الجـــمهورية الجـــزائرية الديمـــقراطية الشـــعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

iversité Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية الرياضيات والإعلام الآلي

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Concours d'accès à la formation de troisième cycle Doctorat LMD, le 22/10/2015

Intitulé du Doctorat : Mathématiques pures et applications **Option** : Analyse fonctionnelle

Examen: *Calcul fonctionnel et théorie de la sommabilité* (Durée: 2h)

Exercice 1 (10pts)

1. Rappeler le théorème de Calderón-Zygmund

2. Démontrer que l'on définit une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ en posant

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \left\langle pf\frac{1}{|x|^{\frac{5}{2}}}, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{|x|^{\frac{5}{2}}} dx$$

et de plus que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \left| \left\langle pf\frac{1}{|x|^{\frac{5}{2}}}, \varphi \right\rangle \right| \leq A\left(\|\varphi\|_\infty + \left\|\varphi^{(1)}\right\|_\infty + \left\|\varphi^{(2)}\right\|_\infty\right), \quad A > 0.$$

2.1. Construire une fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que supp$g \subset]0,3[$, $0 \leq g \leq 1$ et $g = 1$ sur $[1,2]$. Justifier la réponse. Indication. Utiliser le fait qu'il existe une fonction croissante $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

2.2. Prouver que $\left| \left\langle pf\frac{1}{|x|^{\frac{5}{2}}}, g_\varepsilon \right\rangle \right| \geq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}$, pour tout $0 < \varepsilon < 1$, avec $g_\varepsilon = g(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ et $C > 0$.

2.3. Déduire d'ordre de cette distribution.

3. Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Prouver que supp$(f * g) \subset$ supp(f) + supp(g).

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية الرياضيات والإعلام الآلي

Concours d'accès à la formation de troisième cycle Doctorat LMD, le 22/10/2015

Intitulé du Doctorat : Mathématiques pures et applications **Option** : Analyse fonctionnelle

Examen: *Calcul fonctionnel et théorie de la sommabilité* (Durée: 2h)

Exercice 2.

Soient $1 \leq p, q, r \leq \infty$ et $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Soient X, Y deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X;Y)$. On dira que T est *fortement* (p,q,r)-sommant, s'il existe une constante positive C telle que pour tous $x_1, ..., x_n \in X$, et tous $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i), y_i^*\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\psi \in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle \psi, y_i^*\rangle|^r\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{1}$$

On note $D_{p,q,r}(X,Y) = \{T : X \longrightarrow Y \text{ linéaires fortement } (p,q,r)\text{-sommants}\}$ et

$$d_{p,q,r}(T) = \inf\{C \text{ vérifiant } (1)\}.$$

Montrer que:

1. si $T \in D_{p,q,r}(X,Y)$, alors T est continu et $\|T\| \leq d_{p,q,r}(T)$,

2. si $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, on a $D_{p,q,r}(X,Y) = \{0\}$,

3. $D_{p,q,r}(X,Y)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X,Y)$ et que $d_{p,q,r}(.)$ est une norme sur cet espace,

4. tout opérateur de rang fini est fortement (p,q,r)-sommant,

5. $d_{p,q,r)}(id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : id_{\mathbb{K}}(x) = x) = 1$,

6. s'il existe une probabilité μ sur $B_{Y^{**}}$ et une constante positive C, telle que pour tout $x \in X$ et $y^* \in Y^*$,

$$|\langle T(x), y^*\rangle| \leq C\|x\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\langle \xi, y^*\rangle|^{q^*} d\mu(\xi)\right)^{\frac{1}{q^*}}$$

alors $T \in D_{1,q,q^*}(X,Y)$.

Concours d'accès à la formation de troisième cycle Doctorat LMD, le 22/10/2015

Intitulé du Doctorat : Mathématiques pures et applications **Option** : Analyse fonctionnelle

Examen: ***Calcul fonctionnel et théorie de la sommabilité*** (Durée: 2h)

Exercice 1 (10pts).

Soient $1 \leq q \leq p < \infty$ et X, Y deux espaces de Banach. On dira que $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ est (p,q)-sommant, s'il existe une constante positive C telle que pour tous $x_1, ..., x_n \in X$ on a

$$(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, \varphi \rangle|^q)^{\frac{1}{q}} \tag{1}$$

On note $\Pi_{p,q}(X,Y) = \{T : X \longrightarrow Y \text{ linéaires } (p,q)\text{-sommants}\}$ et

$$\pi_{p;q}(T) = \inf \{C \text{ vérifiant } (1)\}.$$

Montrer que:

1. si $T \in \Pi_{p,q}(X,Y)$, alors T est continu et $\|T\| \leq \pi_{p;q}(T)$,
3. si $q > p$, on a $\Pi_{p,q}(X,Y) = \{0\}$,
4. $\Pi_{p,q}(X,Y)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X,Y)$ et que $\pi_{p;q}(T)$ est une norme sur cet espace,
5. tout opérateur de rang fini est (p,q)-sommant,
6. $\pi_{p;q}(id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : id_{\mathbb{K}}(x) = x) = 1$,
7. s'il existe une probabilité μ sur $B_{Y^{**}}$ et une constante positive C, telle que pour tout $x \in X$,

$$\|T(x)\| \leq C(\int_{B_{X^*}} |\langle x, \varphi \rangle|^p \, d\mu(\varphi))^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

alors $T \in \Pi_{p,p}(X,Y)$.

Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et
de l'Informatique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية الرياضيات والإعلام الآلي

Concours d'accès à la formation de troisième cycle Doctorat LMD, le 22/10/2015

Intitulé du Doctorat : Mathématiques pures et applications **Option** : Analyse fonctionnelle

Examen: ***Calcul fonctionnel et théorie de la sommabilité*** (Durée: 2h)

Exercice 2. 10 points

On pose
$$A = \Big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \exists c > 0, \quad \text{telle que} \quad |f(2x-y) - 2f(x) + f(y)| \le c|x-y|, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big\}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction telle que $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$, $0 \le \varphi(x) \le 1$ si $x \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$, $\varphi(x) = 1$ si $x \in]-1, 1[$. On pose $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(3x)$.

Soient les fonctions

$$g(x) = \begin{cases} x(\log|x|)^2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad h(x) = \psi(x)g(x) \quad \text{et} \quad u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j}}{j}\varphi(2^j x).$$

(1) Soit $f \in A$. Que représente $\sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\neq y} |x-y|^{-1}|f(2x-y) - 2f(x) + f(y)|$? Justifier.

(2) Est-ce que $g \in A$? Justifier. Montrer que $h \in A$.

(3) Est-ce qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall x \in]0, 1]$ on a $|u(x)| \le Cx$?

