> 1

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté MISM
Département de Mathématiques

le 11/06/2017

3ème année Licence Mathématiques

Examen de Rattrapage: Introduction à l'analyse Hilbertienne

Durée: 02h

Exercice N° 1 (5 pts) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. On pose $(x,y)_a = (Ax,y)$ où $(.,.)$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$ ($(Ax,y) = y^T Ax$).

1- Pour quelles valeurs du réel a, $\langle .,. \rangle_a$ définit-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

2- Prenons maintenant $a = \frac{1}{2}$. Soit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Représenter graphiquement le vecteur v ainsi que son orthogonal $v^\perp$ et ce, par rapport au produit scalaire $\langle .,. \rangle_{\frac{1}{2}}$.

Exercice N° 2 (10 pts) Soit $H = \{f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 e^{-x} dx < +\infty\}$ muni du produit scalaire $\langle f,g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}dx$.

On définit pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, $L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$.

1- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $\frac{(-1)^n}{n!}$.

2- Vérifier que $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = n!$ et en déduire que $\mathbb{R}[X]$ est inclus dans H.

3- Montrer que $\langle X^k, L_n \rangle = \begin{cases} (-1)^n n! & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{si } k < n. \end{cases}$

En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormée de H.

4- On admet que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans H. Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.

5- Calculer L_3 et en déduire $\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 e^{-x}dx$.

Exercice N° 3 (5 pts) Soit $E = \ell^2$, on définit l'opérateur A par

$$A(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots\right).$$

1- Montrer que A est borné.

2- Déduire que A est inversible et trouver A^{-1}.

3- Utiliser la suite suivante pour démontrer que A^{-1} n'est pas borné:

$$e_n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n, \dots, x_n^n, \dots) \text{ avec } x_i^n = \begin{cases} 1, & \text{si } i = n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques 3ème année Licence Mathématiques

Corrigé de l'examen de Rattrapage Introduction à l'analyse Hilbertienne

Exercice N° 1 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ et $\langle x,y \rangle_a = \langle Ax,y \rangle = y^T A x$.

1- Les valeurs de a pour que $\langle .,. \rangle_a$ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$:

- En écrivant les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ en colonnes. La bilinéarité est évidente et découle de la bilinéarité du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ usuel de $\mathbb{R}^2$.

- La symétrie découle du fait que $A^T = A$. En effet $\langle y,x \rangle_a = \langle Ay,x \rangle = x^T A y = (x^T A y)^T$ car c'est un scalaire

donc $\langle y,x \rangle_a = y^T A^T x = \langle Ax,y \rangle = \langle x,y \rangle_a$.

- La définie-positivité est équivalente à la propriété "définie-positive" de la matrice symétrique A.

Or A sera définie positive si et seulement si

$$\Delta_{11} = 1 > 0 \text{ (claire)} \quad \text{et} \quad \Delta_{22} = \det A = 1 - a^2 > 0.$$

Finalement, $\langle .,. \rangle_a$ est un produit scalaire si et seulement si $1 - a^2 > 0$:

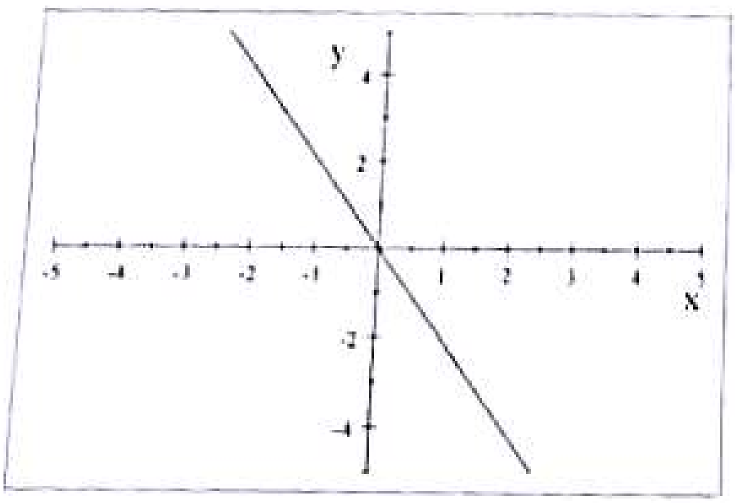
$$1 - a^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < a < 1$$

