit f et g des fonctions intégrables sur* $[a,b]$.
**a)** $\int_a^b f(t)+g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$
$\int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.
**b)** *Pour tout nombre réel r, on a* $\int_a^b r\,dt = r(b-a)$.
**c)** *Pour tout* $c \in ]a,b[$, *on a* $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.
**d)** *Si* $f(x) \leqslant g(x)$ *pour tout* $x \in [a,b]$, *alors*

$$\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$$

On voit que si $f$ et $g$ sont des fonctions intégrables sur $[a,b]$, alors la fonction $f+g$ est intégrable, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f$ est intégrable.

L'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions intégrables sur $[a,b]$ est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Les propriétés **(a)** affirment que l'application

$$\begin{array}{c} \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_a^b f(t)\,dt \end{array}$$

est une application linéaire.

**Proposition.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.*

***(i)** Si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$.*

***(ii)** La fonction $x \mapsto |f(x)|$ est intégrable et*

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$$

**Démonstration.** Si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x$, alors d'après **(d)** et **(b)**, on a $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant \int_a^b 0\,dt = 0$. Admettons que la fonction $|f|$ est intégrable. On a $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$ pour tout $x$, donc par **(a)** et **(d)**, on en déduit :

$$-\int_a^b |f(t)|\,dt = \int_a^b -|f(t)|\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt\,,$$

d'où l'inégalité **(ii)**. ❏

On généralise la notation intégrale en posant

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt \text{ si } a < b.$$

Pour tous $x,y,z \in [a,b]$, on a alors la *relation de Chasles* :

$$\int_x^z f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt + \int_y^z f(t)\,dt$$

## 6.2 PRIMITIVES

**Rappels.** Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
Une *primitive* de $f$ est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

- Si $F$ est une primitive de $f$, alors les autres primitives de $f$ sont les fonctions $x \mapsto F(x) + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

- Il en résulte que si $F$ est une primitive de $f$ et si $a \in I$, alors la fonction $x \mapsto F(x) - F(a)$ est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$.

**Théorème.** *Soit $I$ un intervalle ouvert et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*

➤ *Pour tout $a \in I$, la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de $f$.*

➤ *Pour toute primitive $G$ de $f$ et pour tous $a,b \in I$, on a*

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$$

**Démonstration.** Pour voir que $F$ est une primitive de $f$, on doit montrer, pour tout $x_0 \in I$, que $F$ est dérivable en $x_0$ et que $F'(x_0) = f(x_0)$. D'après la relation de Chasles, $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt$. Supposons $x_0 = 0$ pour simplifier. Puisque $f$ est continue, on a le développement limité à l'ordre 0 : $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + u(x)$, où $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$ (page 47).

Intégrons de 0 à $x > 0$ :

$$\begin{aligned} F(x) - F(0) = \int_0^x (t)f\,dt &= \int_0^x \big(f(0) + u(t)\big)\,dt \\ &= \int_0^x f(0)\,dt + \int_0^x u(t)\,dt \end{aligned}$$

$$F(x) - F(0) = f(0)x + \int_0^x u(t)\,dt \tag{1}$$

Par définition de la limite, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel qu'on ait l'implication

$$t \in [0,\alpha] \Rightarrow \big|u(t)\big| \leqslant \varepsilon$$

Utilisons la proposition page 103 et la propriété **(d)** page 102. Pour tout $x \in [0,\alpha]$, on a alors

$$\left|\int_0^x u(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^x \big|u(t)\big|dt \leqslant \int_0^x \varepsilon dt = \varepsilon x$$

Par suite $\frac{1}{x}\left|\int_0^x u(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in I$ tel que $0 < x \leqslant \alpha$.

Par définition de la limite, cela veut dire que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x u(t)\,dt = 0$.

On montre de même que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x u(t)\,dt = 0$, d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x u(t)\,dt = 0 \tag{2}$$

D'après (1), on a $\dfrac{F(x)-F(0)}{x} = f(0) + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x u(t)\,dt$. D'après (2), on en déduit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)-F(0)}{x} = f(0)$, ou encore $F'(0) = f(0)$.

Soit $G$ une primitive de $f$, donc $G(x) = F(x) + c$, où $c \in \mathbb{R}$. On a alors

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = F(b) - 0 = \int_a^b f(t)\,dt$$ ❑

**Notation**

Si $f$ est une fonction continue, il est commode de noter $x \mapsto \int^x f(t)\,dt$ une primitive de $f$. On écrira ainsi des égalités à constante près, comme $-\cos x = \int^x \sin t\,dt$ , $1 - \cos x = \int^x \sin t\,dt$ ou $\ln(x+1) = \displaystyle\int^{x+1} \frac{1}{t}\,dt$.

> **Remarque :** dans une égalité $F(x) = \int^x f(t)\,dt$, la variable $t$ peut être remplacée par n'importe quelle autre, sauf $x$ ; on a ainsi par exemple :
>
> $$\int^x f(t)\,dt = \int^x f(u)\,du = \int^x f(v)\,dv$$
>
> On dit que, dans ces expressions, les variables $t, u, v$ sont muettes.

## 6.3 RÈGLES DE CALCUL ET PRIMITIVES À CONNAÎTRE

Voici les règles qu'il faut penser à utiliser quand on veut calculer une primitive.

**Linéarité**

$$\int^x f(t) + g(t)\,dt = \int^x f(t)\,dt + \int^x g(t)\,dt$$

$$\text{et} \quad \int^x \lambda f(t)\,dt = \lambda \int^x f(t)\,dt$$

**Reconnaître la dérivée d'une composée**

Si $F$ est une primitive de $f$ et si $u$ est une fonction dérivable, alors $F\big(u(x)\big)$ a pour dérivée $F'\big(u(x)\big)u'(x) = f\big(u(x)\big)u'(x)$.

Puisque $F(x) = \int^x f(t)\,dt$, on a $F\big(u(x)\big) = \int^{u(x)} f(t)\,dt$, d'où la formule

$$\boxed{\int^x f\big(u(t)\big)u'(t)\,dt = \int^{u(x)} f(t)\,dt}$$

Prenons par exemple $f(x) = x^\alpha$. Sur $]0,+\infty[$, la fonction $f$ a pour primitive

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln x & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

On a ainsi

$$\boxed{\int^x \big(u(t)\big)^\alpha u'(t)\,dt = \begin{cases} \dfrac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln|u(x)| & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}}$$

**Exemple.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale $\displaystyle\int^x \frac{\sin t}{(\cos t)^n}dt$ est de la forme $\displaystyle\int^x \big(u(t)\big)^{-n} u'(t)\,dt$, où $u(t) = \cos t$. On a donc

$$\int^x \frac{\sin t}{(\cos t)^n}dt = \frac{(\cos x)^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{1}{(n-1)(\cos x)^{n-1}} \qquad \text{si } n \neq 1.$$

Dans le cas $n = 1$, on obtient l'égalité :

$$\int^x \tan t\,dt = \ln|\cos x|$$

## Intégration par parties

Si $u$ et $v$ sont des fonctions dérivables à dérivées continues,

$$\int^x u(t)v'(t)\,dt = u(x)v(x) - \int^x u'(t)v(t)\,dt$$

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt$$

### Primitives à connaître

<table>
<tr><td colspan="2">$\displaystyle\int^x \frac{dt}{t+a} = \ln\lvert x+a\rvert$</td><td colspan="2">$\displaystyle\int^x (t+a)^\alpha dt = \frac{(x+a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$</td></tr>
<tr><td>$\displaystyle\int^x e^{at}\,dt = \frac{e^{ax}}{a}$</td><td>$\displaystyle\int^x \cos at\,dt = \frac{\sin ax}{a}$</td><td colspan="2">$\displaystyle\int^x \sin at\,dt = -\frac{\cos ax}{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\displaystyle\int^x \operatorname{ch} at\,dt = \frac{\operatorname{sh} ax}{a}$</td><td colspan="2">$\displaystyle\int^x \operatorname{sh} at\,dt = \frac{\operatorname{ch} ax}{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\displaystyle\int^x \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan x$</td><td colspan="2">$\displaystyle\int^x \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\tan x}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\displaystyle\int^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{Arctan} x$</td><td colspan="2">$\displaystyle\int^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{Arcsin} x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\displaystyle\int^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+1}\right\rvert$</td><td colspan="2">$\displaystyle\int^x \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert$</td></tr>
</table>

Toutes ces égalités se retrouvent en dérivant.
Ces formules ne sont valables que dans un intervalle où la fonction sous le signe intégrale est définie. Par exemple,

– l'égalité $\int^x \frac{dt}{t-a} = \ln\lvert x-a\rvert$ est valable pour tout $x \in ]-\infty,a[$ et pour tout $x \in ]a,+\infty[$ ;
– l'égalité $\int^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{Arcsin} x$ est valable pour tout $x \in ]-1,1[$.

### Comparaison et encadrement d'intégrales

- Pour comparer $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$, il faut penser à comparer les fonctions $f$ et $g$ :

➤ *Si $a < b$ et si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors*

$$\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$$

➤ $a > b$ et si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [b,a]$, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt \geqslant \int_a^b g(t)\,dt$$

- Pour encadrer $\int_a^b f(t)\,dt$, il faut penser à encadrer $f$ :
  Si $a < b$ et si l'on a $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a,b]$, alors

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant M(b-a)$$

## CONSEIL

➤ Apprenez les primitives usuelles (tableau page 107), elles vous serviront à calculer bien d'autres intégrales.

## EXERCICES

**6.1** Soit $f : ]-a,a[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $F$ la primitive de $f$ telle que $F(0) = 0$.

**a)** Montrer que si la fonction $f$ est impaire, alors $F$ est paire.

**b)** Montrer que si la fonction $f$ est paire, alors $F$ est impaire.

**6.2** Calculer $F(x) = \int_0^x |t|\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais pas deux fois dérivable en 0.

**6.3** Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Rappelons qu'une fonction intégrable est (par définition) bornée.

**a)** Montrer qu'il existe $M$ tel que $\left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right| \leqslant M|x - x_0|$ pour tous $x$ et $x_0$ appartenant à $I$.

**b)** Soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$, posons $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.
En déduire que la fonction $F$ est continue sur $I$.

**6.4** Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $u : J \to I$ et $v : J \to I$ des fonctions dérivables, où $J$ est un intervalle.
Pour tout $x \in J$, posons $G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$.
Montrer que pour tout $x \in J$, on a $G'(x) = f\big(v(x)\big)v'(x) - f\big(u(x)\big)u'(x)$.

**6.5** Pour tout $x \geqslant 0$, posons $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x}}{1+x^2}$.

**a)** Etudier les variations de la fonction $f$. Montrer que $f$ a pour maximum $\dfrac{3\sqrt{2}}{4\sqrt[4]{3}}$.

**b)** Soit $a > 0$. En déduire que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^a \left(\frac{\sqrt{2t}}{1+t^2}\right)^n dt$ a pour limite 0.

**6.6** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^1 t^n\, dt$. Posons $I_n = \int_0^1 t^n \cos(\pi t) dt$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

**6.7** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'$ est continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $I_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\, dt$.

**a)** Montrer que

$$I_n = \frac{1}{n}\Big[f(x)\sin(nx)\Big]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin(nt)\, dt$$

**b)** Montrer que la fonction $x \mapsto f'(x)\sin(nx)$ est bornée sur $[a,b]$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

**6.8** Soit $\alpha > 1$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, posons

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$$

**a)** Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, on a $\dfrac{1}{k^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}$.

**b)** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_n \leqslant 1 + \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}$.

**c)** En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_n \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

**d)** Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente.

**6.9** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.

**a)** Calculer $F'(x)$ (appliquer l'exercice **6.4**).

**b)** Calculer $F(0)$ et montrer que la fonction $F$ est impaire (appliquer l'exercice **6.1**).

**c)** Étudier les variations de $F$.

**d)** Montrer que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

**e)** Calculer le développement limité de $F$ en 0 à l'ordre 3 et dessiner la courbe de $F$.

## SOLUTIONS

**6.1** Posons $G(x) = F(-x)$. On a

$$G'(x) = -F'(-x) = -f(-x) \text{ pour tout } x \in ]-a,a[$$

**a)** Supposons que $f$ est impaire, donc $f(-x) = -f(x)$. Alors on a $G'(x) = f(x) = F'(x)$ pour tout $x \in ]-a,a[$. Puisque $G(0) = F(0)$, on en déduit $G(x) = F(x)$ pour tout $x \in ]-a,a[$, c'est-à-dire $F(-x) = F(x)$ : la fonction $F$ est donc paire. Les autres primitives de $f$ sont $x \mapsto F(x) + c$, donc ce sont des fonctions paires.

**b)** Supposons que $f$ est paire, donc $f(-x) = f(x)$. Alors on a $G'(x) = -f(x) = (-F)'(x)$ pour tout $x \in ]-a,a[$. Puisque $G(0) = 0 = (-F)(0)$, on en déduit $G = -F$, autrement dit $G(x) = -F(x)$ pour tout $x \in ]-a,a[$. Cela veut dire que la fonction $F$ est impaire.

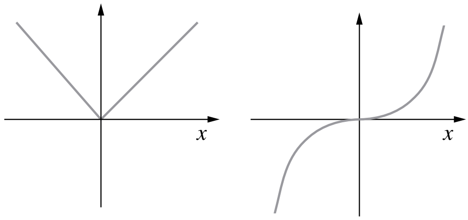
**6.2** Puisque la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que la fonction $F$ est dérivable et que $F'(x) = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Supposons $x \geqslant 0$. Pour tout $t \in [0,x]$, on a $|t| = t$, donc

$$F(x) = \int_0^x |t|\, dt = \int_0^x t\, dt = \frac{x^2}{2}$$

- Supposons $x \leqslant 0$. Pour tout $t \in [x,0]$, on a $|t| = -t$, donc

$$F(x) = \int_0^x |t|\, dt = \int_0^x -t\, dt = -\int_0^x t\, dt = -\frac{x^2}{2}$$




graphe de $x \longmapsto |x|$ graphe de F

On retrouve ainsi que $F$ est dérivable en 0, car

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2} = 0$$

La fonction $x \mapsto |x|$ n'étant pas dérivable en 0, la fonction $F'$ n'est pas dérivable en 0, autrement dit, $F$ n'est pas deux fois dérivable en 0.

**6.3** **a)** Puisque $f$ est bornée, il existe un nombre $M > 0$ tel que $-M \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in I$. Soit $x_0$ et $x$ appartenant à $I$.

• Supposons $x_0 \leqslant x$ et intégrons l'inégalité $f(x) \leqslant M$ entre $x_0$ et $x$ :

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \leqslant \int_{x_0}^{x} M\,dt = M(x-x_0) = M|x-x_0| \qquad (1)$$

• Supposons $x \leqslant x_0$ et intégrons entre $x$ et $x_0$ :

$$\int_{x}^{x_0} f(t)\,dt \leqslant \int_{x}^{x_0} M\,dt = M(x_0-x) = M|x-x_0| \qquad (2)$$

Les deux nombres $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ et $\int_{x}^{x_0} f(t)\,dt$ étant opposés, on en déduit que pour tout $x \in I$, on a $\left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right| \leqslant M|x-x_0|$.

**b)** Soit $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I$, on a

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

D'après **(a)**, on en déduit $\left|F(x) - F(x_0)\right| \leqslant M|x-x_0|$ pour tout $x \in I$. Puisque $M|x-x_0|$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $x_0$, on a $\lim_{x\to x_0} F(x) - F(x_0) = 0$, donc $F$ est continue en $x_0$. Cela étant vrai quel que soit $x_0 \in I$, la fonction $F$ est continue sur $I$.

**6.4** Choisissons $a \in I$ et posons $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. On a donc

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = \int_a^{v(x)} f(t)\,dt - \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$$
$$= F\big(v(x)\big) - F\big(u(x)\big)$$

D'après la règle pour dériver une fonction composée, on en déduit

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'\big(v(x)\big)v'(x) - F'\big(u(x)\big)u'(x) \\ &= f\big(v(x)\big)v'(x) - f\big(u(x)\big)u'(x) \end{aligned}$$

**6.5 a)** Pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \dfrac{1-3x^2}{\sqrt{2x}\,(1+x^2)}$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $1-3x^2$, donc on a $f'(x) > 0$ si $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$, et $f'(x) < 0$ si $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$. La fonction $f$ est croissante sur $\left]0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ et décroissante sur $\left]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$, donc elle a un maximum en $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Le maximum de $f$ vaut

$$M = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}\,\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt[4]{3}}$$

**b)** On a $0 \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \geqslant 0$, donc $0 \leqslant \big(f(x)\big)^n \leqslant M^n$ pour tout $x \geqslant 0$, et par suite

$$0 \leqslant \int_0^a \left(\frac{\sqrt{2t}}{1+t^2}\right)^n dt \leqslant \int_0^a M^n\,dt = M^n a \qquad (*)$$

Remarquons que l'on a $M^4 = \frac{3^4 \times 2^2}{4^4 \times 3} = \frac{3^3}{4^3} < 1$, donc $0 < M < 1$. Par conséquent, la suite géométrique $(M^n)$ tend vers 0. D'après l'encadrement $(*)$, la suite de terme général $\displaystyle\int_0^a \left(\frac{\sqrt{2t}}{1+t^2}\right)^n dt$ a pour limite 0.

**6.6** On a $\int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Majorons $|I_n|$ :

$$\begin{aligned} |I_n| = \left|\int_0^1 t^n \cos(\pi t)\,dt\right| &\leqslant \int_0^1 \left|t^n \cos(\pi t)\right| dt = \int_0^1 t^n \left|\cos(\pi t)\right| dt \\ &\leqslant \int_0^1 t^n\,dt \quad \text{car } \left|\cos(\pi t)\right| \leqslant 1 \text{ et } t^n \geqslant 0 \text{ pour } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ &\leqslant \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Puisque $\lim \dfrac{1}{n+1} = 0$, il s'ensuit $\lim I_n = 0$.

**6.7 a)** En posant $v(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, on a $v'(x) = \cos(nx)$, donc

$$\begin{aligned}I_n = \int_a^b f(t)v'(t)\,dt &= \left[ f(x)\,\frac{\sin(nx)}{n}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\,\frac{\sin(nt)}{n}\,dt\\ &= \frac{1}{n}\Big[f(x)\sin(nx)\Big]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,dt\end{aligned}$$

**b)** Puisque la fonction $f'$ est supposée continue sur $[a,b]$, la fonction $x \mapsto f'(x)\,\sin(nx)$ est continue sur $[a,b]$, donc elle est bornée : il existe un nombre $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [a,b]$, on a $\big|f'(x)\,\sin(nx)\big| \leqslant M$.
On en déduit

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,dt\right| &\leqslant \frac{1}{n}\int_a^b \big|f'(t)\sin(nt)\big|\,dt\\ &\leqslant \frac{1}{n}\int_a^b M\,dt = \frac{1}{n}M(b-a)\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}|I_n| &\leqslant \left|\frac{f(b)\sin(nb) - f(a)\sin(na)}{n}\right| + \left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,dt\right|\\ &\qquad\text{(inégalité triangulaire)}\\ &\leqslant \frac{\big|f(b)\sin(nb) - f(a)\sin(na)\big|}{n} + \frac{M(b-a)}{n}\\ &\leqslant \frac{|f(b)|}{n} + \frac{|f(a)|}{n} + \frac{M(b-a)}{n} \quad \text{(inégalité triangulaire)}\end{aligned}$$

Dans le dernier membre, chaque terme tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$, donc $\lim I_n = 0$.

**6.8 a)** Soit $k$ un entier au moins égal à 2. Pour tout $t \in [k-1,k]$, on a $0 < t \leqslant k$, donc $\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{t}$ et $\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$. En intégrant de $k-1$ à $k$, il vient $\int_{k-1}^k \frac{1}{k^\alpha}dt \leqslant \int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha}dt$. On a $\int_{k-1}^k \frac{1}{k^\alpha}dt = \frac{1}{k^\alpha}\big(k-(k-1)\big) = \frac{1}{k^\alpha}$, d'où l'inégalité demandée.

**b)** Pour $n = 1$, l'inégalité est vraie car $u_1 = 1$. Supposons $n \geqslant 2$ et ajoutons les inégalités $\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}$ pour $k = 2,\ldots,n$ :

$$\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\leqslant\int_1^2\frac{dt}{t^\alpha}+\int_2^3\frac{dt}{t^\alpha}+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{dt}{t^\alpha}=\int_1^n\frac{dt}{t^\alpha}$$

En ajoutant 1, il vient $u_n\leqslant 1+\int_1^n\frac{dt}{t^\alpha}$.

**c)** Puisque $\int^x\frac{dt}{t^\alpha}=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, on en déduit que pour tout $n\geqslant 1$ :

$$\begin{aligned}1+\int_1^n\frac{dt}{t^\alpha}&=1+\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\\&=\frac{\alpha}{\alpha-1}+\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\end{aligned}$$

Comme on a supposé $\alpha>1$, on a $\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}<0$, d'où

$$u_n\leqslant 1+\int_1^n\frac{dt}{t^\alpha}\leqslant\frac{\alpha}{\alpha-1}\text{ pour tout }n\geqslant 1.$$

**d)** La suite $(u_n)$ est croissante, car $u_n-u_{n-1}=\frac{1}{n^\alpha}>0$. D'après **(c)**, la suite $(u_n)$ est majorée (par $\frac{\alpha}{\alpha-1}$). Par conséquent, la suite $(u_n)$ est convergente et sa limite est un nombre au plus égal à $\frac{\alpha}{\alpha-1}$.

**Remarque :** l'hypothèse $\alpha>1$ est essentielle, car nous avons montré (exercice **2.1** page 38) que la suite de terme général $s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ a pour limite $+\infty$.

**6.9** **a)** On a

$$F'(x)=e^{-(2x)^2}\times 2-e^{-x^2}=2e^{-4x^2}-e^{-x^2}=e^{-x^2}\left(2e^{-3x^2}-1\right)$$

**b)** $F(0)=\int_0^0 e^{-t^2}\,dt=0$. La fonction $f:x\mapsto e^{-x^2}\left(2e^{-3x^2}-1\right)$ est paire et $F$ est la primitive de $f$ qui vaut 0 en 0, donc (exercice **6.1**) la fonction $F$ est impaire.

**c)** D'après **(a)**, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}F'(x)>0\iff 2e^{-3x^2}>1\iff(\ln 2)-3x^2>0\\\iff|x|<\left(\frac{\ln 2}{3}\right)^{1/2}\end{aligned}$$

La fonction $F$ est donc croissante sur $\left[-\sqrt{(\ln 2)/3},\sqrt{(\ln 2)/3}\right]$ et décroissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty,-\sqrt{(\ln 2)/3}\right]$ et $\left[\sqrt{(\ln 2)/3},+\infty\right[$

**d)** Soit $x > 0$. Pour majorer $F(x)$, remarquons que pour tout $t \in [x,2x]$, on a $t^2 \geqslant x^2$ donc $0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-x^2}$. Par suite :

$$0 \leqslant F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt \leqslant (2x - x)e^{-x^2} = xe^{-x^2} \text{ pour tout } x > 0.$$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

**e)** Calculons le développement limité de $F'(x)$ à l'ordre 2 en 0 (on gagnera un ordre en intégrant) :

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + o(x^2) \quad \text{et} \quad e^{-3x^2} = 1 - 3x^2 + o(x^2)$$

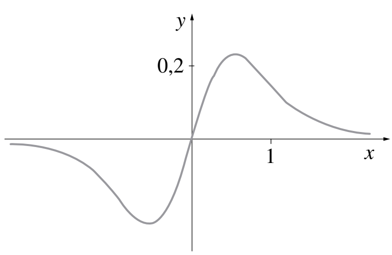
$$2e^{-3x^2} - 1 = 2(1 - 3x^2) - 1 + o(x^2) = 1 - 6x^2 + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= e^{-x^2}\left(2e^{-3x^2} - 1\right) = (1 - x^2)(1 - 6x^2) + o(x^2) \\ &= 1 - 7x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Intégrons terme à terme (page 48) et tenons compte de $F(0) = 0$. On obtient le développemnt limité à l'ordre 3 :

$$F(x) = x - \frac{7}{3}x^3 + o(x^3)$$

La tangente à la courbe de $F$ en $(0,0)$ a donc pour équation $y = x$ et en tout point $x > 0$ assez petit, la courbe est en dessous de cette tangente. La courbe de $F$ est symétrique par rapport à l'origine car d'après **(b)**, $F$ est impaire. Puisqu'on a $F(x) > 0$ pour tout $x > 0$, $F(x)$ est du signe de $x$. D'après **(d)**, la courbe a pour asymptote horizontale l'axe des abscisses. Voici un dessin de la courbe de $F$ (le repère n'est pas normé) :



CHAPITRE 7

# Calcul d'intégrales

OBJECTIFS

Ce chapitre présente les différentes techniques utilisées pour calculer des primitives, notamment l'intégration par parties et le changement de variable.

Une place importante est consacrée aux primitives de fonctions rationnelles.

## 7.1 MÉTHODES GÉNÉRALES

Pour calculer $\int^x f(t)\,dt$, il faut d'abord se demander si l'on peut utiliser l'un des procédés du chapitre précédent :

- $f$ est-elle une somme de fonctions dont on peut calculer les intégrales ?
- L'intégrale est-elle de la forme $\int^x g\big(u(t)\big)u'(t)\,dt$ ? Dans ce cas, on a la formule :

$$\int^x g\big(u(t)\big)u'(t)\,dt = \int^{u(x)} g(t)\,dt$$

- Le calcul peut-il se faire en intégrant par parties ?

## 7.2 MÉTHODE DU CHANGEMENT DE VARIABLE

Il s'agit d'exploiter la formule rappelée ci-dessus.
Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Pour faire un changement de variable dans l'intégrale $\int^x f(t)\,dt$, on a besoin d'une fonction dérivable $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dont la dérivée garde un signe constant sur $I$. La fonction $\varphi$ est alors une bijection $I \to J$, où $J$ est un intervalle, et la bijection réciproque $\psi = \varphi^{-1} : J \to I$ est dérivable (page 6).

On veut écrire la fonction $f$ sous la forme

$$x \mapsto g\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x) = (g \circ \varphi)'(x)\,.$$

Pour cela, on définit la fonction $g : J \to \mathbb{R}$ en posant

$$g(x) = f\big(\psi(x)\big)\psi'(x) = \big[f \circ \psi(x)\big]\psi'(x) \text{ pour tout } x \in J.$$

En effet, on a alors pour tout $x \in I$ :

$$\begin{aligned}
g\big(\varphi(x)\big) &= \big[f \circ \psi\big(\varphi(x)\big)\big]\,\psi'\big(\varphi(x)\big) = \big[f \circ \psi \circ \varphi(x)\big]\psi'\big(\varphi(x)\big) \\
&= f(x)\psi'\big(\varphi(x)\big) \quad \text{car } \psi \circ \varphi(x) = x \\
g\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x) &= f(x)\psi'\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x) \\
&= f(x) \quad \text{car } \psi'\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x) = (\psi \circ \varphi)'(x) = 1\,.
\end{aligned}$$

Supposons qu'on ait calculé une primitive $G$ de $g$. Alors la fonction $F = G \circ \varphi$ vérifie

$$F'(x) = G'\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x) = g\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in I,$$

donc $F$ est une primitive de $f$.

**Définition.** Soit $\varphi : I \to J$ une bijection dérivable telle que $\varphi'(x)$ garde un signe constant sur $I$. *Faire le changement de variable* $x \mapsto \varphi(x)$ *dans l'intégrale* $\int^x f(t)\,dt$, c'est remplacer cette intégrale par

$$\int^{\varphi(x)} \big[f \circ \psi(t)\big]\psi'(t)\,dt$$

où $\psi = \varphi^{-1} : J \to I$ est la bijection réciproque de $\varphi$.

Voici les formules du changement de variable :

$$\int^x f(t)\,dt = \int^{\varphi(x)} \big[f \circ \psi(t)\big]\psi'(t)\,dt$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \big[f \circ \psi(t)\big]\psi'(t)\,dt$$

### Pratique du changement de variable

Pour faire le changement de variable $x \mapsto \varphi(x)$ dans l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$,

- on pose $\boxed{u = \varphi(t)}$
- on change les bornes : $a$ devient $\varphi(a)$ et $b$ devient $\varphi(b)$ ;
- on remplace $f(t)$ par son expression $f\left(\varphi^{-1}(u)\right)$ en la variable $u$ ;
- on calcule $\boxed{du = \varphi'(t)dt}$,

  et l'on remplace $dt$ par $\frac{du}{\varphi'(t)}$ où l'on a exprimé $\varphi'(t)$ au moyen de la variable $u$.

Par un bon changement de variable, le calcul de l'intégrale peut devenir facile.

**Exemple 1.** Calcul de $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t^2+m^2}$, où $m \neq 0$.

Faisons le changement de variable $u = t/m$.

– Les bornes deviennent $0$ et $x/m$, car pour $t = 0$, on a $u = 0$ et pour $t = x$, on a $u = x/m$ ;

– on a $t = mu$, $t^2+m^2 = m^2u^2+m^2 = m^2(u^2+1)$ et $dt = mdu$.

$$\int_0^x \frac{dt}{t^2+m^2} = \int_0^{x/m} \frac{mdu}{m^2(u^2+1)} = \frac{1}{m}\int_0^{x/m} \frac{du}{u^2+1}$$

On sait que $\displaystyle\int_0^x \frac{du}{u^2+1} = \text{Arctan}\, x$, donc

$$\boxed{\int_0^x \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m}\text{Arctan}\frac{x}{m}}$$

**Exemple 2.** Calculons $\displaystyle\int^x \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}$.

La fonction sous le signe intégrale est continue sur chacun des intervalles $I_1 = ]0,1[$ et $I_2 = ]-1,0[$, donc elle a des primitives sur $I_1$ et des primitives sur $I_2$. Faisons le changement de variable $u = 1/t$ : la fonction utilisée est donc $\varphi : t \mapsto 1/t$ et l'on a ici $\varphi = \varphi^{-1}$.

On a $t = \dfrac{1}{u}$ donc $dt = -\dfrac{1}{u^2}du$, d'où :

$$\frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} = \frac{u}{\sqrt{1-\frac{1}{u^2}}}$$

$$\frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = \frac{u}{\sqrt{1-\frac{1}{u^2}}}\frac{-du}{u^2} = -\frac{du}{u\sqrt{1-\frac{1}{u^2}}} = -\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$\int^x \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = -\int^{1/x} \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$$

Puisque $\displaystyle\int^x \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$, on en déduit

$$\int^x \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = -\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right| = -\ln\left|\frac{1}{x}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\right|$$

Pour tout $x \in\, ]-1,0[$, ou pour tout $x \in ]0,1[$, on a donc

$$\int^x \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = \ln|x| - \ln\left[1+\sqrt{1-x^2}\right]$$

## 7.3 INTÉGRALE D'UNE FONCTION RATIONNELLE

Toute fonction rationnelle $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est continue sur les intervalles où elle est définie, donc elle y possède des primitives. Pour calculer une primitive de $f$, on décompose $f(x)$ en la somme de sa partie entière et d'éléments simples fractionnaires (voir le tome d'Algèbre).
La partie entière étant un polynôme, elle s'intègre facilement.
Deux types d'éléments simples fractionnaires peuvent apparaître :

- des fractions $\dfrac{a}{(x-\alpha)^n}$
- des fractions $\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$, où le polynôme $x^2+px+q$ n'a pas de racine réelle ($p^2-4q < 0$).

**Calcul de** $\displaystyle\int^x \frac{dt}{(t-\alpha)^n}$

C'est une primitive à connaître (tableau page 107) :

$$\int^x \frac{1}{(t-\alpha)^n}dt = \begin{cases} \dfrac{1}{1-n}\,\dfrac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} & \text{si } n \neq 1 \\ \ln|x-\alpha| & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

**Calcul de** $\displaystyle\int^x \frac{at+b}{(t^2+pt+q)^n}dt$**, où** $p^2-4q<0$

**1.** On commence par faire apparaître au numérateur la dérivée $2t+p$ du polynôme $t^2+pt+q$ : on calcule les nombres $\alpha$ et $\beta$ pour avoir l'égalité de polynômes

$$at+b=\alpha(2t+p)+\beta$$

On a donc $\alpha=a/2$ et $\beta=b-pa/2$.

**2.** Il vient

$$\frac{at+b}{(t^2+pt+q)^n}=\alpha\frac{2t+p}{(t^2+pt+q)^n}+\beta\frac{1}{(t^2+pt+q)^n} \qquad (*)$$

L'intégrale $\displaystyle\int^x \frac{2t+p}{(t^2+pt+q)^n}\,dt$ est de la forme $\displaystyle\int^x \big(u(t)\big)^{-n}u'(t)\,dt$, donc son calcul est immédiat (voir page 106).

**3.** Dans $(*)$, il reste à calculer $\displaystyle\int^x \frac{dt}{(t^2+pt+q)^n}$. Écrivons la forme canonique de $t^2+pt+q$ :

$$t^2+pt+q=(t+p/2)^2+q-p^2/4=(t+p/2)^2+m^2$$

où $m$ est une racine carrée du nombre positif $q-p^2/4$.
Par le changement de variable $u=t+p/2$, on a $dt=du$ et l'intégrale devient

$$\int^x \frac{dt}{\big((t+p/2)^2+m^2\big)^n}=\int^{x+p/2}\frac{du}{\big(u^2+m^2\big)^n}=I_n\big(x+p/2\big)$$

où l'on a posé $I_n(x)=\displaystyle\int^x \frac{du}{\big(u^2+m^2\big)^n}$.