Indication : On pourra calculer $u(2^{-N})$ pour $N \in \mathbb{N}^*$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et
de l'Informatique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية الرياضيات والإعلام الآلي

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Concours d'accès à la formation de troisième cycle Doctorat LMD, le 22/10/2015

Intitulé du Doctorat : Mathématiques pures et applications **Option** : Analyse fonctionnelle

Examen: *Calcul fonctionnel et théorie de la sommabilité* (Durée: 2h)

Exercice 1 (10pts).

Soient X, Y deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X;Y)$. On dira que T est *Cohen p-nucléaire*, $1 < p < \infty$ s'il existe une constante positive C telle que pour tous $x_1, ..., x_n \in X$, et tous $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \sup_{\varphi \in B_{X^*}} (\sum_{1}^{n} |\langle \varphi, x_i \rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{\psi \in B_{Y^{**}}} (\sum_{i=1}^{n} |\langle \psi, y_i^* \rangle|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}. \qquad (1)$$

On note $\mathcal{N}_p(X,Y) = \{T : X \longrightarrow Y$ linéaires Cohen p-nucléaires$\}$ et

$$n_p(T) = \inf \{C \text{ vérifiant } (1)\}.$$

Montrer que:

1. si $T \in \mathcal{N}_p(X,Y)$, alors T est continu et $\|T\| \leq n_p(T)$,
2. $\mathcal{N}_p(X,Y)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X,Y)$ et que $n_p(T)$ est une norme sur cet espace,
3. tout opérateur de rang fini est Cohen p-nucléaire,
4. $\mathcal{N}_p(X,Y)$ est un idéal linéaire,
5. $n_p(id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : id_{\mathbb{K}}(x) = x) = 1$,
6. s'il existe des probabilités μ, λ sur B_{X^*} et $B_{Y^{**}}$ respectivement et une constante positive C, telle que pour tout $x \in X$ et $y^* \in Y^*$,

$$|\langle T(x), y^* \rangle| \leq C(\int_{B_{X^*}} |\langle \varphi, x \rangle|^p d\mu(\varphi))^{\frac{1}{p}} (\int_{B_{Y^{**}}} |\langle \psi, y^* \rangle|^{p^*} d\lambda(\psi))^{\frac{1}{p^*}}$$

alors $T \in \mathcal{N}_p(X,Y)$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

sité Mohamed Boudiaf-M'sila
culté des Mathématiques et
de l'Informatique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية الرياضيات والإعلام الآلي

Concours d'accès à la formation de troisième cycle Doctorat LMD, le 22/10/2015

Intitulé du Doctorat : Mathématiques pures et applications **Option** : Analyse fonctionnelle

Examen: ***Calcul fonctionnel et théorie de la sommabilité*** (Durée: 2h)

Exercice 2. (10pts)

1. Rappeler le théorème de Calderón-Zygmund.

2. Construire une fonction $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que supp$\omega = [-1,1]$ et $\omega \geq 0$ sur $[-1,1]$ et $\int \omega(x)dx = 1$.

3. On pose $\chi_\varepsilon(x) = \int_{|z|\leq 1} \omega(\frac{x-z}{\varepsilon})\frac{dz}{\varepsilon}$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

3.1. Prouver que supp$\chi_\varepsilon \subset \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1+\varepsilon\}$ et $\chi_\varepsilon(x) = 1$ pour tout $x \in \{y \in \mathbb{R} : |y| \leq 1-\varepsilon\}$.

3.2. Déduire que $\|\chi_\varepsilon\|_p \leq 2^{1/p}(1+\varepsilon)^{1/p}$, ($\|\cdot\|_p$ la norme de l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$).

3.3. On suppose que $|h| \leq \varepsilon$. Prouver que $\Delta_h^1\chi_\varepsilon(x) = 0$ pour tout $x \in \{y \in \mathbb{R} : |y| < 1-2\varepsilon\} \cup \{y \in \mathbb{R} : |y| > 1+2\varepsilon\}$. Avec $\Delta_h^1\chi_\varepsilon(x) = \chi_\varepsilon(x+h) - \chi_\varepsilon(x)$.

3.4. On suppose que $\varepsilon < |h| \leq \frac{1}{2}$. Prouver que $\Delta_h^1\chi_\varepsilon(x) = 0$ pour tout $x \in \{y \in \mathbb{R} : |y| < 1-2|h|\} \cup \{y \in \mathbb{R} : |y| > 1+2|h|\}$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et
de l'Informatique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية الرياضيات والإعلام الآلي

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Concours d'accès à la formation de troisième cycle Doctorat LMD, le 22/10/2015

Intitulé du Doctorat : Mathématiques pures et applications **Option** : EDPs et Optimisation/Analyse fonctionnelle

1

Examen: *Introduction à l'analyse fonctionnelle* (Durée: 2h)

Exercice 01. (*5 pts*)

Soit $E = \left(C\left([-1,+1];\mathbb{R}\right), \|.\|_\infty\right)$, pour $f \in E$, on pose $\varphi(f) = \int_{-1}^{0} f(t)\,dt - \int_{0}^{+1} f(t)\,dt$.

1) Montrer que φ est une forme linéaire et continue sur E.

2) Déterminer $\|\varphi\|_{E'}$.

Exercice 02. (*6 pts*)

Soit $H = C^1([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continûments dérivables de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application :

$$u : H \times H \to \mathbb{R} : (f,g) \longmapsto u(f,g) = \int_0^1 \left[f(t)\,g(t) + f'(t)g'(t)\right] dt.$$

a) Montrer que u est un produit scalaire sur H.

b) On définit une suite $(f_n)_n$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n^4}\right]; \\ \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{3n^3} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n^4}, 1\right]. \end{cases}$$

i) Montrer que $f_n \in H$, $\forall\, n > 0$.

ii) Montrer que $(f_n)_n$ est de Cauchy.

iii) H est-il de Hilbert?

Exercice 03. (*9 pts*)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Rappeler les espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.

2) Montrer que toute fonction de $C^1([-\alpha,+\alpha])$ est dans $H^1(]-\alpha,+\alpha[)$.

4) Soit u une fonction continue sur $[-\alpha,+\alpha]$ satisfaisant $u \in C^1([-\alpha,0])$ et $u \in C^1([0,\alpha])$. Montrer que $u \in H^1(]-\alpha,+\alpha[)$.

3) Fixons $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les deux affirmations suivantes :

i) $\mu\Delta u + (1+k^2)\,u = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

ii) $\sum_{i=1}^{n} -\mu \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx + (1+k^2)\int_\Omega uv\,dx = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

sité Mohamed Boudiaf-M'sila
aculté des Mathématiques et
de l'Informatique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية الرياضيات والإعلام الآلي

Concours d'accès à la formation de troisième cycle Doctorat LMD, le 22/10/2015

Intitulé du Doctorat : Mathématiques pures et applications **Option** : EDPs et Optimisation/Analyse fonctionnelle

<u>**Examen:**</u> ***Introduction à l'analyse fonctionnelle*** (Durée: 2h)

<u>Exercice 01.</u> (5pts)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n; on considère une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E. Donc pour tout $x \in E$, on écrit $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i$, avec $x_i \in \mathbb{R}$. On munit E par l'application, pour tout $x \in E$: $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$.

a) Montrer que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E.

b) Pour $f' \in E'$ (l'ensemble des formes linéaires continues sur E), on pose $f_i = f(e_i)$. Déterminer explicitement (en fonction de f_i) la norme dual $\|f\|_{E'}$ d'un élément de $f \in E'$.

