Solution du Série n°1 d'Algèbre 1
1ère année Math et Informatiques

Exo1:

1: $x\in\mathbb{R}$, $x^2=4 \Leftarrow x=2$

2: $z\in\mathbb{R}$, $z=\overline{z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

3: $x\in\mathbb{R}$, $x=\pi \Rightarrow e^{ix\pi}=1$

Exo2:

1, Les assertions fausses ou vraies? et leurs négations.

(a): fausse, car sa négation qui est $\forall x\in\mathbb{R}, \exists y\in\mathbb{R}: x+y\leq 0$ est vraie.
Etant donné $x\in\mathbb{R}$, il existe toujours un $y\in\mathbb{R}$ telque $x+y\leq 0$.
Par exemple on peut prendre $y=-(x+1)$ et alors $x+y=x-x-1$
$=-1\leq 0$

(b): est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y=-x+1$
et alors $x+y=1>0$. la négation de (b) est $\exists x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R}: x+y\leq 0$

(c): $\forall x\in\mathbb{R}$ $\forall y\in\mathbb{R}$, $x+y>0$ est fausse, par exemple $x=-1$, $y=0$.
la négation est $\exists x\in\mathbb{R}, \exists y\in\mathbb{R}: x+y\leq 0$

(d) est vraie, on peut prendre $x=-1$. La négation est $\forall x\in\mathbb{R}, \exists y\in\mathbb{R}: y^2\leq x$

Exo3: Dans $\mathbb{R}^2$, on définit les ensembles

1: $F_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\leq 0\}$, $F_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, xy\geq 1, x\geq 0\}$
on note M_1M_2 la distance usuelle entre deux points M_1 et M_2 de $\mathbb{R}^2$.
L'evaluation des propositions:

1: $\forall \varepsilon\in\,]0,+\infty[, \exists M_1\in F_1, \exists M_2\in F_2 : M_1M_2<\varepsilon$.
Cette proposition est vraie. En effet soit $\varepsilon>0$, définissons $M_1=(\frac{2}{\varepsilon},0)\in F_1$
et $M_2=(\frac{2}{\varepsilon},\frac{\varepsilon}{2})\in F_2$ alors $M_1M_2=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

$M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

ceci est vraie quelques soit $\varepsilon > 0$. la proposition est donc démontrée

2- Soit deux points fixées M_1, M_2 vérifiant cette proposition, la distance $d = M_1M_2$ est aussi petite que l'on veut donc elle est nulle, donc $M_1 = M_2$ ~~vérifiant~~ or les ensembles F_1 et F_2 sont disjoints. Donc la proposition est fausse. La négation de cette proposition est :

$\forall M_1 \in F_1, \forall M_2 \in F_2, \exists \varepsilon \in]0, +\infty[: M_1M_2 \geq \varepsilon$

et cela exprime le fait que les ensembles F_1 et F_2 sont disjoints.

3- Celle ci est également fausse, en effet supposons qu'elle soit vraie, soit alors ε correspondant à cette proposition.

soit $M_1 = (\varepsilon + 2, 0)$ et $M_2 = (1, 1)$, on a $M_1M_2 > \varepsilon + 1$ ce qui est absurde.

La négation est :

$\forall \varepsilon \in]0, +\infty[, \exists M_1 \in F_1, \exists M_2 \in F_2 : \quad M_1M_2 > \varepsilon$

c'est à dire que l'on peut trouver deux points aussi éloignés l'un de l'autre que l'on veut.

4- cette proposition est vraie, il suffit de choisir $\varepsilon = M_1M_2 + 1$. Elle signifie que la distance entre deux points donnés est un nombre fini !

Exo4: La négation est

"il existe un abitant de la rue du Huvre qui a les yeux bleu, qui ne gagnera pas au loto ou qui prendra sa rétraite après 50 ans."

$\forall x \in \mathbb{R} : P$ et Q la négation : $\exists x \in \mathbb{R} : \bar{P}$ ou $\bar{Q}$

Exo5 : La négation :

1 = "Il existe un triangle rectangle qui n'a pas d'angle droit"

Bien sûre cette dernière phrase est fausse !

2 = "Il existe une écurie dans laquelle il y a (au moins) un cheval dont la couleur n'est pas noire".