➤ **Cas $n=1$**. D'après l'exemple 1 page 119, on sait que

$$I_1(x)=\int^x \frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}\text{Arctan}\,\frac{x}{m}\,.$$

➤ **Cas $n = 2$**. On écrit

$$m^2 I_2 = \int^x \frac{(t^2+m^2) - t^2}{(t^2+m^2)^2} dt = \int^x \frac{dt}{t^2+m^2} - \int^x \frac{t^2\,dt}{(t^2+m^2)^2}$$
$$= I_1(x) - J(x)\,, \quad \text{où } J(x) = \int^x \frac{t^2\,dt}{(t^2+m^2)^2}.$$

Pour calculer $J(x)$, on intègre par parties en posant

$$u'(t) = \frac{2t}{(t^2+m^2)^2} \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{2}t.$$

On a alors $u(t) = \dfrac{-1}{t^2+m^2}$, $v'(t) = \dfrac{1}{2}$ et

$$J(x) = \int^x \frac{t^2\,dt}{(t^2+m^2)^2} = \int^x u'(t)v(t)\,dt = u(x)v(x) - \int^x u(t)v'(t)\,dt$$
$$= \frac{-x}{2(x^2+m^2)} - \frac{1}{2}\int^x \frac{-dt}{t^2+m^2} = \frac{-x}{2(x^2+m^2)} + \frac{1}{2m}\mathrm{Arctan}\frac{x}{m}$$

Finalement, $\quad I_2(x) = \dfrac{1}{2m^3}\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x}{m} + \dfrac{1}{2m^2}\dfrac{x}{x^2+m^2}.$

➤ **Cas $n \geqslant 3$**. En procédant de même, on obtient l'égalité

$$m^2 I_n(x) = I_{n-1}(x) - H(x), \text{ où } H(x) = \int^x \frac{t^2\,dt}{(t^2+m^2)^n}. \qquad (1)$$

On intègre par parties dans l'intégrale $H(x)$, en prenant $u'(t) = \dfrac{2t}{(t^2+m^2)^n}$ et $v = \dfrac{1}{2}t$, ce qui donne

$$H(x) = \frac{1}{2(1-n)}\frac{x}{(x^2+m^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}(x) \qquad (2)$$

Les égalités (1) et (2) permettent de calculer $I_n(x)$ de proche en proche.

**Exemple 1.** Calculons $\displaystyle\int_1^a \frac{t+1}{t^2-2t+5}dt$.

On a $x^2-2x+5 = (x-1)^2 + 4 > 0$ pour tout $x$, donc la fonction rationnelle sous le signe intégrale a des primitives sur $\mathbb{R}$. Puisque $t+1 = \frac{1}{2}(2t-2)+2$, il vient

$$\int_1^a \frac{t+1}{t^2-2t+5}dt = \frac{1}{2}\int_1^a \frac{2t-2}{t^2-2t+5}dt + 2\int_1^a \frac{dt}{(t-1)^2+4}$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\ln(x^2-2x+5)\Big]_1^a + 2\left[\frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2}\right]_1^a$$
$$= \frac{1}{2}\ln(a^2-2a+5) - \ln 2 + \arctan\frac{a-1}{2}$$

**Exemple 2.** Calculons $\displaystyle\int_0^x \frac{t^2+2}{t^3+1}dt$ pour tout $x > -1$.

Dans la fraction $F(x) = \frac{x^2+2}{x^3+1}$, le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur, donc la partie entière de $F(x)$ est nulle. On a la factorisation

$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$, où $x^2-x+1$ n'a pas de racine réelle.

La décomposition en éléments simples de $F(x)$ est de la forme :

$$\frac{x^2+2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{px+q}{x^2-x+1} \tag{1}$$

– Multiplions (1) par $x+1$ et faisons tendre $x$ vers $-1$ : le premier membre tend vers $\frac{(-1)^2+2}{(-1)^2-(-1)+1} = 1$ et le second vers $a$, donc $a = 1$.
– En faisant $x = 0$ dans (1), il vient $2 = a+q$, donc $q = 1$.
– Multiplions (1) par $x$ et faisons tendre $x$ vers $+\infty$ : le premier membre tend vers $1$, le second tend vers $a+p$, donc $a+p = 1$, et par suite $p = 0$.

Ainsi $$\frac{x^2+2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-x+1}$$

d'où en intégrant :

$$\int_0^x \frac{t^2+2}{t^3+1}dt = \int_0^x \frac{dt}{t+1} + \int_0^x \frac{dt}{t^2-t+1} \tag{2}$$

On a $\frac{1}{x^2-x+1} = \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$ et par le changement de variable $u = t-\frac{1}{2}$, on obtient

$$\int_0^x \frac{dt}{t^2-t+1} = \int_0^x \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+3/4} = \int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} \tag{3}$$

Puisque $\displaystyle\int^x \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\frac{2x}{\sqrt{3}}$, il vient

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \quad \text{car Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

Finalement, d'après (2) et (3), on obtient pour tout $x > -1$ :

$$\int_0^x \frac{t^2+2}{t^3+1}dt = \ln(x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\ \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

## 7.4 INTÉGRALE DE $\dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+px+q}}$ ET DE $\sqrt{x^2+px+q}$

Comme ci-dessus, on écrit la forme canonique

$$x^2+px+q = \left(x+\tfrac{p}{2}\right)^2 \pm m^2 = T(x)^2 \pm m^2 \text{ , où } T(x) = x+\tfrac{p}{2}.$$

Dans la première intégrale, on fera apparaître $T(x)$ au numérateur.

**Exemple 1.** Trouver une primitive de $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x-3}}$.

Cette fonction est définie et continue sur $]-\infty,-3[$ et $]1,+\infty[$. Appelons $I$ l'un de ces intervalles et cherchons une primitive sur $I$. Pour tout $x \in I$, on a

$$\int^x \frac{t}{\sqrt{t^2+2t-3}}dt = \int^x \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-3}}dt - \int^x \frac{1}{\sqrt{t^2+2t-3}}dt \quad (1)$$

$$\int^x \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-3}}dt = \int^{x^2+2x-3} \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

(changement de variable $u = t^2+2t-3$)

$$= \sqrt{x^2+2x-3} \qquad \text{car} \int^z \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{z}.$$

Calculons la dernière intégrale dans (1) :

$$\int^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+2t-3}} = \int^x \frac{dt}{\sqrt{(t+1)^2-4}} = \int^{\frac{x+1}{2}} \frac{2dv}{2\sqrt{v^2-1}}$$

(changement de variable $2v = t+1$)

$$= \ln\left|\frac{x+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - 1}\right|$$

$$\text{car} \int^z \frac{dv}{\sqrt{v^2-1}} = \ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|.$$

Finalement, $\displaystyle\int^x \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+2t-3}} = \sqrt{x^2+2x-3} - \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right|.$

**Exemple 2.** Calculons $\displaystyle\int_1^a \sqrt{t^2+2t-3}\,dt$, pour $a > 1$.

On a $\displaystyle\int^x \sqrt{t^2+2t-3}\,dt = \int^x \sqrt{(t+1)^2-4}\,dt = \int^{x+1} \sqrt{u^2-4}\,du$ par le changement de variable $u = t+1$. Intégrons par parties :

$$\int^x \sqrt{u^2-4}\,du = x\sqrt{x^2-4} - \int^x u\frac{2u}{2\sqrt{u^2-4}}\,du$$
$$= x\sqrt{x^2-4} - \int^x \frac{u^2-4+4}{\sqrt{u^2-4}}\,du$$
$$= x\sqrt{x^2-4} - \int^x \sqrt{u^2-4}\,du - 4\int^x \frac{du}{\sqrt{u^2-4}}$$

Au second membre, il réapparait $\int^x \sqrt{u^2-4}\,du$ avec un signe moins. En regroupant dans le premier membre, on obtient

$$2\int^x \sqrt{u^2-4}\,du = x\sqrt{x^2-4} - 4\int^x \frac{du}{\sqrt{u^2-4}} \qquad (1)$$

Faisons le changement de variable $u = 2v$ dans la dernière intégrale :

$$\int^x \frac{du}{\sqrt{u^2-4}} = \int^{x/2} \frac{2dv}{2\sqrt{v^2-1}} = \ln\left|\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}\right| = \ln\frac{\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|}{2}$$

Avec l'égalité (1), on obtient finalement

$$\int_1^a \sqrt{t^2+2t-3}\,dt$$
$$= \left[\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x-3}\right]_1^a - 2\left[\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right)\right]_1^a$$
$$= \frac{a+1}{2}\sqrt{a^2+2a-3} - 2\ln\left(a+1+\sqrt{a^2+2a-3}\right) + 2\ln 2$$

## 7.5 INTÉGRALE DE $(\sin x)^p(\cos x)^q, p, q \in \mathbb{N}$

### A. Cas où l'un des exposants $p$ ou $q$ est impair

Il s'agit par exemple de calculer $\int^x (\sin t)^p(\cos t)^{2q+1}\,dt$. On écrit

$(\sin t)^p(\cos t)^{2q+1} = (\sin t)^p(\cos t)^{2q}\cos t = (\sin t)^p\left[1-(\sin t)^2\right]^q\cos t$

En développant le terme $\left[1-(\sin t)^2\right]^q$ par la formule du binôme, on voit qu'il est de la forme $P(\sin t)$ où $P$ est une fonction polynôme (de degré $2q$). Donc la fonction à intégrer s'écrit

$$(\sin t)^p(\cos t)^{2q+1} = (\sin t)^p P(\sin t)\cos t = Q(\sin t)\cos t,$$

où $Q(x) = x^p P(x)$ est encore un polynôme. Faisons le changement de variable $u = \sin t$ dans l'intégrale : on a $du = (\cos t)dt$, donc

$$\int^x (\sin t)^p(\cos t)^{2q+1}\,dt = \int^x Q(\sin t)\cos t\,dt = \int^{\sin x} Q(u)\,du$$

et la dernière intégrale est facile à calculer.

**Exemple.** Calculons $\int^x (\sin t)^3 (\cos t)^4 \, dt$.

On écrit
$(\sin t)^3 (\cos t)^4 = (\cos t)^4 (\sin t)^2 \sin t = (\cos t)^4 \big(1 - (\cos t)^2\big) \sin t$,
d'où

$$\begin{aligned}\int^x (\sin t)^3 (\cos t)^4 \, dt &= \int^x (\cos t)^4 \big[1 - (\cos t)^2\big] \sin t \, dt \\ &= \int^{-\cos x} u^4 (1 - u^2) \, du \qquad (u = -\cos t) \\ &= \int^{-\cos x} (u^4 - u^6) \, du = -\frac{(\cos x)^5}{5} + \frac{(\cos x)^7}{7}\end{aligned}$$

## B. Intégrale de $(\sin x)^n$ et de $(\cos x)^n$, $n$ pair

On cherche une primitive de $(\cos x)^n$ sous la forme

$$F(x) = a_1 (\cos x)^{n-1} \sin x + a_3 (\cos x)^{n-3} \sin x + \cdots + a_{n-1} \cos x \sin x + mx,$$

où les $a_i$ et $m$ sont des nombres réels. Pour trouver ces nombres, on calcule $F'(x)$ en l'exprimant comme un polynôme en $\cos x$, et l'on identifie les coefficients dans l'égalité $F'(x) = (\cos x)^n$.
Pour $(\sin x)^n$, cherche une primitive sous la forme

$$a_1 (\sin x)^{n-1} \cos x + a_3 (\sin x)^{n-3} \cos x + \cdots + a_{n-1} \sin x \cos x + mx.$$

**Exemple.** Calculons $F(x) = \int_0^x (\cos t)^4 \, dt$.

Posons $F(x) = a(\cos x)^3 \sin x + b \cos x \sin x + mx$. On a

$$\begin{aligned}F'(x) &= a(\cos x)^4 - 3a(\cos x)^2 (\sin x)^2 + b(\cos x)^2 - b(\sin x)^2 + m \\ &= a(\cos x)^4 - 3a(\cos x)^2 \Big[1 - (\cos x)^2\Big] + b(\cos x)^2 - b\Big[1 - (\cos x)^2\Big] + m \\ &= 4a(\cos x)^4 + (-3a + 2b)(\cos x)^2 - b + m\end{aligned}$$

On doit avoir $4a = 1$, $-3a + 2b = 0$ et $-b + m = 0$, ce qui donne $a = 1/4$, puis $m = b = 3/8$. On en déduit

$$F(x) = \frac{1}{4} (\cos x)^3 \sin x + \frac{3}{8} \cos x \sin x + \frac{3}{8} x$$

**Remarque :** Cette méthode marche encore pour trouver une primitive de $\frac{1}{(\cos x)^n}$ ou de $\frac{1}{(\sin x)^n}$ quand $n$ est pair. Pour $\frac{1}{(\cos x)^n}$ par exemple, on cherche une primitive $F$ sous la forme

$$F(x) = a_1 \frac{\sin x}{(\cos x)^{n-1}} + a_3 \frac{\sin x}{(\cos x)^{n-3}} + \cdots + a_{n-1} \frac{\sin x}{\cos x}$$

### C. Cas où $p$ et $q$ sont tous deux pairs

L'identité $(\sin x)^2+(\cos x)^2=1$ permet de se ramener au cas précédent. Par exemple

$$\begin{aligned}\int_0^x (\sin t)^2(\cos t)^4 dt &= \int_0^x \left[1-(\cos t)^2\right](\cos t)^4 dt\\ &= \int_0^x (\cos t)^4\,dt - \int_0^x (\cos t)^6 dt\end{aligned}$$

### Autre méthode : linéariser

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit $(\sin x)^n$ et $(\cos x)^n$ comme une somme de fonctions $a\,\sin(kx)$ et $b\,\cos(kx)$, où les entiers $k$ sont compris entre 0 en $n$.

**Exemple.** Calculons de cette manière $G(x) = \displaystyle\int_0^x (\cos\,t)^4\,dt$.

On a $2\,\cos t = e^{it} + e^{-it}$, donc en développant par la formule du binome :

$$\begin{aligned}2^4(\cos t)^4 &= e^{4it} + 4e^{2it} + 6 + 4e^{-2it} + e^{-4it}\\ &= e^{4it} + e^{-4it} + 4\left[e^{2it} + e^{-2it}\right] + 6\\ &= 2\cos(4t) + 8\cos(2t) + 6\end{aligned}$$

Ainsi $$\begin{aligned}G(x) &= \int_0^x (\cos t)^4\,dt = \int_0^x \left(\frac{\cos(4t)}{8} + \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{3}{8}\right) dt\\ &= \frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3x}{8}\end{aligned}$$

Dans l'exemple précédent, nous avions trouvé une primitive $F(x)$ dont l'expression était différente. Mais comme on a $F(0) = 0 = G(0)$, on en déduit $F(x) = G(x)$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

## 7.6 INTÉGRALE DE FONCTIONS RATIONNELLES EN SINUS ET COSINUS

Il s'agit d'intégrales de la forme $\int^x F(\cos t, \sin t)\,dt$, où $F$ est une fonction rationnelle à deux variables.

| **Si $F(\cos t, \sin t)\,dt$ est invariant quand on change** | **faire le changement de variable** |
|---|---|
| $t$ en $-t$ et $dt$ en $-dt$ | $u = \cos t$ |
| $t$ en $\pi - t$ et $dt$ en $-dt$ | $u = \sin t$ |
| $t$ en $\pi + t$ | $u = \tan t$ |

Il faut se rappeler les formules suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| $\sin(-t) = -\sin t$ | $\sin(\pi - t) = \sin t$ | $\sin(\pi + t) = -\sin t$ |
| $\cos(-t) = \cos t$ | $\cos(\pi - t) = -\cos t$ | $\cos(\pi + t) = -\cos t$ |

**Autres cas :** faire le changement de variable $u = \tan(t/2)$.

Puisque $\tan'(x) = 1 + (\tan x)^2$, on a alors $du = \frac{1}{2}(1+u^2)dt$.
Par les formules

$$u = \tan(t/2), \quad dt = \frac{2\,du}{1+u^2}, \quad \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \sin t = \frac{2u}{1+u^2},$$

on est ramené à intégrer une fonction rationnelle de la variable $u$.

**Exemple 1.** Calculons $\displaystyle\int_0^x \frac{(\cos t)^3}{1+(\sin t)^2}dt$.

Quand on change $t$ en $\pi - t$ dans $\frac{(\cos t)^3}{1+(\sin t)^2}dt$, on obtient $\frac{(-\cos t)^3}{1+(\sin t)^2}(-dt)$ $= \frac{(\cos t)^3}{1+(\sin t)^2}dt$, donc nous faisons le changement de variable $u = \sin t$ dans l'intégrale. On a $du = (\cos t)dt$ et

$$\frac{(\cos t)^3}{1+(\sin t)^2}dt = \frac{(\cos t)^2}{1+(\sin t)^2}(\cos t\, dt) = \frac{1-u^2}{1+u^2}du$$

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{(\cos t)^3}{1+(\sin t)^2}dt &= \int_0^{\sin x} \frac{1-u^2}{1+u^2}du \\ &= \int_0^{\sin x} \frac{-1-u^2}{1+u^2}du + \int_0^{\sin x} \frac{2}{1+u^2}du \\ &= -\sin x + 2 \text{ Arctan } (\sin x)\end{aligned}$$

**Exemple 2.** Calculons une primitive de $\dfrac{1}{(\sin x)^2(1+\cos x)}$ sur $]0,\pi[$.

Les test du tableau précédent échouent : on fait donc le changement de variable $u = \tan(t/2)$. Calculons :

$$du = \left[1 + \left(\tan(t/2)\right)^2\right]\frac{1}{2}dt = \frac{1+u^2}{2}dt, \quad \text{donc} \quad dt = \frac{2\,du}{1+u^2}\ ;$$

$$\sin t = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{et} \quad 1 + \cos t = 1 + \frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{2}{1+u^2}$$

$$\frac{dt}{(\sin t)^2(1+\cos t)} = \frac{2\,du}{1+u^2}\left(\frac{1+u^2}{2u}\right)^2\frac{1+u^2}{2} = \frac{(1+u^2)^2}{4u^2}$$

Puisque $\displaystyle\int^x \frac{(1+u^2)^2}{u^2}du = \int^x \frac{1+2u^2+u^4}{u^2}du = -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3}$,
on en déduit que pour tout $x \in ]0,\pi[$, on a

$$\begin{aligned}\int^x \frac{dt}{(\sin t)^2(1+\cos t)} &= \frac{1}{4}\int^{\tan(x/2)} \frac{(1+u^2)^2}{u^2}du \\ &= -\frac{1}{4\tan(x/2)} + \frac{\tan(x/2)}{2} + \frac{\big(\tan(x/2)\big)^3}{12}\end{aligned}$$

## 7.7 INTÉGRALE DE $e^{ax}\sin bx$ ET $e^{ax}\cos bx$

### La fonction exponentielle complexe

Nous allons définir $e^z$ pour tout nombre complexe $z$.
On connaît $e^x$ quand $x \in \mathbb{R}$ et aussi $e^{\boldsymbol{i}y} = \cos y + \boldsymbol{i}\sin y$ quand $y \in \mathbb{R}$.
Comme on veut que la formule $e^{x+\boldsymbol{i}y} = e^x\, e^{\boldsymbol{i}y}$ soit vraie, on est conduit à la définition suivante.

**Définition.** Pour tout nombre complexe $z = x + \boldsymbol{i}y$, où $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $e^z = e^x\, e^{\boldsymbol{i}y} = e^x(\cos y + \boldsymbol{i}\sin y)$.
Le nombre $e^z$ s'appelle *exponentielle de $z$*.

Ainsi $|e^z| = e^x = e^{\mathrm{Re}\, z}$ et si $y \in [0,2\pi[$, alors $\mathrm{Arg}(e^z) = y = \mathrm{Im}(z)$.
Si $a,b \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{ax}(\cos bx + \boldsymbol{i}\sin bx) = e^{(a+\boldsymbol{i}b)x}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La fonction $x \mapsto e^{(a+\boldsymbol{i}b)x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous allons définir et calculer sa dérivée.

**Définition.** Soit $I$ un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. Pour tout $x \in I$, écrivons $f(x) = u(x) + \boldsymbol{i}v(x)$, où $u : I \to \mathbb{R}$ et $v : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions à valeurs réelles. Si $u$ et $v$ sont dérivables, on définit la *dérivée de $f$* en posant : $f'(x) = u'(x) + \boldsymbol{i}v'(x)$, pour tout $x \in I$.

On vérifie que si $f$ et $g$ sont dérivables et si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors

$$(f+g)' = f' + g' \quad , \quad (\lambda f)' = \lambda f' \quad \text{et} \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

Posons

$$f(x) = e^{(a+\boldsymbol{i}b)x} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

et calculons la dérivée de $f$. Puisque $f(x) = e^{ax}\cos bx + \boldsymbol{i}\, e^{ax}\sin bx$, il vient

$$\begin{aligned} f'(x) &= ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx + \boldsymbol{i}(ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx) \\ &= (a+\boldsymbol{i}b)(e^{ax}\cos bx + \boldsymbol{i}\, e^{ax}\sin bx) = (a+\boldsymbol{i}b)e^{(a+\boldsymbol{i}b)x} \end{aligned}$$

Enonçons ce qu'on vient de montrer.

**Proposition.** *Si $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ a pour dérivée $x \mapsto \lambda e^{\lambda x}$.*

On dérive donc la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ comme l'exponentielle réelle.

### Application

Utilisons ce résultat pour calculer une primitive de $e^{ax}\cos bx$ et de $e^{ax}\sin bx$, où $a$ et $b$ sont des réels non nuls.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{a+\boldsymbol{i}b}e^{(a+\boldsymbol{i}b)x}$ a pour dérivée $e^{(a+\boldsymbol{i}b)x} = f(x)$. On a

$$\frac{1}{a+\boldsymbol{i}b}e^{(a+\boldsymbol{i}b)x} = \frac{a-\boldsymbol{i}b}{a^2+b^2}(e^{ax}\cos bx + \boldsymbol{i}e^{ax}\sin bx) = U(x) + \boldsymbol{i}V(x)$$

avec

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx \\ V(x) &= \frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx \end{aligned}$$

Puisque $(U + \boldsymbol{i}V)' = f$, il vient $U'(x) = e^{ax}\cos bx$, $V'(x) = e^{ax}\sin bx$ et par suite

$$\begin{aligned} U(x) &= \int^x e^{at}\cos bt\, dt = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} \\ V(x) &= \int^x e^{at}\sin bt\, dt = \frac{-b\cos bx + a\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} \end{aligned}$$

## 7.8 INTÉGRALE DE $P(x)e^{\alpha x}$ OÙ $P$ EST UN POLYNÔME

Le plus simple est de chercher une primitive $F$ de la forme

$$F(x) = \int^x P(x)e^{\alpha t}\,dt = Q(x)e^{\alpha x}$$

où $Q$ est un polynôme de même degré que $P$.

**Exemple.** Calcul de $\displaystyle\int_0^a (t^2 - t)e^{-t}\,dt$.

Cherchons le polynôme $Q(x) = ax^2 + bx + c$ pour que la fonction $x \mapsto Q(x)e^{-x}$ soit une primitive de $(x^2 - x)e^{-x}$.
On doit avoir $Q'(x)e^{-x} - Q(x)e^{-x} = (x^2 - x)e^{-x}$, c'est-à-dire

$$Q'(x) - Q(x) = x^2 - x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Puisqu'on a posé $Q(x) = ax^2 + bx + c$, il vient

$$\begin{aligned} Q'(x) - Q(x) &= 2ax + b - ax^2 - bx - c \\ &= -ax^2 + (2a - b)x + b - c \end{aligned}$$

et l'égalité $(*)$ équivaut à $-a = 1, 2a - b = -1$ et $b - c = 0$.

On en déduit $a = -1$, puis $b = c = -1$. Par suite

$$\int_0^a (t^2 - t)e^{-t}\,dt = \left[(-x^2 - x - 1)e^{-x}\right]_0^a = 1 - (a^2 + a + 1)e^{-a}$$

**Remarque :** on peut calculer de même

$$A = \int^x P(t)e^{at}\cos bt\,dt \quad \text{et} \quad B = \int^x P(t)e^{at}\sin bt\,dt$$

Pour cela, on applique la méthode précédente à l'intégrale

$$\begin{aligned} A + \boldsymbol{i}B &= \int^x P(t)e^{at}(\cos bt + \boldsymbol{i}\sin bt)dt = \int^x P(t)e^{at}e^{\boldsymbol{i}bt}dt \\ &= \int^x P(t)e^{\alpha t}dt \end{aligned}$$

où $\alpha = a + \boldsymbol{i}b$, puis l'on sépare partie réelle et partie imaginaire.

## EXERCICES

**7.1** Soit $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

**a)** Faire le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt$.

**b)** Montrer que

**(i)** si $f$ est une fonction paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$ ;

**(ii)** si $f$ est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,dt = 0$.

**7.2** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T$ (donc $f(x+T) = f(x)$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$).
Soit $a \in \mathbb{R}$.

**a)** Montrer que $\displaystyle\int_T^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt$ (faire le changement de variable $u = t - T$).

**b)** En déduire que $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$.

**7.3** Le but de cet exercice est de calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\,dt$.

**a)** Montrer que pour tout $t \in [0,\pi/4]$, on a

$$1 + \tan t = \sqrt{2}\,\frac{\sin(t+\pi/4)}{\cos t}\ , \quad \sin(t+\pi/4) > 0 \quad \text{et} \quad \cos t > 0$$

**b)** En utilisant le changement de variable $t = (\pi/4) - u$, montrer que

$$\int_0^{\pi/4} \ln\big(\sin(t+\pi/4)\big)\,dt = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos t)\,dt$$

**c)** En déduire la valeur de $I$.

**7.4** **a)** Calculer $\displaystyle\int_1^x \ln t\,dt$ en intégrant par parties.

**b)** Calculer $\displaystyle\int^x \frac{dt}{t\sqrt{t-1}}$ par le changement de variable $u = \sqrt{t-1}$.

**c)** Calculer la primitive $F$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$ telle que $F(1/e) = 0$. Quel est l'intervalle de définition de $F$ ?

**7.5** Calculer les intégrales suivantes

**(i)** $\displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{1+t^3}\,dt$ **(ii)** $\displaystyle\int_0^x \operatorname{Arcsin} t\,dt$

**(iii)** $\displaystyle\int_0^x t \operatorname{Arcsin} t\,dt$ **(iv)** $\displaystyle\int_1^x t^{\alpha}(\ln t)\,dt$

**(v)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2+2}$ **(vi)** $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{2t}}{\sqrt{1+e^t}}\,dt$

Pour **(iv)**, séparer le cas $\alpha = -1$ et intégrer par parties lorsque $\alpha \neq -1$.
Pour **(vi)**, faire le changement de variable $u = \sqrt{1+e^t}$.

**7.6** Calculer les primitives suivantes :

**(i)** $\displaystyle\int^x \frac{t^4}{t^2-4}\,dt$ **(ii)** $\displaystyle\int^x \frac{dt}{(t+2)(t^2-4)}$

**(iii)** $\displaystyle\int^x \frac{dt}{t^2(t^2+2)^2}$ **(iv)** $\displaystyle\int^0 x\,\frac{dt}{t^2(2t^2+2t+1)}$

**7.7** Soit $F$ la primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$ telle que $F(1) = 0$. Notons $I$ l'intervalle de définition de $F$.

**a)** Quelles sont les bornes de $I$ ?

**b)** Montrer que la fonction $F$ est croissante et que la courbe de $F$ n'a pas de point d'inflexion.

**c)** Comment sont les tangentes à la courbe de $F$ aux bornes de $I$ ?

**d)** Calculer $F(x)$ pour tout $x \in I$.

**e)** Calculer les limites de $F$ aux bornes de $I$ et dessiner l'allure de la courbe de $F$.

**7.8** Calculer les intégrales suivantes :

**(i)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin at \sin bt\,dt$, où $a > 0$ et $b > 0$ ; étudier le cas $a,b \in \mathbb{N}^*$.

**(ii)** $\displaystyle\int^x \frac{(\sin t)^3}{(\cos t)^2}dt$ **(iii)** $\displaystyle\int^x \frac{(\cos t)^3}{2+\sin t}dt$

**(iv)** $\displaystyle\int^x \frac{\sin t}{(\cos t)^2(\sin t + \cos t)}dt$ **(v)** $\displaystyle\int^x t(\sin 2t)e^{-t}\,dt$

**7.9** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \text{ si } x \neq 0 \text{ et } \quad f(0) = 1.$$

**a)** Montrer que la fonction $f$ est continue.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$.

**b)** Quel est le sens de variation de $F$ ?

**c)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{1+x^2}$.

**d)** En déduire que $F(x)$ a une limite finie quand $x$ tend vers $+\infty$.

**e)** Montrer que la fonction $F$ est impaire et dessiner sa représentation graphique.

**7.10** Soient $a,b$ des nombres réels tels que $a > b > 0$.

**a)** Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $a + b\cos t \neq 0$. En déduire que la fonction $F$ telle que $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{a+b\cos t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

**b)** On suppose $0 < x < \pi$. Montrer qu'on peut faire le changement de variable $u = \tan(t/2)$ dans l'intégrale $F(x)$ et qu'en posant $p = \sqrt{a+b}$ et $q = \sqrt{a-b}$, on a $F(x) = 2\displaystyle\int_0^{\tan(x/2)} \frac{du}{p^2+q^2u^2}$.

**c)** En déduire l'égalité $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{a+b\cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

## SOLUTIONS

**7.1** **a)** Pour $t = 0$, on a $u = 0$ ; pour $t = a$, on a $u = -a$. Puisque $du = -dt$, il vient

$$\int_0^a f(t)\,dt = \int_0^{-a} f(-u)\,(-du) = -\int_0^{-a} f(-u)\,du$$

**b) (i)** Supposons que la fonction $f$ est paire. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^a f(t)\,dt &= -\int_0^{-a} f(-u)\,du = \int_{-a}^0 f(-u)\,du \\ &= \int_{-a}^0 f(u)\,du \quad \text{car } f(-u) = f(u) \text{ quel que soit } u.\end{aligned}$$

Par suite, $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,dt = \int_{-a}^0 f(u)\,du + \int_0^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$.

**b) (ii)** Supposons que la fonction $f$ est impaire. Alors

$$\int_0^a f(t)\,dt = \int_{-a}^0 f(-u)\,du = -\int_{-a}^0 f(u)\,du$$

car $f(-u) = -f(u)$ quel que soit $u$.

Par suite, $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,dt = \int_{-a}^0 f(u)\,du + \int_0^a f(t)\,dt = 0$. Ces résultats ont déjà été obtenus dans l'exercice **6.1** page 108 en considérant une primitive de $f$.

**7.2** **a)** Quand $t = T$, on a $u = 0$ ; quand $t = a + T$, on a $u = a$. Il vient donc

$$\int_T^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^a f(u+T)\,du = \int_0^a f(u)\,du,$$

car $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x$.

**b)**

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(t)\,dt &= \int_a^T f(t)\,dt + \int_T^{a+T} f(t)\,dt \\ &= \int_a^T f(t)\,dt + \int_0^a f(t)\,dt \quad \text{d'après } \textbf{(a)} \\ &= \int_0^T f(t)\,dt\end{aligned}$$

Cela montre que l'intégrale de $f$ est la même sur n'importe quel intervalle de longueur $T$.

**7.3 a)** On a
$\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = \sin t \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos t = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos t + \sin t\right)$, d'où

$$\sqrt{2}\,\frac{\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos t} = \frac{\cos t + \sin t}{\cos t} = 1 + \tan t.$$

**b)** Par le changement de variable $u = (\pi/4) - t$, il vient

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \ln\left[\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right] dt &= \int_{\pi/4}^{0} \ln\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right](-du)\\ &= \int_{\pi/4}^{0} \ln\left(\cos u\right)(-du)\\ &\qquad \text{car } \sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right) = \cos u\\ &= \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos u\right) du\end{aligned}$$

**c)** D'après **(a)**, on a $\ln(1+\tan t) = \ln\sqrt{2} + \ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) - \ln\cos t$, donc

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\,dt\\ &= \int_0^{\pi/4} \ln\sqrt{2}\,dt + \int_0^{\pi/4} \ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) dt - \int_0^{\pi/4} \ln\cos t\,dt\\ &= \int_0^{\pi/4} \ln\sqrt{2}\,dt = \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} = \frac{\pi\ln 2}{8}.\end{aligned}$$

**7.4 a)** On a $\displaystyle\int_1^x (\ln t)\,dt = \left[t\ln t\right]_1^x - \int_1^x t\frac{1}{t}dt = x\ln x - x + 1$.

**b)** La fonction sous le signe intégrale est continue sur $I = ]1,+\infty[$, donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int^x \frac{dt}{t\sqrt{t-1}}$ est définie sur $I$. Faisons le changement de variable $u = \sqrt{t-1}$ : cela est possible car la fonction $\varphi : ]1,+\infty[ \to ]0,+\infty[$ définie par $\varphi(t) = \sqrt{1-t}$ est bijective et sa dérivée ne s'annule pas sur $I$. On a $u^2 = t-1$, donc $t = 1+u^2$.

$$\frac{1}{t\sqrt{t-1}} = \frac{1}{(1+u^2)u} \qquad \text{et} \qquad dt = 2u\,du$$

$$\frac{dt}{t\sqrt{t-1}} = \frac{2u\,du}{(1+u^2)u} = \frac{2\,du}{1+u^2}$$

$$\int^x \frac{dt}{t\sqrt{t-1}} = \int^{\sqrt{x-1}} \frac{2}{1+u^2}\,du$$

d'où

$$\int^x \frac{dt}{t\sqrt{t-1}} = 2\ \mathrm{Arctan}\sqrt{x-1}\,,\ \text{pour tout } x \in ]1,+\infty[.$$

**c)** La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$ est continue sur $]0,1[$. Puisque $1/e \in ]0,1[$, il existe une unique primitive $F : ]0,1[ \to \mathbb{R}$ de $f$ telle que $F(1/e) = 0$. Pour tout $x \in ]0,1[$, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{1/e}^x \frac{dt}{t\ln t} = \int_{1/e}^x \frac{u'(t)}{u(t)}dt \quad \text{en posant } u(t) = \ln t \\ &= \big[\ln\big|u(t)\big|\big]_{1/e}^x = \ln\big|\ln x\big| - \ln\big|\ln(1/e)\big| \end{aligned}$$

Puisque $\ln(1/e) = -\ln e = -1$, on a $F(x) = \ln\big|\ln x\big|$ pour tout $x \in\ ]0,1[$.