<u>Exercice 02.</u> (6pts)

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et A l'ensemble des fonctions f de E telles que $f(0) = 0$ et

$\int_0^1 f(x)dx \geq 1$. On munit E de la norme de la convergence uniforme : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. Montrer que les applications $f \longmapsto f(0)$ et $f \longmapsto \int_0^1 f(x)dx$ sont des formes linéaires continues sur E.

2. En déduire que A est un fermé de E.

3. Montrer que $\|f\|_\infty > 1$ pour tout $f \in A$.

<u>Exercice 03.</u> (*9 pts*). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Rappeler les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$, $(m > 0)$ et $H_0^1(\Omega)$.

2) Posons $\Omega =]-a, a[$ (avec a un réel positif) est un ouvert de $\mathbb{R}$.

a) Soit u définie sur Ω par $u(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$. Montrer que $u \notin H^1(]-a, a[)$.

b) Vérifier que la fonction v définie par $v(t) = \dfrac{t + |t|}{2}$ appartient à $H^1(]-a, a[)$, mais qu'elle n'appartient pas à $H^2(]-a, a[)$.

3) Fixons $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$.

Montrer l'équivalence entre les deux affirmations suivantes :

i) $\Delta u - u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Omega uvdx + \int_\Omega fvdx = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

الجـــمهورية الجـزائرية الديمـقراطية الشـــعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

جامعة محمد بوضياف-المسيلة
كلية الرياضيات والإعلام الآلي

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Concours d'accès à la formation de troisième cycle Doctorat LMD, le 22/10/2015

Intitulé du Doctorat : Mathématiques pures et applications **Option** : EDPs et Optimisation/Analyse fonctionnelle

Examen: *Introduction à l'analyse fonctionnelle* (Durée: 2h)

Exercice 01. (*10 pts*). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Rappeler les espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.

2) Posons $\Omega =]-1,3[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

a) Soit u définie sur Ω par $u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

Montrer que $u \notin H^1(]-1,3[)$.

b) Vérifier que la fonction v définie par $v(t) = \dfrac{t - |t|}{2}$ appartient à $H^1(]-1,3[)$, mais qu'elle n'appartient pas à $H^2(]-1,3[)$.

3) Fixons $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$.

Montrer l'équivalence entre les deux affirmations suivantes

i) $\mu \Delta u + f = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} -\mu \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} f(x) v(x)\, dx = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Exercice 02 (10 *pts*). Soient $(H, (.;.))$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, et $\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ \xi = (\xi_n)_{n\geq 1} \text{ tq: } \sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n|^2 < +\infty. \right\}$ l'espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ muni par le produit scalaire :

$$\forall \xi = (\xi_n)_{n\geq 1}, \varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geq 1} \in \ell^2 : \langle \xi, \varepsilon \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n \varepsilon_n.$$

1) Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites de H, montrer que si $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow y$ alors

- $(x_n; v) \longrightarrow (x; v), \forall v \in H$ et $(x_n; y_n) \longrightarrow (x; y)$.
- Déduire que $x_n \longrightarrow x$ implique que $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$.

2) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ est une base orthonormée dans H.

i) Montrer que pour toute suite $(\xi_n)_{n\geq 1} \in \ell^2$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n u_n$ converge dans H.

ii) Soit l'application :

$$\begin{aligned} S: \ H &\longrightarrow \ell^2 \\ x &\longmapsto S(x) = ((x; u_n))_n \end{aligned}$$

- Montrer que S est linéaire borné.
- Montrer que S est bijectif.
- Montrer que $\forall x, y \in H : \langle S(x), S(y) \rangle_{\ell^2} = (x; y)_H$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RépubliqueAlgérienneDémocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'EnseignementSupérieur et de la RechercheScientifique
جامعة محمد بوضياف- المسيلة
Université Mohamed Boudiaf- M'sila
كلية الرياضيات و الإعلام الآلي
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Concours d'accès à la formation de troisième cycle " Doctorat LMD "
Intitulé du doctorat : Mathématiques pures et applications
Option : Analyse Fonctionnelle
27/10/2016

Examen 2 : Mesure et intégration (Durée : 2h)

Exercice 1 (7pts).

Soit X un ensemble. On appelle σ-filtre sur X toute collection $\mathcal{F} \neq \emptyset$ de parties de X vérifiant les conditions:

c1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
c2) $\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{F} : A \subset B \Longrightarrow B \in \mathcal{F}$,
c3) $\forall (A_n)_n \subset \mathcal{F} : \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Pour tout σ-filtre $\mathcal{F}$ sur X on pose

$$\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \{B \subset X : B \in \mathcal{F} \text{ ou } B^c \in \mathcal{F}\}.$$

1) Soit $\mathcal{F}$ un σ-filtre sur X.

1-a) Montrer que $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ est une tribu sur X.
1-b) On définit l'application $\mu_{\mathcal{F}}$ sur $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ par

$$\mu_{\mathcal{F}}(B) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad B \in \mathcal{F} \\ 0 & \text{si} \quad B \notin \mathcal{F}. \end{cases}$$

Montrer que $\mu_{\mathcal{F}}$ est une mesure.

2) Soit $\mathcal{B}$ une tribu sur X et soit μ une mesure non nulle sur $(X, \mathcal{B})$, à valeurs dans $\{0, 1\}$. Montrer que $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{B} : \mu(A) = 1\}$ est un σ-filtre sur X.
3) Soit X un ensemble non dénombrable. On considère

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : A^c \text{ dénombrable}\}.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est un σ-filtre sur X. Trouver $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ et $\mu_{\mathcal{F}}$.

Exercice 2 (8pts).

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré.

1) Montrer que si la fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, alors elle est finie presque par tout.

2) Soit (f_n) une suite de fonctions réelles mesurables définies sur X telle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int |f_n| \, d\mu < \infty$.

Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge presque par tout vers une fonction intégrable f et on a

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right) d\mu = \int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dans la suite $\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue.

3) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive telle que la fonction $x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f(x+n)$ est intégrable.
Montrer que $f = 0$ presque par tout.

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \chi_{\mathbb{R}_+^*}(x)\ x^{s-1}e^{-nx}$, où $\chi_{\mathbb{R}_+^*}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$.
On définit les fonctions $\Gamma, \Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} y^{s-1}e^{-y} dy,\ s > 0 \quad \text{et} \quad \Psi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s},\ s > 1.$$

4-a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(s)\Psi(s)$ pour tout $s > 1$.

