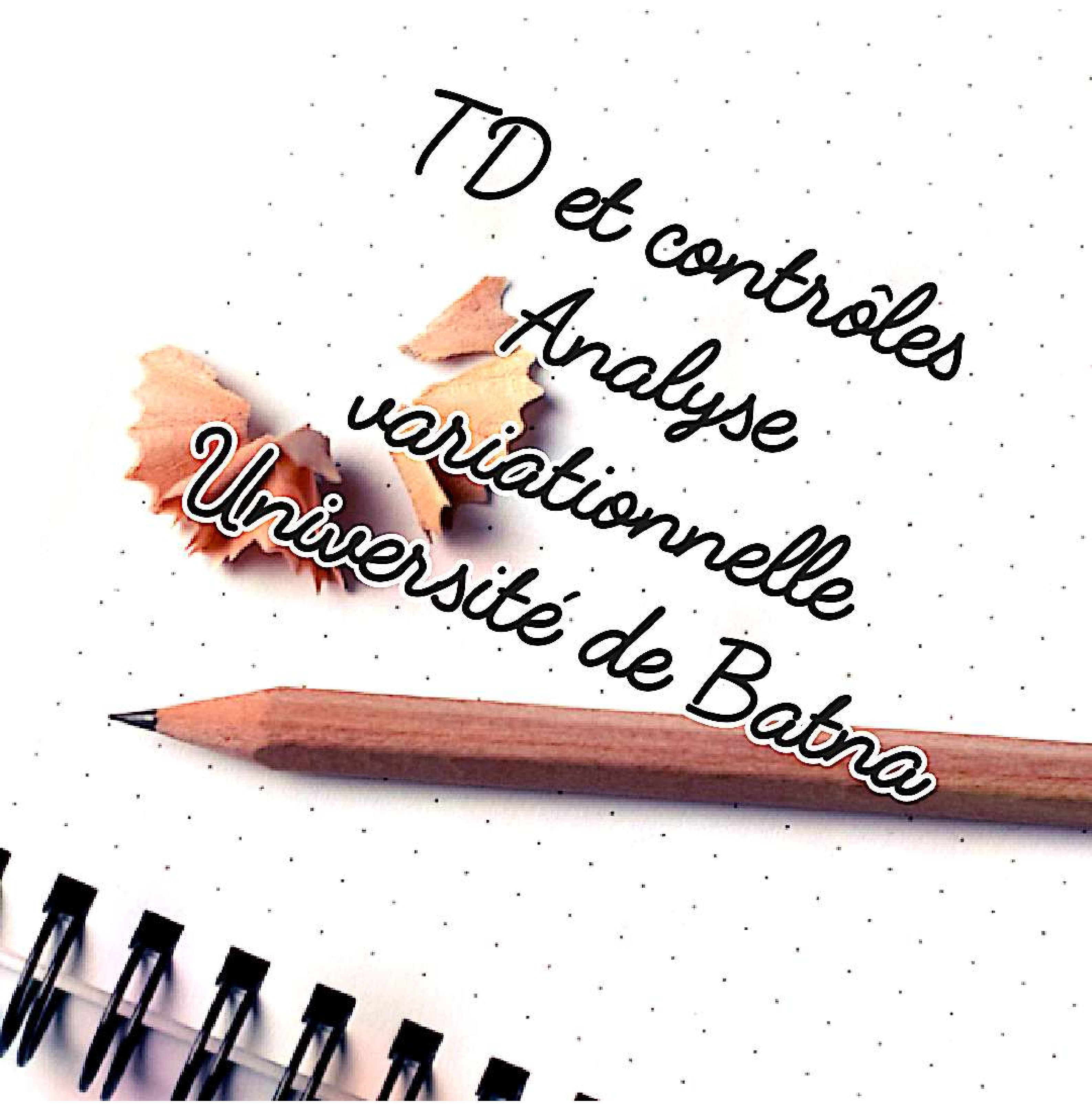
TD et contrôles Analyse variationnelle Université de Batna