**7.5** **(i)** Posons $u(t) = 1 + t^3$. On a $u'(t) = 3t^2$, donc

$$\int_0^1 t^2\sqrt{1+t^3}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^1 \big(u(t)\big)^{1/2}u'(t)\,dt$$

Une primitive de $\big(u(t)\big)^{1/2}u'(t)$ est $\dfrac{1}{3/2}\big(u(t)\big)^{3/2}$, donc

$$\int_0^1 t^2\sqrt{1+t^3}\,dt = \frac{1}{3}\frac{2}{3}\Big[(1+t^3)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{2}{9}(2^{3/2}-1)$$

ou encore $\displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{1+t^3}\,dt = \frac{4\sqrt{2}-2}{9}.$

**(ii)** On intègre par parties : la dérivée de Arcsin $x$ est $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, donc

$$\int_0^x \mathrm{Arcsin}\,t\,dt = x\ \mathrm{Arcsin}\,x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

En posant $u(t) = 1 - t^2$, on a $u'(t) = -2t$ et la dernière intégrale s'écrit

$$\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{-1}{2}\int_0^x \big(u(t)\big)^{-1/2}u'(t)\,dt$$
$$= \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{1/2}\big(u(t)\big)^{1/2}\right]_0^x = -\left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^x$$

Ainsi $\int_0^x \operatorname{Arcsin} t\,dt = x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} - 1$.

**(iii)** On intègre par parties :

$$\int_0^x t \operatorname{Arcsin} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\operatorname{Arcsin} t\right]_0^x - \frac{1}{2}J\text{ , où } J = \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt \quad (*)$$

On a

$$-J = \int_0^x \frac{(1-t^2)-1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$= \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt - \operatorname{Arcsin} x$$

Intégrons par parties dans la dernière intégrale :

$$\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt = x\sqrt{1-x^2} - \int_0^x t\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}dt = x\sqrt{1-x^2} + J$$

On en déduit l'égalité $-J = x\sqrt{1-x^2} + J - \operatorname{Arcsin} x$, d'où

$$-2J = x\sqrt{1-x^2} - \operatorname{Arcsin} x$$
$$-\frac{1}{2}J = \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\operatorname{Arcsin} x\,.$$

En reportant dans $(*)$, on obtient finalement

$$\int_0^x t \operatorname{Arcsin} t\,dt = \frac{x^2}{2}\operatorname{Arcsin} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\operatorname{Arcsin} x$$

**(iv)** Supposons $\alpha \neq -1$. En intégrant par parties, on a pour tout $x > 0$ :

$$\int_1^x t^\alpha(\ln t)\,dt = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,\frac{1}{t}\,dt$$
$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\int_1^x t^\alpha\,dt$$
$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^x$$

d'où

$$\int_1^x t^\alpha(\ln t)\,dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + \frac{1}{(\alpha+1)^2}.$$

Supposons maintenant $\alpha = -1$. L'intégrale s'écrit

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt = \int_1^x u(t)u'(t)\,dt\ \text{, où } u(t) = \ln t.$$

Pour tout $x > 0$, on a donc

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt = \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^x = \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

**(v)** Par le changement de variable $u = t/\sqrt{2}$, on a $t^2+2 = 2u^2+2 = 2(u^2+1)$ et $dt = \sqrt{2}\,du$, d'où

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+2} &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}\,du}{2(u^2+1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{u^2+1}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\big[\operatorname{Arctan} u\big]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

**(vi)** Par le changement de variable $u = \sqrt{1+e^t}$, on a $e^t = u^2-1$, $e^t\,dt = 2u\,du$, donc $dt = \dfrac{2u\,du}{u^2-1}$, et il vient

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{e^{2t}}{\sqrt{1+e^t}}dt &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^x}} \frac{(u^2-1)^2}{u}\,\frac{2u\,du}{u^2-1}\\ &= 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^x}} (u^2-1)\,du\\ &= 2\left[\frac{u^3}{3}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^x}} - 2\big[\sqrt{1+e^x}-\sqrt{2}\big]\\ &= \frac{2}{3}(\sqrt{1+e^x})^3 - \frac{2(\sqrt{2})^3}{3} - 2\sqrt{1+e^x} + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Finalement $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{2t}}{\sqrt{1+e^t}}dt = \frac{2}{3}(\sqrt{1+e^x})^3 - 2\sqrt{1+e^x} + \frac{2\sqrt{2}}{3}.$

**7.6** Il s'agit de primitives de fonctions rationnelles : la méthode générale est donc de décomposer en éléments simples, puis d'intégrer chaque élément simple.

**(i)** Puisque le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur, calculons d'abord la partie entière de la fraction en faisant la division euclidienne de $t^4$ par $t^2 - 4$ : on a $t^4 = (t^2 - 4)(t^2 + 4) + 16$, donc

$$\frac{t^4}{t^2 - 4} = t^2 + 4 + \frac{16}{t^2 - 4} \tag{1}$$

La décomposition de $\dfrac{1}{t^2 - 4} = \dfrac{1}{(t - 2)(t - 2)}$ est de la forme :

$$\frac{1}{(t - 2)(t + 2)} = \frac{a}{t - 2} + \frac{b}{t + 2}$$

– multiplions par $t - 2$ et faisons $t = 2$ : on trouve $\dfrac{1}{4} = a$ ;

– multiplions par $t + 2$ et faisons $t = -2$ : on trouve $\dfrac{1}{-4} = b$.

$$\frac{16}{t^2 - 4} = \frac{4}{t - 2} - \frac{4}{t + 2} \tag{2}$$

En intégrant (1) et (2), on en déduit

$$\int^x \frac{t^4}{t^2 - 4}\, dt = \frac{x^3}{3} + 4x + 4 \ln|x - 2| - 4 \ln|x + 2|$$

**(ii)** La décomposition de $\dfrac{1}{(t + 2)(t^2 - 4)} = \dfrac{1}{(t - 2)(t + 2)^2}$ est de la forme :

$$\frac{1}{(t - 2)(t + 2)^2} = \frac{a}{t - 2} + \frac{b}{t + 2} + \frac{c}{(t + 2)^2}$$

– multiplions par $t - 2$ et faisons $t = 2$ : on trouve $\dfrac{1}{4^2} = a$ ;

– multiplions par $(t + 2)^2$ et faisons $t = -2$ : on trouve $\dfrac{1}{-4} = c$ ;

– multiplions par $t$ et prenons la limite quand $t$ tend vers $+\infty$ : on trouve l'égalité $0 = a + b + 0$, d'où $b = -a$.

$$\frac{1}{(t + 2)(t^2 - 4)} = \frac{1/16}{t - 2} - \frac{1/16}{t + 2} - \frac{1/4}{(t + 2)^2}$$

Par suite $\displaystyle\int^x \frac{dt}{(t + 2)(t^2 - 4)} = \frac{1}{16}\ln|x - 2| - \frac{1}{16}\ln|x + 2| + \frac{1}{4(x + 2)}$.

**(iii)** La fonction à intégrer est une fonction rationnelle en $t^2$, donc on décompose

$$\frac{1}{X(X+2)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{(X+2)^2}$$

En procédant comme ci-dessus, on obtient : $a = 1/4$, $c = -1/2$, puis $b = -a$. En faisant $X = t^2$, il vient alors

$$\frac{1}{t^2(t^2+2)^2} = \frac{1/4}{t^2} - \frac{1/4}{t^2+2} - \frac{1/2}{(t^2+2)^2} \tag{1}$$

Pour intégrer $\dfrac{1}{(t^2+2)^2}$, on écrit

$$\frac{2}{(t^2+2)^2} = \frac{t^2+2}{(t^2+2)^2} - \frac{t^2}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{t^2+2} - \frac{t^2}{(t^2+2)^2}$$

$$2\int^x \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \int^x \frac{t^2}{(t^2+2)^2}\,dt \tag{2}$$

Écrivons $\displaystyle\int^x \frac{t^2}{(t^2+2)^2}\,dt = \int^x \frac{2t}{(t^2+2)^2}\,\frac{t}{2}\,dt$ et intégrons par partie en posant $u'(t) = \dfrac{2t}{(t^2+2)^2}$ et $v(t) = \dfrac{t}{2}$. Puisque $u(t) = -\dfrac{1}{t^2+2}$, il vient :

$$\begin{aligned}\int^x \frac{t^2}{(t^2+2)^2}\,dt &= \frac{-1}{x^2+2}\,\frac{x}{2} - \int^x \frac{-1}{t^2+2}\,\frac{1}{2}\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{2}\int^x \frac{dt}{t^2+2} \\ &= -\frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

D'après (2), on en déduit

$$\int^x \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4}\,\frac{x}{x^2+2}$$

et en intégrant dans (1), on obtient

$$\int^x \frac{dt}{t^2(t^2+2)^2} = -\frac{1}{4x} - \frac{x}{8(x^2+2)} - \frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

**(iv)** La décomposition en éléments simples est de la forme :

$$\frac{1}{t^2(2t^2+2t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{ct+d}{2t^2+2t+1}$$

– multiplions par $t^2$ et faisons $t = 0$ : on trouve $b = 1$;
– une racine de $2t^2+2t+1$ est $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}$ ; multiplions par $2t^2+2t+1$ et faisons $t = \alpha$ : on trouve $c\alpha + d = 1/\alpha^2 = 2\boldsymbol{i}$, c'est-à-dire $\dfrac{-c}{2} + d + \dfrac{c}{2}\boldsymbol{i} = 2\boldsymbol{i}$, d'où $c = 4$ et $d = 2$ puisque $c$ et $d$ sont réels.
– multiplions par $t$ et faisons tendre $t$ vers $+\infty$ : on obtient l'égalité $0 = a + 0 + c/2$, donc $a = -2$.

La décomposition est donc

$$\frac{1}{t^2(2t^2+2t+1)} = -\frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{4t+2}{2t^2+2t+1}$$

En posant $u(t) = 2t^2+2t+1$, on a $\frac{4t+2}{2t^2+2t+1} = \frac{u'(t)}{u(t)}$, d'où

$$\int^x \frac{dt}{t^2(2t^2+2t+1)} = -2\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln(2x^2+2x+1)$$

**7.7 a)** On a $2x - x^2 = x(2-x)$, donc l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$ est $]0,2[$. Puisque $f$ est continue sur $]0,2[$, sa primitive $F$ est définie sur $I = ]0,2[$.

**b)** On a $F'(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} > 0$ pour tout $x \in I$, donc $F$ est strictement croissante. On a $F''(x) = f'(x) = \frac{x}{(2x-x^2)^{3/2}} > 0$ pour tout $x \in I$, donc $F''$ ne s'annule pas : il s'ensuit que la courbe de $F$ n'a pas de point d'inflexion.

**c)** On a $\lim\limits_{x\to 2} F'(x) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$, donc la courbe de $F$ a une tangente verticale au point d'abscisse 2. De même, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}} = 0$, donc la courbe de $F$ a une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

**d)** Écrivons $\displaystyle\int_1^x \frac{t}{\sqrt{2t-t^2}}dt = \int_1^x \frac{t-1}{\sqrt{2t-t^2}}dt + \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{2t-t^2}}$.

En posant $u(t) = 2t - t^2$, il vient

$$\int_1^x \frac{t-1}{\sqrt{2t-t^2}}dt = -\int_1^x \frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}dt = -\int_1^x \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}dt$$
$$= -\left[\sqrt{u(t)}\right]_1^x = -\sqrt{2x-x^2} + 1$$

On a $2t - t^2 = 1 - (t-1)^2$, donc

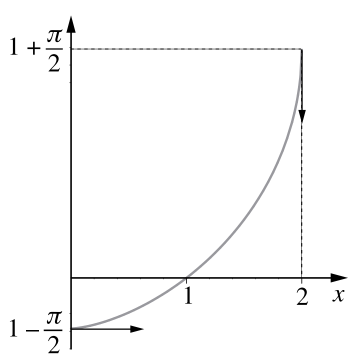
$$\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{2t-t^2}} = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1-(t-1)^2}}$$
$$= \int_1^{x-1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \text{ par le changement de variable } u = t-1$$
$$= \text{Arcsin}\,(x-1)$$

Finalement $F(x) = \text{Arcsin}\,(x-1) - \sqrt{2x-x^2} + 1$, pour tout $x \in\, ]0,1[$.

**e)** Puisque Arcsin $(-1) = -\pi/2$ et Arcsin $(1) = \pi/2$, on en déduit

$$\lim_{x\to 0} F(x) = 1 - \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \lim_{x\to 2} F(x) = 1 + \frac{\pi}{2}.$$

On a $F(1) = 0$. Puisque $F'(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$, la tangente à la courbe de $F$ au point (1,0) a pour pente $F'(1) = 1$. Voici le dessin de la courbe de $F$ :



**7.8** **(i)** On utilise la formule

$$\sin p \sin q = \tfrac{1}{2}\cos(p-q) - \tfrac{1}{2}\cos(p+q) :$$

$$\int_0^\pi \sin at \,\sin bt\, dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(a-b)t\, dt - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(a+b)t\, dt$$

• Supposons $a \neq b$. Alors

$$\int_0^\pi \cos(a-b)t\, dt = \left[\frac{\sin(a-b)t}{a-b}\right]_0^\pi = \frac{\sin(a-b)\pi}{a-b}$$
$$\int_0^\pi \cos(a+b)t\, dt = \left[\frac{\sin(a+b)t}{a+b}\right]_0^\pi = \frac{\sin(a+b)\pi}{a+b}$$

donc $\displaystyle\int_0^\pi \sin at \,\sin bt\, dt = \frac{\sin(a-b)\pi}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)\pi}{2(a+b)}$.

• Supposons $a = b$. Alors

$$\int_0^\pi \cos(a-b)t\, dt = \int_0^\pi dt = \pi$$
$$\int_0^\pi \cos(a+b)t\, dt = \left[\frac{\sin 2at}{2a}\right]_0^\pi = \frac{\sin 2a\pi}{2a}$$

donc $\displaystyle\int_0^\pi (\sin at)^2\, dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2a\pi}{4a}$.

• Supposons $a$ et $b$ entiers positifs. Alors $a+b$ et $a-b$ sont entiers. Puisque $\sin k\pi = 0$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, on en déduit

$$\int_0^\pi \sin at \,\sin bt\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq b \\ \pi/2 & \text{si } a = b \end{cases}$$

**(ii)** L'expression $\dfrac{(\sin t)^3}{(\cos t)^2}dt$ est invariante quand on change $t$ en $-t$ et $dt$ en $-dt$ : en effet

$$\big(\sin(-t)\big)^3\,(-dt) = (-\sin t)^3\,(-dt) = (\sin t)^3\, dt \text{ et } \cos(-t) = \cos t.$$

On fait donc le changement de variable $u = \cos t$ :

$$du = -(\sin t)dt \text{ et } (\sin t)^3\, dt = \big[1-(\cos t)^2\big]\sin t\, dt = (u^2-1)du$$

$$\int^x \frac{(\sin t)^3}{(\cos t)^2}dt = \int^{\cos x} \frac{u^2-1}{u^2}du = \int^{\cos x} du + \int^{\cos x}\left(\frac{-1}{u^2}\right) du$$

et finalement

$$\int^x \frac{(\sin t)^3}{(\cos t)^2} dt = \cos x + \frac{1}{\cos x}\,.$$

**(iii)** Les expressions $(\cos t)^3\, dt$ et $\sin t$ sont invariantes quand on change $t$ en $\pi - t$ et $dt$ en $-dt$. Faisons donc le changement de variable $u = \sin t$. On a

$$du = (\cos t)dt \text{ et } (\cos t)^3\, dt = \left[1 - (\sin t)^2\right] \cos t\, dt = (1 - u^2)du$$

$$\int^x \frac{(\cos t)^3}{2 + \sin t} dt = \int^{\sin x} \frac{1 - u^2}{2 + u} du$$

Pour calculer cette dernière intégrale, divisons $1 - u^2$ par $2 + u$ : il vient $1 - u^2 = (2 + u)(2 - u) - 3$, d'où

$$\int^{\sin x} \frac{1 - u^2}{2 + u} du = \int^{\sin x} (2 - u)du - 3 \int^{\sin x} \frac{du}{2 + u}$$
$$\int^x \frac{(\cos t)^3}{2 + \sin t} dt = 2 \sin x - \frac{(\sin x)^2}{2} - 3 \ln\big(2 + \sin x\big)$$

**(iv)** Quand on change $t$ en $\pi + t$, chacune des expressions $\sin t$ et $(\cos t)^2(\sin t + \cos t)$ change de signe, donc la fraction est inchangée. On fait donc le changement de variable $u = \tan t$. On a $du = \left[1 + (\tan t)^2\right] dt = \dfrac{dt}{(\cos t)^2}$. En divisant par $\cos t$ le numérateur et le dénominateur de la fraction, il vient

$$\frac{\sin t}{(\cos t)^2(\sin t + \cos t)} = \frac{\tan t}{(\cos t)^2(1 + \tan t)}$$

donc

$$\int^x \frac{\sin t}{(\cos t)^2(\sin t + \cos t)} dt = \int^{\tan x} \frac{u}{1 + u} du$$
$$\int^x \frac{\sin t}{(\cos t)^2(\sin t + \cos t)} dt = \int^{\tan x} \left(1 - \frac{1}{1 + u}\right) du$$
$$= \tan x - \ln\big|1 + \tan x\big|$$

**(v)** Posons $A(x) = \int^x t(\cos 2t)e^{-t}\,dt$ et $B(x) = \int^x t(\sin 2t)e^{-t}\,dt$.

On a

$$\begin{aligned} A(x) + B(x)\boldsymbol{i} &= \int^x t(\cos 2t + \boldsymbol{i}\sin 2t)e^{-t}\,dt = \int^x t\,e^{2\boldsymbol{i}t}e^{-t}\,dt \\ &= \int^x t\,e^{(-1+2\boldsymbol{i})t}\,dt \end{aligned}$$

Posons $\alpha = -1 + 2\boldsymbol{i}$ et cherchons une primitive de la forme $F(x) = (ax+b)e^{\alpha x}$, où $a,b \in \mathbb{C}$. En dérivant cette fonction, on a

$$F'(x) = ae^{\alpha x} + \alpha(ax+b)e^{\alpha x} = \big((a+b\alpha) + a\alpha x\big)e^{\alpha x}$$

et comme $F'(x) = x\,e^{\alpha x}$, prenons $a$ et $b$ tels que

$$a\alpha = 1 \text{ et } a + b\alpha = 0$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{-1+2\boldsymbol{i}} = \frac{-1-2\boldsymbol{i}}{5} \\ b &= \frac{-a}{\alpha} = \frac{1+2\boldsymbol{i}}{5(-1+2\boldsymbol{i})} = \frac{(1+2\boldsymbol{i})(-1-2\boldsymbol{i})}{25} = \frac{3-4\boldsymbol{i}}{25} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(\frac{-1-2\boldsymbol{i}}{5}x + \frac{3-4\boldsymbol{i}}{25}\right)e^{(-1+2\boldsymbol{i})x} \\ &= \left(\frac{-1-2\boldsymbol{i}}{5}x + \frac{3-4\boldsymbol{i}}{25}\right)(\cos 2x + \boldsymbol{i}\sin 2x)e^{-x} \end{aligned}$$

Puisque $B(x)$ est la partie imaginaire de $F(x)$, on trouve ainsi :

$$\int^x t(\sin 2t)e^{-t}\,dt = \left(-\frac{2x}{5} - \frac{4}{25}\right)e^{-x}\cos 2x + \left(-\frac{x}{5} + \frac{3}{25}\right)e^{-x}\sin 2x$$

L'intégrale $\int^x t(\cos 2t)e^{-t}\,dt$ est la partie réelle de $F(x)$.

**7.9** **a)** On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$. Cela montre que $f$ est continue en 0. Puisque $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, $f$ est continue. La primitive $F$ est donc bien définie.

**b)** On a $F'(x) = f(x) \geqslant 0$, donc $F$ est croissante.

**c)** On sait que pour tout $x$, on a $\left|\sin x\right| \leqslant |x|$ (exemple page 6), donc $(\sin x)^2 \leqslant x^2$. D'autre part, on a $0 \leqslant (\sin x)^2 \leqslant 1$ pour tout $x$. Il s'ensuit

$$(1+x^2)(\sin x)^2 = (\sin x)^2 + x^2(\sin x)^2 \leqslant x^2 + x^2 = 2x^2\,.$$

Si $x \neq 0$, on peut diviser par $x^2(1+x^2) > 0$, et il vient $\dfrac{(\sin x)^2}{x^2} \leqslant \dfrac{2}{1+x^2}$. Si $x = 0$, l'encadrement demandé s'écrit $0 \leqslant f(0) \leqslant 2$, ce qui est vrai.

**d)** Soit $x > 0$. D'après **(c)**, on a $f(t) \leqslant \frac{2}{1+t^2}$ pour tout $t \in [0,x]$, donc

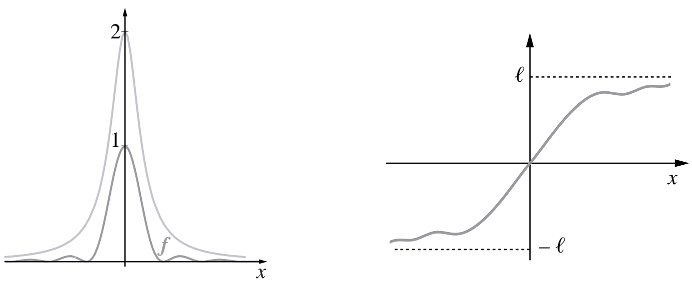
$$\int_0^x f(t)\,dt \leqslant \int_0^x \frac{2}{1+t^2}dt = 2 \text{ Arctan } x$$

Puisque Arctan $x \leqslant \pi/2$ pour tout $x$, on en déduit $F(x) \leqslant \pi$ pour tout $x \geqslant 0$. Ainsi $F$ est croissante et majorée sur $[0,+\infty[$, donc $F(x)$ a une limite finie quand $x$ tend vers $+\infty$ (théorème page 4).

Si l'on pose $\ell = \lim\limits_{x \to 0} F(x)$, alors la droite horizontale d'équation $y = \ell$ est asymptote à la courbe de $F$ en $+\infty$. Puisque $0 < F(x) \leqslant \pi$ pour tout $x > 0$, on a $0 < \ell \leqslant \pi$ (on peut montrer que $\ell = \pi/2$).

**e)** La fonction $f$ est paire et $F$ est la primitive de $f$ telle que $F(0) = 0$. D'après l'exercice **6.1** page 108, la fonction $F$ est impaire : sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine, donc la droite horizontale d'équation $y = -\ell$ est asymptote en $-\infty$.

La tangente à l'origine a pour pente $F'(0) = f(0) = 1$.




Courbe de $f$
et de $x \longmapsto \frac{2}{1+x^2}$

Courbe de $F$

**7.10 a)** Pour tout $t$, on a $-b \leqslant b\cos t \leqslant b$, donc $a + b\cos t \geqslant a - b > 0$. Par suite, la fonction $t \mapsto \frac{1}{a+b\ \cos\ t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc elle a des primitives sur $\mathbb{R}$.

**b)** La fonction $\varphi : t \mapsto \tan(t/2)$ est une bijection dérivable $[0,\pi[ \xrightarrow{\varphi} [0,+\infty[$ et $\varphi'(t) = (1/2)\big[1 + \big(\tan(t/2)\big)^2\big] \neq 0$ pour tout $t \in [0,\pi[$ : puisqu'on a supposé $[0,x] \subset [0,\pi[$, on peut faire le changement de variable $u = \tan(t/2)$ dans $F(x)$. En utilisant les formules $du = (1/2)(1+u^2)dt$ et $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, il vient

$$F(x) = \int_0^{\tan(x/2)} \frac{2du}{a(1+u^2)+b(1-u^2)} = 2\int_0^{\tan(x/2)} \frac{du}{p^2+q^2u^2}$$

**c)** On a $\displaystyle\int^X \frac{du}{p^2+q^2u^2} = \frac{1}{p^2}\int^X \frac{du}{1+\dfrac{q^2}{p^2}u^2} = \frac{1}{p^2}\,\frac{p}{q}\mathrm{Arctan}\left(\frac{q}{p}X\right)$,

d'où

$$\int^X \frac{du}{p^2+q^2u^2} = \frac{1}{pq}\mathrm{Arctan}\left(\frac{q}{p}X\right)$$

D'après **(b)**, on en déduit

$$F(x) = \frac{2}{pq}\mathrm{Arctan}\left(\frac{q}{p}\tan(x/2)\right) \text{ pour tout } x \text{ tel que } 0 < x < \pi.$$

Puisque $F$ est continue sur $\mathbb{R}$, on peut passer à la limite quand $x$ tend vers $\pi$ par valeurs inférieures :
on a $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}} \tan(x/2) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{v\to+\infty} \mathrm{Arctan}\, v = \pi/2$, donc $\displaystyle F(\pi) = \lim_{x\to\pi} F(x) = \frac{2}{pq}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{pq} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

CHAPITRE 8

# Courbe paramétrée

**OBJECTIFS**

Quand les coordonnées d'un point du plan sont fonctions d'une variable réelle, le lieu de ces points est en général une courbe : on dit que c'est une courbe paramétrée. Nous allons apprendre à représenter une courbe paramétrée. Dans cette étude, les développements limités jouent à nouveau un rôle primordial.

Dans ce chapitre, le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Sauf mention contraire, points et vecteurs ont leurs coordonnées dans ce repère.

## 8.1 NOTION DE COURBE PARAMÉTRÉE PLANE

**Définition.** Une *courbe paramétrée* (plane) est une fonction $f : D \to \mathbb{R}^2$, où $D$ est une partie de $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in D$, on a

$$f(t) = \big(x(t), y(t)\big),$$

où $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ sont des fonctions de $D$ dans $\mathbb{R}$. Les fonctions $x$ et $y$ sont les *fonctions coordonnées de* $f$.

Soit $f : D \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée, $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ ses fonctions coordonnées.

➤ L'ensemble $\mathcal{C}$ des points $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées $\big(x(t), y(t)\big)$ dans le repère $(0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ s'appelle la *courbe géométrique de* $f$ :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \mid \overrightarrow{OM} = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}, \ t \in D\}$$

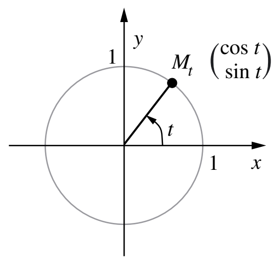
- Pour tout $t \in D$, on notera $M_t \in \mathcal{P}$ le point de coordonnées $\big(x(t), y(t)\big)$ ; le point $M_t$ s'appelle *le point de paramètre t* sur la courbe.
- *Dessiner* la courbe paramétrée, c'est représenter l'ensemble $\mathcal{C}$ dans le repère $(0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Dans de nombreuses applications, le paramètre $t$ représente le temps : on dit que $M_t$ est un *point mobile* ; la courbe géométrique est la *trajectoire* parcourue par ce point et $f$ est la *loi horaire* du point mobile.

**Exemple 1.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée définie par

$$f(t) = \big(\cos t, \sin t\big)$$

L'ensemble $\mathcal{C}$ des points $M_t$ de coordonnées $\big(\cos t, \sin t\big)$ est le cercle de centre 0 et de rayon 1 : c'est la courbe géométrique de $f$. Quand $t$ parcourt un intervalle de longueur $2\pi$, le point $M_t$ décrit le cercle exactement une fois, dans le sens trigonométrique. Quand $t$ parcourt $\mathbb{R}$, le cercle est parcouru une infinité de fois.




**Exemple 2.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée définie par

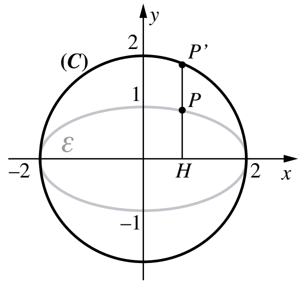
$$f(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (2\cos t, \sin t)$$

et soit $\mathcal{E}$ la courbe géométrique de $f$.
Pour tout $t$, on a $\left(\frac{x(t)}{2}\right)^2 + \big(y(t)\big)^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$, donc les coordonnées $\big(x(t), y(t)\big)$ satisfont l'équation

$$\frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1 \tag{1}$$

Réciproquement, si un point a des coordonnées $(a,b)$ vérifiant l'équation (1), alors on a $(a/2)^2 + b^2 = 1$, donc il existe $t \in [0,2\pi[$ tel que $a/2 = \cos t$ et $b = \sin t$ ; alors $a = x(t)$ et $b = y(t)$, donc le point de coordonnées $(a,b)$ est sur la courbe $\mathcal{E}$.
Ainsi la courbe $\mathcal{E}$ a pour équation (1).
La courbe $\mathcal{E}$ est une ellipse ayant pour axes $Ox$ et $Oy$ (figure ci-dessous) ; ses sommets sont les points de coordonnées $(\pm 2,0)$ et $(0,\pm 1)$.
En effet, pour tout point $P : (2\cos t, \sin t)$ de $\mathcal{E}$, considérons le projeté $H$ de $P$ sur l'axe des abscisses et le point $P' : (2\cos t, 2\sin t)$. L'ensemble des points $P'$ est le cercle $(C)$ de rayon 2 centré à l'origine. Comme on a $\overrightarrow{HP} = (1/2)\overrightarrow{HP'}$, la courbe $\mathcal{E}$ se déduit du cercle $(C)$ par la transforma-

tion $P' \mapsto P$ qui est une affinité de rapport $1/2$. Quand $t$ parcourt un intervalle de longueur $2\pi$, le point $M_t$ de coordonnées $(2\cos t, \sin t)$ décrit l'ellipse une fois.




**Exemple 3.** Soit $u : D \to \mathbb{R}$ une fonction.
La courbe représentative de $u$ (ou graphe de $u$) est l'ensemble des points de coordonnées $\big(x, u(x)\big)$, où $x \in D$.

Soit $f : D \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée définie par $f(t) = \big(t, u(t)\big)$ : la courbe représentative de $u$ est aussi la courbe de $f$.

### Symétries

Supposons que l'ensemble de définition $D$ est une partie de $\mathbb{R}$ ayant pour centre de symétrie $0$.
Supposons de plus, par exemple, que la fonction $t \mapsto x(t)$ est paire et que la fonction $t \mapsto y(t)$ est impaire.
Pour tout $t \in D$, on a $\big(x(-t), y(-t)\big) = \big(x(t), -y(t)\big)$, donc le point $M_{-t}$ a pour coordonnées $\big(x(t), -y(t)\big)$. Le point $M_{-t}$ est donc symétrique de $M_t$ par rapport à $Ox$ : il suffit de dessiner la partie de la courbe correspondant à $t > 0$ et l'autre partie s'en déduit en faisant la symétrie par rapport à $Ox$.

De même, si $t \mapsto x(t)$ est impaire et $t \mapsto y(t)$ est paire, les points $M_{-t}$ et $M_t$ sont symétriques par rapport à $Oy$ : il suffit de dessiner la partie de la courbe correspondant à $t > 0$ et l'autre partie s'en déduit en faisant la symétrie par rapport à $Oy$.

| Symétries | $t \mapsto x(t)$ paire<br>$t \mapsto y(t)$ impaire | $t \mapsto x(t)$ impaire<br>$t \mapsto y(t)$ paire | $t \mapsto x(t)$ impaire<br>$t \mapsto y(t)$ impaire |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à | $Ox$ | $Oy$ | $O$ |

## 8.2 VECTEUR DÉRIVÉ, TANGENTE

Soit $f : D \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ ses fonctions coordonnées.

**Définition.** Soit $t_0 \in D$. Si les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont dérivables en $t_0$, on dit que $f$ *est dérivable en* $t_0$. Le vecteur $\big(x'(t_0), y'(t_0)\big)$ s'appelle le *vecteur dérivé* de $f$ en $t_0$ et se note $f'(t_0)$.

Si l'on pense que $t$ représente le temps, le vecteur $f'(t_0)$ est le vecteur vitesse du point mobile $M_t$ à l'instant $t_0$.