3 = Sachant que la proposition en langage mathématique s'écrit :

$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{Z} \quad \{ z < x \Rightarrow z < x + 1 \}$

la négation est : $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z} \quad \{ z < x \text{ et } z \geq x + 1 \}$

$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : P \Rightarrow Q \iff \exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z} : P \text{ et } \bar{Q}$

4 = $\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0 : \{ |x - \frac{7}{5}| < \alpha \text{ et } |5x - 7| \geq \varepsilon \}$

Exo6 : Traduction en terme de quantificateurs

1 : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) \leq M$,

2 : $\exists M \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : \quad m \leq f(x) \leq M$.

3 : $\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = f(-x)$

4 : $\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = -f(-x)$

5 : $\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) \neq 0$

6 : $\exists a \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x+a) = f(x)$

7 : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \{ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \}$

8 : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \{ x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \}$

9 : $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0$

10 : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \{ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \}$

11 : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = n$

12. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq g(x)$

13. $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) > g(x)$

Exo7: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La négation des énoncés :

* Dans ce corrigé, nous donnons une justification, ce qui n'était pas demandé

Cette assertion se décompose de la manière suivante :

1. (Pour $x \in \mathbb{R}^*$) ($f(x) \leq 1$). La négation de "(pour tout $x \in \mathbb{R}^*$)" est "il existe $x \in \mathbb{R}^*$" et la négation de "($f(x) \leq 1$)" est "$f(x) > 1$". Donc la négation de l'assertion complète est "il existe $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) > 1$"

2. Rappelons comment se traduit l'assertion : "L'application f est croissante" : "pour tout couple de réels (x_1, x_2), si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$"
Cela se décompose en : "(pour tout couple de réels x_1 et x_2) ($x_1 \leq x_2$ implique $f(x_1) \leq f(x_2)$)".
La négation de la première partie est : "(il existe un couple de réels (x_1, x_2))" et la négation de la deuxième partie est "($x_2 \leq x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$)"
Donc la négation de l'assertion complète est :
"il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leq x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$".

3. La négation est : "l'application f n'est pas croissante ou n'est pas positive". On a déjà traduit "l'application f n'est pas croissante", traduisons "l'application f n'est pas positive" : "il existe $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$".
Donc la négation de l'assertion complète est :
"il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leq x_2$ et $f(x_1) \geq f(x_2)$, ou il existe $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$".

4: Cette assertion se décompose de la manière suivante : "(Il existe $x \in \mathbb{R}^+$) ($f(x) \leq 0$)". La négation de la première partie est : "(pour tout $x \in \mathbb{R}^+$), et celle de la seconde est : "($f(x) > 0$)". Donc la négation de l'assertion complète est : "Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) > 0$".

5: Cette assertion se décompose de la manière suivante : "$(\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) (x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$". La négation de la première partie est : "$(\forall x \in \mathbb{R})$", celle de la seconde est "$(\exists y \in \mathbb{R})$", et celle de la troisième est : "$(x < y$ et $f(x) \leq f(y))$". Donc la négation de l'assertion complète est : "$\forall x \in \mathbb{R}$; $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$ et $f(x) \leq f(y)$".

Exo8 :

Remarquons d'abord que pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n+1}{n+2} \leq 2$ car $2n+1 \leq 2(n+2)$

Etant donné $\varepsilon > 0$, nous avons donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon$$

Maintenant nous cherchons une condition sur n pour que l'inégalité

$$2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$$

soit vraie.

$$2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} \Leftrightarrow (2-\varepsilon)(n+2) < 2n+1$$
$$\Leftrightarrow 3 < \varepsilon(n+2)$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 2$$

Ici ε nous est donné, nous prenons un $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{3}{\varepsilon} - 2$, alors pour tout $n \geq N$ nous avons $n \geq N > \frac{3}{\varepsilon} - 2$ et par conséquent : $2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$.

Conclution : étant donné $\varepsilon > 0$, nous avons trouvé un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$ et $\frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon$.