2- Représentation graphique des vecteurs $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et v^T avec $a = \frac{1}{2}$:

$$v^T = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 / \langle x,v \rangle_{\frac{1}{2}} = 0 \right\}, \quad \text{posons } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ on aura}$$

$$0 = \langle x,v \rangle_{\frac{1}{2}} = (1,0) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 + \frac{1}{2} x_2, \text{ donc}$$

$$v^T = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 + x_2 = 0 \right\}.$$



Exercice N° 2

1- D'après la formule de Leibniz, on a :

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{d^k}{dx^k}(e^{-x})\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{n!}{k!}e^{-x}x^k$$

D'où $L_0(x) = 1$ et pour $n \geq 1$,

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(k!)^2(n-k)!}x^k.$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}x^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n!}{(k!)^2(n-k)!}x^k.$$

C'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $\frac{(-1)^n}{n!}$.

2. Notons $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx$. On a $I_0 = 1$ et si $n \geq 1$, une intégration par parties donne

$$I_n = [-e^{-x}x^n]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}dx = nI_{n-1}.$$

Une récurrence sur n donne $I_n = n!$.
D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n$ est un élément de H, par suite $\mathbb{R}[X] \subset H$.
3. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$. On a

$$\langle x^k, L_n\rangle = \int_0^{+\infty} x^k \frac{e^x}{n!}(x^n e^{-x})^{(n)} e^{-x}dx = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} x^k \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)dx.$$

On intègre par parties n fois (en dérivant à chaque fois x^k et en intégrant $\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$)
Comme les fonctions $\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}(e^{-x}x^n)$ avec $i = 1, \dots, n$ s'annulent en 0 et tendent vers 0 en $+\infty$, on obtient

$$\langle x^k, L_n\rangle = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n}(x^k)e^{-x}x^n dx.$$

Par conséquence, si $n > k$, $\frac{d^n}{dx^n}(x^k) = 0$, et donc $\langle x^k, L_n\rangle = 0$. Si $k = n$, d'après 2, on a

$$\langle x^n, L_n\rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx = (-1)^n I_n = (-1)^n n!.$$

Par suite, pour $n > k$, $\langle L_k, L_n\rangle = 0$, car d'après 1, L_k est un polynôme de degré k et

$$\langle L_n, L_n\rangle = \frac{(-1)^n}{n!}\langle x^n, L_n\rangle = \frac{(-1)^n}{n!}.(-1)^n n! = 1.$$

Ainsi, la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée.

4. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est un polynôme de degré n, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$Vect(1, \ldots, x^n) = Vect(L_0, \ldots, L_n)$, d'où $\mathbb{R}[x] = Vect(L_n, n \in \mathbb{N})$, comme $\mathbb{R}[x]$ est dense dans H, la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale, par suite c'est une base hilbertienne de H.

5. $L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$

On utilisant la norme associée on a

$$\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 e^{-x}dx = \inf_{P\in\mathbb{R}_2[x]} \|x^3 - P\|^2 = |\langle x^3, L_3\rangle|^2$$

où $P_{\mathbb{R}_2[x]}$ est la projection orthogonale sur l'espace des polynômes de degré ≤ 2 (qui est de dimension 3). Or d'après 3. $\langle x^3, L_3\rangle = (-1)^3 3! = -6$, ainsi

$$\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 e^{-x}dx = |\langle x^3, L_3\rangle|^2 = 36.$$

Exercice N° 3

1- $\forall x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell^2$:

$$\|A(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|x_i|^2}{i^2} \leq 1 \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 = \|x\|^2 < \infty$$

Donc l'opérateur A est borné.

2- A est inversible car A est injectif.

Son inverse est donné par

$$A^{-1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots, nx_n, \ldots)$$

3- Cependant A^{-1} est non borné. En effet, si

$$e_n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n, \ldots, x_n^n, \ldots) \text{ avec } x_i^n = \begin{cases} 1, & \text{si } i = n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

on a $\|e_n\| = 1$ et $\|A^{-1}e_n\| = n$, donc A^{-1} n'est pas borné.