### 8.2.1 Sens de variation

Supposons que $f$ est dérivable sur $D$ (c'est-à-dire en tout $t_0 \in D$).
Si $x'(t)$ et $y'(t)$ gardent un signe constant sur un intervalle $J \subset D$, alors on connaît le sens de variation des coordonnées du point $M_t$. On sait alors quelle direction prend globalement la courbe quand $t \in J$.
Le tableau ci-dessous résume les différentes possibilités :

| $x'(t) > 0$ <br> $y'(t) > 0$ | $x'(t) > 0$ <br> $y'(t) < 0$ | $x'(t) < 0$ <br> $y'(t) > 0$ | $x'(t) < 0$ <br> $y'(t) < 0$ |
|---|---|---|---|
| $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nwarrow$ | $\swarrow$ |

**Exemple.** Prenons la courbe paramétrée $f$ dont les fonctions coordonnées sont

$$x(t) = t + \frac{1}{t} \quad , \quad y(t) = t + \frac{4}{t+1}.$$

L'ensemble de définition de $t \mapsto x(t)$ est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, celui de $t \mapsto y(t)$ est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, donc l'ensemble de définition de $f$ est $D = \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$. Pour tout $t \in D$, on a

$$x'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{(t-1)(t+1)}{t^2}$$
$$y'(t) = 1 - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t+1)^2 - 4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)(t+3)}{(t+1)^2}$$

Ainsi

• $t \mapsto x(t)$ est croissante sur $]-\infty,-1[$, décroissante sur $]-1,0[$ et $]0,1[$, et croissante sur $]1,+\infty[$.

• $t \mapsto y(t)$ est croissante sur $]-\infty,-3[$, décroissante sur $]-3,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,1[$, et croissante sur $]1,+\infty[$.

Calculons les limites de $x(t)$ et de $y(t)$ aux bornes des intervalles de définition :

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = -\infty \\ \lim\limits_{t \to -\infty} y(t) = -\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{t \to -1 \\ t < -1}} x(t) = -2 \\ \lim\limits_{\substack{t \to -1 \\ t < -1}} y(t) = -\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} x(t) = -2 \\ \lim\limits_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} y(t) = +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} x(t) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} y(t) = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} x(t) = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} y(t) = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = +\infty \\ \lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = +\infty \end{cases}$$

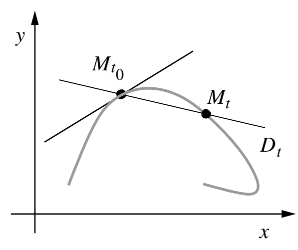
Regroupons en un tableau tous ces renseignements : c'est le *tableau de variation* de la courbe.

| $t$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | | $+$ | | $+$ | $\|$ | $-$ | $\|$ | $-$ | | $+$ | |
| $y'(t)$ | | $+$ | | $-$ | $\|$ | $-$ | $\|$ | $-$ | | $+$ | |
| $x(t)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\frac{10}{3}$ | $\nearrow$ | $-2 \;\|\; -2$ | $\searrow$ | $-\infty \;\|\; +\infty$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y(t)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-5$ | $\searrow$ | $-\infty \;\|\; +\infty$ | $\searrow$ | $4 \;\|\; 4$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

### 8.2.2 Tangente

Nous allons voir que le vecteur dérivé en un point de la courbe permet souvent de connaître précisément la direction de la courbe en ce point.
Soit $M_{t_0}$ le point de paramètre $t_0$ sur la courbe. Pour tout point $M_t$ différent de $M_{t_0}$, considérons la droite $D_t$ passant par $M_{t_0}$ et $M_t$.

Intuitivement, si la droite $D_t$ a une position limite quand $M_t$ tend vers $M_{t_0}$, alors cette position limite est une droite tangente en $M_{t_0}$ à la courbe.




Puisque $M_t \neq M_{t_0}$, on a $t \neq t_0$. Le vecteur $\frac{1}{t-t_0}\overrightarrow{M_{t_0}M_t}$ est un vecteur directeur de la droite $D_t$. Ses coordonnées sont

$$\frac{1}{t-t_0}\overrightarrow{M_{t_0}M_t} : \begin{bmatrix} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} \\ \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} \end{bmatrix}$$

Quand $t$ tend vers $t_0$, ce vecteur tend vers le vecteur dérivé $f'(t_0) = \big(x'(t_0), y'(t_0)\big)$. Le vecteur $f'(t_0)$, s'il n'est pas nul, est donc un vecteur directeur de la tangente en $M_{t_0}$.

**Définition.** Supposons que la courbe paramétrée $f$ est dérivable en $t_0$ et que le vecteur dérivé $f'(t_0)$ n'est pas nul. La *tangente à la courbe au point* $M_{t_0}$ est la droite passant par $M_{t_0}$ et dirigée par le vecteur $f'(t_0)$.

**Équation de la tangente.** La tangente en $M_{t_0}$ est formée des points $P$ tels que $\overrightarrow{M_{t_0}P}$ est colinéaire au vecteur dérivé $\big(x'(t_0), y'(t_0)\big)$. En notant $(x, y)$ les coordonnées de $P$, les coordonnées de $\overrightarrow{M_{t_0}P}$ sont $\big(x-x(t_0), y-y(t_0)\big)$. On sait que deux vecteurs du plan sont colinéaires si et seulement si le déterminant de leurs coordonnées est nul. L'équation de la tangente en $M_{t_0}$ à la courbe est donc

$$\begin{vmatrix} x-x(t_0) & x'(t_0) \\ y-y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire $\boxed{\big(x - x(t_0)\big)y'(t_0) - \big(y - y(t_0)\big)x'(t_0) = 0.}$

**Exemples**

**1)** Considérons le cercle défini par la courbe paramétrée $f(t) = (\cos t, \sin t)$ (exemple **1** page 150).

Le vecteur dérivé en $t$ est $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$. Puisque $(\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1$, le vecteur $f'(t)$ n'est pas nul. Le produit scalaire des vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ est

$$(\cos t)(-\sin t) + (\sin t)[\cos t) = 0\,,$$

donc le vecteur $f'(t)$ est orthogonal à $f(t)$.

Puisque $f(t) = \overrightarrow{OM_t}$, on retrouve ainsi qu'en tout point d'un cercle, la tangente est perpendiculaire au rayon.

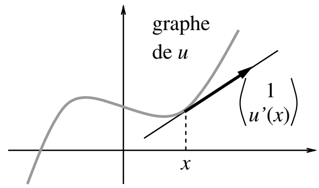
**2)** Considérons l'ellipse $\mathcal{E}$ définie par la courbe paramétrée $f(t) = (2\cos t, \sin t)$ (exemple **2**, page 150). En tout point $M_{t_0} \in \mathcal{E}$, le vecteur dérivé est $f'(t_0) = (-2\sin t_0, \cos t_0)$ ; ce vecteur n'est pas nul. La tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$ au point $M_{t_0}$ est donc la droite d'équation

$$\begin{vmatrix} x-2\cos t_0 & -2\sin t_0 \\ y-\sin t_0 & \cos t_0 \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire $(x - 2\cos t_0)\cos t_0 + (y - \sin t_0)2\sin t_0 = 0$.

**3)** Soit $u : D \to \mathbb{R}$ une fonction.

La courbe représentative de $u$ est aussi la courbe de $f : D \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = \big(t, u(t)\big)$. On a $f'(t) = \big(1, u'(t)\big)$, un vecteur qui est toujours non nul. Le vecteur $f'(t)$ est donc un vecteur directeur de la tangente en $M_t$. La pente de ce vecteur est $u'(t)/1 = u'(t)$ et l'on retouve bien qu'au point d'abscisse $t$, la pente de la tangente est $u'(t)$.



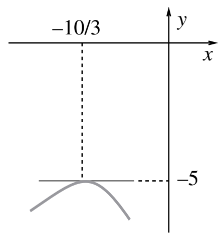

### Tangente horizontale ou verticale

Un vecteur $\vec{v}$ : $(a,b)$ est parallèle à $Ox$ si et seulement si $b = 0$ ; $\vec{v}$ est parallèle à $Oy$ si et seulement si $a = 0$. On en déduit :

- Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$, alors la tangente en $M_{t_0}$ est horizontale.
- Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$, alors la tangente en $M_{t_0}$ est verticale.

**Exemple.** Reprenons la courbe de l'exemple page 152.

On a $\big(x'(-3), y'(-3)\big) = (8/9, 0)$ : la tangente à la courbe au point $M_{-3}$ : $(-10/3, -5)$ est donc horizontale. Le tableau de variation montre que la fonction $t \mapsto y(t)$ a un maximum local en $-3$.




Il peut exister des points de la courbe où le vecteur dérivé est nul : en un tel point, l'étude précédente n'apporte pas de renseignement. Cette siuation sera examinée au paragraphe suivant.

## 8.3 ÉTUDE EN UN POINT SINGULIER

Soit $f : D \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et soit $t_0 \in D$.

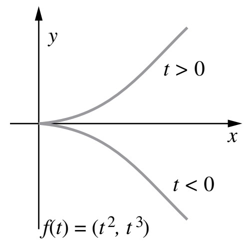
**Définition.** Si $f'(t_0) = 0$, on dit que le point $M_{t_0}$ est un *point singulier* de la courbe paramétrée $f$.

**Exemple 1.** Prenons la courbe paramétrée $f$ définie par

$$f(t) = (t^2, t^3)$$

On a $f'(t) = (2t, 3t^2)$, donc $f'(0) = (0,0)$ : l'origine $M_0 = O$ est un point singulier.
Posons $x(t) = t^2$ et $y(t) = t^3$. Pour $t \geqslant 0$, on a $t = \sqrt{x(t)}$ et $y(t) = t^3 = \big(x(t)\big)^{3/2}$ : le point $M_t$ appartient donc au graphe de la fonction $x \mapsto x^{3/2}$ , $x \geqslant 0$. Réciproquement, si les coordonnées $(a,b)$ d'un point $P$

satisfont les conditions $a \geqslant 0$ et $b = a^{3/2}$, alors en posant $t = \sqrt{a}$, il vient $(a,b) = (t^2,t^3)$, donc $P = M_t$.
La partie de la courbe correspondant à $t \geqslant 0$ est donc le graphe de la fonction puissance $x \mapsto x^{3/2}$, $x \geqslant 0$.
Puisque $t \mapsto x(t)$ est paire et $t \mapsto y(t)$ impaire, la courbe est symétrique par rapport à $Ox$ (page 151). Voici le dessin de la courbe :




On dit que le point $O$ est un *point de rebroussement*.
Les deux branches de la courbe sont de part et d'autre de la tangente en $O$.

Quand $t$ parcourt $\mathbb{R}$, le point $M_t$ parcourt la courbe de bas en haut : en effet, $t \mapsto x(t)$ est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$, et $t \mapsto y(t)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

**Exemple 2.** Prenons la courbe paramétrée $f$ définie par

$$f(t) = \big(x(t),y(t)\big) = (t^2,t^4+t^5)$$

On a $f'(t) = (2t,4t^3+5t^4)$, donc $f'(0) = (0,0)$ : l'origine $M_0 = O$ est un point singulier. On a

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = t^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (t^4+t^5) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = t^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t^4(1+t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

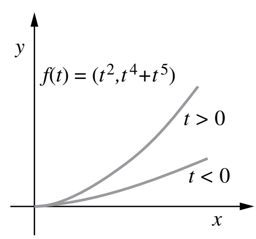
ce qui se traduit par l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OM_t} = t^2\,\overrightarrow{i} + t^4(1+t)\,\overrightarrow{j}$$

Pour tout $t \neq 0$, le vecteur $\frac{1}{t^2}\overrightarrow{OM_t} = \overrightarrow{i} + t^2(1+t)\,\overrightarrow{j}$ est un vecteur directeur de la droite $(OM_t)$. Quand $t$ tend vers $0$, ce vecteur tend vers $\overrightarrow{i}$, donc la courbe est tangente à l'axe $Ox$ au point $O$.

- Puisqu'on a $x(t) \geqslant 0$ quel que soit $t$, la courbe est située dans le demi-plan $x \geqslant 0$.
- Pour tout $t \neq 0$ assez proche de $0$, on a $1+t > 0$, donc $y(t) \geqslant 0$ : cela veut dire qu'au voisinage de l'origine, la courbe est située dans le demi-plan $y \geqslant 0$.

Voici le dessin de la courbe au voisinage de $O$ :
Le point $O$ est un point de rebroussement.
Au voisinage de $O$, les deux branches de la courbe sont du même coté de la tangente.



### Méthode générale pour étudier un point singulier

Supposons que $M_{t_0}$ est un point singulier. Puisque le vecteur dérivé en ce point ne donne pas de renseignement, faisons un développement limité en $t_0$ des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$, c'est-à-dire un développement de $x(t_0{+}u)$ et de $y(t_0{+}u)$ en $u = 0$.
Le coefficient de $u$ dans chacun de ces développements est égal à $0$, car $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ par hypothèse.

**Premier cas.** Supposons par exemple

$$
\begin{aligned}
x(t_0{+}u) &= x(t_0) + a_1\, u^2 + b_1\, u^3 + o_1(u^3)\\
y(t_0{+}u) &= y(t_0) + a_2\, u^2 + b_2\, u^3 + o_2(u^3)
\end{aligned}
$$

où $o_1(u^3)$ et $o_2(u^3)$ désignent comme d'habitude des fonctions négligeables devant $u^3$ quand $u$ tend vers 0 (page 45). On a

$$
\begin{bmatrix} x(t_0{+}u) - x(t_0) \\ y(t_0{+}u) - y(t_0) \end{bmatrix} = u^2 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + u^3 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o_1(u^3) \\ o_2(u^3) \end{bmatrix}
$$

ou encore

$$
\overrightarrow{M_{t_0} M_{t_0+u}} = u^2\, \overrightarrow{e_1} + u^3\, \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{o(u^3)}
$$

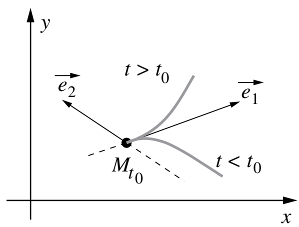
où l'on a posé $\quad \overrightarrow{e_1} = a_1 \overrightarrow{i} + a_2 \overrightarrow{j}\,,\ \overrightarrow{e_2} = b_1 \overrightarrow{i} + b_2 \overrightarrow{j}\,,$

et où $\overrightarrow{o(u^3)}$ désigne une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées sont toutes deux négligeables devant $u^3$ quand $u$ tend vers $0$.
Supposons de plus que les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont indépendants.
Quand $u$ tend vers $0$, le vecteur $\frac{1}{u^2}\overrightarrow{M_{t_0} M_{t_0+u}} = \overrightarrow{e_1} + u\,\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{o(u)}$ tend vers $\overrightarrow{e_1} \neq \overrightarrow{0}$. En utilisant la proposition page 83 on en déduit que pour tout $u \neq 0$ assez proche de 0, $\frac{1}{u^2}\overrightarrow{M_{t_0} M_{t_0+u}}$ est non nul : ce vecteur est donc un vecteur directeur de la droite $(M_{t_0} M_{t_0+u})$.
Par conséquent, la tangente à la courbe au point $M_{t_0}$ est la droite passant par $M_{t_0}$ et dirigée par $\overrightarrow{e_1}$.
Pour voir comment se comportent les points $M_t$ quand $t$ est assez proche de $t_0$, considérons le repère $(M_{t_0};\ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ (d'origine $M_{t_0}$).
Les coordonnées de $M_{t_0+u}$ dans ce repère sont $\big(u^2{+}o(u^3), u^3{+}o(u^3)\big)$.

Pour tout $u \neq 0$ assez proche de 0, $u^2+o(u^3)$ a le signe de $u^2$ (proposition page 84), donc est positif ; de même, pour tout $u$ assez proche de 0, $u^3+o(u^3)$ a le signe de $u^3$, c'est-à-dire le signe de $u$.
On en déduit (figure ci-dessous) que pour tout $t$ assez proche de $t_0$ :

- les points $M_t$ sont dans le demi-plan limité par l'axe $(M_{t_0}; \overrightarrow{e_2})$ et dans lequel pointe $\overrightarrow{e_1}$ ;
- si $t > t_0$, alors $M_t$ est dans le quart de plan limité par les demi-droites $(M_{t_0}; \overrightarrow{e_1})$ et $(M_{t_0}; \overrightarrow{e_2})$ ;
- si $t < t_0$, alors $M_t$ est dans le quart de plan limité par les demi-droites $(M_{t_0}; \overrightarrow{e_1})$ et $(M_{t_0}; \overrightarrow{-e_2})$.

Pour $t$ assez proche de $t_0$, La courbe a la même allure que dans l'exemple **1**.




**Deuxième cas.** Supposons par exemple

$$x(t_0+u) = x(t_0) + a_1\, u^2 + b_1\, u^4 + o_1(u^4)$$
$$y(t_0+u) = y(t_0) + a_2\, u^2 + b_2\, u^4 + o_2(u^4)$$

On a comme ci-dessus

$$\begin{bmatrix} x(t_0+u) - x(t_0) \\ y(t_0+u) - y(t_0) \end{bmatrix} = u^2 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + u^4 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o_1(u^4) \\ o_2(u^4) \end{bmatrix}$$

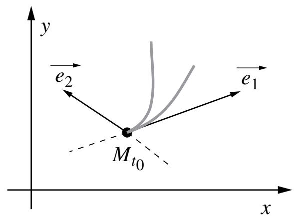
$$\overrightarrow{M_{t_0}M_{t_0+u}} = u^2\, \overrightarrow{e_1} + u^4\, \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{o(u^4)}$$

où $\overrightarrow{e_1} = a_1 \overrightarrow{i} + a_2 \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{e_2} = b_1 \overrightarrow{i} + b_2 \overrightarrow{j}$ .

Supposons que les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont indépendants.
En raisonnant comme dans le premier cas, on montre que la courbe est tangente en $M_{t_0}$ à la droite dirigée par $\overrightarrow{e_1}$ .

Dans le repère $(M_{t_0}; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les coordonnées du point $M_{t_0+u}$ sont $\big(u^2+o(u^4), u^4+o(u^4)\big)$. On sait que, pour tout $u \neq 0$ assez proche de 0, $u^2+o(u^4)$ et $u^4+o(u^4)$ sont positifs (page 84).

On en déduit que pour tout $t$ assez proche de $t_0$, les points $M_t$ sont dans le quart de plan limité par les demi-droites $(M_{t_0};\ \overrightarrow{e_1})$ et $(M_{t_0};\ \overrightarrow{e_2})$.
Pour $t$ assez proche de $t_0$, la courbe a la même allure que dans l'exemple **2**.




**Cas général.** On fait si possible un développement limité en $t_0$ de $x(t)$ et de $y(t)$ à un ordre suffisant pour pouvoir écrire un développement limité vectoriel de la forme

$$\overrightarrow{M_{t_0}M_{t_0+u}} = \left(u^p + o(u^p)\right)\overrightarrow{e_1} + u^q\,\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{o(u^q)}$$

où $q > p \geqslant 2$ et où les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont indépendants.
En raisonnant comme dans les cas particuliers précédents, on montre que la courbe est tangente en $M_{t_0}$ à la droite dirigée par $\overrightarrow{e_1}$.
Pour $t$ assez proche de $t_0$, la position de $M_{t_0+u}$ par rapport aux demi-droites $(M_{t_0};\ \overrightarrow{e_1})$ et $(M_{t_0};\ \overrightarrow{e_2})$ dépend du signe de $u$ et de la parité de $p$ et $q$.

**Exemple 3.** Etudions l'allure locale en $t = 0$ de la courbe paramétrée

$$x(t) = 1 + t^3 + 2t^4 \quad , \quad y(t) = -t^3 + t^5$$

Les coordonnées de $M_0$ sont $(1,0)$. On écrit

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t^3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t^4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o_1(t^4) \\ o_2(t^4) \end{bmatrix}$$

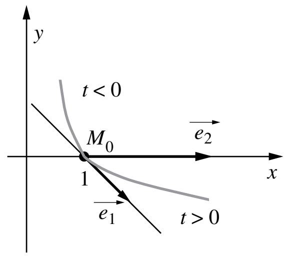
$$\overrightarrow{M_0M_t} = t^3\overrightarrow{e_1} + t^4\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{o(t^4)}$$

où $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{e_2} = 2\,\overrightarrow{i}$. Ces vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont indépendants.

- La courbe est tangente en $M_0$ à la droite dirigée par $\overrightarrow{e_1}$.
- Pour tout $t > 0$ assez petit, $t^3 + o(t^4)$ et $t^4 + o(t^4)$ sont positifs, donc $M_t$ est dans le quart de plan limité par les demi-droites $(M_0;\ \overrightarrow{e_1})$ et $(M_0;\ \overrightarrow{e_2})$.

• Pour tout $t < 0$ assez petit, on a $t^3 + o(t^4) < 0$ et $t^4 + o(t^4) > 0$, donc $M_t$ est dans le quart de plan limité par les demi-droites $(M_0; \overrightarrow{-e_1})$ et $(M_0; \overrightarrow{e_2})$.

Voici l'allure de la courbe en $t = 0$ : le point $M_0$ est singulier, mais ce n'est pas un point de rebroussement.




**Exemple 4.** Poursuivons l'étude de la courbe paramétrée

$$x(t) = t + \frac{1}{t}\ ,\ y(t) = 1 + \frac{4}{t+1} \text{ (exemple page 152).}$$

On a $x'(1) = y'(1) = 0$, donc le point $M_1 : (2,3)$ est un point singulier.

En posant $t = 1+u$, il vient

$$x(1+u) = 1+u + \frac{1}{1+u} \quad , \quad y(1+u) = 1+u + \frac{4}{2+u}$$

et les développements limités

$$\begin{aligned} x(1+u) &= 1 + u + \left(1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)\right) \\ &= 2 + u^2 - u^3 + o(u^3) \\ y(1+u) &= 1 + u + 2\frac{1}{1+\frac{u}{2}} \\ &= 1 + u + 2\left(1 - \frac{u}{2} + \left(\frac{u}{2}\right)^2 - \left(d\frac{u}{2}\right)^3 + o(u^3)\right) \\ &= 3 + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{4}u^3 + o(u^3) \end{aligned}$$

Ecrivons ces développements limités sous la forme vectorielle :

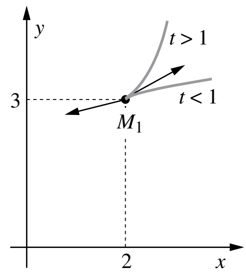
$$\begin{bmatrix} x(1+u) - 2 \\ y(1+u) - 3 \end{bmatrix} = u^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} + u^3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o_1(u^3) \\ o_2(u^3) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_1 M_{1+u}} = u^2\, \overrightarrow{e_1} + u^3\, \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{o(u^3)}$$

où l'on a posé

$$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{i} - \frac{1}{4}\overrightarrow{j}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont indépendants. Comme dans le premier cas page 157, on en déduit l'allure de la courbe au voisinage du point $M_1$ : c'est un point de rebroussement et la tangente est dirigée par $\overrightarrow{e_1}$.




On vérifie que cette allure est compatible avec les variations de $M_t$ pour $t$ proche de 1 (tableau page 153).

## 8.4 ASYMPTOTES

Soit $f : D \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $x(t), y(t)$ ses coordonnées. Désignons par $\alpha$ un élément de $D$, ou bien une borne (éventuellement infinie) de l'un des intervalles inclus dans $D$.

On dit que la courbe a une *branche infinie quand t tend vers* $\alpha$ si l'une au moins des coordonnées $x(t)$ ou $y(t)$ tend vers l'infini quant $t$ tend vers $\alpha$.

Dans ce cas, formons le rapport $\dfrac{y(t)}{x(t)}$, pente de la droite $(OM_t)$.

➤ Si $\lim\limits_{t\to\alpha} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, alors quand $t$ tend vers $\alpha$, la courbe prend globalement la direction de l'axe des ordonnées.

➤ Si $\lim\limits_{t\to\alpha} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a$ et $a \in \mathbb{R}$, alors quand $t$ tend vers $\alpha$, la courbe prend globalement une direction de pente $a$.

### Asympote horizontale ou verticale

**Définition**

➤ Si $\lim\limits_{t\to\alpha} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to\alpha} y(t) = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = \ell$ est une *asymptote horizontale* à la courbe $f$.

➤ Si $\lim\limits_{t\to\alpha} x(t) = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$, et si $\lim\limits_{t\to\alpha} y(t) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = \ell$ est une *asymptote verticale* à la courbe $f$.

### Asympote oblique

**Définition.** Supposons que $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers l'infini quand $t$ tend vers $\alpha$. S'il existe des nombres $a \neq 0$ et $b$ tels que

$$\lim_{t\to\alpha}\big[y(t) - (ax(t) + b)\big] = 0\,,$$

alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une *asymptote oblique* à la courbe $f$.

Supposons que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe $f$ quand $t$ tend vers $\alpha$. Alors $\left(\frac{y(x)}{x(t)} - a\right)x(t) = y(t) - ax(t)$ tend vers $b$ quand $t$ tend vers $\alpha$ ; comme $x(t)$ tend vers l'infini, on en déduit $\lim\limits_{t\to\alpha}\left(\frac{y(x)}{x(t)} - a\right) = 0$, et par suite $a = \lim\limits_{t\to\alpha}\frac{y(x)}{x(t)}$.

D'où la méthode pour chercher une asymptote oblique :

**Recherche d'une asymptote oblique**

On considère les cas où $x(t)$ et $y(t)$ tendent tous deux vers l'infini, disons quand $t$ tend vers $\alpha$.

- On calcule la limite de $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ quand $t$ tend vers $\alpha$.
- Ensuite, si $\lim\limits_{t\to\alpha}\dfrac{y(t)}{x(t)} = a$, où $a \in \mathbb{R}$,

on cherche la limite de $y(t) - ax(t)$ quand $t$ tend vers $\alpha$ :

si $\lim\limits_{t\to\alpha}\big[y(t) - ax(t)\big] = b$ et $b \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $f$.

### Position de la courbe par rapport à une asymptote

La position de la courbe par rapport à l'asymptote d'équation $y = ax + b$ s'obtient en étudiant le signe de $y(t) - \big(ax(t) + b\big)$ :

si $y(t) - \big(ax(t) + b\big)$ est positive, le point $M_t$ est au dessus de l'asymptote ; sinon, il est en dessous.

En général, on se contente de chercher le signe pour $t$ assez proche de $\alpha$, au moyen d'un développement limité.

**Exemple.** Terminons l'étude de la courbe définie par

$$x(t) = t + \frac{1}{t}, \qquad y(t) = t + \frac{4}{t+1} \quad \text{(exemple page 152)}$$

**1)** Cherchons les asymptotes horizontales ou verticales.

- On a $\lim_{t\to -1} x(t) = -2$ et $\lim_{t\to -1} y(t) = \infty$ : la droite d'équation $x=-2$ est donc asymptote verticale.
- $\lim_{t\to 0} x(t) = \infty$ et $\lim_{t\to 0} y(t) = 4$ : la droite d'équation $y = 4$ est donc asymptote horizontale.

**2)** Cherchons les asymptotes obliques.

Quand $t$ tend vers $\pm\infty$, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $\pm\infty$. On a

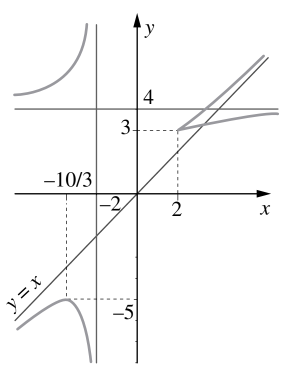
$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t(t+1)+4}{t+1}\,\frac{t}{t^2+1} = 1$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} \left[y(t)-1\cdot x(t)\right] = \lim_{t\to\pm\infty} \left(\frac{4}{t+1}-\frac{1}{t}\right) = 0$$

La droite d'équation $y = x$ est donc asymptote à la courbe quand $t$ tend vers $+\infty$ et quand $t$ tend vers $-\infty$.

On a $y(t) - x(t) = \frac{3t-1}{t(t+1)} > 0$ pour tout $t > 1/3$ et $y(t) - x(t) < 0$ pour tout $t < -1$ : la courbe est donc au dessus de l'asymptote en $+\infty$, et en dessous en $-\infty$.
Remarquons que pour $t = 1/3$, on a $y(t) = x(t)$ : la courbe coupe donc l'asymptote au point $M_{1/3}$ : $(10/3, 10/3)$.

**3)** Dessinons la courbe en tenant compte du tableau de variation (page 153) et des résultats obtenus dans l'exemple page 155 et dans l'exemple **4** page 160.



## 8.5 PLAN D'ÉTUDE D'UNE COURBE PARAMÉTRÉE PLANE

Pour étudier la courbe paramétrée $f : t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ :

- Chercher l'ensemble de définition $D$ de $f$ : il est formé des nombres qui appartiennent à la fois à l'ensemble de définition de $t \mapsto x(t)$ et de $t \mapsto y(t)$.
- Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ et dresser le tableau de variation de la courbe en y mentionnant les limites de $x(t)$ et de $y(t)$ aux bornes des intervalles constituant $D$.
- Chercher les points où la tangente est verticale ou horizontale, et les représenter sur un même dessin.
- Chercher les points singuliers en résolvant le système d'équations

$$\big(x'(t) = 0 \text{ et } y'(t) = 0\big)$$

Faire une étude en chaque point singulier (au moyen de développements limités) et représenter sur le dessin l'allure de la courbe au voisinage de chacun de ces points.

- Chercher les asymptotes et la position de la courbe par rapport à celles-ci ; ajouter ces asymptotes au dessin précédent.
- Dessiner la courbe en suivant le point $M_t$ quand $t$ parcourt chacun des intervalles constituant $D$. On peut s'aider de quelques points remarquables (comme les intersections avec les axes) et des tangentes en ces points.

### CONSEILS

➤ Si la courbe a des symétries ou si les fonctions coordonnées ont une même période, réduisez l'intervalle d'étude.

➤ Faites les calculs méthodiquement et disposez clairement les résultats.

➤ Dès que vous avez le tableau de variation, commencez le dessin : points à tangente horizontale ou verticale, asymptotes horizontales ou verticales ; dessinez de petits morceaux de courbe pour visualiser la position par rapport à la tangente ou l'asymptote.

➤ Pour le dessin final, vous raccorderez tous ces petits morceaux de courbe en tenant compte du sens de variation.

➤ Toutes vos informations doivent être compatibles !

➤ Si vous constatez une impossibilité graphique, vérifiez votre tableau ; n'avez-vous pas oublié une valeur interdite pour $t$ ?

## 8.6 UN EXEMPLE DE COURBE PARAMÉTRÉE DANS L'ESPACE

Repérons les points de l'espace par leurs coordonnées dans un repère orthonormé $(O;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par $f(t) = \big(\cos t, \sin t, t\big)$.

Quand $t$ parcourt $\mathbb{R}$, le point $M_t$ de coordonnées

$$x(t) = \cos t\ ,\ y(t) = \sin t\ ,\ z(t) = t$$

décrit une courbe paramétrée dans l'espace. Notons-la $\mathcal{E}$.

- Le projeté de $M_t$ sur le plan $xOy$ a pour coordonnées $(\cos t, \sin t)$ dans ce plan, donc il décrit le cercle $(C)$ de rayon 1 centré à l'origine :

  la projection de la courbe sur le plan
  $xOy$ est le cercle trigonométrique $(C)$.

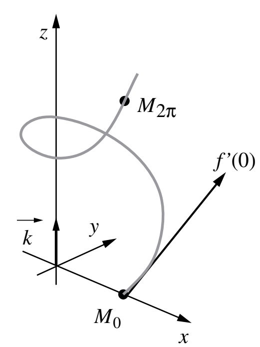
  Cela veut dire que la courbe $\mathcal{E}$ est tracée sur le cylindre d'axe $Oz$ et de base $(C)$.

- Le vecteur dérivé en $t$ est $f'(t) = \big(-\sin t,\ \cos t, 1\big)$. On a $f'(t) \neq 0$, et en raisonnant comme pour une courbe plane, on en déduit qu'au point $M_t$, la courbe a une tangente de vecteur directeur $f'(t)$.

- Le produit scalaire $f'(t).\overrightarrow{k}$ est $(-\sin t) \times 0 + (\cos t) \times 0 + 1 \times 1 = 1$. L'angle des vecteurs $f'(t)$ et $\overrightarrow{k}$ a donc pour mesure $\theta$ tel que

$$1 = f'(t).\overrightarrow{k} = \|f'(t)\|\ \|\overrightarrow{k}\| \cos\theta$$

  Or $\|f'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et $\|\overrightarrow{k}\| = 1$, donc $\cos\theta = 1/\sqrt{2} = \cos(\pi/4)$. En tout point de la courbe $\mathcal{E}$, la tangente fait donc l'angle $\pi/4$ avec $Oz$.



• Pour tout $t \in \mathbb{R}$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M_t M_{t+2\pi}}$ sont

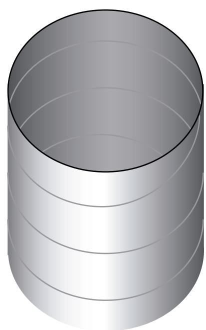
$\overrightarrow{M_t M_{t+2\pi}}$ :

$$\big(\cos (t+2\pi), \sin (t+2\pi), t+2\pi\big) - \big(\cos t, \sin t, t\big) = (0,0,2\pi)$$

donc $\overrightarrow{M_t M_{t+2\pi}} = 2\pi \overrightarrow{k}$ quel que soit $t$.

Les points $M_t$ et $M_{t+2\pi}$ sont ainsi sur une même génératrice (droite verticale) du cylindre, le point $M_{t+2\pi}$ est au dessus de $M_t$ et la distance entre $M_t$ et $M_{t+2\pi}$ est toujours $2\pi$. Entre ces deux points, la courbe $\mathcal{E}$ a fait un tour sur le cylindre.

On voit ainsi que la courbe $\mathcal{E}$ est une hélice circulaire d'axe $Oz$. La translation de vecteur $2\pi \overrightarrow{k}$ amène $\mathcal{E}$ sur elle-même.



## EXERCICES

**8.1** **a)** Étudier la courbe paramétrée définie par

$$x(t) = t + t^2 \quad , \quad y(t) = t^3 - 3t$$

En particulier, touver les points où la tangente est horizontale et les points où la tangente est verticale.