4-b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = +\infty$ pour tout $s \in]0, 1]$.

Exercice 3 (5pts).

$\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et f une fonction de X dans $\mathbb{R}$.
Montrer que la fonction f est mesurable si et seulement si

$$\forall r \in \mathbb{Q} : \{x \in X : f(x) < r\} \in \mathcal{M}.$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة محمد بوضياف- المسيلة
Université Mohamed Boudiaf- M'sila
كلية الرياضيات و الإعلام الآلي
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Concours d'accès à la formation de troisième cycle " Doctorat LMD "
Intitulé du doctorat : Mathématiques pures et applications
Option : Analyse Fonctionnelle
27/10/2016

Examen 2 : Mesure et intégration (Durée : 2h)

Exercice 1 (7pts).

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace measuré et $0 < p \leq \infty$.

1) Rappeler l'inégalité de Hölder dans $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$.

2) Montrer que $\|f+g\|_{L^p(X,\mu)} \leq \|f\|_{L^p(X,\mu)} + \|g\|_{L^p(X,\mu)}$, pour toute $f, g \in L^p(X, \mu)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

3) Soit $0 < p < \infty$ et $w : X \to [0, \infty[$ une fonction mesurable. On pose

$$L^p(X, \mu, w) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} : \|f\|_{L^p(X,\mu,w)} = \left(\int_X |f|^p \, w d\mu \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

3-a) Prouver que

$$\|fg\|_{L^r(X,\mu,w)} \leq \|f\|_{L^p(X,\mu,w)} \|g\|_{L^q(X,\mu,w)}, \quad f \in L^p(X, \mu, w), \ g \in L^q(X, \mu, w)$$

avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $0 < p, q, r < \infty$.

3-b) Prouver que si $f \in L^p(X, \mu, w) \cap L^q(X, \mu, w)$, alors $f \in L^r(X, \mu, w)$ avec $p \leq r \leq q$ et

$$\|f\|_{L^r(X,\mu,w)} \leq \|f\|^{\theta}_{L^p(X,\mu,w)} \|f\|^{1-\theta}_{L^q(X,\mu,w)},$$

où $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$, $0 < \theta < 1$.

4) On suppose que $f : X \to]0, \infty[$ une fonction mesurable et $f \in L^1(X, \mu, w)$. On suppose que $\mu(E) < 1$ avec $E \subset X$. Prouver que $\lim_{p \to 0} \|f \chi_E\|_{L^p(X,\mu)} = 0$.

5) On suppose que $1 \leq p < q < +\infty$. Prouver que $L^r(X, \mu) \subset L^p(X, \mu) + L^q(X, \mu)$.

6) On suppose que $\mu(X) = 1$. Soient $f, g : X \to [0, \infty[$ deux fonctions mesurables avec $fg \geq 1$. Prouver que $1 \leq \|f\|_{L^1(X,\mu)} \|g\|_{L^1(X,\mu)}$.

Exercice 2 (7pts).

Soit X un ensemble. On appelle σ-filtre sur X toute collection $\mathcal{F} \neq \emptyset$ de parties de X vérifiant les conditions:

c1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

c2) $\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{F} : A \subset B \Longrightarrow B \in \mathcal{F}$,

c3) $\forall (A_n)_n \subset \mathcal{F} : \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Pour tout σ-filtre $\mathcal{F}$ sur X on pose

$$\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \{B \subset X : B \in \mathcal{F} \text{ ou } B^c \in \mathcal{F}\}.$$

1) Soit $\mathcal{F}$ un σ-filtre sur X.

1-a) Montrer que $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ est une tribu sur X.

1-b) On définit l'application $\mu_{\mathcal{F}}$ sur $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ par

$$\mu_{\mathcal{F}}(B) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad B \in \mathcal{F} \\ 0 & \text{si} \quad B \notin \mathcal{F}. \end{cases}$$

Montrer que $\mu_{\mathcal{F}}$ est une mesure.

2) Soit $\mathcal{B}$ une tribu sur X et soit μ une mesure non nulle sur $(X, \mathcal{B})$, à valeurs dans $\{0, 1\}$. Montrer que $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{B} : \mu(A) = 1\}$ est un σ-filtre sur X.

3) Soit X un ensemble non dénombrable. On considère

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : A^c \text{ dénombrable}\}.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est un σ-filtre sur X. Trouver $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ et $\mu_{\mathcal{F}}$.

Exercice 3 (6pts).

Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$. Soit $f : E \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $\displaystyle\int_E |f(x)|\, \mathrm{d}x < +\infty$. On pose

$$g(t,x) = \frac{1}{2t}\Big(|1 + 2tf(x)| - 1\Big) \quad , \qquad \forall t > 0, \forall x \in E.$$

1) Calculer $\lim\limits_{t \to 0} g(t,x)$.

2) Calculer $\lim\limits_{t \to 0} \displaystyle\int_E g(t,x)\, \mathrm{d}x$.

3) Pour $a > 0$, on pose

$$g_a(t,x) = \frac{1}{2t}\Big(|a + 2tf(x)| - a\Big) \quad , \qquad \forall t > 0, \forall x \in E.$$

On suppose que $\displaystyle\int_E \mathrm{d}x = 1$ et $\displaystyle\int_E f(x)\, \mathrm{d}x = 0$.

Monter que $\displaystyle\int_E g_a(t,x)\, \mathrm{d}x \geq 0$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة محمد بوضياف- المسيلة
Université Mohamed Boudiaf- M'sila
كلية الرياضيات و الإعلام الآلي
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Concours d'accès à la formation de troisième cycle " Doctorat LMD "
Intitulé du doctorat : Mathématiques pures et applications
Option : Analyse Fonctionnelle
27/10/2016

Examen 2 : Mesure et intégration (Durée : 2h)

Exercice 1 (6pts).

Soit $K > 0$. Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que

$$f(x+K) = f(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{et} \quad B = \int_0^K |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \int_0^K |f(nx)|\,\mathrm{d}x < +\infty.$

2) Déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} f(nx)$.

3) Application: On pose $f(x) = \big(\log|\cos x|\big)^4$.
Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \big|\cos(nx)\big|^{1/n}$.

Exercice 2 (7pts).

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace measuré et $0 < p \leq \infty$.
1) Rappeler l'inégalité de Hölder dans $L^p(X,\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$.

2) Montrer que $\|f+g\|_{L^p(X,\mu)} \leq \|f\|_{L^p(X,\mu)} + \|g\|_{L^p(X,\mu)}$, pour toute $f, g \in L^p(X,\mu)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.
3) Soit $0 < p < \infty$ et $w : X \to [0, \infty[$ une fonction mesurable. On pose

$$L^p(X,\mu,w) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} : \|f\|_{L^p(X,\mu,w)} = \left(\int_X |f|^p\, w \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

3-a) Prouver que

$$\|fg\|_{L^r(X,\mu,w)} \leq \|f\|_{L^p(X,\mu,w)} \|g\|_{L^q(X,\mu,w)}\,, \qquad f \in L^p(X,\mu,w),\ g \in L^q(X,\mu,w)$$

avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $0 < p, q, r < \infty$.