En fait nous venons de prouver que la suite de terme $\frac{2n+1}{n+2}$ tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$

Exo9 :

1) : Montrons par l'absurde qu'un rectangle a pour aire $170 m^2$ sa longueur est supperieur à 13m :

- Supposons que L est la longueur est inférieure ou égale à 13 et donc la largeur l aussi ainsi

$L \leq 13 \Rightarrow l \times L \leq 13$ or $l < 13 \Rightarrow 13 l \leq 13 \times 13$ donc $L \times l \leq 169$. Donc l'aire du régtangle ne peut pas être égale à 17[0] donc il y a une contradiction

2) : Par l'absurde, montrons que si n est le carré d'un nombre entier non nul alors 2n n'est pas le carré d'un nombre entier :

- Soit n le carré d'un nombre entier strictement positive, supposons que 2n est aussi le carré d'un nombre entier ~~non~~ positife q

Alors on a : $2n = q^2$ et $n = m^2$ donc $2m^2 = q^2$ (n تعويض)

donc : $2 = \left(\frac{q}{n}\right)^2$ donc : $\sqrt{2} = \frac{q}{n}$ or $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel ~~(voir démonstration dans le co)~~ il y a donc une contradiction avec $\frac{q}{n}$ est rationnel. c'est absurde.

3: Par l'absurde, montrons que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel

- supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel, alors ~~on peut~~

$\exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}^* : \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $\frac{p}{q}$ est irréductible

c'à-d: $PGCD(p, q) = 1$!

donc : $2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$

alors p^2 est un nombre paire alors p est un nombre paire.

$\Rightarrow p = 2k \Rightarrow p^2 = 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$ et alors q^2 est un nombre paire

donc q est paire, alors p, q sont paires donc une contradiction

avec $PGCD(p, q) = 1$ (2 divise p et q).

4): par le contraposé, on montre que : soit a un réel, si a^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors $a/2$ n'est pas un entier paire.

- soit a un réel tel que $a/2$ est un entier paire, alors il existe un entier n tel que $\frac{a}{2} = 2n$ donc $a = 4n \Rightarrow a^2 = 16n^2$.

alors a^2 est un entier multiple de 16. ainsi par contraposé on a bien si a^2 n'est pas un multiple de 16 alors $a/2$ n'est pas un entier paire

5): Par contraposé, on montre : si $\forall \varepsilon > 0,\ a < \varepsilon$ alors $a = 0$ ($a \in \mathbb{R}$

- soit a un réel tel que $a \neq 0$. alors en prenant $\varepsilon = \frac{a}{2}$, on a $\varepsilon >$

et $a > \varepsilon$ autrement dit on a $\overline{\forall \varepsilon > 0,\ a \leq \varepsilon}$ le contraire

de l'hypothèse. ~~donc par contraposé on a : $\forall \varepsilon$~~

Conclusion : par contraposé si $\forall \varepsilon > 0,\ a < \varepsilon$ alors $a = 0$.

6): Montrons en fait la contraposée :

~~si~~: on suppose qu'il existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $N = (p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_r) +$

Scanned by CamScanner

un nombre premier

est divisible par p_i (i fixé), alors il existe ~~k∈ℤ~~ $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$N = k p_i$

$\Rightarrow (p_1 \times p_2 \times \dots \times p_r) + 1 = k p_i$

$\Rightarrow k p_i - (p_1 \times p_2 \times \dots \times p_{i-1} \times p_i \times p_{i+1} \times \dots \times p_r) = 1$

$\Rightarrow p_i \left[k - (p_1 \times p_2 \times \dots \times p_{i-1} \times p_{i+1} \times \dots \times p_r)\right] = 1$

$\Rightarrow p_i q = 1$ (avec $q = k - (p_1 \times p_2 \times \dots \times p_{i-1} \times p_{i+1} \times \dots \times p_r$ un nombre entier)

Donc $p_i \in \mathbb{N}$ et $q = \frac{1}{p_i} \in \mathbb{Z}$, alors p_i prend seulement la valeur 1 c'à d : $p_i = 1$, et donc p_i n'est pas un nombre premier.

(contradiction avec l'hypothèse p_i est premier).

conclusion : par l'absurde, si $p_1, p_2, \dots, p_r$ des nombres premiers alors $N = (p_1 \times p_2 \times \dots \times p_r) + 1$ n'est ~~pas~~ divisible par aucun des nombres p_i, $i \in \{1, \dots, r\}$

7 : Raisonnement par l'absurde :

on suppose qu'il existe un nombre fini r des nombres premiers alors d'après la question précédente, on a $N = (p_1 \times \dots \times p_r) + 1$ n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_r$ donc N est un nombre premier.

Mais N est strictement suppérieurs à tous les p_i,

conclusion, on a construit un nombre premier N différent des p_i alors, il y a donc au moins $(r+1)$ nombres premiers, ce qui l'absurde (avec on a juste (r) nombres premiers).

Scanned by CamScanner