**b)** La courbe coupe l'axe $Ox$ en trois points : calculer les coordonnées de ces points. Quelle est l'équation de la tangente en chacun de ces points ?

**c)** Trouver tous les nombres $t$ et $t'$ tels que $t \neq t'$ et $M_t = M_{t'}$. En déduire que la courbe se recoupe elle-même en un unique point $A$ (on dit que $A$ est un *point double*). Quelles sont les coordonnées de $A$ et les pentes des tangentes en $A$ ?

**d)** Dessiner la courbe.

**8.2** Dessiner l'allure locale des courbes suivantes au voisinage du point dont on indique le paramètre.

**a)** $x(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3}$ , $y(t) = \cos t$ en $t = 0$.

**b)** $x(t) = \dfrac{t^2+1}{2t}$ , $y(t) = \dfrac{2t-1}{t^2}$ en $t = 1$.

**c)** $x(t) = 2t^4 - t^3 - t\ \ln(1+t^2)$ , $y(t) = t^2 \ln(1+2t)$ en $t = 0$.

**8.3** Étudier et dessiner les courbes paramétrées définies par :
**a)** $x(t) = 2\cos t - \cos(2t)$ , $y(t) = 2\sin t - \sin(2t)$
**b)** $x(t) = \dfrac{1}{t+1} + \dfrac{1}{t}$ , $y(t) = \dfrac{1}{t-1} + \dfrac{1}{t}$
(montrez que les points $M_t$ et $M_{-t}$ sont toujours symétriques par rapport à la droite $y = -x$.)
**c)** $x(t) = \dfrac{e^t}{t+1}$ , $y(t) = \dfrac{t\ e^t}{t+1}$

**8.4** On considère la courbe paramétrée définie dans le repère orthonormé $\left(O;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ par : $x(t) = \operatorname{ch} t,\ y(t) = \operatorname{sh} t$. (Les fonctions hyperboliques sont étudiées page 12.)
Notons $\mathcal{H}$ l'ensemble des points de la courbe.
**a)** Étudier la courbe et dessiner $\mathcal{H}$.
**b)** On pose $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right)$ et $\overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$.
**(i)** Montrer que $\left(O;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est un repère orthonormé.
**(ii)** Soit $P$ un point du plan, $(x, y)$ les coordonnées de $P$ dans le repère $\left(O;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et $(X, Y)$ les coordonnées de $P$ dans le repère $\left(O;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Montrer que l'on a $\sqrt{2}\,X = x - y$ et $\sqrt{2}\,Y = x + y$.
**c)** Montrer que dans le repère $\left(O;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, la courbe $\mathcal{H}$ a pour équation $XY = 1/2$ , $X > 0$. Comment s'appelle cette courbe ?

**8.5** On veut étudier la courbe $\mathcal{S}$ d'équation $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.
**a)** Montrer que pour tout point $M : (x, y)$ appartenant à $\mathcal{S} \setminus \{O\}$, il existe un unique nombre $t \in \mathbb{R}$ tel que $y = tx$. Calculer $x$ et $y$ en fonction de $t$.

**b)** On considère la courbe paramétrée définie par

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}\,,\; y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}\,.$$

Calculer $x(1/t)$ et $y(1/t)$ pour $t \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$. En déduire que la droite d'équation $y = x$ est un axe de symétrie de la courbe. Etudier la courbe.
**c)** Dessiner la courbe $\mathcal{S}$.

## SOLUTIONS

**8.1 a)** Le domaine de définition est $\mathbb{R}$. On a $x'(t) = 1+2t$ et $y'(t) = 3(t^2-1)$, d'où le tableau de variations de la courbe :

| $t$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $-1/2$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $y'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x(t)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1/4$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y(t)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $11/8$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Il n'y a pas de point singulier. La tangente est horizontale aux points $M_{-1} : (0,2)$ et $M_1 : (2,-2)$. La tangente est verticale au point $M_{-1/2} : (-1/4, 11/8)$.
**b)** Les points d'intersection de la courbe avec l'axe $Ox$ sont donnés par $y(t) = t(t^2-3) = 0$ : on trouve les points $M_0 : (0,0)$, $M_{\sqrt{3}}$ : $(3+\sqrt{3},0)$ et $M_{-\sqrt{3}} : (3-\sqrt{3},0)$.
– En $(0,0)$, le vecteur dérivé est $\big(x'(0), y'(0)\big) = (1,-3)$, donc la tangente a pour équation $y = -3x$.
– Au point $M_{\sqrt{3}}$, le vecteur dérivé est $(1+2\sqrt{3},6)$, donc la tangente a pour équation $\begin{vmatrix} x-(3+\sqrt{3}) & 1+2\sqrt{3} \\ y-0 & 6 \end{vmatrix} = 0$, c'est-à-dire

$$6x - (1+2\sqrt{3})y - 6(3+\sqrt{3}) = 0\,.$$

– De même, au point $M_{-\sqrt{3}}$, le vecteur dérivé est $(1-2\sqrt{3},6)$ et la tangente a pour équation $6x-(1-2\sqrt{3})y-6(3-\sqrt{3})=0$.

**c)** Soit $t$ et $t'$ tels que $t \neq t'$. On a

$$M_t = M_{t'} \Leftrightarrow \begin{cases} t+t^2 &= t'+t'^2 \\ t^3-3t &= t'^3-3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-t' &= t'^2-t^2 \\ 3(t-t') &= t^3-t'^3 \end{cases}$$

Puisque $t \neq t'$, on peut simplifier par $t'-t$ et il vient

$$M_t = M_{t'} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 &= t+t' \\ \ \ 3 &= t^2+tt'+t'^2 \end{cases}$$

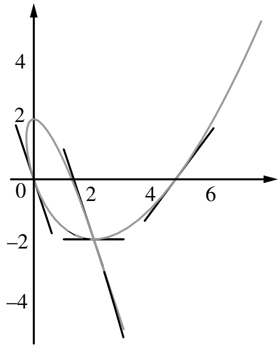
Puisque $t^2+t'^2=(t+t')^2-2tt'$, on obtient

$$M_t = M_{t'} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 &= t+t' \\ \ \ 3 &= (-1)^2-2tt'+tt' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+t' = -1 \\ \ \ tt' = -2 \end{cases}$$

On sait que si deux nombres ont pour somme $s$ et pour produit $p$, ce sont les racines du polynôme $X^2-sX+p$. Ainsi $t$ et $t'$ sont les racines de l'équation $X^2+X-2=0$, c'est-à-dire les nombres 1et $-2$. Les coordonnées du point double $A$ sont donc $\big(x(1),y(1)\big)=\big(x(-2),y(-2)\big)=(2,-2)$.

Au point $A$, il y a deux tangentes : l'une est dirigée par le vecteur $\big(x'(1),y'(1)\big)=(3,0)$ et a pour équation $y=-2$ ; l'autre tangente en $A$ est dirigée par le vecteur $\big(x'(-2),y'(-2)\big)=(-3,9)$ et a pour équation $y+2=-3(x-2)$.

**d)** La courbe n'a aucune asymptote. Voici le dessin :



**8.2** **a)** On a les développements limités en 0 :

$$x(t) = t^2 + o(t^4)$$
$$y(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$$
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} + t^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1/24 \end{bmatrix} + \overrightarrow{o(t^4)}$$

Le point $M_0 = (0,1)$ est un point de rebroussement ; la tangente est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{e_1} = (1,-1/2)$ et, au voisinage de $M_0$, les deux branches de la courbe sont dans le quart de plan limité par $(M_0, \overrightarrow{e_1})$ et $(M_0, \overrightarrow{e_2})$ (figure 1).

**b)** En posant $t = 1+u$, on a les développements limités :

$$x(1+u) = 1 + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}u^3 + o(u^3)$$
$$y(1+u) = 1 - u^2 + 2u^3 + o(u^3)$$
$$\begin{bmatrix} x(1+u) \\ y(1+u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + u^2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \end{bmatrix} + u^3 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 2 \end{bmatrix} + \overrightarrow{o(u^3)}$$

Au point $M_1 = (1,1)$, il y a un rebroussement ; la tangente est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{e_1} = (1/2,-1)$ et les deux branches de la courbe sont de part et d'autre de la tangente (figure 2).

**c)** On a les développements limités :

$$x(t) = -2t^3 + 2t^4 + \frac{1}{2}t^5 + o(t^5)$$
$$y(t) = 2t^3 - 2t^4 + \frac{8}{3}t^5 + o(t^5)$$
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = (t^3 - t^4) \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + t^5 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 8/3 \end{bmatrix} + \overrightarrow{o(t^5)}$$
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \left(t^3 + o(t^3)\right) \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + t^5 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 8/3 \end{bmatrix} + \overrightarrow{o(t^5)}$$

Au point $M_0 = (0,0)$, la tangente est dirigée par $\overrightarrow{e_1} = (-2,2)$. Pour $t$ assez proche de 0, les deux branches sont dans des quart de plan opposés en $M_0$ : il n'y a pas rebroussement (figure 3).

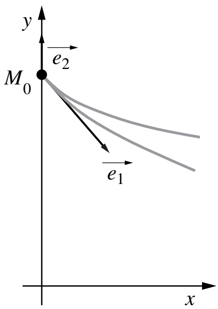



Figure 1

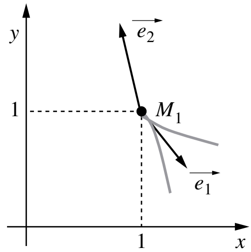



Figure 2

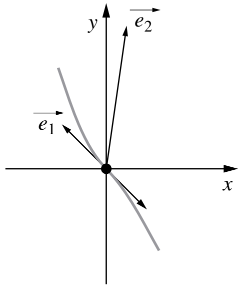



Figure 3

**8.3** **a)** Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont périodiques de période $2\pi$. On restreint donc l'étude à $[-\pi,\pi]$. Puisque $x(t)$ est paire et $y(t)$ impaire, étudions la courbe seulement sur $[0,\pi]$ ; on complètera le dessin en faisant la symétrie par rapport à $Ox$. Les dérivées de $x(t)$ et $y(t)$ sont

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2\sin t + 2\sin(2t) = 2(\sin t)(-1+2\cos t) \\ y'(t) &= 2\cos t - 2\cos(2t) = 2\cos t - 2\big(2(\cos t)^2 - 1\big) \\ &= 2\big(-2(\cos t)^2 + \cos t + 1\big) \end{aligned}$$

• Pour tout $t \in ]0,\pi[$, on a $\sin t > 0$ ; de plus,

$-1 + 2\cos t > 0$ si $0 \leqslant t < \pi/3$ et $-1 + 2\cos t < 0$ si $\pi/3 < t \leqslant \pi$.

• Les racines du polynôme $-2X^2 + X + 1$ sont $-1/2$ et $1$.
Si $0 < t < 2\pi/3$, alors $\cos t > -1/2$, donc $y'(t) > 0$.
Si $2\pi/3 < t \leqslant \pi$, alors $\cos t < -1/2$, donc $y'(t) < 0$.
On en déduit les signes de $x'(t)$ et de $y'(t)$, puis le tableau de variation :

| $t$ | $0$ | | $\pi/3$ | | $2\pi/3$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ |
| $y'(t)$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x(t)$ | $1$ | $\nearrow$ | $\frac{3}{2}$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | $-3$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | $\searrow$ | $0$ |

La courbe a une tangente verticale aux points $M_{\pi/3} : \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $M_\pi : (-3,0)$. Il y a une tangente horizontale au point $M_{2\pi/3} : \left(-\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.
Le point $M_0 : (1,0)$ est singulier.
Pour étudier ce point singulier, écrivons les développements limités 0 :
$x(t) = 1 + t^2 + o(t^2)$ et $y(t) = o(t^2)$ ;

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \overrightarrow{o(t^2)}$$

Au point $(1,0)$, la courbe est donc tangente à l'axe $Ox$.
La figure 1 ci-dessous montre la demi-courbe étudiée dans le tableau. La courbe entière est représentée figure 2 : il y a un rebroussement en $(1,0)$.

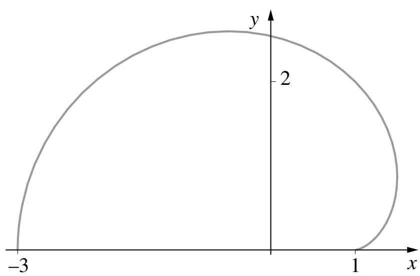



**Figure 1**

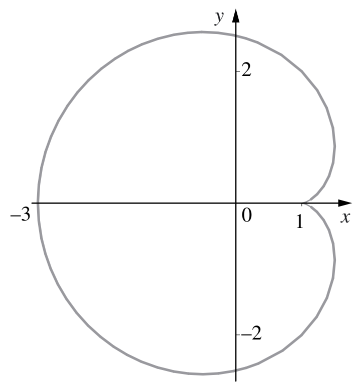



**Figure 2**

**b)** Le domaine de définition est $D = \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$. On a $x(-t) = -y(t)$ et $y(-t) = -x(t)$. Or le symétrique d'un point $M : (a,b)$ par rapport à la droite $y = -x$ est le point de coordonnées $(-b,-a)$. Cela montre que pour tout $t \in D$, les points $M_t$ et $M_{-t}$ sont symétriques par rapport à cette droite : il suffit d'étudier la courbe sur $[0,+\infty[$ et de compléter le dessin par symétrie.
Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont décroissantes sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$, d'où le tableau de variation :

| $t$ | $0$ | | $1/2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | $+\infty$ | ↘ | $\frac{8}{3}$ | ↘ | $\frac{3}{2}$ | ↘ | $0$ |
| $y(t)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ |

La droite d'équation $x = 3/2$ est asymptote verticale. Cherchons s'il y a une asymptote oblique quand $t$ tend vers 0 : on a $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{(2t-1)(t+1)}{2t+1)(t-1)}$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{x(t)} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0}\big[y(t) - x(t)\big] = \lim_{t\to 0} \frac{2}{t^2 - 1} = -2$$

donc la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote quand $t$ tend vers 0. La différence $y - (x - 2) = \frac{2t^2}{t^2-1}$ est négative pour $0 < t < 1$, donc quand $t$ parcourt $]0,1[$, le point $M_t$ est sous l'asymptote.
Quand $t$ tend vers $+\infty$, le point $M_t$ tend vers l'origine (l'origine est un « point limite »). On a $\lim\limits_{t\to +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1$ : quand $t$ tend vers $+\infty$, $M_t$ tend vers l'origine dans la direction de la droite $y = x$.
La figure 1 ci-dessous montre la demi-courbe étudiée dans le tableau. La courbe entière est représentée figure 2 :

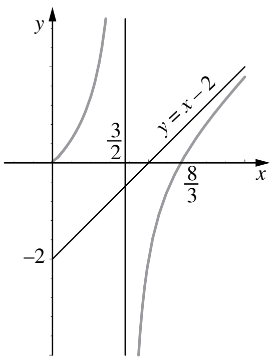



Figure 1

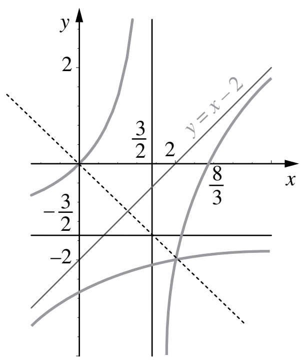



Figure 2

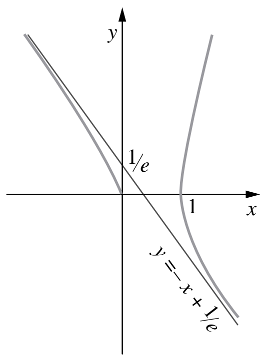
**c)** Le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a

$$x'(t) = \frac{t}{(t+1)^2}e^t \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{t^2+t+1}{(t+1)^2}e^t$$

donc $x'(t)$ a le signe de $t$. Puisque $t^2 + t + 1 > 0$ quel que soit $t$, $y'(t)$ est toujours positif. Voici le tableau de variation :

| $t$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $\frac{e}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{e}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

On a $\dfrac{y(t)}{x(t)} = t$. Quand $t$ tend vers $+\infty$, $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ tend vers $+\infty$, donc la courbe prend la direction $Oy$ sans qu'il y ait de droite asymptote.
On a $\lim\limits_{t\to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = -1$ et $\lim\limits_{t\to -1} \big[y(t) + x(t)\big] = \lim\limits_{t\to -1} e^t = 1/e$, donc la droite d'équation $y = -x + (1/e)$ est asymptote quand $t$ tend vers $-1$.
Quand $t$ tend vers $-\infty$, le point $M_t$ tend vers l'origine. Puisqu'on a $\lim\limits_{t\to -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = -\infty$ , le point $M_t$ tend vers l'origine dans la direction de l'axe $Oy$, quand $t$ tend vers $-\infty$.
Voici le dessin de la courbe :

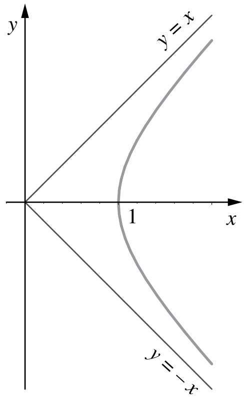



**8.4** **a)** La fonction ch est paire et la fonction sh est impaire. Étudions donc la courbe seulement sur $[0,+\infty[$ : on complètera le dessin en faisant la symétrie par rapport à $Ox$.
Les fonctions ch et sh sont croissantes sur $[0,+\infty[$. Le vecteur dérivé $\big(x'(t), y'(t)\big) = (\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)$ n'est jamais nul car $\operatorname{ch} t \geqslant 1$ quel que soit $t$, donc il n'y a pas de point singulier.
On a $\big(x'(0), y'(0)\big) = (0,1)$, donc la tangente au point $M_0 = (1,0)$ est verticale.
Quand $t$ tend vers $+\infty$, la courbe a une branche infinie. On a

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to +\infty} \operatorname{th} t = 1$$

$$\text{et } \lim_{t\to +\infty} \big[y(t) - x(t)\big] = \lim_{t\to +\infty} (-e^{-t}) = 0$$

donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe quand $t$ tend vers $+\infty$. La courbe est toute entière sous cette asymptote, car $y(t) - x(t) < 0$ quel que soit $t$. Voici le dessin de la courbe $\mathcal{H}$ :




**b) (i)** Les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ dans le repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ sont $\overrightarrow{u} : \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\overrightarrow{v} : \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux. De plus, par le théorème de Pythagore, on a

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ et de même } \|\overrightarrow{v}\|^2 = 1$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de norme 1.

**(ii)** On a par définition $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = X\overrightarrow{u} + Y\overrightarrow{v}$, d'où

$$\begin{aligned} x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} &= \frac{X}{\sqrt{2}}\overrightarrow{i} - \frac{X}{\sqrt{2}}\overrightarrow{j} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\overrightarrow{i} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\overrightarrow{j} \\ &= \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\right)\overrightarrow{i} + \left(-\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\right)\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

On en déduit $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$ et $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-X + Y)$ et les égalités demandées.

**c)** Dans le repère $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, les coordonnées d'un point $M_t \in \mathcal{H}$ sont

$$X(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(x(t) - y(t)\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}$$

$$Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(x(t) + y(t)\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{t}$$

Quel que soit $t$, on a donc $X(t) > 0$ et $X(t)Y(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\right) = \frac{1}{2}$.
Réciproquement, soit $X$ et $Y$ tels que $X > 0$ et $XY = 1/2$. Posons $t = -\ln(\sqrt{2}\,X)$. Alors on a $X = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{2}}$ et $Y = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\,e^t = \dfrac{e^t}{\sqrt{2}}$.
Les nombres $X$ et $Y$ sont donc les coordonnées de $M_t$ dans le repère $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Cela montre que dans le repère $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, la courbe $\mathcal{H}$ a pour équation ($XY = 1/2$ et $X > 0$).
Or la courbe d'équation $Y = \dfrac{1}{2X}$ est une hyperbole (ses asymptotes sont les axes $OX$ et $OY$ dirigés par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$). La courbe $\mathcal{H}$ est donc la branche de cette hyperbole contenue dans le quart de plan $X > 0, Y > 0$.

**8.5** **a)** Si $M : (x, y)$ est un point de $\mathcal{S}$, alors on a $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ et donc les équivalences : $x = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ et $y = 0) \Leftrightarrow M = O$.
Soit $M : (x, y)$ un point de $\mathcal{S}$ différent de $O$. D'après les équivalences ci-dessus, on a alors $x \neq 0$ et en posant $t = y/x$, il vient $y = tx$. L'unicité de $t$ est évidente.
En reportant la relation $y = tx$ dans l'équation de $\mathcal{S}$, on obtient

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - 3xy = 0 &\Longleftrightarrow x^3 + t^3x^3 - 3x(tx) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x^3(1 + t^3) - 3x^2t = 0 \\ &\Longleftrightarrow x(1 + t^3) - 3t = 0\,, \quad \text{car } x \neq 0. \end{aligned}$$

Remarquons que l'égalité ci-dessus implique $1 + t^3 \neq 0$, sinon on aurait $t = -1$ et aussi $3t = 0$, ce qui est impossible. On en déduit

$$x = \frac{3t}{1 + t^3} \quad \text{et} \quad y = \frac{3t^2}{1 + t^3}$$

**b)** Le domaine de définition est $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Pour tout $t \in D\backslash\{0\}$, on a

$$x(1/t) = \frac{3}{t}\,\frac{1}{1 + \frac{1}{t^3}} = \frac{3}{t}\,\frac{t^3}{1 + t^3} = y(t)$$

et donc aussi $y(1/t) = x(t)$. Ces égalités signifient que les points $M_t$ et $M_{1/t}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Comme le point $M_0 = (0,0)$ est son propre symétrique, la courbe a pour axe de symétrie la droite d'équation $y = x$.

Puisque $t \mapsto 1/t$ définit des bijections $]0,1] \to [1,+\infty[$ et $]-1,0[\to]-\infty,-1[$, il suffit d'étudier la courbe sur l'intervalle $]-1,1]$ et de compléter le dessin en faisant la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

On a $x'(t) = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$ et $y'(t) = \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$, d'où le tableau :

| $t$ | $-1$ | | $0$ | | $1/\sqrt[3]{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x(t)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $(\sqrt[3]{2})^2$ | $\searrow$ | $3/2$ |
| $y(t)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\sqrt[3]{2}$ | $\nearrow$ | $3/2$ |

Il y a une tangente verticale en $M_{1/\sqrt[3]{2}} = \left((\sqrt[3]{2})^2, \sqrt[3]{2}\right)$.

Au point $M_0 = (0,0)$, la tangente est horizontale.

La tangente en $M_1 = (3/2,3/2)$ est dirigée par le vecteur $\big(x'(1), y'(1)\big) = (-3/4, 3/4)$ : le point $M_1$ est sur l'axe de symétrie et la tangente en $M_1$ est orthogonale à cet axe.

Étudions la branche infinie quand $t$ tend vers $-1$ : on a

$$\frac{y(t)}{x(t)} = t \quad , \quad \lim_{t\to-1} \frac{y(t)}{x(t)} = -1$$

$$y(t) + x(t) = \frac{3t(t+1)}{t^3+1} = \frac{3t}{t^2-t+1}$$

$$\text{et } \lim_{t\to-1} \big[y(t) + x(t)\big] = -1$$

La droite d'équation $y = -x - 1$ est donc asymptote quand $t$ tend vers $-1$.

La figure 1 montre le morceau de courbe correspondant à $t \in ]-1,1]$. La courbe complète est représentée figure 2. L'axe de symétrie est en pointillé.

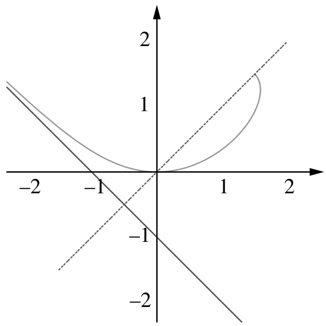



Figure 1

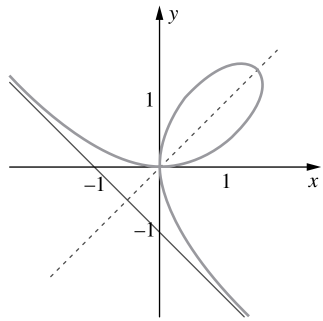



Figure 2

**c)** D'après **(a)**, on a l'égalité d'ensembles :

$$\mathcal{S} = \{M : (x, y)\ ;\ x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$$
$$= \left\{M_t : \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)\ ;\ t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}\right\}$$

La figure 2 représente donc la courbe $\mathcal{S}$.

CHAPITRE 9

# Équations différentielles

**OBJECTIFS**

Ce chapitre montre comment résoudre une équation différentielle du premier ordre $y' = a(x)y + b(x)$, une équation du second ordre à coefficients constants $y'' + py' + qy = 0$ et certaines équations $y'' + py' + qy = b(x)$ avec second membre. Toutes ces équations différentielles ont de nombreuses applications.

## 9.1 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y' = a(x)y$

Soit $I$ un intervalle et $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

**Définition.** Une *solution* de l'équation différentielle $y' = a(x)y$ est une fonction dérivable $s : I \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I$, $s'(x) = a(x)s(x)$.

Remarquons que la fonction nulle est solution.

**Propriétés des solutions.**

➤ Si $s$ *est une solution, alors pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, *la fonction* $\lambda s : x \mapsto \lambda s(x)$ *est solution.*

➤ *Si* $s_1$ *et* $s_2$ *sont solutions, alors la fonction* $s_1+s_2 : x \mapsto s_1(x)+s_2(x)$ *est solution.*

Ces propriétés signifient que les solutions de l'équation différentielle $y' = a(x)y$ forment un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les fonctions $I \to \mathbb{R}$.

L'équation $y' = a(x)y$ s'appelle une *équation différentielle linéaire du premier ordre*

**Démonstration.** Si $s$ est une solution de l'équation $y' = a(x)y$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(\lambda s)'(x) = \lambda s'(x) = \lambda a(x)s(x) = a(x)\big(\lambda s(x)\big) \text{ pour tout } x \in I,$$

donc la fonction $\lambda s$ est solution. Si $s_1$ et $s_2$ sont des solutions, alors

$$(s_1+s_2)'(x) = s_1'(x)+s_2'(x) = a(x)s_1(x)+a(x)s_2(x) = a(x)\big(s_1(x)+s_2(x)\big)$$

donc la fonction $s_1+s_2$ est solution. ❏

**Résolution de $y' = a(x)y$**

*Soit $A : I \to \mathbb{R}$ une primitive de la fonction $a$. Les solutions de l'équation $y' = a(x)y$ sont les fonctions $s : I \to \mathbb{R}$ définies par*

$$\boxed{s(x) = \lambda\, e^{A(x)}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}}$$

Notons $u : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $u(x) = e^{A(x)}$. D'après l'énoncé ci-dessus, toutes les solutions de l'équation $y' = a(x)y$ sont de la forme $\lambda u$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $u$ est donc une base de l'espace vectoriel des solutions.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = a(x)y$ est un espace vectoriel de dimension $1$.

**Démonstration.** La fonction $x \mapsto a(x)$ étant par hypothèse continue, elle a une primitive $A$ sur $I$. Soit $u : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $u(x) = e^{A(x)}$. La fonction $u$ est dérivable et puisque $A' = a$, on a $u'(x) = A'(x)e^{A(x)} = a(x)u(x)$ : la fonction $u$ est donc une solution.

Remarquons que toute fonction $s : I \to \mathbb{R}$ est de la forme $x \mapsto c(x)e^{A(x)}$ : en effet, il suffit de poser $c(x) = s(x)e^{-A(x)}$ pour tout $x \in I$. Si $s$ est dérivable, alors $c$ est le produit de deux fonctions dérivables, donc est dérivable

Soit $s$ une solution. Écrivons $s$ sous la forme $s(x) = c(x)e^{A(x)}$.
Alors d'après la règle pour dériver un produit, il vient :

$$s'(x) = c'(x)e^{A(x)} + c(x)\left(A'(x)e^{A(x)}\right) = c'(x)e^{A(x)} + c(x)a(x)e^{A(x)}$$

car $A'(x) = a(x)$. Puisque $c(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)s(x)$, on en déduit

$$0 = s'(x) - a(x)s(x) = c'(x)e^{A(x)}, \text{ pour tout } x \in I.$$

Comme $e^{A(x)}$ ne prend jamais la valeur 0 (car $e^t \neq 0$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$), il s'ensuit $c'(x) = 0$ pour tout $x \in I$. Puisque $I$ est un intervalle, on en déduit que la fonction $x \mapsto c(x)$ est constante : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, quel que soit $x \in I$, $c(x) = \lambda$. Par conséquent, $s(x) = \lambda e^{A(x)}$ pour tout $x \in I$. ❑

**Cas particulier : équation $y' = my$, où $m \in \mathbb{R}$.** Pour cette équation, la fonction $x \mapsto a(x)$ est constante : pour tout $x \in I$, $a(x) = m$. Une primitive de la fonction $a$ est $x \mapsto mx$, donc on retrouve les solutions $x \mapsto \lambda e^{mx}$.

**Exemple.** Résolvons l'équation différentielle $y' = \dfrac{xy}{1+x^2}$.

Il s'agit bien d'une équation différentielle linéaire puisqu'elle s'écrit $y' = a(x)y$, où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $a(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

- Calculons une primitive $A(x) = \displaystyle\int^x \frac{t}{1+t^2}\,dt$.

  En posant $h(t) = 1+t^2$, on a $h'(t) = 2t$, donc

$$A(x) = \int^x \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int^x \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int^x \frac{h'(t)}{h(t)}\,dt$$

$$A(x) = \frac{1}{2}\ln\left|h(x)\right| = \ln\sqrt{1+x^2}$$

- On a $e^{A(x)} = \sqrt{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc les solutions de l'équation sont les fonctions $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$s(x) = \lambda\sqrt{1+x^2}, \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

## 9.2 ÉQUATION $y' = a(x)y + b(x)$

Soit $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues.

**Définition.** Une solution de l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$ est une fonction $s : I \to \mathbb{R}$ telle que $s'(x) = a(x)s(x) + b(x)$ quel que soit $x \in I$.

- L'équation $y' = a(x)y + b(x)$ s'appelle une *équation différentielle linéaire avec second membre* $b(x)$.
- L'équation $y' = a(x)y$ est dite *sans second membre* ou *homogène*.

### 9.2.1 Propriétés des solutions

*Supposons que $s_0$ est une solution de l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$. Alors les solutions de cette équation sont les fonctions $s = s_0 + f$, où $f$ est solution de $y' = a(x)y$.*

**Démonstration.** Soit $s : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Pour tout $x \in I$, on a $\big[(a(x)s(x)+b(x)\big] - \big[a(x)s_0(x)+b(x)\big] = a(x)\big[s(x)-s_0(x)\big]$. Puisqu'on a par hypothèse $s_0'(x) = a(x)s_0(x)+b(x)$, on en déduit les équivalences :

$$\begin{aligned} &s \text{ est solution de } y'{=}a(x)y{+}b(x)\\ &\qquad\iff s'(x) = a(x)s(x) + b(x) \text{ pour tout } x \in I\\ &\qquad\iff s'(x){-}s_0'(x) = a(x)\big[s(x){-}s_0(x)\big] \text{ pour tout } x \in I\\ &\qquad\iff \text{la fonction } x \mapsto s(x){-}s_0(x) \text{ est solution de } y' = a(x)y. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction $s$ est solution de $y' = a(x)y+b(x)$ si et seulement si la fonction $f = s-s_0$ est solution de l'équation homogène $y' = a(x)y$. Il reste à remarquer que l'on a $f = s-s_0 \iff s = s_0+f$. ❏

Voici une autre façon d'énoncer la propriété précédente.

*Si $s_0$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$, alors les solutions de cette équation s'obtiennent en ajoutant à $s_0$ une solution quelconque de l'équation homogène $y' = a(x)y$.*

Pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre, on utilise la méthode suivante.

### 9.2.2 Méthode de variation de la constante

Soit $A$ une primitive de la fonction $x \mapsto a(x)$.
Soit $s : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Nous avons déjà remarqué que l'on peut poser $s(x) = c(x)e^{A(x)}$, où $c$ est une fonction dérivable (voir dans une démonstration page 180).
Cherchons la fonction $x \mapsto c(x)$ pour que $s$ soit solution de l'équation $y' = a(x)y + b(x)$. On a

$$\begin{aligned} s'(x) = c'(x)e^{A(x)} + c(x)\left(A'(x)e^{A(x)}\right) &= c'(x)e^{A(x)} + c(x)a(x))e^{A(x)}\\ a(x)s(x){+}b(x) &= a(x)c(x)e^{A(x)} + b(x)\\ s'(x) - \big(a(x)s(x) + b(x)\big) &= c'(x)e^{A(x)} - b(x) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} s \text{ est solution } &\iff c'(x)e^{A(x)} = b(x) && \text{pour tout } x \in I\\ &\iff c'(x) = b(x)e^{-A(x)} && \text{pour tout } x \in I\\ &\iff c(x) = \int^x b(t)e^{-A(t)}\,dt && \text{pour tout } x \in I \end{aligned}$$

Il suffit de calculer l'intégrale pour obtenir une solution particulière $s_0(x) = c(x)e^{A(x)}$ de l'équation $y' = a(x)y + b(x)$.

La fonction $s_0 : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$s_0(x) = e^{A(x)} \int^x b(t)e^{-A(t)}\, dt$$

est une solution de l'équation $y' = a(x)y + b(x)$.

Ne retenez pas cette formule. Au contraire, refaites dans chaque exercice le calcul de la variation de la constante.