3-b) Prouver que si $f \in L^p(X,\mu,w) \cap L^q(X,\mu,w)$, alors $f \in L^r(X,\mu,w)$ avec $p \leq r \leq q$ et

$$\|f\|_{L^r(X,\mu,w)} \leq \|f\|^{\theta}_{L^p(X,\mu,w)} \|f\|^{1-\theta}_{L^q(X,\mu,w)}\,,$$

où $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$, $0 < \theta < 1$.

4) On suppose que $f : X \to]0, \infty[$ une fonction mesurable et $f \in L^1(X, \mu, w)$. On suppose que $\mu(E) < 1$ avec $E \subset X$. Prouver que $\lim_{p \to 0} \|f\chi_E\|_{L^p(X,\mu)} = 0$.

5) On suppose que $1 \leq p < q < +\infty$. Prouver que $L^r(X, \mu) \subset L^p(X, \mu) + L^q(X, \mu)$.

6) On suppose que $\mu(X) = 1$. Soient $f, g : X \to [0, \infty[$ deux fonctions mesurables avec $fg \geq 1$. Prouver que $1 \leq \|f\|_{L^1(X,\mu)} \|g\|_{L^1(X,\mu)}$.

Exercice 3 (7pts).

Soit X un ensemble. On appelle σ-filtre sur X toute collection $\mathcal{F} \neq \emptyset$ de parties de X vérifiant les conditions:

c1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

c2) $\forall A \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{F} : A \subset B \Longrightarrow B \in \mathcal{F}$,

c3) $\forall (A_n)_n \subset \mathcal{F} : \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Pour tout σ-filtre $\mathcal{F}$ sur X on pose

$$\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \{B \subset X : B \in \mathcal{F} \text{ ou } B^c \in \mathcal{F}\}.$$

1) Soit $\mathcal{F}$ un σ-filtre sur X.

1-a) Montrer que $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ est une tribu sur X.

1-b) On définit l'application $\mu_{\mathcal{F}}$ sur $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ par

$$\mu_{\mathcal{F}}(B) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad B \in \mathcal{F} \\ 0 & \text{si} \quad B \notin \mathcal{F}. \end{cases}$$

Montrer que $\mu_{\mathcal{F}}$ est une mesure.

2) Soit $\mathcal{B}$ une tribu sur X et soit μ une mesure non nulle sur $(X, \mathcal{B})$, à valeurs dans $\{0, 1\}$. Montrer que $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{B} : \mu(A) = 1\}$ est un σ-filtre sur X.

3) Soit X un ensemble non dénombrable. On considère

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : A^c \text{ dénombrable}\}.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est un σ-filtre sur X. Trouver $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ et $\mu_{\mathcal{F}}$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RépubliqueAlgérienneDémocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'EnseignementSupérieur et de la RechercheScientifique
جامعة محمد بوضياف- المسيلة
Université Mohamed Boudiaf- M'sila
كلية الرياضيات و الإعلام الآلي
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Concours d'accès à la formation de troisième cycle " Doctorat LMD "
Intitulé du doctorat : Mathématiques pures et applications
Option : Analyse Fonctionnelle
27/10/2016

Examen 1 : Topologie (Durée : 2h)

Exercice 1 (7 pts)
Soient f, g deux applications continues d'un espace topologique X dans un espace topologique séparé Y.

1. Montrer que la diagonal $\Delta = \{(y, y) : y \in Y\}$ est fermée dans l'espace topologique produit $Y \times Y$.

2. Montrer que l'ensemble $F = \{x \in X; f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.

3. a- Montrer que le graphe $G(f)$ de f est fermé dans $X \times Y$.

   b- Donner un exemple montrant que la réciproque dans (a) n'est pas toujours vraie (considérer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$).

Exercice 2.(5 pts)
Soit $E = C([0, 1]; \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on pose

$$N(f) = \int_0^1 t\,|f(t)|\,dt \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.

2. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt & \text{si} \quad t \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0 & \text{si} \quad t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Calculer $\|f\|_\infty$ et $N(f)$. En déduire que les deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 3.(8 pts)

On définit pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$N(x, y) = \max\{|x|, |2x + y|\}.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Décrire la boule ouverte de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

2. Montrer que N est équivalente à la norme $\|\cdot\|_1$ ($\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$) et trouver des constantes strictement positives α et β telles que

$$\alpha \|\cdot\|_1 \leq N \leq \beta \|\cdot\|_1.$$

3. Décrire l'intérieur et l'adhérence de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |2x - y| < 1\}$.

4. L'adhérence de A est-il compact ? Est-il connexe?

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة محمد بوضياف- المسيلة
Université Mohamed Boudiaf- M'sila
كلية الرياضيات و الإعلام الآلي
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Concours d'accès à la formation de troisième cycle " Doctorat LMD "
Intitulé du doctorat : Mathématiques pures et applications
Option : Analyse Fonctionnelle
27/10/2016

Examen 1 : Topologie (Durée : 2h)

Exercice 1 (5 pts)

Soit $E = C([0,1], \mathbb{C})$ muni de la norme

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

Pour $f \in E$, on pose

$$T(f) = \int_0^1 f(x) e^{ix^2+x} dx$$

1. Montrer que T est une forme linéaire continue.
2. Calculer la norme de T (considérer f_n définie par $f_n(x) = g_n(x)e^{-ix^2}, g_n(x) = 1$ si $x \in [0, 1-\frac{1}{n}]$, $g_n(x) = 0$ si $x \in [1-\frac{1}{n}, 1]$).

Exercice 2 (5 pts)

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$.

1. Montrer que $\overline{F}$ (la fermeture de F) est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si F est distinct de E ($F \neq E$), alors F est d'intérieur vide.
3. Déterminer le sous espace vectoriel de E engendré par la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 3 (10 pts)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie A de E est symétrique si

$$\forall x \in A, -x \in A.$$

I. Montrer que la boule unité ouverte $B(0,1)$ de E est un ensemble convexe, ouvert, symétrique et borné.

II.

1. Soit $A \subset E$ un ensemble convexe, ouvert, symétrique, borné et $0 \in A$. Pour tout $x \in E$, on considère le sous-ensemble $I(x)$ de $\mathbb{R}^+$ défini par

$$I(x) = \left\{\alpha \in]0, +\infty[: \tfrac{1}{\alpha}x \in A\right\}$$

et on note sa borne inférieure

$$\begin{aligned} N(x) &= \inf I(x) \\ &= \inf\left\{\alpha \in]0, +\infty[: \tfrac{1}{\alpha}x \in A\right\} \end{aligned}$$

a) Détreminer $I(0)$ et $N(0)$.
b) Soit $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset A$.
b1. Vérifier que pour tout $x \neq 0$, $\frac{r}{2\|x\|}x \in A$.
b2. En déduire que $I(x)$ n'est pas vide

2. Soit $M > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $||x|| \leq M$.

a) Montrer que pour $x \neq 0, N(x) \geq \frac{\|x\|}{M}$ et en déduire que

$$N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

b) Montrer que $N(-x) = N(x)$.
c) Montrer que

$$N(\beta x) = \beta N(x)$$

pour tout $\beta > 0$ et tout $x \in E$.