Département de Mathématiques
Faculté des sciences
Université de Batna

12 Septembre 2011
Durée 3h

Contrôle final Méthodes variationnelles pour les EDP

Exercice1

Soit Ω un ouvert borné Lipshitzien de $\mathbb{R}^N$ et $f_\lambda \in L^2(\Omega)$ et $g_\lambda \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Soit le problème

$$\begin{cases} -divA\nabla u_\lambda + \lambda u_\lambda = f_\lambda & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu_A} = g_\lambda & \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega). \end{cases} \qquad a$$

Les dérivée considérées sont au sens des distributions, $A \in M(\alpha, \beta, \Omega)$, et $\frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu_A} = A\nabla u_\lambda . n$, avec n le vecteur normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω

Soit le problème variationnel suivant

$$\text{Trouver } u_\lambda \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \qquad b$$

$$a(u_\lambda, v) = \int_\Omega f_\lambda v dx + \langle g_\lambda, v\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

avec

$$a(w, v) = \int_\Omega A\nabla w . \nabla v dx + \lambda \int_\Omega wv dx$$

($4points$)1/ Montrer que le problème variationnel (b) admet une solution unique. Montrer que cette solution vérifie

$$\|u_\lambda\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \|f_\lambda\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \|g_\lambda\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \qquad c$$

où C_1 et C_2 sont des constantes indépendantes de λ.

($3pts$)2/ Montrer que si u_λ est solution de (b) alors elle est solution de (a).

($4pts$)3/ Montrer que si

$$f_\lambda \rightharpoonup f \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ et}$$

$$g_\lambda \rightharpoonup g \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad \text{quand } \lambda \to 0$$

alors la suite (u_λ) possède une sous suite encore notée (u_λ) telle que

$$u_\lambda \rightharpoonup u \text{ dans } H^1(\Omega) \quad \text{quand } \lambda \to 0.$$

avec u solution du problème

$$\int_\Omega A\nabla u . \nabla v dx = \int_\Omega fv dx + \langle g, v\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Est ce que cette solution est unique? justifier votre réponse.

Exercice 2 ($4points$)

Soit

$$u_n(x,y) = \frac{e^{-nxy}}{n}; \text{ et } \quad \Omega := (]a,b[)^2, \ 0 < a < b.$$

($1pt$)1/ Montrer que

$$u_n \to 0 \text{ dans } L^\infty(\Omega).$$

($1pt$)2/ Montrer que $(\nabla u_n)_n$ est bornée dans $(L^2(\Omega))^2$.

($1p$)3/ En déduire qu'il existe une sous suite $(u_{\varphi(n)})_n$ convergente faiblement vers 0 dans $H^1(\Omega)$.

($1p$)4/ Déduire que toute la suite (u_n) converge faiblement vers 0 dans $H^1(\Omega)$.

Exercice 3. (3*points*)

Soit $\Omega := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \sqrt{x^2+y^2} < 1\right\}$.

Montrer que l'application $u(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ est dans $(W^{1,1}(\Omega))^2$.

(Indication: passer aux coordonnées polaires dans les intégrales).

Exercice 4(3*points*)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et $p \in [1,+\infty[$. soit $F \in C^1(\mathbb{R})$ est à dérivée bornée dans $\mathbb{R}$.

(1p)1/ Montrer que

$$|F(x)| \leq c_1|x| + c_2, \text{ avec } c_1 \text{ et } c_2 \text{ dex constantes positives.}$$

(2p)2/ En déduire l'implicaton suivante

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow F(u) \in W^{1,p}(\Omega).$$

Indication : Admettre que sous les conditions de l'exercice $(F(u))' = F'(u)\, u'$ au sens des distributions.