### 9.2.3 Résolution de l'équation $y' = a(x)y + b(x)$

- On résout l'équation homogène $y' = a(x)y$ en calculant une primitive $x \mapsto A(x)$ de la fonction $x \mapsto a(x)$.
- On cherche une solution particulière $s_0$ de l'équation $y' = a(x) + b(x)$ (en général) par la méthode de variation de la constante, en posant

$$s_0(x) = c(x)e^{A(x)}\,.$$

- Les solutions de $y' = a(x) + b(x)$ sont les fonctions

$$s(x) = \lambda\, e^{A(x)} + s_0(x)\,, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Exemple.** Résolvons l'équation différentielle $y' = \dfrac{xy}{1+x^2} + x$.

Dans l'exemple page 181, nous avons vu que les solutions de l'équation homogène $y' = \frac{xy}{1+x^2}$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda\sqrt{+x^2}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pratiquons la méthode de variation de la constante en cherchant une solution $s_0$ de l'équation avec second membre, de la forme

$$s_0(x) = c(x)\sqrt{1+x^2}\,, \text{où } x \mapsto c(x) \text{ est à déterminer.}$$

La fonction $s_0$ est solution si et seulement si $s_0'(x) = \dfrac{x}{1+x^2}\, s_0(x) + x$, c'est-à-dire

$$c'(x)\sqrt{1+x^2} + c(x)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{1+x^2}\, c(x)\sqrt{1+x^2} + x$$

On simplifie cette égalité par le terme commun à chaque membre, et il vient $c'(x)\sqrt{1+x^2} = x$. On a $c'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, donc

$$c(x) = \int^x \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \sqrt{1+x^2}$$

et par suite

$$s_0(x) = c(x)\sqrt{1+x^2} = 1 + x^2$$

Les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{xy}{1+x^2} + x$ sont les fonctions $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$s(x) = \lambda\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2, \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

### 9.2.4 Détermination d'une solution

Dans les applications, la solution à laquelle on s'intéresse est souvent déterminée par la valeur $y_0$ qu'elle prend en un certain $x_0 \in I$. On dit que $x_0$ et $y_0$ sont les *conditions initiales* de la solution.
La proposition suivante montre qu'une solution est entièrement déterminée par ses conditions initiales.

**Proposition.** *Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution $s$ de l'équation $y' = a(x)y + b(x)$ telle que $s(x_0) = y_0$.*

**Démonstration.** Soit $s_0$ une solution de l'équation. Alors les solutions sont définies par $s(x) = \lambda\, e^{A(x)} + s_0(x)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons le nombre $\lambda$ pour que $s(x_0) = y_0$ : cette égalité s'écrit

$$\lambda\, e^{A(x_0)} + s_0(x_0) = y_0$$

d'où $\lambda = \big(y_0 - s_0(x_0)\big)e^{-A(x_0)}$. Il y a une seule valeur de $\lambda$ qui convient, donc une seule solution $s$ telle que $s(x_0) = y_0$. ❑

**Exemple.** Reprenons l'équation de l'exemple précédent et cherchons la solution $s$ telle que $s(0) = 0$.
On a $s(x) = \lambda\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2$, d'où $s(0) = \lambda + 1$. Pour que $s(0) = 0$, il faut et il suffit que $\lambda = -1$. La solution cherchée est donc la fonction $x \mapsto -\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2$.

## 9.3 ÉQUATION $y'' + py' + qy = 0$

Dans cette équation, $p$ et $q$ sont des constantes réelles. Il s'agit d'une équation du *second ordre* (car y figure la dérivée seconde), *linéaire, à coefficients constants.*

Rappelons que nous avons défini (page 129) la notion de fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivable, ainsi que la fonction exponentielle $x \mapsto e^{\lambda x}$, où $\lambda$ est un nombre complexe.
Les règles pour dériver une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont les mêmes que pour une fonction à valeurs réelles.
En particulier, si $\lambda \in \mathbb{C}$, la dérivée de $x \mapsto e^{\lambda x}$ est $x \mapsto \lambda\, e^{\lambda x}$.

**Définition.** Une *solution* de l'équation différentielle $y'' + py' + qy = 0$ est une fonction $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fois dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $s''(x) + ps'(x) + qs(x) = 0$.
Si $s$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on dit que c'est une *solution réelle*

Le qualificatif « linéaire » se justifie par les propriétés suivantes.

**Propriétés des solutions.** *Si $s_1$ et $s_2$ sont des solutions et si $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont des nombres complexes, alors la fonction $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$ est solution.*

**Démonstration.** Soient $s_1$ et $s_2$ des solutions. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$s_1''(x) + ps_1'(x) + qs_1(x) = 0$$
$$s_2''(x) + ps_2'(x) + qs_2(x) = 0$$

Multiplions la première égalité par $\lambda_1$, la seconde par $\lambda_2$ et ajoutons :

$$\lambda_1 s_1''(x) + \lambda_1 ps_1'(x) + \lambda_1 qs_1(x) + \lambda_2 s_2''(x) + \lambda_2 ps_2'(x) + \lambda_2 qs_2(x) = 0$$

$$\left[\lambda_1 s_1''(x)+\lambda_2 s_2''(x)\right] + p\left[\lambda_1 s_1'(x)+\lambda_2 s_2'(x)\right] + q\left[\lambda_1 s_1(x)+\lambda_2 s_2(x)\right] = 0$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left(\lambda_1 s_1''+\lambda_2 s_2''\right)(x) + p\left(\lambda_1 s_1'+\lambda_2 s_2'\right)(x) + q\left(\lambda_1 s_1+\lambda_2 s_2\right)(x) = 0$$

donc la fonction $\left(\lambda_1 s_1''+\lambda_2 s_2''\right) + p\left(\lambda_1 s_1'+\lambda_2 s_2'\right) + q\left(\lambda_1 s_1+\lambda_2 s_2\right)$ est nulle. On a $(\lambda_1 s_1+\lambda_2 s_2)'' + p(\lambda_1 s_1+\lambda_2 s_2)' + q(\lambda_1 s_1+\lambda_2 s_2) = 0$ et cela veut dire que la fonction $\lambda_1 s_1+\lambda_2 s_2$ est une solution. ❑

Remarquons que la fonction nulle est solution de l'équation.

> Les propriétés précédentes montrent que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + py' + qy = 0$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

### 9.3.1 À la recherche de solutions

**Définition.** Le polynôme $X^2 + pX + q$ s'apelle le *polynôme caractéristique* de l'équation différentielle $y'' + py' + qy = 0$.

**Théorème.** *Si $\alpha$ est une racine du polynôme caractéristique, alors la fonction $x \mapsto e^{\alpha x}$ est une solution de l'équation différentielle.*

**Démonstration.** Soit $\alpha$ une racine du polynôme caractéristique, donc $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$. Posons $s(x) = e^{\alpha x}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} s''(x) + ps'(x) + qs(x) &= \alpha^2 e^{\alpha x} + p\alpha e^{\alpha x} + q e^{\alpha x} \\ &= (\alpha^2 + p\alpha + q)e^{\alpha x} = 0\,. \end{aligned}$$

La fonction $s$ est donc solution de l'équation $y'' + py' + qy = 0$. ❑

Si le polynôme caractéristique a deux racines $\alpha$ et $\beta$, on a déjà les deux solutions $x \mapsto e^{\alpha x}$ et $x \mapsto e^{\beta x}$ : dans ce cas, pour tous nombres complexes $\lambda$ et $\mu$, la fonction $x \mapsto \lambda\, e^{\alpha x} + \mu\, e^{\beta x}$ est solution.

**Un résultat préliminaire.** *Soient $s_1$ et $s_2$ des solutions de l'équation différentielle $y'' + py' + qy = 0$. Alors il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $s_1'(x)s_2(x) - s_1(x)s_2'(x) = c\, e^{-px}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

**Démonstration.** Posons $w = s_1's_2 - s_1s_2'$. Alors

$$w' = s_1''s_2 + s_1's_2' - s_1's_2' - s_1s_2'' = s_1''s_2 - s_1s_2''$$

Puisque $s_1$ et $s_2$ sont solutions de l'équation, on a

$$\begin{aligned} s_1'' + ps_1' + qs_1 &= 0 \\ s_2'' + ps_2' + qs_2 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplions la première égalité par $s_2$, la seconde par $s_1$ et soustrayons. Les termes $qs_1s_2 = qs_2s_1$ se simplifient et il reste :

$$s_1''s_2 - s_1s_2'' + p(s_1's_2 - s_1s_2') = 0$$

$$w' + pw = 0 \qquad (*)$$

La relation $(*)$ montre que la fonction $w$ est solution de l'équation différentielle $y' = -py$ qui est du premier ordre à coefficient constant. Il y a donc un nombre $c$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $w(x) = c\, e^{-px}$. ❑

### 9.3.2 Résolution de l'équation $y'' + py' + qy = 0$

**Proposition.**

➤ *Si le polynôme caractéristique a deux racines distinctes* $\alpha$ *et* $\beta$*, alors les solutions de l'équation* $y'' + py' + qy = 0$ *sont les fonctions* $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *définies par* $s(x) = \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}$ *, où* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

➤ *Si le polynôme caractéristique a une racine double r, alors les solutions de l'équation* $y'' + py' + qy = 0$ *sont les fonctions* $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *définies par* $s(x) = \lambda e^{rx} + \mu x e^{rx}$*, où* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Posons $u(x) = e^{\alpha x}$ et $v(x) = e^{\beta x}$. Si $\alpha \neq \beta$, les vecteurs $u$ et $v$ sont indépendants dans l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (tome d'Algèbre, chapitre : Espace vectoriel).

Il n'est pas difficile de montrer de même que les fonctions $x \mapsto e^{rx}$ et $x \mapsto xe^{rx}$ sont aussi des vecteurs indépendants dans cet espace vectoriel. On en déduit :

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + py' + qy = 0$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 2.

**Démonstration de la proposition**

- Supposons d'abord que le polynôme $X^2 + pX + q$ a deux racines distinctes $\alpha$ et $\beta$ (réelles ou complexes). Posons $u(x) = e^{\alpha x}$ et $v(x) = e^{\beta x}$. On sait déja que pour tous nombres complexes $\lambda$ et $\mu$, la fonction $\lambda u + \mu v$ est solution. Montrons que toute solution est de cette forme.

  Soit $s$ une solution. Appliquons le résultat préliminaire aux solutions $s_1 = u$ et $s_2 = s$ : il existe un nombre $c_1 \in \mathbb{C}$ tel que

  $$u'(x)s(x) - u(x)s'(x) = c_1 e^{-px} \qquad (1)$$

  De même, en appliquant aux solutions $v$ et $s$, il existe $c_2 \in \mathbb{C}$ tel que

  $$v'(x)s(x) - v(x)s'(x) = c_2 e^{-px} \qquad (2)$$

  Multiplions (1) par $v(x)$, (2) par $u(x)$, et soustrayons. Après simplification, il reste

  $$\big[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)\big]s(x) = \big[c_1 v(x) - c_2 u(x)\big]e^{-px} \qquad (3)$$

  Or $u'(x)v(x) - u(x)v'(x) = (\alpha - \beta)e^{\alpha x} e^{\beta x} = (\alpha - \beta)e^{(\alpha+\beta)x}$, donc

  $$u'(x)v(x) - u(x)v'(x) = (\alpha - \beta)e^{-px} \qquad (4)$$

car la somme des racines est $\alpha + \beta = -p$. De (3) et (4), on déduit

$$(\alpha - \beta)e^{-px}s(x) = \left[c_1 v(x) - c_2 u(x)\right]e^{-px} ,$$

d'où en simplifiant par $e^{-px} \neq 0$ :

$$s(x) = \frac{c_1}{\alpha - \beta}\, e^{\beta x} - \frac{c_2}{\alpha - \beta}\, e^{\alpha x} , \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

- Supposons que le polynôme caractéristique a une racine double $r$. On sait que $r = -p/2$ (donc $r$ est réel) et que la fonction $u(x) = e^{rx}$ est solution. Montrons que la fonction $v(x) = x\, e^{rx}$ est aussi solution. En effet, on a $v'(x) = (rx + 1)e^{rx}$, $v''(x) = (r^2 x + 2r)e^{rx}$ et

$$v''(x) + pv'(x) + qv(x) = \left[(r^2 + pr + q)x + (2r + p)\right]e^{rx} = 0$$

car $r^2 + pr + q = 0$ et $2r + p = 0$.
On raisonne comme dans le cas précédent : cette fois, on a

$$u'(x)v(x) - u(x)v'(x) = -e^{2rx} = -e^{-px} \qquad (4')$$

L'égalité (3) étant encore vraie, on conclut comme ci-dessus. ❏

Très souvent, on s'intéresse plutôt aux solutions réelles. Le tableau ci-dessous résume les résultats à connaître.

### Solutions réelles de $y'' + py' + qy = 0$

Soit $\alpha$ et $\beta$ les racines du polynôme caractéristique.

| | $\alpha$ et $\beta$ réels<br>$\alpha \neq \beta$ | $\alpha = \beta$ | $\alpha = r + i\omega$<br>$\omega \neq 0$ |
|---|---|---|---|
| Solutions | $\lambda\, e^{\alpha x} + \mu\, e^{\beta x}$<br>$\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ | $\lambda\, e^{\alpha x} + \mu x\, e^{\alpha x}$<br>$\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ | $e^{rx}\left(\lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x\right)$<br>$\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ |

**Démonstration.** Comme toute solution réelle est aussi une solution à valeurs complexes, il suffit de chercher, parmi les solutions données par la proposition précédente, lesquelles sont réelles. Les deux premiers cas sont évidents. Dans le cas $\alpha = r + i\omega$ et $\omega \neq 0$, posons $u(x) = e^{\alpha x}$ et $v(x) = e^{\bar{\alpha} x}$. Les solutions complexes sont les fonctions $s = \lambda u + \mu v$, où $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$. Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\overline{u(x)} = \overline{e^{\alpha x}} = \overline{e^{rx}\, e^{i\omega x}} = e^{rx}\, e^{-i\omega x} = e^{\bar{\alpha} x} = v(x)$$

Supposons que la solution $s$ est à valeurs réelles. Alors pour tout $x$, on a $s(x) = \overline{s(x)}$, c'est-à-dire

$$\lambda u(x) + \mu v(x) = \bar{\lambda}\, \overline{u(x)} + \bar{\mu}\, \overline{v(x)} = \bar{\lambda}\, v(x) + \bar{\mu}\, u(x)$$

Il vient

$$(\lambda - \bar{\mu})u(x) + (\mu - \bar{\lambda})v(x) = 0 \text{ , quel que soit } x \in \mathbb{R}$$
$$(\lambda - \bar{\mu})u + (\mu - \bar{\lambda})v = 0 \qquad (*)$$

Puisque $\alpha \neq \bar{\alpha}$, on sait que les fonctions $u$ et $v$ sont des vecteurs indépendants dans l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (tome d'Algèbre, chapitre : Espace vectoriel). Dans l'égalité $(*)$, les scalaires $\lambda - \bar{\mu}$ et $\mu - \bar{\lambda}$ sont donc tous deux nuls, autrement dit $\mu = \bar{\lambda}$. Puisque $s = \lambda u + \mu v$, il s'ensuit

$$s(x) = \lambda\, e^{\alpha x} + \bar{\lambda}\, e^{\bar{\alpha} x} = \lambda\, e^{\alpha x} + \overline{\lambda\, e^{\alpha x}} = 2 \operatorname{Re}\left[\lambda\, e^{\alpha x}\right]$$

Posons $\lambda = a + \boldsymbol{i}b$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\lambda\, e^{\alpha x} &= (a + \boldsymbol{i}b)\, e^{rx}\left(\cos\omega x + \boldsymbol{i}\sin\omega x\right)\\
\operatorname{Re}\left[\lambda\, e^{\alpha x}\right] &= e^{rx}\left[a\cos\omega x - b\sin\omega x\right]\\
s(x) = 2\operatorname{Re}\left[\lambda\, e^{\alpha x}\right] &= e^{rx}\left[2a\cos\omega x - 2b\sin\omega x\right]
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ❏

Comme pour les solutions complexes, on peut montrer que l'ensemble des solutions réelles de l'équation $y'' + py' + qy = 0$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2.

**Exemple 1.** Prenons l'équation $y'' - a^2 y = 0$, où $a \in \mathbb{R}^*$.

Le polynôme caractéristique est $X^2 - a^2$, ses racines sont $a$ et $-a$, donc les solutions réelles sont les fonctions

$$s(x) = \lambda\, e^{ax} + \mu\, e^{-ax}, \quad \text{où} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

**Exemple 2.** Prenons l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$, où $\omega \in \mathbb{R}^*$.

Le polynôme caractéristique est $X^2 + \omega^2$, ses racines sont $\boldsymbol{i}\,\omega$ et $-\boldsymbol{i}\omega$, donc les solutions réelles sont les fonctions

$$s(x) = \lambda\cos\omega x + \mu\sin\omega x, \quad \text{où} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

**Exemple 3.** Soit l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Le polynôme caractéristique est $X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$, il a une racine double 2, donc les solutions réelles de l'équation différentielle sont les fonctions

$$s(x) = (\lambda + \mu x)e^{2x}, \quad \text{où} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

## 9.4 ÉQUATION $y'' + py' + qy = b(x)$

La fonction $x \mapsto b(x)$, appelée *second membre de l'équation*, est supposée continue sur un intervalle $I$.

Une *solution* de l'équation différentielle $y'' + py' + qy = b(x)$ est une fonction $s : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que, pour tout $x \in I$, on a $s''(x) + ps'(x) + qs(x) = b(x)$.
On dit que l'équation différentielle $y'' + py' + qy = b(x)$ est *linéaire du second ordre avec second membre.*
L'équation $y'' + py' + qy = 0$ est dite *homogène*.
Comme pour une équation linéaire du premier ordre, on a le résultat suivant.

*Supposons que $s_0$ est une solution de l'équation $y'' + py' + qy = b(x)$. Alors les solutions de cette équation sont les fonctions $s = s_0 + f$, où $f$ est solution de l'équation homogène $y'' + py' + qy = 0$.*

On en déduit une méthode pour trouver toutes les solutions.

**Méthode pour résoudre l'équation $y'' + py' + qy = b(x)$**

**1)** On résout l'équation homogène $y'' + py' + qy = 0$,
**2)** on cherche une solution particulière $s_0$ de l'équation avec second membre,
**3)** puis on ajoute $s_0$ à toutes les solutions de l'équation homogène.

Nous ne chercherons pas, dans le cas général, à calculer une solution particulière de l'équation $y'' + py' + qy = b(x)$. Traitons seulement le cas (fréquent dans les applications) d'un second membre de la forme $P(x)e^{mx}$, où $P$ est une fonction polynôme.

### 9.4.1 Cas $b(x) = P(x)e^{mx}$, $P$ fonction polynôme

*Soit $P$ un polynôme de degré $n$ et soit $m \in \mathbb{C}$. On cherche une solution particulière de la forme $s_0(x) = Q(x)e^{mx}$, où $Q$ est un polynôme*

- *de degré $n$ si $m$ n'est pas racine du polynôme caractéristique ;*
- *de degré $n+1$ et sans terme constant, si $m$ est racine simple du polynôme caractéristique ;*
- *de degré $n+2$, sans terme constant ni monome de degré 1, si $m$ est racine double du polynôme caractéristique.*

Quand le second membre est simplement un polynôme, on applique ces résultats avec $m = 0$.

**Exemple.** Résolvons l'équation $(*)$ $y'' + \omega^2 y = \cos ax$ , $(\omega > 0, a > 0)$.

Puisque $\cos ax = \mathrm{Re}\left(e^{iax}\right)$, on cherche une solution de l'équation

$$y'' + \omega^2 y = e^{iax} \qquad (**)$$

et on en prendra la partie réelle.

Le polynôme caractéristique est $X^2 + \omega^2$, ses racines sont $\boldsymbol{i}\omega$ et $-\boldsymbol{i}\omega$.
Premier cas : $a \neq \omega$. Le nombre $m = \boldsymbol{i}\,a$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, donc on cherche une solution de (**) de la forme $s_0(x) = ke^{\mathbf{i}\,ax}$, où $k \in \mathbb{C}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$s_0''(x) + \omega^2 s_0(x) = -ka^2\, e^{\boldsymbol{i}\,ax} + \omega^2 k e^{\boldsymbol{i}\,ax} = k(\omega^2 - a^2)e^{\boldsymbol{i}\,ax}$$

et en prenant $k = \dfrac{1}{\omega^2 - a^2}$, la fonction $s_0(x) = \dfrac{1}{\omega^2 - a^2}e^{\boldsymbol{i}ax}$ est une solution de (**).
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\omega^2 - a^2}\cos ax$ est donc une solution de (*).

Second cas : $a = \omega$. Cette fois, le nombre $\boldsymbol{i}a$ est racine simple du polynôme caractéristique, donc on cherche une solution de (**) de la forme $s_0(x) = kx\, e^{\boldsymbol{i}ax}$, où $k \in \mathbb{C}$.
On a $s_0'(x) = k(\boldsymbol{i}ax + 1)e^{\boldsymbol{i}ax}$, $s_0''(x) = k(-a^2x + 2\boldsymbol{i}a)e^{\boldsymbol{i}ax}$ et

$$s_0''(x) + \omega^2 s_0(x) = k\big(-a^2x + 2\boldsymbol{i}a + \omega^2 x\big)e^{\boldsymbol{i}ax} = k\big(2\boldsymbol{i}a\, e^{\boldsymbol{i}ax}\big)$$

En prenant $k = \frac{1}{2\boldsymbol{i}a} = \frac{-\boldsymbol{i}}{2a}$, on a $\mathrm{Re}\left(\frac{-\boldsymbol{i}}{2a}\, x\, e^{\boldsymbol{i}ax}\right) = \frac{1}{2a}x \sin ax$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2\omega}x \sin \omega x$ est solution de (*).

On peut maintenant exprimer les solutions de l'équation (*).

• Si $a \neq \omega$, les solutions réelles sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x + \frac{1}{\omega^2 - a^2}\cos ax\,, \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

• Si $a = \omega$, les solutions réelles sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x + \frac{1}{2\omega}x \sin \omega x\,, \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

### 9.4.2 Principe de superposition

Supposons que le second membre de l'équation différentielle est une somme de deux fonctions :

$$y'' + py' + qy = b_1(x) + b_2(x) \tag{$*$}$$

Considérons les deux équations différentielles

$$y'' + py' + qy = b_1(x) \tag{$*_1$}$$

$$y'' + py' + qy = b_2(x) \tag{$*_2$}$$

Si $s_1$ est une solution de $(*_1)$ et si $s_2$ est une solution de $(*_2)$, alors la fonction $s_1 + s_2$ est une solution de $(*)$.

En effet, si l'on a $s_1'' + ps_1' + qs_1 = b_1$ et $s_2'' + ps_2' + qs_2 = b_2$, alors

$$(s_1'' + s_2'') + p(s_1' + s_2') + q(s_1 + s_2) = \\ (s_1'' + ps_1' + qs_1) + (s_2'' + ps_2' + qs_2) = b_1 + b_2\,.$$

On en déduit la règle suivante (principe de superposition).

Supposons que le second membre d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est une somme $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Pour avoir une solution, il suffit de calculer une solution de chaque équation de second membre $b_i$, et d'en faire la somme.

**Exemple.** Résolvons l'équation $(*)$ $\;y'' - 3y' + 2y = \operatorname{ch} x$.

Puisque $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$, on considére les équations

$$(*_1) \quad y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2}e^x \qquad \text{et} \qquad (*_2) \quad y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2}e^{-x}$$

Le polynôme caractéristique est $X^2 - 3X + 2$, ses racines sont $1$ et $2$.

- Puisque $1$ est racine du polynôme caractéristique, cherchons une solution de $(*_1)$ de la forme $s_1(x) = kx\,e^x$. On a $s_1'(x) = k(1+x)e^x$, $s_1''(x) = k(2+x)e^x$ et

$$s_1''(x) - 3s_1'(x) + 2s_1(x) = -k\,e^x$$

En prenant $k = -\frac{1}{2}$, la fonction $s_1(x) = -\frac{1}{2}x\,e^x$ est solution de $(*_1)$.

- Puisque $-1$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, cherchons une solution de $(*_2)$ de la forme $s_2(x) = k\,e^{-x}$. On a

$$s_2''(x) - 3s_2'(x) + 2s_2(x) = 6k\,e^{-x}\,,$$

donc la fonction $s_2(x) = \frac{1}{12}e^{-x}$ est solution de $(*_2)$.

On en déduit que la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{2}x\,e^x + \dfrac{1}{12}e^{-x}$ est solution de $(*)$.

Les solutions réelles de l'équation $(*)$ sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda\,e^x + \mu\,e^{2x} - \frac{1}{2}x\,e^x + \frac{1}{12}e^{-x}, \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

## EXERCICES

**9.1** Soit l'équation différentielle $y' = \dfrac{2y}{1-x^2} + x$.

**a)** Résoudre cette équation sur l'intervalle $I = ]-1,1[$.

**b)** Quelle est la solution $f$ telle que $f(0) = 0$ ?

**9.2** On considère l'équation différentielle $y' = (\tan x)y + \sin x$ sur l'intervalle $I = ]-\pi/2,\pi/2[$.

**a)** Résoudre cette équation. Montrer que toutes les solutions sont des fonctions paires.

**b)** Montrer qu'il existe une unique solution $u : I \to \mathbb{R}$ ayant une limite finie en $\pi/2$. Quelle est cette limite ?

**9.3** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $s_\lambda : ]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ en posant $s_\lambda(x) = x + \lambda \ln x$.
Trouver une équation différentielle linéaire du premier ordre ayant pour solutions toutes les fonctions $s_\lambda$.

**9.4** Soit $p,q \in \mathbb{R}$ et soit $s$ une solution de l'équation différentielle $y'' + py' + qy = 0 \quad (*)$. Montrer que la fonction dérivée $s'$ est deux fois dérivable et que $s'$ est une solution de $(*)$.

**9.5** On considère l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = \sin x$.

**a)** Trouver les solutions réelles de cette équation.

**b)** Montrer qu'il existe une unique solution ayant pour période $2\pi$ et expliciter cette solution.

**9.6** **a)** Trouver les solutions réelles de l'équation $y'' + y = (\cos x)^2$.
Montrer que toutes les solutions ont pour période $2\pi$.

**b)** Trouver les solutions réelles de l'équation $y'' - 4y' + 4y = \operatorname{sh} 2x$.

**9.7** Soit $p,q \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (*)$$

et l'on suppose que le polynôme caractéristique a deux racines réelles distinctes. Soit $x_0, x_1, a_0$ et $a_1$ des nombres réels tels que $x_0 \neq x_1$.

Montrer qu'il existe une unique solution $s$ de $(*)$ telle que $s(x_0) = a_0$ et $s(x_1) = a_1$.

**9.8** Soit le polynôme $P = X^2 + pX + q$, où $p,q \in \mathbb{R}$.
Notons $\alpha$ et $\beta$ les racines (réelles ou complexes) de $P$.
Rappelons que l'on a $\alpha + \beta = -p$ et $\alpha\beta = q$.

**a)** Supposons que les racines de $P$ sont réelles. Démontrer l'équivalence : $(\alpha < 0$ et $\beta < 0) \Longleftrightarrow (p > 0$ et $q > 0)$.

**b)** Supposons que les racines de $P$ sont complexes non réelles. Montrer que l'on a $q > 0$ et l'équivalence : $(\operatorname{Re}\alpha < 0) \Longleftrightarrow (p > 0)$.

**c)** On considère l'équation différentielle $(*)$ $\quad y'' + py' + qy = 0$. Montrer que toutes les solutions réelles de $(*)$ tendent vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$ si et seulement si $p > 0$ et $q > 0$.
(Utiliser les questions précédentes sans oublier le cas où $P$ a une racine double.)

## SOLUTIONS

**9.1** **a)** L'équation s'écrit $y' = \dfrac{2}{1-x^2}y + x$ : c'est bien une équation linéaire avec second membre.

Résolution de l'équation homogène. Pour tout $x \in I$, on a

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$$
$$\int^x \frac{2}{1-t^2}\,dt = \int^x \frac{dt}{1-t} + \int^x \frac{dt}{1+t}$$
$$= -\ln(1-x) + \ln(1+x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$$

car pour tout $x \in I$, on a $1 + x > 0$ et $1 - x > 0$.
Les solutions de l'équation homogène $y' = \frac{2}{1-x^2}y$ sont les fonctions $I \to \mathbb{R}$ définies par $x \mapsto \lambda\dfrac{1+x}{1-x}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Recherche d'une solution particulière. On cherche une solution $s_0$ de l'équation sous la forme $s_0(x) = c(x)\dfrac{1+x}{1-x}$. La méthode de variation de la constante consiste à écrire que l'on a $s_0'(x) = \frac{2}{1-x^2} s_0(x) + x$, ce qui conduit à l'égalité

$$c'(x)\frac{1+x}{1-x} = x \text{ , pour tout } x \in I.$$

On en déduit

$$c'(x) = \frac{1-x}{1+x}x \quad \text{ et } \quad c(x) = \int^x \frac{t(1-t)}{1+t}\,dt.$$

On a la décomposition en éléments simples $\dfrac{t(1-t)}{1+t} = 2 - t - \dfrac{2}{t+1}$, d'où

$$c(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x+1) \text{ , pour tout } x \in I.$$

Une solution de l'équation est donc

$$s_0(x) = \left[2x - \frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x+1)\right]\frac{1+x}{1-x}.$$

Résolution. Les solutions de l'équation sont les fonctions $s : I \to \mathbb{R}$ définies par $s(x) = \lambda\dfrac{1+x}{1-x} + \left[2x - \dfrac{1}{2}x^2 - 2\ln(x+1)\right]\dfrac{1+x}{1-x}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

**b)** On a $s(0) = \lambda$, donc la solution telle que $s(0) = 0$ est la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left[2x - \frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x+1)\right]\dfrac{1+x}{1-x}$.

**9.2 a)** Une primitive de $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\cos' x}{\cos x}$ sur l'intervalle $I$ est $x \mapsto -\ln\cos x$. Puisque $-\ln\cos x = \ln\frac{1}{\cos x}$, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{\lambda}{\cos x}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière $s_0$ de l'équation avec second membre. La méthode de variation de la constante consiste à poser $s_0(x) = \dfrac{c(x)}{\cos x}$. En écrivant que $s_0$ est solution, il vient $\dfrac{c'(x)}{\cos x} = \sin x$, donc

$$c'(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \text{et} \quad c(x) = -\frac{1}{4} \cos 2x\,.$$

Ainsi la fonction $s_0(x) = -\frac{1}{4}\frac{\cos 2x}{\cos x}$ est solution.
Les solutions de l'équation sont les fonctions $s : I \to \mathbb{R}$ définies par

$$s(x) = \frac{\lambda}{\cos x} - \frac{1}{4}\frac{\cos 2x}{\cos x}\,,\ \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Puisque la fonction cosinus est paire, toutes ces solutions sont des fonctions paires sur l'intervalle $I$.

**b)** On a $s(x) = \dfrac{4\lambda - \cos 2x}{4\cos x}$ pour tout $x \in ]-\pi/2, \pi/2[$. Quand $x$ tend vers $\pi/2$, le dénominateur tend vers 0 et le numérateur vers $4\lambda + 1$. Pour que $s(x)$ ait une limite finie quand $x$ tend vers $\pi/2$, il faut donc que l'on ait $4\lambda + 1 = 0$, c'est-à-dire $\lambda = -1/4$. Réciproquement, si $\lambda = -1/4$, alors $4\lambda - \cos 2x = -\big(1 + \cos 2x\big) = -2(\cos x)^2$ et l'on a

$$\lim_{x\to\pi/2} s(x) = \lim_{x\to\pi/2} \frac{-2(\cos x)^2}{4\cos x} = \lim_{x\to\pi/2} -\frac{\cos x}{2} = 0$$

La seule solution ayant une limite finie en $\pi/2$ est donc définie par
$u(x) = \dfrac{-1 - \cos 2x}{4\cos x}$ et l'on a $\lim\limits_{x\to\pi/2} u(x) = 0$.
Si $s$ est une solution différente de $u$, alors $4\lambda + 1 \neq 0$ et la limite de $s$ en $\pi/2$ est $+\infty$ si $4\lambda + 1 > 0$, $-\infty$ si $4\lambda + 1 < 0$.

**9.3** Si les fonctions $s_\lambda$ sont solutions d'une équation $y' = a(x)y + b(x)$, alors la différence de deux quelconques de ces fonctions est solution de $y' = a(x)y$. Ainsi par exemple, la fonction $s_1 - s_0 : x \mapsto \ln x$ doit être solution de $y' = a(x)y$, ce qui se traduit par $\frac{1}{x} = a(x)\ln x$, donc

$$a(x) = \frac{1}{x\ln x}\,,\quad \text{pour tout } x > 0.$$

De plus, la fonction $s_0 : x \mapsto x$ doit vérifier $s_0'(x) = a(x)s_0(x) + b(x)$ pour tout $x > 0$, ce qui s'écrit $1 = \dfrac{1}{x\ln x}x + b(x)$. On en déduit

$$b(x) = 1 - \frac{1}{\ln x}, \quad \text{pour tout } x > 0.$$

La seule équation différentielle linéaire du premier ordre ayant pour solutions les fonctions $s_\lambda$ est donc l'équation

$$y' = \frac{y}{x \ln x} + 1 - \frac{1}{\ln x}. \tag{$*$}$$

Réciproquement, les solutions de $(*)$ sont bien les fonctions $s_\lambda$.