3. On suppose que $I(x) =]N(x), +\infty[$.

a) En déduire que

$$\tfrac{1}{N(x)+\varepsilon}x \in A \text{ et } \tfrac{1}{N(y)+\varepsilon}y \in A,$$

pour tout $x, y \in E - \{0\}$ et tout $\varepsilon > 0$.
b) On pose $\beta = \frac{N(x)+\varepsilon}{N(x)+N(y)+2\varepsilon}$.
Montrer que

$$\tfrac{1}{N(x)+N(y)+2\varepsilon}(x+y) \in A.$$

c) Montrer que $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

4. Que peut-on déduire de $N(.)$?

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RépubliqueAlgérienneDémocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'EnseignementSupérieur et de la RechercheScientifique
جامعة محمد بوضياف- المسيلة
Université Mohamed Boudiaf- M'sila
كلية الرياضيات و الإعلام الآلي
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Concours d'accès à la formation de troisième cycle " Doctorat LMD "
Intitulé du doctorat : Mathématiques pures et applications
Option : Analyse Fonctionnelle

27/10/2016

Examen 1 : Topologie (Durée : 2h)

Exercice 1 (5 pts)

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$.

1. Montrer que $\overline{F}$ (la fermeture de F) est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si F est distinct de E $(F \neq E)$, alors F est d'intérieur vide.
3. Déterminer le sous espace vectoriel de E engendré par la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 2 (5 pts)

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$. On définit pour $f \in E$

$$\begin{aligned} N_1(f) &= \int_0^1 x|f(x)|dx, \\ N_2(f) &= \left(\int_0^1 x|f(x)|^2dx\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

1. Vérifier que N_1 et N_2 définissent des normes sur E.
2. Montrer que pour tout $f \in E$, $N_1(f) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} N_2(f)$ (i.e., que N_2 domine N_1).
3. Montrer qu'en revanche N_1 ne domine pas N_2, et donc que ces deux normes ne sont pas équivalentes (considérer f_n définie par $f_n(x) = n - n^2x$ si $x \in [0, \frac{1}{n}]$, $f_n(x) = 0$ si $x \in [\frac{1}{n}, 1]$).

Exercice 3 (5 pts)

Soit (E, d) un espace vectoriel muni d'une distance vérifiant

1. Pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.
2. Pour tous $x, y, z \in E$, $\quad d(x + z, y + z) = d(x, y)$.

Montrer que d provient d'une norme, i.e., qu'il existe une norme N sur E telle que pour tous $x, y \in E$, $\quad d(x, y) = N(x - y)$.

Exercice 4 (5 pts)

Soient (E, d) un espace métrique et F une partie non vide de E. Pour $x \in E$, on pose

$$d(x, F) = \inf_{z \in F} d(x, z).$$

1. Montrer que
$$\forall x, y \in E, \ |d(x, F) - d(y, F)| \leq d(x, y).$$
2. En déduire que la fonction $f(x) = d(x, F)$ est continue et que F est fermé dans (E, d) si, et seulement si, $F = f^{-1}(\{0\})$.
3. On suppose F fermé dans (E, d) et $x_0 \notin F$. En utilisant f, construire deux ouverts U et V tels que $x_0 \in U$ et $F \subset V$ avec $U \cap V = \emptyset$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة محمد بوضياف- المسيلة
Université Mohamed Boudiaf- M'sila
كلية الرياضيات و الإعلام الآلي
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Concours d'accès à la formation de troisième cycle " Doctorat LMD
Intitulé du doctorat : Mathématiques pures et applications
Le 21/10/2017

Examen : Mathématiques générales. Coefficient 1 (13h :00 - 14h :30)

Exercice 1(6pts)

a) Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{k}$ et u et v deux vecteurs différents de 0_E

Démontrer u et v sont linéairement indépendants si et seulement $\mathbb{k}u \cap \mathbb{k}v = \{0_E\}$.

b) Démontrer que le résultat ne s'étend pas à une famille de trois vecteurs ou plus.

Indication : Si (u, v) est un couple de vecteurs libre, alors les couples (u, w) et (v, w) sont également libres et que $\mathbb{k}u \cap \mathbb{k}v = \mathbb{k}v \cap \mathbb{k}w = \mathbb{k}w \cap \mathbb{k}u = \{0_E\}$ cependant la famille (u, v, w) est lieé.

c) On suppose que (i, j, k) en est une base E. Démontrer qu 'il en est de même de $(i, i + j, i + j + k)$.

Donner les formules de changement de coordonnées.

Exercice 2(7pts)

Soit (X, d) un espace métrique.

1. Montrer que toute boule ouverte est un ouvert.
2. Montrer que toute boule fermée est un fermé.
3. Soit $x \neq y$ deux points distincts de X. Montrer q'il existe un voisinage V_1 de x et un voisinage V_2 de y tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
4. Soit $(U_n)_n$ une suite d'éléments de X qui converge vers une limite a. Montrer que l'ensemble $A = \{U_n, n \geq 0\} \cup \{a\}$ est compact.

Exercice 3 :(7pts)

On considère l'EDP suivante :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \ 0 \leq x \leq \pi, \ t > 0, \ ac \neq 0$$

Avec $u(0,t) = 0, \ u(\pi,t) = 0 \ et \ u(x,0) = \varphi(x), \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$

1) De quel type de cette équation ?
2) On suppose que la solution du problème peut s'écrire $u(x,t) = f(x)g(t)$. Trouver les équations différentielles ordinaires que satisfont f et g.
3) Déterminer f et g.
4) Si $a = 0, c = 1$ et $\varphi(x) = \sin 5x + \sin 10x$, trouver la solution $u(x,t)$.

Bonne chance

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RépubliqueAlgérienneDémocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'EnseignementSupérieur et de la RechercheScientifique
جامعة محمد بوضياف- المسيلة
Université Mohamed Boudiaf- M'sila
كلية الرياضيات و الإعلام الآلي
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Concours d'accès à la formation de troisième cycle " Doctorat LMD "
Intitulé du doctorat : Mathématiques pures et applications
Le 21/10/2017

Examen : Mathématiques générales. Coefficient 1 (13h :00 - 14h :30)

Exercice 1($7pts$)

1. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ et E_1, E_2 les espaces vectoriels engendrés respectivement par les systèmes

   $S_1 = \{(1, -1, 2, -3), (1, 1, 2, 0), (3, -1, 6, -6)\}$;

   $S_2 = \{(0, -2, 0, -3), (1, 0, 1, 0)\}$.
   Trouver les dimensions de $E_1, E_2, E_1 + E_2, E_1 \cap E_2$.