Corrigé du contrôle Final du module (1)

"méthodes variationnelles pour les EDP"

Exercice 1

1°/ $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire sur $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$, continue et coercive. En effet

$$|a(w,v)| = \left|\int_\Omega A\nabla w\,\nabla v\,dx + \lambda\int_\Omega w v\,dx\right|$$
$$\leq \int_\Omega |A\nabla w\,\nabla v|\,dx + \lambda\int_\Omega |w||v|\,dx.$$
$$\leq \beta\int_\Omega |\nabla w||\nabla v|\,dx + \lambda\int_\Omega |w||v|\,dx$$
$$\leq \max(\beta,\lambda)\left(|\nabla w|_{L^2}|\nabla v|_{L^2} + |w|_{L^2}|v|_{L^2}\right)$$
$$\leq C\,\|w\|_{H^1}\,\|v\|_{H^1}$$

2,5

coercivité.

$$a(v,v) = \int_\Omega A\nabla v\,\nabla v\,dx + \lambda\int_\Omega v^2\,dx$$
$$\geq \alpha\,|\nabla v|^2_{L^2} + \lambda\,|v|^2_{L^2}.$$
$$\geq \min\{\alpha,\lambda\}\,\|v\|^2_{H^1}$$

Donc d'après le th. de Lax Milgram (b) admet une unique solution, cette solution vérifie en remplaçant dans (b), $v=u_\lambda$.

$$\min\{\alpha,\lambda\}\,\|u_\lambda\|^2_{H^1(\Omega)} \leq a(u_\lambda,u_\lambda) = \int_\Omega f_\lambda u_\lambda\,dx + \langle g_\lambda, u_\lambda\rangle_{H^{-1/2}\times H^{1/2}}$$
$$\leq |f_\lambda|_{L^2}\,|u_\lambda|_{L^2} + \|g_\lambda\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}\,|\gamma(u_\lambda)|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$$

1

$$\leq |f_\lambda|_{L^2}\,\|u_\lambda\|_{H^1} + C(\Omega)\|g_\lambda\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}\,\|u_\lambda\|_{H^1(\Omega)}$$

d'où

$$\|u_\lambda\|_{H^1} \leq \left(|f_\lambda|_{\Omega} + C(\Omega)\,\|g_\lambda\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}\right)/\min(\alpha,\beta)$$

d'où le résultat.

f continue $\quad f(v) = \int_\Omega f_\lambda v\,dx + \langle g_\lambda, v\rangle_{H^{-1/2}\times H^{1/2}}$

$$|f(v)| \leq |f_\lambda|_\Omega\,|v|_\Omega + |g_\lambda|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}\,|\gamma v|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$$ (4)

$$\leq |f_\lambda|\,|v| + C(\Omega)\,|g_\lambda| \ldots |v| \ldots$$

$$\int_\Omega A\nabla u_\lambda \nabla v\,dx + \lambda\int_\Omega u_\lambda v\,dx = \int_\Omega f_\lambda v\,dx + \langle g_\lambda \ldots$$

d'où

$$\langle -\operatorname{div} A\nabla u_\lambda, v\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} + \lambda\langle u_\lambda, v\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = \langle f_\lambda, v\rangle + 0$$

alors $-\operatorname{div} A\nabla u_\lambda + \lambda u_\lambda = f_\lambda$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ (*)

par ailleurs.

(*) a lieu dans $L^2(\Omega)$, alors $\operatorname{div} A\nabla u_\lambda \in L^2(\Omega)$, par conséquent $A\nabla u_\lambda \in H(\Omega, \operatorname{div})$. Donc $A\nabla u_\lambda . n \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ et de plus $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$-\int_\Omega \operatorname{div} A\nabla u_\lambda \, v\,dx = \int_\Omega A\nabla u_\lambda \nabla v\,dx + \langle A\nabla u_\lambda . n, v\rangle_{H^{-1/2}\times H^{1/2}} \quad (**)$$

en vertu du théorème du cours suivant.

<u>Théorème</u>: si $\partial\Omega$ est lipschitzienne, soit l'espace :

$$H(\Omega, \operatorname{div}) = \{ v \setminus v \in (L^2(\Omega))^N ; \operatorname{div} v \in L^2(\Omega)\}.$$

1,5

Alors, $v.n \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ et la fonction

$$v \in H(\Omega, \operatorname{div}) \longmapsto v.n \; H^{-1/2}(\partial\Omega) \text{ est}$$

linéaire et continue. De plus si $v \in H(\Omega, \operatorname{div})$ et $\forall w \in H^1(\Omega)$, on a

$$-\int_\Omega (\operatorname{div} v)\, w\,dx = \int_\Omega v \nabla w\,dx + \langle v.n, w\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}}$$