**9.4** Puisque $s$ est solution de $y'' + py' + qy = 0$, on a $s'' = -ps' - qs$. Les fonctions $s$ et $s'$ étant dérivables, la fonction $-ps' - qs$ est dérivable. On en déduit que $s''$ est dérivable, autrement dit $s'$ est deux fois dérivable.
Posons $u = s'$. Alors on a

$$u'' + pu' + qu = (s'' + ps' + qs)' = 0$$

donc la fonction $u$ est solution de l'équation $y'' + py' + qy = 0$.

**9.5 a)** Le polynôme caractéristique est $X^2 + 2X + 2$, ses racines sont $-1 + \boldsymbol{i}$ et $-1 - \boldsymbol{i}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$x \mapsto e^{-x}\big(\lambda \cos x + \mu \sin x\big), \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Puisque $\sin x = \frac{1}{2\boldsymbol{i}}\, e^{\boldsymbol{i}x} - \frac{1}{2\boldsymbol{i}}\, e^{-\boldsymbol{i}x}$, utilisons le principe de superposition pour chercher une solution particulière.

<u>Solution particulière de $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{2\boldsymbol{i}}\, e^{\boldsymbol{i}x}$.</u>

Puisque $\boldsymbol{i}$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, on cherche une telle solution sous la forme $s_1(x) = k\, e^{\boldsymbol{i}x}$, où $k \in \mathbb{C}$. Il vient $s_1'(x) = k\boldsymbol{i}\, e^{\boldsymbol{i}x}$, $s_1''(x) = -k\, e^{\boldsymbol{i}x}$ et

$$s_1''(x) + 2s_1'(x) + 2s_1(x) = (-k + 2\boldsymbol{i}k + 2k)\, e^{\boldsymbol{i}x} = k(1 + 2\boldsymbol{i})\, e^{\boldsymbol{i}x}$$

On prend donc $k = \dfrac{1}{1 + 2\boldsymbol{i}}\, \dfrac{1}{2\boldsymbol{i}} = \dfrac{1 - 2\boldsymbol{i}}{5}\, \dfrac{-\boldsymbol{i}}{2} = \dfrac{-\boldsymbol{i} - 2}{10}$, d'où

$$s_1(x) = \frac{-\boldsymbol{i} - 2}{10}\, e^{\boldsymbol{i}x}.$$

<u>Solution particulière de $y'' + 2y' + 2y = -\frac{1}{2\boldsymbol{i}}\, e^{-\boldsymbol{i}x}$.</u> De même, $-\boldsymbol{i}$ n'étant pas racine du polynôme caractéristique, on cherche une telle solution sous la forme $s_2(x) = k\, e^{-\boldsymbol{i}x}$, où $k \in \mathbb{C}$. On trouve $k = \frac{\boldsymbol{i}-2}{10}$, donc

$$s_2(x) = \frac{\boldsymbol{i}-2}{10}\, e^{-\boldsymbol{i}x}\,.$$

<u>Résolution.</u> La fonction $s_1 + s_2$ est solution de $y'' + 2y' + 2y = \sin x$. On a

$$\begin{aligned} s_1(x) + s_2(x) &= -\frac{\boldsymbol{i}}{10}\left(e^{\boldsymbol{i}x} - e^{-\boldsymbol{i}x}\right) - \frac{1}{5}\left(e^{\boldsymbol{i}x} + e^{-\boldsymbol{i}x}\right) \\ &= -\frac{\boldsymbol{i}}{10}\big(2\boldsymbol{i}\sin x\big) - \frac{1}{5}\big(2\cos x\big) \\ &= \frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x \end{aligned}$$

Ainsi les solutions de $y'' + 2y' + 2y = \sin x$ sont les fonctions

$$s(x) = e^{-x}\big(\lambda\cos x + \mu\sin x\big) + \frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x\ ,\ \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

**b)** La fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = \frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x$ est une solution qui a pour période $2\pi$. Supposons que $\lambda$ et $\mu$ sont tels que la solution $s$ a pour période $2\pi$. Alors la fonction $s - u$ a aussi pour période $2\pi$. On a

$$(s-u)(x) = e^{-x}\big(\lambda\cos x + \mu\sin x\big)\ ,\ \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Puisque $(s-u)(0) = \lambda$ et $(s-u)(2\pi) = e^{-2\pi}\lambda$, il vient $\lambda = e^{-2\pi}\lambda$, ce qui implique $\lambda = 0$ car $e^{-2\pi} \neq 1$. De même, l'égalité $(s-u)(\pi/2) = (s-u)(2\pi + \pi/2)$ conduit à $\mu = 0$ et finalement, on a $s - u = 0$. La seule solution ayant pour période $2\pi$ est donc la fonction $u$.

**9.6** **a)** Le polynôme caractéristique $X^2 + 1$ a pour racines $\boldsymbol{i}$ et $-\boldsymbol{i}$. Puisque

$$(\cos x)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\, e^{2\boldsymbol{i}x} + \frac{1}{4}\, e^{-2\boldsymbol{i}x}\,,$$

utilisons le principe de superposition pour calculer une solution particulière de l'équation.

Solution particulière de $y'' + y = \frac{1}{2}$. La fonction constante $s_1(x) = \frac{1}{2}$ est évidemment solution de cette équation.

Solution particulière de $y'' + y = \frac{1}{4}\,e^{2\boldsymbol{i}x}$. Puisque $2\boldsymbol{i}$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, cherchons cette solution sous la forme $s_2(x) = k\,e^{2\boldsymbol{i}x}$, où $k \in \mathbb{C}$. En écrivant que l'on a $s_2''(x) + s_2(x) = \frac{1}{4}\,e^{2\boldsymbol{i}x}$ pour tout $x$, on obtient $k = -\frac{1}{12}$, donc $s_2(x) = -\frac{1}{12}\,e^{2\boldsymbol{i}x}$.

Solution particulière de $y'' + y = \frac{1}{4}\,e^{-2\boldsymbol{i}x}$. En procédant de même, on trouve que la fonction $s_3(x) = -\frac{1}{12}\,e^{-2\boldsymbol{i}x}$ est solution de cette équation.

Résolution. Une solution particulière de l'équation $y'' + y = (\cos x)^2$ est donc la fonction définie par

$$s_1(x) + s_2(x) + s_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\,e^{2\boldsymbol{i}x} - \frac{1}{12}\,e^{-2\boldsymbol{i}x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2x$$

Puisque les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$, les solutions de l'équation $y'' + y = (\cos x)^2$ sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2x\,.$$

Chaque solution est une somme de fonctions ayant pour période $2\pi$ : les solutions ont donc pour période $2\pi$.

**b)** Le polynôme caractéristique est $X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$. Puisque $\operatorname{sh} 2x = \frac{1}{2}\,e^{2x} - \frac{1}{2}\,e^{-2x}$, cherchons une solution particulière en utilisant le principe de superposition.

Solution particulière de $y'' - 4y' + 4y = \frac{1}{2}\,e^{2x}$. Puisque 2 est racine double du polynôme caractéristique, on cherche une telle solution sous la forme $s_1(x) = kx^2\,e^{2x}$, où $k \in \mathbb{R}$. On a

$$s_1'(x) = k(2x + 2x^2)e^{2x} \quad \text{et} \quad s_1''(x) = k(2 + 8x + 4x^2)e^{2x}\text{ , d'où}$$

$$s_1''(x) - 4s_1'(x) + 4s_1(x) = k\big[(2 + 8x + 4x^2) - 4(2x + 2x^2) + 4x^2\big]e^{2x} = 2k\,e^{2x}$$

Il vient $2k = \frac{1}{2}$ et $s_1(x) = \frac{x^2}{4}\,e^{2x}$.

Solution particulière de $y'' - 4y' + 4y = \frac{1}{2}\, e^{-2x}$. Puisque $-2$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, cherchons $k \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $s_2(x) = k\, e^{-2x}$ soit solution. On a

$$s_2''(x) - 4s_2'(x) + 4s_2(x) = \left[4k - 4(-2k) + 4k\right] e^{-2k} = \frac{1}{2}\, e^{-2x}\,,$$

d'où $k = \frac{1}{32}$ et $s_2(x) = \frac{1}{32}\, e^{-2x}$.

Résolution. Les solutions de l'équation homogène $y'' - 4y' + 4y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{2x}$.

Une solution particulière de l'équation avec second membre $\operatorname{sh} 2x$ est $s_1(x) + s_2(x) = \frac{x^2}{4}\, e^{2x} + \frac{1}{32}\, e^{-2x}$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions

$$x \mapsto (\lambda + \mu x)\, e^{2x} + \frac{x^2}{4}\, e^{2x} - \frac{1}{32}\, e^{-2x}\,, \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

**9.7** Soit $\alpha$ et $\beta$ les racines du polynôme caractéristique. Par hypothèse, $\alpha$ et $\beta$ sont des nombres réels différents. Les solutions réelles de $(*)$ sont donc les fonctions $s(x) = \lambda e^{\alpha x} + \mu\, e^{\beta x}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Les égalités $s(x_0) = a_0$ et $s(x_1) = a_1$ s'écrivent

$$\begin{cases} \lambda e^{\alpha x_0} + \mu\, e^{\beta x_0} = a_0 \\ \lambda e^{\alpha x_1} + \mu\, e^{\beta x_1} = a_1 \end{cases} \tag{1}$$

C'est un système d'équations linéaires aux inconnues $\lambda$ et $\mu$. Le déterminant est

$$D = \begin{vmatrix} e^{\alpha x_0} & e^{\beta x_0} \\ e^{\alpha x_1} & e^{\beta x_1} \end{vmatrix} = e^{\alpha x_0}\, e^{\beta x_1} - e^{\beta x_0}\, e^{\alpha x_1} = e^{\alpha x_0 + \beta x_1} - e^{\beta x_0 + \alpha x_1}$$

On a

$$\begin{aligned} (\alpha x_0 + \beta x_1) - (\beta x_0 + \alpha x_1) &= (\alpha - \beta)x_0 - (\alpha - \beta)x_1 \\ &= (\alpha - \beta)(x_0 - x_1) \neq 0 \end{aligned}$$

car $\alpha \neq \beta$ et $x_0 \neq x_1$. Ainsi, les deux nombres réels $\alpha x_0 + \beta x_1$ et $\beta x_0 + \alpha x_1$ sont différents. On en déduit $e^{\alpha x_0 + \beta x_1} \neq e^{\beta x_0 + \alpha x_1}$ et par suite $D \neq 0$.

Il s'ensuit que le système (1) a une unique solution $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Il existe donc une unique solution de $(*)$ telle que $s(x_0) = a_0$ et $s(x_1) = a_1$.

**Remarque :** si l'on omet l'hypothèse que les racines du polynôme caractéristique sont des nombres réels distincts, ce résultat n'est plus vrai.
Montrons par exemple que pour l'équation $y'' + y = 0$, il n'existe pas de solution réelle $s$ telle que $s(0) = 0$ et $s(\pi) = 1$.
En effet, une telle fonction serait de la forme $s(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$ et les conditions imposent $0 = s(0) = \lambda$ et $1 = s(\pi) = -\lambda$, ce qui est impossible.

**9.8** **a)** Supposons $\alpha < 0$ et $\beta < 0$. Alors on a $-p = \alpha + \beta < 0$ et $q = \alpha\beta > 0$, donc $p > 0$ et $q > 0$. Réciproquement, supposons $p > 0$ et $q > 0$. Alors les racines de $P$ ont même signe car leur produit $q$ est positif ; ce signe est celui de leur somme $-p < 0$, donc les racines sont négatives.

**b)** Posons $r = \operatorname{Re}\alpha$. Alors par hypothèse, les racines de $P$ sont $\alpha = r + i\omega$ et $\beta = \bar{\alpha} = r - i\omega$, où $\omega \in \mathbb{R}^*$. Leur produit est $q = \alpha\beta = |\alpha|^2 = r^2 + \omega^2 > 0$, car $\omega \neq 0$. On a $-p = \alpha + \bar{\alpha} = 2r = 2\operatorname{Re}\alpha$, d'où l'équivalence $(p > 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Re}\alpha < 0)$.

**c)** • Supposons $\alpha$ et $\beta$ réels et $\alpha \neq \beta$. Alors les solutions réelles de $(*)$ sont les fonctions $s(x) = \lambda\, e^{\alpha x} + \mu\, e^{\beta x}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Si $\alpha < 0$ et $\beta < 0$, alors $e^{\alpha x}$ et $e^{\beta x}$ tendent vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} s(x) = 0$.
Réciproquement, si toutes les solutions tendent vers 0 en $+\infty$, alors en particulier, les solutions $x \mapsto e^{\alpha x}$ et $x \mapsto e^{\beta x}$ tendent vers 0 en $+\infty$, ce qui implique $\alpha < 0$ et $\beta < 0$.
D'après **(a)**, on en déduit que toutes les solutions de $(*)$ tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $p > 0$ et $q > 0$.
• Supposons $\alpha = \beta$. Alors les solutions réelles de $(*)$ sont les fonctions $s(x) = \lambda\, e^{\alpha x} + \mu x\, e^{\alpha x}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\alpha x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x\, e^{\alpha x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} s(x) = 0$.
Réciproquement, si toutes les solutions de $(*)$ tendent vers 0 en $+\infty$, alors en particulier, la solution $x \mapsto e^{\alpha x}$ (obtenue en prenant $\lambda = 1$ et $\mu = 0$) tend vers 0 en $+\infty$, ce qui implique $\alpha < 0$.
D'après **(a)**, on en déduit que toutes les solutions de $(*)$ tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $p > 0$ et $q > 0$.

• Supposons $\alpha$ et $\beta$ complexes et non réels. Appelons $\alpha$ la racine de partie imaginaire positive : $\alpha = r + \boldsymbol{i}\omega$ et $\omega > 0$. On a $r = \operatorname{Re}\alpha = -p/2$ et les solutions de $(*)$ sont les fonctions

$$s(x) = e^{-(p/2)x}(\lambda\cos\omega x + \mu\sin\omega x)\,,\quad \text{où } \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

Si $p > 0$, alors on a $-p/2 < 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-(p/2)x} = 0$. Comme la fonction $x \mapsto \lambda\cos\omega x + \mu\sin\omega x$ est bornée, cela implique $\lim\limits_{x\to+\infty} s(x) = 0$.

Réciproquement, si toutes les solutions de $(*)$ tendent vers 0 en $+\infty$, alors en particulier $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-(p/2)x}\cos\omega x = 0$. Considérons la suite $(x_n)$ définie par $x_n = \frac{2\pi n}{\omega}$, de sorte que $\cos(\omega x_n) = 1$ pour tout $n$. Puisque $\omega > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-(p/2)x_n}\cos(\omega x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-(p/2)x_n} = 0$. On a $e^{-(p/2)x_n} = e^{\frac{-p\pi n}{\omega}} = \left(e^{\frac{-p\pi}{\omega}}\right)^n$, donc la suite de terme général $e^{-(p/2)x_n}$ est géométrique de raison $e^{\frac{-p\pi}{\omega}}$. Comme elle a pour limite 0, on en déduit $e^{\frac{-p\pi}{\omega}} < 1$, donc $\frac{-p\pi}{\omega} < 0$, donc $p > 0$.

Cela montre que toutes les solutions de $(*)$ tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $p > 0$. Puisqu'on a $q > 0$ d'après **(b)**, cette condition équivaut à $(p > 0 \text{ et } q > 0)$.

# CHAPITRE 10 Exemples d'études de surfaces

**OBJECTIFS**

Nous abordons l'étude des fonctions de deux variables $(x,y) \mapsto f(x,y)$. Leur représentation dans l'espace est une surface dont les coupes par des plans horizontaux font apparaître les lignes de niveau.

Nous définissons aussi les dérivées de $f$ par rapport à l'une des variables (dérivées partielles) et la notion de plan tangent à une surface.

Dans ce chapitre, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $(0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et les points de $\mathcal{E}$ sont repérés par leurs coordonnées $(x,y,z)$.

## 10.1 LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

**Définition.** Une *fonction de deux variables* est une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, où $D$ est une partie de $\mathbb{R}^2$. On la note $(x,y) \mapsto f(x,y)$. L'ensemble $D$ est le domaine de définition de $f$.

**Exemples**

**1)** Les fonctions $f_1$ et $f_2$ définies par $f_1(x,y) = xy$ et $f_2(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ sont des fonctions de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$.

**2)** Posons $g(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$.
On a l'équivalence $x^2+y^2 = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)$, donc la fonction $g$ est définie sur $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ ; cet ensemble est le plan $xOy$ privé de l'origine.

**3)** Posons $g(x,y) = x \ln y$. La fonction $g$ est définie sur l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ qui est un demi-plan limité par l'axe $Ox$.

**4)** Posons $h(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. La fonction $h$ est définie sur l'ensemble $D$ formé des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $1-x^2-y^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x^2+y^2 \leqslant 1$. Dans le plan euclidien, $x^2+y^2$ est le carré de la distance du point $M : (x,y)$ à l'origine, donc l'ensemble $D$ est le disque de rayon 1 centré à l'origine.

Alors que les fonctions d'une variable sont en général définies sur un intervalle ou une réunion d'intervalles, on voit que dans $\mathbb{R}^2$, les domaines de définition « naturels » sont beaucoup plus variés.

➤ Si $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de deux variables définies sur le même ensemble $D$, leur somme et leur produit sont définies sur $D$ :

$$f+g : (x,y) \mapsto f(x,y)+g(x,y) \text{ et } fg : (x,y) \mapsto f(x,y)g(x,y).$$

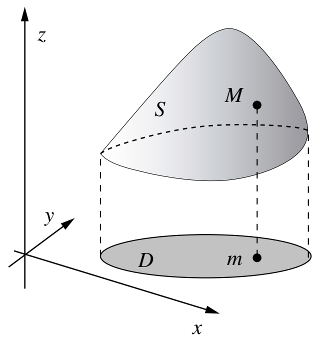
➤ Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit aussi la fonction $\lambda f : (x,y) \mapsto \lambda f(x,y)$.

## 10.2 SURFACE D'ÉQUATION $z = f(x,y)$

Pour représenter une fonction d'une variable $x \mapsto h(x)$, on dessine la courbe d'équation $y = h(x)$ : elle est formée des points $M : \big(x,h(x)\big)$.

De même, pour une fonction de deux variables $f : D \to \mathbb{R}$, on peut considérer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées $\big(x,y,f(x,y)\big)$, où $(x,y) \in D$.

Pour chaque point $m : (x,y)$ appartenant au domaine $D$ du plan $xOy$, il y a un unique point $M : (x,y,z)$ tel que $z = f(x,y)$ ; le point $M$ se projette en $m$ sur $xOy$.




L'ensemble des points $M:(x,y,z)$ tels que $z=f(x,y)$ est une surface $\mathcal{S}$ étalée au dessus de $D$.

$$\mathcal{S} = \{M : (x,y,z) \mid z = f(x,y)\}$$

$\mathcal{S}$ est la *surface d'équation* $z = f(x,y)$.

**Exemple 1.** Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $z = x^2+y^2$.

Puisque la fonction $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est définie sur $\mathbb{R}^2$, la surface $\mathcal{S}$ est étalée au dessus du plan $xOy$ tout entier.

Le point $O$ appartient à $\mathcal{S}$ et comme $x^2+y^2 \geqslant 0$ pour tout $(x,y)$, la surface est toute entière située dans le demi-espace $z \geqslant 0$.

Pour visualiser la surface, coupons-la par des plans et regardons les courbes obtenues.

<u>Coupe par un plan horizontal.</u> Soit $h \geqslant 0$. L'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan d'équation $z = h$ est l'ensemble des points $M : (x,y,h)$ tels que $x^2+y^2 = h$.

Si $h = 0$, on trouve seulement le point $O$.
Si $h > 0$, l'intersection est le cercle $\mathcal{C}_h$ d'axe $Oz$, de rayon $\sqrt{h}$, centré au point de coordonnées $(0,0,h)$ sur $Oz$ (figure 10.1).
En empilant tous ces cercles, on reconstitue la surface.
Chaque cercle $\mathcal{C}_h$ reste globalement invariant par rotation d'axe $Oz$ : il en va donc de même de $\mathcal{S}$. On dit que $\mathcal{S}$ est une *surface de révolution d'axe $Oz$*.
Coupe par un plan vertical. Une telle coupe permet de visualiser le profil de $\mathcal{S}$.
Coupons $\mathcal{S}$ par le plan $xOz$, dont l'équation est $y = 0$. La courbe d'intersection a pour équations $(z = x^2 + y^2\ ,\ y = 0)$, c'est-à-dire $(z = x^2,\ y = 0)$. Dans le plan $xOz$, la courbe d'équation $z = x^2$ est une parabole de sommet $O$ (figure 10.1). Puisque $\mathcal{S}$ est de révolution, on reconstitue la surface en faisant tourner cette parabole autour de $Oz$ : la surface $\mathcal{S}$ s'appelle un paraboloïde (figure 10.2).

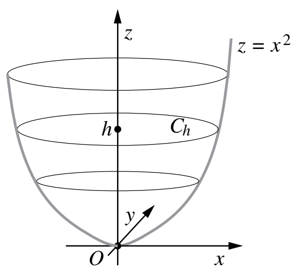



Figure 10.1

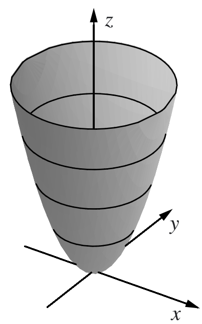


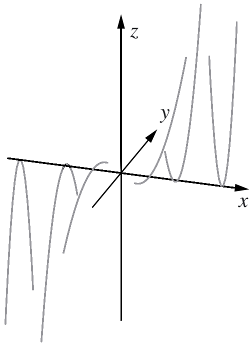

Figure 10.2

**Exemple 2.** Considérons la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = xy^2$.

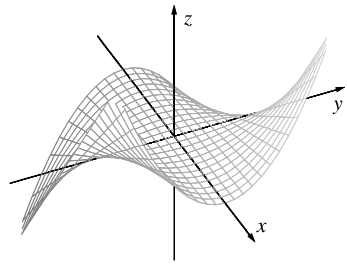
- Coupons cette surface par le plan vertical d'équation $x = a$. La section est la courbe $\Gamma_a$ d'équations $(\ x = a\ ,\ z = ay^2\ )$.
  Regardons la courbe d'équation $z = ay^2$ dans le plan $yOz$.
  - Si $a \neq 0$, c'est une parabole de sommet l'origine ; les branches sont dirigées vers le haut si $a > 0$, vers le bas si $a < 0$.
    Plus $|a|$ est grand, plus les branches de la parabole sont resserrées.
    La courbe $\Gamma_a$ s'obtient par translation, en amenant le sommet de cette parabole au point $(a,0,0)$ de l'axe $Ox$.
  - Si $a = 0$, le plan de coupe est $yOz$ et la courbe d'intersection a pour équation $z = 0$ : le plan $yOz$ coupe donc $\mathcal{S}$ selon $Oy$.

En dessinant les paraboles $\Gamma_a$, on a une vue de $\mathcal{S}$.

- Coupons $\mathcal{S}$ par le plan $xOy$ (d'équation $z = 0$) : on a $xy^2 = 0 \Leftrightarrow (\ x = 0$ ou $y = 0\ )$, donc l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan $xOy$ est la réunion des deux axes $Ox$ et $Oy$. (Voir figures ci-après)



Des paraboles $\Gamma_a$



La surface $\mathcal{S}$

## Lignes de niveau

**Définition.** Soit $\mathcal{S}$ une surface d'équation $z = f(x, y)$. Pour tout nombre réel $k$, l'ensemble $\{(x, y);\ f(x, y) = k\}$ s'appelle la *ligne de niveau k de la surface* $\mathcal{S}$.

Un point $m : (x, y)$ est sur la ligne de niveau $k$ si et seulement si le point $M : \big(x, y, f(x, y)\big)$ est dans le plan horizontal d'équation $z = k$.

*La ligne de niveau k de la surface $\mathcal{S}$ s'obtient donc en coupant la surface par le plan d'équation $z = k$ et en projetant cette section sur le plan $xOy$.*

Sur une carte topométrique, on voit des lignes de niveau de la fonction altitude. Sur une carte marine, figurent des lignes de niveau de la fonction profondeur. Une carte météo montre des isobares : ce sont des lignes de niveau de la pression athmosphérique.

**Exemples**

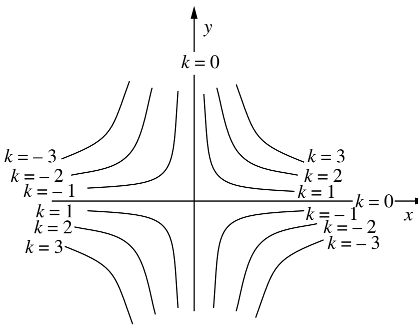
**1)** Pour le paraboloïde d'équation $z = x^2+y^2$ (exemple 1), la ligne de niveau $k > 0$ est le cercle $C_k$ d'équation $x^2+y^2 = k$, centré à l'origine et de rayon $\sqrt{k}$.

Pour visualiser la surface à partir de ses lignes de niveau, il suffit de placer chaque cercle $C_k$ dans le plan horizontal d'équation $z = k$ (figures 10.1 et 10.2 page 205).

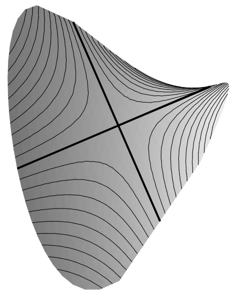
**2)** Considérons la surface d'équation $z = xy$. La ligne de niveau $k$ a pour équation $xy = k$.

• Si $k \neq 0$, cette ligne de niveau est une hyperbole centrée à l'origine et ayant les axes comme asymptotes.

• La ligne de niveau 0 est l'ensemble $\{(x, y) ;\ x = 0 \text{ ou } y = 0\}$, c'est-à-dire la réunion des axes $Ox$ et $Oy$.




Des lignes de niveau $xy = k$.



La surface d'équation $z = xy$.

Pour visualiser une surface à partir des lignes de niveau, placer chacune de ces lignes dans le plan horizontal correspondant à son niveau.

Des lignes de niveau qui se resserrent indiquent une zone de la surface où la plus grande pente est plus forte.

## 10.3 SURFACE DE RÉVOLUTION D'AXE $Oz$

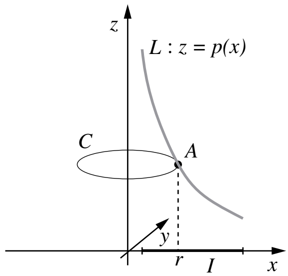
Une surface de révolution d'axe $Oz$ s'obtient en faisant tourner autour de $Oz$ une courbe $L$ située dans un plan vertical : $L$ est le *profil* (ou la *méridienne*) de la surface.

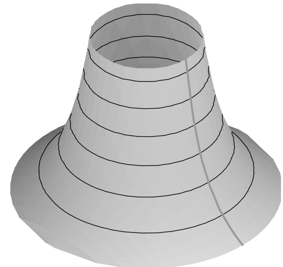
### Équation d'une surface de révolution

Donnons-nous un profil dans le plan $xOz$ sous forme d'une courbe $L$ d'équation $z = p(x)$, où $p : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un intervalle $I \subset [0,+\infty[$.
Soit $\mathcal{S}$ la surface de révolution d'axe $Oz$ et de profil $L$ (figures ci-dessous). Cherchons l'équation de $\mathcal{S}$.
Soit $A \in L$. Puisque $L$ est dans le plan $xOz$, les coordonnées de $A$ sont $\big(r,0,p(r)\big)$, où $r \in I$. Soit $C$ le cercle d'axe $Oz$ passant par $A$ : le cercle $C$ est dans le plan horizontal d'équation $z = p(r)$ et puisque la surface est de révolution, $C$ est inclus dans $\mathcal{S}$. Le rayon de $C$ est la distance de $A$ à $Oz$, c'est-à-dire $r$. On en déduit

$$C = \{\, M:(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} = r \ \text{ et } \ z = p(r)\,\}$$

Pour tout point $M:(x,y,z)$ appartenant à $C$, on a donc $z = p\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.



**Proposition.** *Soit $p : I \to \mathbb{R}$ une fonction, où $I$ un intervalle inclus dans $[0,+\infty[$, et soit $L$ la courbe d'équation $z = p(x)$ dans le plan $xOz$. La surface de révolution d'axe $Oz$ et de profil $L$ a pour équation $z = p\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.*

Réciproquement, considérons une surface d'équation $z = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, où $g$ est une fonction $I \to \mathbb{R}$. Sa section par un plan horizontal d'équation $z = k$ est formée des points $M : (x, y, k)$ tels que $g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = k$, c'est-à-dire $x^2+y^2 = r^2$, où $r$ est une solution de l'équation $g(t)=k$ d'inconnue $t \in I$ : cette section est donc une réunion de cercles d'axe $Oz$. Il s'ensuit que la surface d'équation $z = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ est de révolution d'axe $Oz$. Son profil dans le demi-plan $xOz, x \geqslant 0$ a pour équation $z = g\left(\sqrt{x^2+0^2}\right)$, c'est-à-dire $z = g(x)$, car $\sqrt{x^2} = x$ pour tout $x \geqslant 0$.

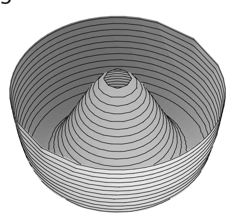
Une surface est de révolution si son équation est de la forme $z = g(x^2+y^2)$, où $g$ est une fonction.

**Exemple 1.** Prenons comme profil dans $xOz$ la demi-parabole d'équation $z = x^2$, $x \geqslant 0$. Ce profil étant défini par la fonction $p : x \mapsto x^2$, l'équation de $\mathcal{S}$ est $z = p\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2+y^2$.

On retrouve bien le paraboloïde de l'exemple 1 page 204.

**Exemple 2**

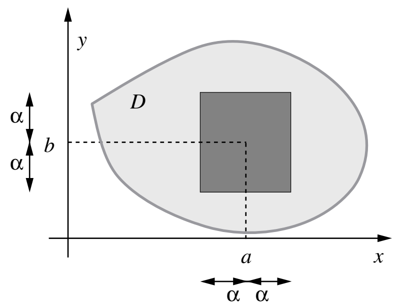
La surface représentée ci-contre est de révolution : son profil est une « courbe en U ». Chaque ligne de niveau est la réunion de deux cercles concentriques, sauf celle de niveau le plus inférieur qui est formée d'un seul cercle.



## 10.4 DÉRIVÉES PARTIELLES

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et soit $(a,b) \in D$.

Supposons qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ assez petit pour que le carré de centre $(a,b)$ et de coté $2\alpha$ soit contenu dans $D$. Pour tout $(x,y)$, on a donc l'implication : $(\,|x-a| < \alpha$ et $|y-b| < \alpha\,) \Longrightarrow (x,y) \in D$.
En particulier, $f(x,b)$ est défini pour tout $x \in \,]a-\alpha, a+\alpha[$.
De même, $f(a,y)$ est défini pour tout $y \in \,]b-\alpha, b+\alpha[$.




**Définition.** Si la fonction $x \mapsto f(x,b)$ est dérivable en $a$, sa dérivée en $a$ se note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ et s'appelle la *dérivée partielle de f par rapport à x au point* $(a,b)$.
De même, si la fonction $y \mapsto f(a,y)$ est dérivable en $b$, sa dérivée en $b$ se note $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ et s'appelle la *dérivée partielle de f par rapport à y au point* $(a,b)$.

Si $f$ a des dérivées partielles en tout point de $D$, les fonctions $(a,b) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ et $(a,b) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ s'appellent simplement les dérivées partielles de $f$.

Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, on bloque $y$ et l'on dérive la fonction de $x$ obtenue.
Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, on bloque $x$ et l'on dérive la fonction de $y$ obtenue.

**Exemples**

**1)** La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy$ a pour dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto x$

**2)** Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y) = x^2 - 2y^3$. Les dérivées partielles de $g$ sont $\dfrac{\partial g}{\partial x} : (x,y) \mapsto 2x$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y} : (x,y) \mapsto -6y^2$.

La notion de continuité se généralise de manière naturelle aux fonctions de deux variables : en voici la définition.

**Définition.** Une fonction de deux variables $f : D \to \mathbb{R}$ est *continue en* $(a,b) \in D$ si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un carré $K$ de centre $(a,b)$ et de coté $\alpha > 0$ assez petit pour que

$$K \subset D \quad \text{et} \quad \Big((x,y) \in K \Longrightarrow \big|f(x,y) - f(a,b)\big| < \varepsilon\Big)$$

On montre facilement les propriétés suivantes.

- Si $h$ est une fonction d'une variable continue en $r$, alors la fonction $(x,y) \mapsto h(x)$ est continue en tout point $(r,y)$ et la fonction $(x,y) \mapsto h(y)$ est continue en tout point $(x,r)$.
- Si $f$ et $g$ sont continues en $(a,b)$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les fonctions $\lambda f$, $f+g$ et $fg$ sont contines en $(a,b)$.
- Si $f$ est continue en $(a,b)$ et si $f(a,b) \neq 0$, alors la fonction $(x,y) \mapsto \frac{1}{f(x,y)}$ est continue en $(a,b)$.

**Définition.** Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Si $f$ a des dérivées partielles continues en tout point de $D$, on dit que $f$ est *continument dérivable.*

Voici un résultat-clef très utile. Nous l'admettons.