2. Supposons que F_1 et F_2 soeint deux sous-espaces distincts de dimension 2 d'un espace F de dimension 3; montrer que leur intersection $F_1 \cap F_2$ est de dimension 1.

3. Qu'est-ce que cela signifie géométriquement (pour $F = \mathbb{R}^3$)?

Exercice 2($6pts$)

On considère l'application

$$d : \begin{array}{ccl} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \longmapsto & d(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ si } & x = y \\ 1, \text{ si } & x \neq y. \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{N}$.
2. Décrire en fonction du rayon r la boule ouverte $B(n, r)$.
3. Quelles sont ses suites de Cauchy ?. Est-il complet ?.

Exercice 3 :(7pts)

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x)\,, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Les fonctions f et c sont continues et données sur [0 ; 1]. On suppose $c(x) \geq 0, pour\ x \in [0,1]$

On subdivise l'intervalle $[0;\ 1]$ en $N + 1$ sous-intervalles $[x_i;\ x_{i+1}]$ avec $x_i = ih$ pour $i = 0, \dots, N + 1$ où $h = \frac{1}{N+1}$ et on notera u_i l'approximation de la solution en $x = x_i$ et $f(x_i) = f_i\,, c(x_i) = c_i$.

Le schéma d'approximation du problème vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} + c_i u_i = f_i, i = 1, \dots, N \\ u_0 = 0, u_{N+1} = 0 \end{cases}$$

1) Ecrire le problème approché sous la forme d'un système linéaire $Au = b$

   Où $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)^t$; $b = h^2(f_1, f_2, \dots, f_N)^t$

2) Montrer que

$$v^t A v = {v_1}^2 + {v_N}^2 + h^2 \sum_{i=1}^{N} c_i {v_i}^2 + \sum_{i=1}^{N-1} (v_{i+1} - v_i)^2\,;\ \forall v = (v_1, v_2, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$$

3) En déduire que le système linéaire admet une solution unique.
4) Pour $i = 1,2 \dots \dots N$, On pose

$$R_i = \frac{1}{h^2}\left(2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1})\right) + c(x_i)u(x_i) - f(x_i)$$

   Ce qu'on appelle R_i ? Montrer que

$$|R_i| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{[0.1]} \left|u^{(4)}\right|$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RépubliqueAlgérienneDémocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'EnseignementSupérieur et de la RechercheScientifique
جامعة محمد بوضياف- المسيلة
Université Mohamed Boudiaf- M'sila
كلية الرياضيات و الإعلام الآلي
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Concours d'accès à la formation de troisième cycle " Doctorat LMD "
Intitulé du doctorat : Mathématiques pures et applications
Le 21/10/2017

Examen : Mathématiques générales. Coefficient 1 (13h :00 - 14h :30)

Exercice 1 (7*pts*)

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$$

1. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ non nul, tel que $\ker f = vect(a)$, déterminer un vecteur qui convient.

2. Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$

a. Calculer $f(b)$ et $f(c)$.

b. En déduire que $\{a, b\}$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$ (On admet que $\{b, c\}$ est génératrice de $\operatorname{Im}(f)$).

3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $\operatorname{Im}(f)$.

4. A-t-on $\ker f \oplus \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3$?

Exercice 2(7*pts*)

1. Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0, 1]$. On munit des distances fondamentales

$$d_\infty(f, g) = \sup_{0 \le x \le 1} |f(x) - g(x)|, \quad d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

1.1. Prouver que (E, d_∞) est complet.

Soit la suite des fonctions $(f_n)_{n>0}$ définie par $f_n(x) = \begin{cases} nx & : \ 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 1 & : \ \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$

1.2. Calculer $d_1(f_n, f_m)$, $m \ge n$ et en déduire que $(f_n)_{n>0}$ est une suite de Cauchy de (E, d_1). Est- elle convergente dans (E, d_1)?. Conclure ?.

2. On considère la fonction T définie sur le complet (E, d_∞) par

$$\begin{array}{rccc} T: & (E, d_\infty) & \longrightarrow & (E, d_\infty) \\ & f & \longmapsto & T(f), \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rccl} T(f): & [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & T(f)(x) = 2 + \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\cos(x\pi t)dt. \end{array}$$

2.1. Montrer que T est lipschitzienne.
2.2. On déduire qu'il existe un et un seul élément f de E tel que $T(f) = f$.

Exercice 3 : (6pts)

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < 1, \ 0 < y < 1 \\ u(x, y) = x^2 - y^2, & sur\ x = 0, y = 0, y = 1 \\ u(1, y) + \dfrac{\partial u(1, y)}{\partial x} = 3 - y, & 0 < y < 1 \end{cases}$$

On se donne une grille de points (x_i, y_j), où $x_i = ih;\ y_j = jk$, $i = 0,1, \ldots, n$ et $j = 0,1, \ldots, m$
Avec $h = \frac{1}{n}\ et\ k = \frac{1}{m}, n, m > 1$.

1- Ecrire le schéma aux différences finies du problème. en utilisant le schéma centré pour construire une solution approchée de problème. Pour le terme $\frac{\partial u(1,y)}{\partial x}$ utiliser un schéma décentre à gauche.
2- Ecrire le système sous forme matricielle pour $m = n = 2$. Calculer la solution.

Bonne chance

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RépubliqueAlgérienneDémocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'EnseignementSupérieur et de la RechercheScientifique
جامعة محمد بوضياف- المسيلة
Université Mohamed Boudiaf- M'sila
كلية الرياضيات و الإعلام الآلي
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Concours d'accès à la formation de troisième cycle " Doctorat LMD "
Intitulé du doctorat : Mathématiques pures et applications
Le 21/10/2017

Option : Analyse Fonctionnelle

Examen : Analyse Fonctionnelle. Coefficient 3 (15h :00 - 17h :00)

Exercice 1 (10 points)

Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $T : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle. On veut montrer l'équivalence suivante.

$$T \text{ est continue} \Longleftrightarrow \ker T \text{ est fermé dans } E.$$

Noyau de $T = \ker T = \{x \in X : T(x) = 0\}$.

(1) Montrer que si T est continue, alors son noyau est fermé.

Supposons maintenant que $\ker T$ est fermé.

(2) Montrer qu'il existe un élément $x \in X$ tel que $T(x) = 1$.

On se donne une suite $(x_n)_n$ qui tend vers 0.

(3) Montrer que $T(x_n)$ tend vers 0.

(4) En déduire que T est continue.

(5) Montrer que si T n'est pas continue, alors $\ker T$ est dense dans X. Pour cela on doit

(a) Montrer que

$$\exists x_1 \in \overline{\ker T} \text{ et } x_1 \notin \ker : T(x_1) = 1.$$

(b) Vérifier que $X = \overline{\ker T}$.