**Théorème de dérivation**. *Soit $f : D \to \mathbb{R}^2$ une fonction continument dérivable. Soit $u : t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ une fonction à valeurs dans $D$.*
*Si $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont des fonctions dérivables en $t_0$, alors la fonction composée $f \circ u : t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big)$ est dérivable en $t_0$ et sa dérivée est*

$$\boxed{(f\circ u)'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t_0),y(t_0)\big)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t_0),y(t_0)\big)y'(t_0)}$$

Pour retenir la formule ci-dessus, pensez à la règle de dérivation en chaine pour une fonction composée : $t$ intervient dans $f\big(x(t),y(t)\big)$

– *via* $x(t)$ et $f$, d'où le terme $\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t_0),y(t_0)\big)x'(t_0)$

– et aussi *via* $y(t)$ et $f$, d'où le terme $\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t_0),y(t_0)\big)y'(t_0)$.

**Exemple.** Prenons la fonction $f : (x,y) \mapsto x\ln y$ définie sur le demi-plan $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. Les dérivées partielles de $f$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto \ln y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto \frac{x}{y}$$

Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $u(t) = \big(x(t),y(t)\big) = (2t, 1+3t^2)$. Puisque $1+3t^2 > 0$ quel que soit $t$, la fonction composée $f\circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$. On a $(f\circ u)(t) = 2t\ln(1+3t^2)$ et il vient

$$\begin{aligned}(f\circ u)'(t) &= 2\ln(1+3t^2) + 2t\frac{6t}{1+3t^2}\\ &= \big(\ln y(t)\big)\times x'(t) + \frac{x(t)}{y(t)}\times y'(t)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\end{aligned}$$

### Vecteur Gradient

**Définition.** Soit $f : D \to \mathbb{R}^2$ une fonction ayant des dérivées partielles sur $D$ et soit $(a,b) \in D$. Le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$ se note $\operatorname{Grad} f(a,b)$ et s'appelle le *vecteur gradient de $f$ en $(a,b)$*.

Rappelons que si $u(t) = \big(x(t),y(t)\big)$ est une fonction dérivable à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, le vecteur dérivé (page 152) est $u'(t) = \big(x'(t),y'(t)\big)$.
En notant $\cdot$ le produit scalaire, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big)y'(t) = \big[\operatorname{Grad} f\big(x(t),y(t)\big)\big]\cdot u'(t)$$

Si $f$ est continument dérivable, la formule pour dériver $f \circ u$ s'écrit

$$(f \circ u)'(t) = \big[\mathrm{Grad}\, f\big(x(t), y(t)\big)\big] \cdot u'(t)$$

## 10.5 PLANS TANGENTS À UNE SURFACE

Dans la suite, $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction continument dérivable et $\mathcal{S}$ est la surface d'équation $z = f(x, y)$.

### Courbe tracée sur une surface

Rappelons qu'on a défini la notion de courbe paramétrée dans l'espace page 165.

**Définition.** Soit $c : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée dans l'espace. On dit que la courbe $c$ est *tracée sur* $\mathcal{S}$ si pour tout $t \in I$, on a $c(t) \in \mathcal{S}$.

Si l'on pose $c(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, alors la courbe $c$ est tracée sur $\mathcal{S}$ si et seulement si

$$\text{pour tout } t \in I\,,\ z(t) = f\big(x(t), y(t)\big).$$

### Courbes passant par un point donné de $\mathcal{S}$

Soit $A : (x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathcal{S}$ et soit $c : t \mapsto c(t)$ une courbe dérivable, tracée sur $\mathcal{S}$ et passant par $A$ : il existe $t_0 \in I$ tel que

$$(x_0, y_0, z_0) = \big(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\big) = c(t_0)\,.$$

Si le vecteur dérivé $c'(t_0) = \big(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\big)$ n'est pas nul, il dirige la tangente en $A$ à la courbe $c$ (page 165). Puisque $z(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$, on a d'après le théorème de dérivation page 210 :

$$c'(t_0) = \left(x'(t_0)\,,\ y'(t_0)\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y'(t_0)\right)$$

Cette égalité vectorielle s'écrit encore :

$$c'(t_0) = x'(t_0)\,U + y'(t_0)\,V \qquad (1)$$

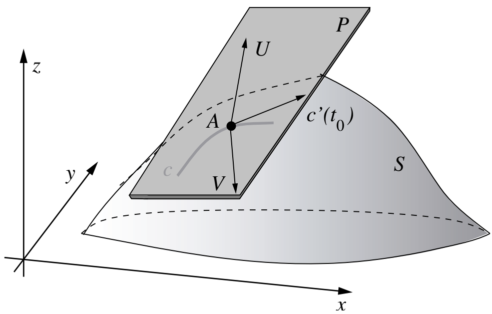
où l'on a posé

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

Faisons deux observations importantes sur ce résultat.

- Les vecteurs $U$ et $V$ sont indépendants (en raison de leurs deux premières coordonnées).
- Ils ne dépendent que de $f$ et de $A$, mais ni de $t_0$, ni de la courbe $c$.

Soit $P$ le plan vectoriel engendré par $U$ et $V$. Considérons toutes les courbes dérivable tracées sur $\mathcal{S}$ et passant par $A$. Si une telle courbe a, au point $A$, un vecteur dérivé non nul, alors sa tangente en $A$ est dirigée par un vecteur combinaison linéaire de $U$ et $V$, donc appartenant à $P$.




## Plan tangent en un point

**Définitions.** Soit $A \in \mathcal{S}$ le point de coordonnées $(x_0, y_0, z_0)$ et soit $U$ et $V$ les vecteurs définis ci-dessus.
Le plan de l'espace ayant comme repère $(A; U, V)$ s'appelle le *plan tangent en A à la surface $\mathcal{S}$*.
La droite passant par $A$ et orthogonale au plan tangent s'appelle la *normale à $\mathcal{S}$ en $A$*.

Cherchons un vecteur directeur $N$ de la normale à $\mathcal{S}$ en $A$ : on dit que $N$ est un *vecteur normal* en $A$ à $\mathcal{S}$.
Il suffit de calculer le produit vectoriel de $U$ et $V$ (voir le tome d'Algèbre) :

$$N = U \wedge V = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ -\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Proposition.** *Le plan tangent en $A : (x_0, y_0, z_0)$ à la surface $\mathcal{S}$ est le plan passant par A et orthogonal au vecteur*

$$N = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\ ,\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\ ,\ 1\right)$$

*La normale à $\mathcal{S}$ en $A$ est dirigée par N.*

On en déduit que l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en $A$ est

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)(x - x_0) + \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)(y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

L'équation du plan tangent au point $A : (x_0, y_0, z_0)$ de $\mathcal{S}$ est

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

**Exemple.** Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $z = xy^2$. Les dérivées partielles de $f$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto y^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto 2xy$$

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, le plan tangent à $\mathcal{S}$ en $A : (a, b, ab^2)$ a donc pour équation : $z - ab^2 = b^2(x - a) + 2ab(y - b)$.
En un point $(a,0,0)$, l'équation du plan tangent est $z = 0$, donc ce plan est $xOy$.

## 10.6 EXTREMUM

**Définitions.** Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et soit $(x_0, y_0) \in D$.

- $f$ a un *maximum en* $(x_0, y_0)$ si l'on a $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ quel que soit $(x, y) \in D$.
- $f$ a un *maximum local en* $(x_0, y_0)$ s'il existe un nombre $\alpha > 0$ assez petit pour que le carré $K$ de centre $(x_0, y_0)$ et de coté $\alpha$ soit inclus dans $D$ et qu'on ait $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ quel que soit $(x, y) \in K$.

On définit de même un *minimum* et un *minimum local*.

**Théorème.** *Soit $f$ une fonction continument dérivable. Si $f$ a un extremum local en $(x_0, y_0)$, alors* $\mathrm{Grad} f(x_0, y_0) = 0$.

**Démonstration.** Supposons par exemple que $f$ a un maximum local en $(x_0, y_0)$. Alors la fonction dérivable $x \mapsto f(x, y_0)$ a un maximum local en $x_0$, donc sa dérivée en $x_0$ est nulle : on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. De même, la fonction $y \mapsto f(x_0, y)$ a un maximum local en $y_0$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Ainsi le vecteur gradient en $(x_0, y_0)$ a ses deux coordonnées nulles. ❏

Les points où $f$ a un extremum sont à chercher parmi les solutions du système d'équations

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Il se peut fort bien que les dérivées partielles de $f$ soient nulles en $(x_0, y_0)$ mais que la fonction n'ait pas d'extremun local en ce point (exemple **1** ci-après). Vous avez déjà rencontré cette situation dans le cas d'une fonction d'une variable : la dérivée peut s'annuler en $a$ sans qu'il y ait d'extremum local en $a$ (pensez à la fonction $x \mapsto x^3$ qui est strictement croissante et dont la dérivée en 0 est nulle).

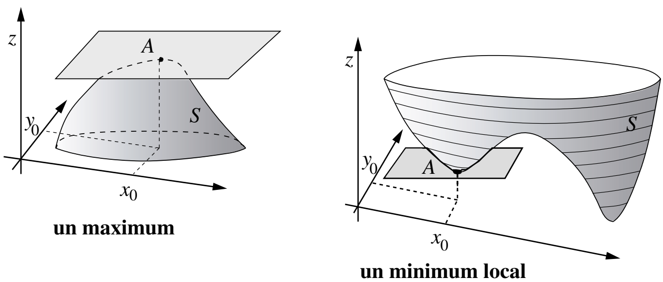
En un point où le vecteur gradient s'annule, il n'est pas toujours facile de décider si la surface présente effectivement un maximum ou un minimum (exemple **2** ci-après).

**Corollaire.** *Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $z = f(x, y)$, où $f$ est continument dérivable. Soit $A : (x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathcal{S}$.*

- *Le plan tangent à $\mathcal{S}$ au point $A$ est horizontal si et seulement si* $\mathrm{Grad} f(x_0, y_0) = 0$.
- *Si $f$ a un extremum local en $(x_0, y_0)$, alors au point $A$, le plan tangent à $\mathcal{S}$ est horizontal.*
- *S'il y a un maximum local en $A$, alors tous les points de $\mathcal{S}$ assez proches de $A$ sont en dessous du plan tangent. S'il y a un minimum local, tous les points de $\mathcal{S}$ assez proches de $A$ sont au dessus du plan tangent.*

**Démonstration.** Le plan tangent en $A$ est horizontal si et seulement si le vecteur normal en $A$ est colinéaire au vecteur directeur $\overrightarrow{k}$ de $Oz$, c'est-à-dire si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$.

Si $f$ a un extremum local en $(x_0, y_0)$, alors d'après le théorème précédent, les dérivées partielles de $f$ en $(x_0, y_0)$ sont nulles, donc le plan tangent en $A$ est horizontal. ❑




**Exemple 1.** Soit la fonction $f : (x, y) \mapsto xy$.

On a $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x$, donc $\left(\text{Grad } f(x, y) = 0 \iff x = y = 0\right)$.

- Si $x$ et $y$ sont de même signes, alors $f(x, y) > 0 = f(0,0)$. Si $x$ et $y$ sont de signes contraires, alors $f(x, y) < 0 = f(0,0)$. La fonction $f$ n'a donc pas d'extremum local en $(0,0)$.
- Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $z = xy$. Au point $O : (0,0,0)$, le plan tangent à $\mathcal{S}$ est le plan horizontal $xOy$, mais aussi près qu'on veut de $O$, il y a des points de $\mathcal{S}$ qui sont au dessus de $xOy$ et des points de $\mathcal{S}$ qui sont en dessous (la surface est représentée page 207).

**Exemple 2.** Soit la fonction $f : (x, y) \mapsto 2x + 4y - x^2 - y^4$.

**a)** En quels points la fonction $f$ peut-elle avoir un extremum local ?
On résout :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 4 - 4y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

C'est seulement en $(1, 1)$ que $f$ peut avoir un extremum local.

**b)** La fonction $f$ a-t-elle un extremum local en $(1, 1)$ ?

Posons $x = 1 + u$ et $y = 1 + v$. On a $f(1,1) = 4$ et par un simple calcul, on montre l'égalité :

$$f(x, y) = 4 - u^2 - v^2(6 + 4v + v^2)$$

Pour tout $v \in \mathbb{R}$, on a l'égalité $6 + 4v + v^2 = (v + 2)^2 + 2 > 0$, donc $v^2(6 + 4v + v^2) \geqslant 0$. On en déduit

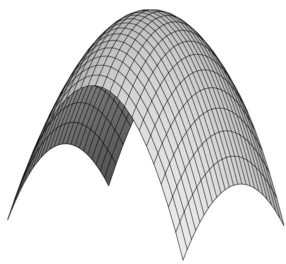
$$-u^2 - v^2(6 + 4v + v^2) \leqslant 0 \quad \text{pour tout } u \text{ et } v$$

donc $$f(x,y) \leqslant 4 = f(1,1) \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

La fonction $f$ a donc un maximum en $(1,1)$ et ce maximum vaut 4.

**c)** Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $z = f(x,y)$. Quelle est la position de $\mathcal{S}$ par rapport à son plan tangent au point $A : (1,1,4)$ ?

Le plan tangent en $A$ est horizontal et comme $f$ a un maximum en $(1,1)$, la surface $\mathcal{S}$ est entièrement située en dessous de ce plan tangent. Voici l'allure locale de la surface au point $A$.



## EXERCICES

**10.1** **a)** Dessiner le graphe de la fonction $p : x \mapsto \dfrac{x^2}{1 + x^2}$ sur $[0,+\infty[$.

**b)** En déduire un dessin de la surface d'équation $z = \dfrac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}$.

**10.2** Pour chacune des surfaces suivantes, dessiner des lignes de niveau, puis représenter la surface.

**a)** $z = 4 + x + y$ ; reconnaître cette surface.

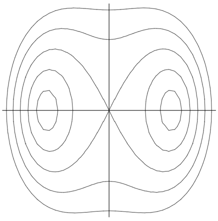
**b)** $z = e^x$

**c)** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; reconnaître cette surface.

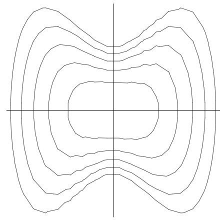
**d)** $z = 1 - x^2 - y^2$

**10.3** Associer à chaque dessin de lignes de niveau (**a**), (**b**), (**c**), ou (**d**) la surface correspondante (**i**), (**ii**), (**iii**) ou (**iv**). Dans chaque cas, les lignes représentées correspondent à des niveaux régulièrement espacés.

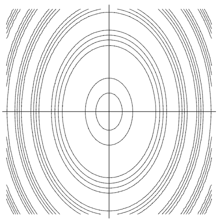
**a)**



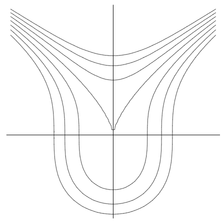
**b)**



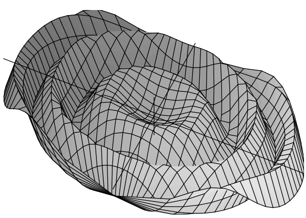
**c)**



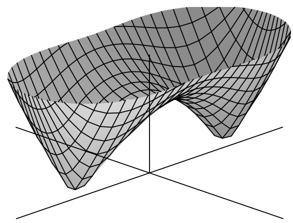
**d)**



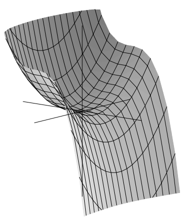
**(i)**



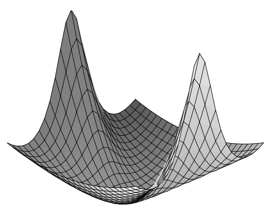
**(ii)**



**(iii)**



**(iv)**



**10.4** Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \frac{y}{x} \quad ; \quad g(x,y) = ye^{xy} \quad ; \quad h(x,y) = xe^{\frac{y}{x}} \quad ;$$

$$k(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

**10.5** Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $z = 1 - x^2 - 2y^2$.

**a)** Calculer le vecteur normal en un point $A \in \mathcal{S}$ de coordonnées $(a,b,c)$. Quelle est l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en $A$ ?

**b)** Existe-t-il des points de $\mathcal{S}$ où le plan tangent est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ ?

**10.6** Soit $f : (x,y) \mapsto 2x + 4y - x^2 - 2y^2$ et soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $z = f(x,y)$.
**a)** En quel point de $\mathcal{S}$ le plan tangent est-il horizontal ?
**b)** On coupe $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $x = 1$ : dessiner la courbe d'intersection. Même question quand on coupe $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $y = 1$.
**c)** Calculer $f(1+u, 1+v)$. En déduire que la fonction $f$ a un maximum ; quelle est la valeur de ce maximum ?

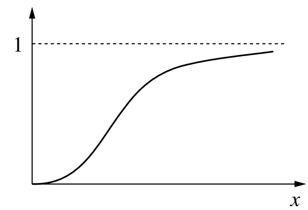
**10.7** Les fonctions $f$ suivantes ont-elles un extremum local en (0,0) ? Pensez à calculer le vecteur gradient en (0,0) et à couper la surface correspondante par des plans verticaux passant par l'origine.
**a)** $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$ **b)** $(x,y) \mapsto x^2 + y^3$
**c)** $(x,y) \mapsto 1 - x^2 - y^4$ **d)** $(x,y) \mapsto x + x^2 + y^2$
**e)** $(x,y) \mapsto e^{x^2+y^2}$ **f)** $(x,y) \mapsto xy(x+y)$

**10.8** Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^3 + 2xy$ et soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $z = f(x,y)$.
**a)** En quels points de $\mathcal{S}$ le plan tangent est-il horizontal ?
**b)** On coupe la surface par le plan d'équation $y = 0$ : dessiner la courbe obtenue. Même question quand on coupe la surface par le plan d'équation $x = 0$. La fonction $f$ a-t-elle un extremum local à l'origine ?
**c)** Montrer que $f\left(-\frac{2}{3} + u, \frac{2}{3} + v\right) + \frac{4}{27} = (u+v)^2 + v^2(1+v)$. En déduire que la fonction $f$ a un minimum local en $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

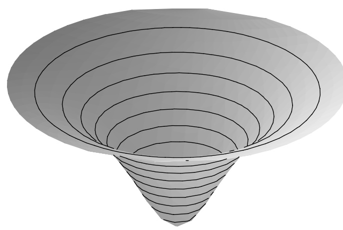
**10.9** On considère l'ensemble $\mathcal{S} = \{M : (x,y,z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.
**a)** Montrer que $\mathcal{S}$ est la réunion de deux surfaces de révolution d'axe $Oz$ symétriques par rapport au plan $xOy$. Dessiner $\mathcal{S}$.
**b)** Montrer que l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan d'équation $x = 1$ est la réunion de deux droites $D$ et $D'$ perpendiculaires.
**c)** En déduire qu'on obtient la surface $\mathcal{S}$ en faisant tourner la droite $D$ (ou la droite $D'$) par rotation d'axe $Oz$.

## SOLUTIONS

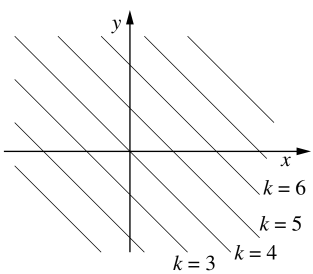
**10.1** **a)** Graphe de $p$ sur $[0,+\infty[$ :



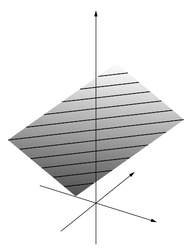

**b)** L'équation de la surface est $z = p(x^2 + y^2)$, donc c'est une surface de révolution d'axe $Oz$ et de profil la courbe ci-dessus : on obtient la surface en faisant tourner cette courbe par rotation d'axe $Oz$.



**10.2** **a)** La surface est un plan (non horizontal), donc les lignes de niveau sont des droites parallèles : la ligne de niveau $k$ est la droite d'équation $x + y = k - 4$.

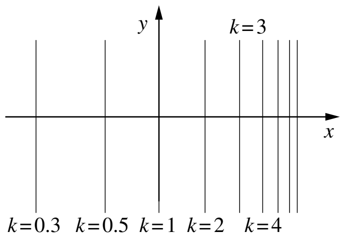



Des lignes de niveau

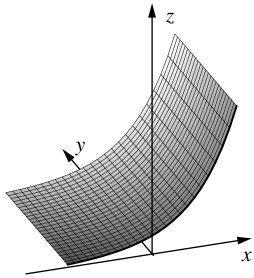


Plan d'équation $z = 4 + x + y$

**b)** La ligne de niveau $k > 0$ est la droite d'équation $x = \ln k$, parallèle à $Oy$. Ces lignes de niveau sont d'autant plus rapprochées que leur niveau est grand : sur la surface, la plus grande pente augmente avec le niveau. La surface est constituée de droites horizontales parallèles à $Oy$. Pour la visualiser, on dessine la courbe $z = e^x$ dans le plan $xOz$ et l'on pose dessus des droites parallèles à $Oy$.

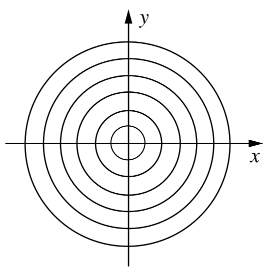



Des lignes de niveau

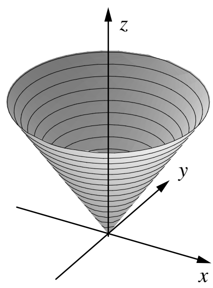



Surface d'équation $z = e^x$

**c)** C'est une surface de révolution d'axe $Oz$, de profil la demi-droite d'équation $y = x$ ,$x \geqslant 0$ : il s'agit donc d'un cône d'axe $Oz$, de sommet $O$ et d'angle $\pi/4$. La ligne de niveau $k > 0$ est le cercle centré à l'origine et de rayon $k$. Sur la figure de gauche ci-dessous, on voit des lignes de niveau correspondant à des niveaux régulièrement espacés : les rayons sont en progression arithmétique. Cela correspond au fait que, sur le cône, la plus grande pente est celle d'une génératrice, donc est constante.

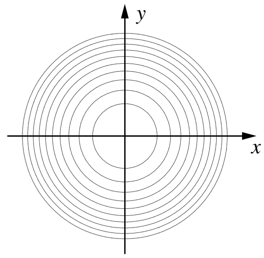



Des lignes de niveau

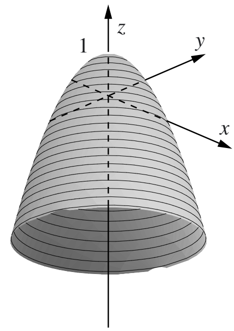



Cône d'équation $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

**d)** Partons de la surface d'équation $z = x^2 + y^2$ (exemple **1**, page 204) : par symétrie par rapport $xOy$, on obtient la surface d'équation $z = -x^2 - y^2$, et il suffit ensuite de faire la translation de vecteur $\overrightarrow{k}$ pour obtenir la surface demandée. La ligne de niveau $k < 1$ est le cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt{1-k}$.La figure de gauche montre des lignes de niveau correspondant à des niveaux régulièrement espacés : ils sont de plus en plus rapprochés à mesure que le niveau diminue, ce qui correspond au fait que, sur le paraboloïde, la plus grande pente augmente à mesure qu'on s'éloigne de l'axe.




Des lignes de niveau




Paraboloïde d'équation $z = 1 - x^2 - y^2$

**10.3** **(a)-(ii)** ; **(b)-(iv)** ; **(c)-(i)** ; **(d)-(iii)**

**10.4** • $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}$ , $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x}$.

• $\dfrac{\partial g}{\partial x} = y^2\, e^{xy}$ , $\dfrac{\partial g}{\partial y} = e^{xy} + xy\, e^{xy}$.

• $\dfrac{\partial h}{\partial x} = e^{\frac{y}{x}} - \dfrac{y}{x} e^{\frac{y}{x}}$ , $\dfrac{\partial h}{\partial y} = e^{\frac{y}{x}}$.

• $\dfrac{\partial k}{\partial x} = \dfrac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$ , $\dfrac{\partial k}{\partial y} = \dfrac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$.

**10.5** **a)** Posons $f(x,y) = 1 - x^2 - 2y^2$. On a $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -4y$, donc le vecteur normal en $A$ est

$$N = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) \\ -\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ 4b \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Le plan tangent en $A$ a pour équation

$$z - c = -2a(x - a) - 4b(y - b)\,,\ \text{où}\ c = f(a,b) = 1 - a^2 - 2b^2$$

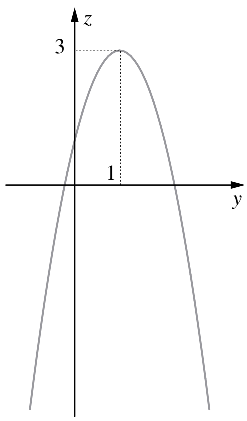
c'est-à-dire $\qquad 2ax + 4by + z - a^2 - 2b^2 - 1 = 0.$

**b)** Le plan tangent en $A$ est orthogonal au vecteur $U = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ si et seulement si le vecteur normal $N$ est colinéaire à $U$. Cela équivaut à $2a = 1$ et $4b = 1$, ou encore $a = 1/2$ et $b = 1/4$. On a alors $c = 1 - a^2 - 2b^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$. Le seul point solution est $A : (1/2, 1/4, 5/8)$.

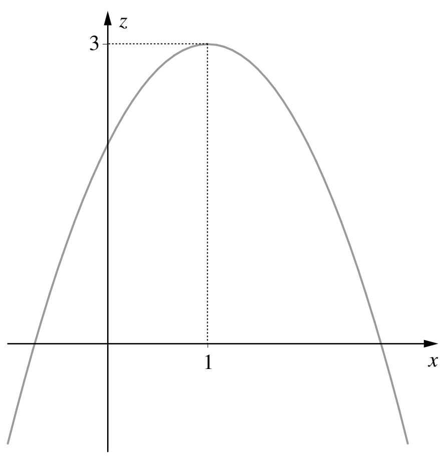
**10.6** **a)** On $\operatorname{Grad} f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 - 2x \\ 4 - 4y \end{bmatrix}$. Le seul point de $\mathcal{S}$ où le plan tangent est horizontal est donc le point $A$ de coordonnées $\big(1, 1, f(1,1)\big) = (1,1,3)$.

**b)** La courbe d'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan d'équation $x = 1$ a pour équation $z = 1 + 4y - 2y^2$. C'est une parabole dans un plan parallèle à $yOz$. Notons-la $P_1$.

L'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan d'équation $y = 1$ a pour équation $z = 2 + 2x - x^2$. C'est une parabole $P_2$ dans un plan parallèle à $xOz$.




Parabole $P_1$




Parabole $P_2$

**c)** On a $f(1+u, 1+v) = 3 - u^2 - 2v^2$. Puisque $u^2 + 2v^2 \geqslant 0$ pour tout $(u,v)$, on en déduit $f(x,y) \leqslant 3 = f(1,1)$ quel que soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $f$ a pour maximum 3 et ce maximum est atteint en $(1,1)$.

**10.7** **a)** Si l'on coupe la surface d'équation $z = x^2 - y^2$ par le plan d'équation $x = 0$, on obtient la parabole d'équation $z = -y^2$ du plan $yOz$ : ses branches sont dirigées vers le bas. Si l'on coupe par le plan d'équation $y = 0$, on obtient la parabole d'équation $z = x^2$ du plan $xOz$ : ses branches sont dirigées vers le haut. La fonction n'a donc pas d'extremum local en (0,0).
Il revient au même de remarquer que l'on a $f(0,y) = -y^2 < 0 = f(0,0)$ pour tout $y \neq 0$ et $f(x,0) = x^2 > 0 = f(0,0)$ pour tout $x \neq 0$.

**b)** Si l'on coupe la surface d'équation $z = x^2 + y^3$ par le plan d'équation $x = 0$, on obtient la courbe d'équation $z = y^3$ du plan $yOz$. Ainsi, pour tout $y \neq 0, f(0,y)$ a le signe de $y$, donc il n'y a ni maximum local, ni minimum local en (0,0).

**c)** Puisque $x^2 + y^4 \geqslant 0$ pour tout $(x,y)$, on a $f(x,y) \leqslant 1 = f(0,0)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ : la fonction $f$ a donc un maximum en (0,0).

**d)** On a $f(x,0) = x + x^2 = x(1+x)$. Pour tout $x \in ]-1,1[, f(x,0)$ a donc le signe de $x$. Il s'ensuit que $f$ n'a pas d'extremum local en (0,0).

**e)** On a $f(x,y) = e^{x^2+y^2} \geqslant e^0 = 1$ quel que soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ : la fonction $f$ a donc un minimum en (0,0).

**f)** On a $f(x,x) = 2x^3$, donc pour tout $x \neq 0, f(x,x)$ a le signe de $x$. On en déduit que $f$ n'a pas d'extremum local en (0,0).

**10.8** **a)** On a $\operatorname{Grad} f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x+2y \\ 3y^2+2x \end{bmatrix}$, d'où

$$\operatorname{Grad} f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} y = -x \\ 3x^2 + 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ x(3x+2) = 0 \end{cases}$$

$$\iff (x = y = 0) \quad \text{ou bien} \quad (x = -2/3, y = 2/3)$$

On a $f(0,0) = 0$ et $f(-2/3,2/3) = -4/27$. Il y a deux points de $\mathcal{S}$ où le plan tangent est horizontal : le point $A : (0,0,0)$ et le point $B : (-2/3,2/3,-4/27)$.

**b)** Si l'on coupe la surface par le plan d'équation $y = 0$, on obtient la parabole d'équation $z = x^2$dans le plan $xOz$. Si l'on coupe par $x = 0$, on obtient la courbe d'équation $z = y^3$du plan $yOz$. Puisque $f(0,y) = y^3$ a le signe de $y$, la fonction n'a pas d'extremum local en (0,0).

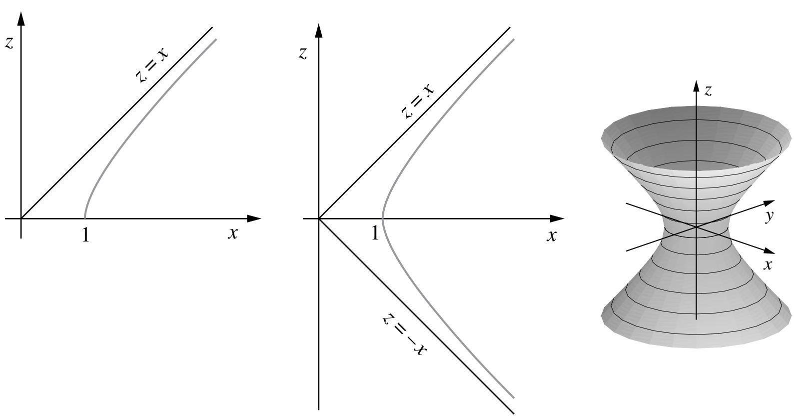
**c)** L'égalité demandée se vérifie par simple calcul. Pour tout $v > -1$, on a $1 + v > 0$, donc $f\left(-\frac{2}{3} + u, \frac{2}{3} + v\right) + \frac{4}{27} \geqslant 0$. Puisqu'on a l'équivalence $\big(v > -1 \Leftrightarrow 2/3 + v > -1/3\big)$, on en déduit que pour tout $(x,y)$ tels que $y > -1/3$, on a $f(x,y) \geqslant -\frac{4}{27} = f\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. La fonction $f$ a donc un minimum local en $(-2/3, 2/3)$ et la valeur de ce minimum est $-4/27$.

**10.9 a)** L'équation de $\mathcal{S}$ équivaut à $\left(z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\right.$ ou $\left.z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}\right)$.

Notons $\mathcal{S}_+$ la surface d'équation $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ et $\mathcal{S}_-$ la surface d'équation $z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$. Alors $\mathcal{S} = \mathcal{S}_+ \cup \mathcal{S}_-$. Les surfaces $\mathcal{S}_+$ et $\mathcal{S}_-$ sont symétriques par rapport au plan $xOy$ et ce sont des surfaces de révolution.

Le profil de $\mathcal{S}_+$ est la courbe d'équation $z = \sqrt{x^2 - 1}$, $x \geqslant 1$ dans le plan $xOz$ : c'est une demi-branche d'hyperbole ayant comme asymptote la droite d'équation $z = x$.

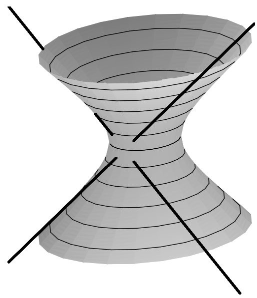
Pour visualiser $\mathcal{S}$, on complète ce profil par symétrie pour avoir une branche complète d'hyperbole, puis on fait tourner la branche d'hyperbole par rotation d'axe $Oz$. On obtient un hyperboloïde de révolution.




Demi-branche et branche de l'hyperbole $z = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ $\mathcal{S}$

**b)** L'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan d'équation $x = 1$ est constitué des points $M : (1, y, z)$ tels que $y^2 - z^2 = 0$, c'est-à-dire $z = \pm y$. L'ensemble des points tels que $x = 1$ et $z = y$ est la droite $D$ passant par $A$ : (1,0,0) et dirigée par le vecteur $U = (0,1,1)$. L'ensemble des points tels que $x = 1$ et $z = -y$ est la droite $D'$ passant par $A$ : (1,0,0) et dirigée par le vecteur $U = (0,1,-1)$. Le produit scalaire $U \cdot U'$ est nul, donc les droites $D$ et $D'$ sont perpendiculaires en $A$.

**c)** Les droites $D$ et $D'$ sont incluses dans $\mathcal{S}$ et sur ces droites, il y a des points de tout niveau. Puisque $\mathcal{S}$ est de révolution, on en déduit que $\mathcal{S}$ s'obtient en faisant tourner $D$, ou $D'$, par rotation d'axe $Oz$.



Les droites $D$ et $D'$

# Index