Exercice 2 (10 points)

Notations: $\partial_\xi^\alpha f(\xi, \eta) = \frac{\partial^\alpha f}{\partial \xi^\alpha}$, $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix.\xi} f(x)dx$, $L^2(\mathbb{R}^n) = \{f : \|f\|_{L^2} = (\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx)^{1/2} < \infty\}$ et $S'(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des distributions tempérées. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ est l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact.

(1) (a) Dans $\mathbb{R}^2$, quel est le support de $\partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta \delta$? δ est la distrubition de Dirac en $(0, 0)$.

(b) Soient $g_1(x,y) = x^m$ et $g_2(x,y) = x^m e^{ix}$, avec $m \in \mathbb{N}$. Calculer $\widehat{g}_1(\xi,\eta)$.

(2) Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, telle que $(1,0) \in \operatorname{supp}\theta$ et $(0,0) \notin \operatorname{supp}\theta$.

$$E = \{f \in S'(\mathbb{R}^2),\ \textit{tel que}\ \|f\|_E = \|\theta \widehat{f}\|_{L^2} < \infty\}.$$

(a) Est-ce que $g_1 \in E$? et $g_2 \in E$? Si oui, calculer $\|g_1\|_E$, calculer $\|g_2\|_E$.

(b) Démontrer que $L^2(\mathbb{R}^2) \subset E$.

(c) Démontrer que $\|f\|_E = \|f + \mathcal{P}\|_E$, où $\mathcal{P}$ est un polynôme quelconque.

(d) Démontrer que l'opérateur de dérivation $D : f \mapsto \partial_x^\alpha \partial_y^\beta f$ est linéaire et continue de E dans E.

(e) Soit $f_1 \in E$ une fonction donnée. Trouver f_2 telle que $f_1 - f_2 = 0$ dans E. Donner $\operatorname{supp}(\widehat{f_1} - \widehat{f_2})$.

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RépubliqueAlgérienneDémocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'EnseignementSupérieur et de la RechercheScientifique
جامعة محمد بوضياف- المسيلة
Université Mohamed Boudiaf- M'sila
كلية الرياضيات و الإعلام الآلي
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Concours d'accès à la formation de troisième cycle " Doctorat LMD "
Intitulé du doctorat : Mathématiques pures et applications
Le 21/10/2017

Option : Analyse Fonctionnelle

Examen : Analyse Fonctionnelle. Coefficient 3 (15h :00 - 17h :00)

Exercice 1 (10 points)

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach quelconque.

(1) Montrer qu'un sous espace E de X est complet si et seulement si E est fermé.

(2) En déduire que tout sous-espace vectoriel de X de dimension finie est fermé dans X.

(3) Montrer que tout sous-espace vectoriel strict E de X est d'intérieur vide.

Exercice 2 (10 points)

Notations: $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix.\xi} f(x)dx$. $S'(\mathbb{R}^2)$ est l'ensemble des distributions tempérées. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ est l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact.

(1) (a) Soit $\mathcal{P}(x,y) = x^\alpha y^\beta$ tel que $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$. Démontrer que $\mathcal{P} \in S'(\mathbb{R}^2)$.

(b) Calculer $\widehat{\mathcal{P}}(\xi, \eta)$.

(2) Soit $f(x,y) = (x^2+y^2)^{s/2}$ tel que $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $s \in \mathbb{R}$.

(a) Pour quelles valeurs de s, la fonction f est localement intégrable.

(b) Si $s \in 2\mathbb{N}$, calculer $\widehat{f}(\xi, \eta)$.

(c) Si $s \notin 2\mathbb{N}$, calculer $\widehat{f}(\xi, \eta)$.

(d) Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, telle que $(0,0) \notin supp\varphi$ et $(0,0) \in$ suppψ. Soit $s = -2$, i.e., $f(x; y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ Etudier la convergence de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\varphi(x, y)|}{x^2 + y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(x, y)|}{x^2 + y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RépubliqueAlgérienneDémocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'EnseignementSupérieur et de la RechercheScientifique
جامعة محمد بوضياف- المسيلة
Université Mohamed Boudiaf- M'sila
كلية الرياضيات و الإعلام الآلي
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
قسم الرياضيات
Département de Mathématiques

Concours d'accès à la formation de troisième cycle " Doctorat LMD "
Intitulé du doctorat : Mathématiques pures et applications
Le 21/10/2017

Option : Analyse Fonctionnelle

Examen : Analyse Fonctionnelle. Coefficient 3 (15h :00 - 17h :00)

Exercice 1 (10 points)

I. Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$. Soit l'application $T : E \longrightarrow E$ définie par $T(f(x)) = x^2 f(x)$.

(a). Montrer que T est linéaire et bornée.

(b). Si $I : E \longrightarrow E$ dénote l'application identité (i. e., $I(f) = f$), montrer que $\|I+T\| = 1 + \|T\|$.

II. On définit pour $f \in E$

$$\begin{aligned} N_1(f) &= \int_0^1 x|f(x)|dx, \\ N_2(f) &= \left(\int_0^1 x|f(x)|^2 dx\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

1. Vérifier que N_1 et N_2 définissent des normes sur E.
2. Montrer que pour tout $f \in E$, $N_1(f) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} N_2(f)$ (i. e., que N_2 domine N_1).
3. Montrer qu'en revanche N_1 ne domine pas N_2, et donc que ces deux normes ne sont pas équivalentes (considérer f_n définie par $f_n(x) = n - n^2 x$ si $x \in [0, \frac{1}{n}]$, $f_n(x) = 0$ si $x \in [\frac{1}{n}, 1]$).

Exercice 2 (10 points)

Notations: $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$, $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = (\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx)^{1/2}$, $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}} ess|f(x)|$, $S'(\mathbb{R})$ est l'ensemble des distributions tempérées.

Soient $\alpha < \frac{1}{2}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R})$. On pose

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{(\alpha-\frac{1}{2})(x-y)} g(y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(1) Trouver f une fonction positive et intégrable telle que

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

(2) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. Démontrer que $\| \widehat{f} \|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\frac{1}{2}-\alpha}$.

(3) Démontrer que $\|\psi\|_2 \leq c\|g\|_2$, la constante $c > 0$ ne dépend pas de ψ et g.

(4) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $g(x) = e^{(\alpha+\frac{1}{2})x}\, h(e^x)$.

(a) Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} v^{2\alpha} \left(\frac{1}{v}\int_0^v h(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \mathrm{d}v \leq c\int_0^{+\infty} (t^\alpha h(t))^2\,\mathrm{d}t.$$

(b) On pose $\varphi(v) = h(v) - \frac{1}{v}\int_0^v h(t)\,\mathrm{d}t$. Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} (v^\alpha \varphi(v))^2\,\mathrm{d}v \leq c\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} (h(t+w)-h(t))^2\,\frac{\mathrm{d}w}{w^{1-2\alpha}}\mathrm{d}t.$$