Alors en multipliant (*) par $v \in H^1(\Omega)$, on obtient en tenant compte de (**)

1,5

$$\int_\Omega A\nabla u_\lambda \nabla v\,dx + \langle A\nabla u_\lambda . n, v\rangle_{H^{-1/2}\times H^{1/2}} + \lambda\int_\Omega u_\lambda v = \int_\Omega f v\,dx$$

en comparant avec (b), on obtient

$$\langle g_\lambda, v\rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}(\partial\Omega)} = \left\langle \frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu_A}, v\right\rangle_{H^{-1/2}\times H^{1/2}}$$

donc $\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = g$ dans $H^{-1/2}(\partial\omega)$

3/ Par hypothèse $f_\varepsilon \longrightarrow f$ dans $L^2(\omega)$ et $g_\varepsilon \to g$ dans $H^{-1/2}$
alors les suites (f_ε) et (g_ε) sont bornées respectivement
1) dans $L^2(\omega)$ et $H^{-1/2}(\partial\omega)$. Par conséquent (u_ε) est bornée
dans $H^1(\omega)$ en vertu de l'inégalité (c).

Alors (u_ε) possède une SS encore notée (u_ε) et $u \in H^1(\omega)$
1) tel que la sous suite (u_ε) converge faiblement vers u dans
$H^1(\omega)$ (en vertu du th Alaoglu-Steinhaus).

passage à la limite

On a l'application $\varphi : H^1(\omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, $w \longmapsto \int_\omega A\nabla w \nabla v$ v fixé $v \in H^1$

linéaire et continue, en effet, $\left|\int_\omega A\nabla w \nabla v \, dx\right| \leq \int_\omega |A\nabla w \nabla v| \, dx \leq \beta \|w\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$

Donc $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $H^1(\omega)$

alors $\varphi(u_\varepsilon) \longrightarrow \varphi(u)$ dans $\mathbb{R}$

d'où $\int_\omega A\nabla u_\varepsilon \nabla v \, dx \longrightarrow \int_\omega A\nabla u \nabla v \, dx$.

Par ailleurs $u_\varepsilon \longrightarrow u$ faible dans $H^1(\omega)$
(K) alors $u_\varepsilon \longrightarrow u$ fortement dans $L^2(\omega)$

alors pour $v \in H^1(\omega)$ on a
$$\int_\omega u_\varepsilon v \, dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_\omega u v \, dx.$$

et par conséquent $\varepsilon \int_\omega u_\varepsilon v \, dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

Finalement
$$a(u_\varepsilon, v) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_\omega A\nabla u \nabla v \, dx.$$

Par ailleurs, le passage à la limite dans le
second membre (double)

5

$$\int_\Omega f_\varepsilon v \, dx + \langle g_\varepsilon, v \rangle_{H^{-1/2} \times H^{1/2}} \longrightarrow \int_\Omega f v + \langle g, v \rangle$$

0,5 à cause des convergences faible

$$f_\varepsilon \longrightarrow f \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ et } g_\varepsilon \longrightarrow g \text{ dans } H^{-1/2}$$

La solution du pb limite n'est pas unique car l'application $\int_\Omega A \nabla u \nabla v \, dx = A(u,v)$ n'est pas coercive dans $(H^1(\Omega))^2$. En effet.

$$\int_\Omega A \nabla v \nabla v \, dx \not\geq \alpha \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega |v|^2 \right)$$

1 on a juste $\int_\Omega A \nabla v \nabla v \, dx \geq \alpha \int_\Omega |\nabla v|^2 dx = \alpha \|\nabla v\|$

et $\left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}$ n'est pas une norme équivalente à celle de $H^1(\Omega)$.

Alors si $\int_\Omega A \nabla u \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega)$

$\nabla u = 0$ dans $L^2(\Omega)$

$\Rightarrow \quad u =$ cstante sur Ω

$\Rightarrow \quad (u \neq 0)$.

...ice 3.

1/ $|u_n(x)| = \dfrac{e^{-nxy}}{n} \leq 1/n \quad \forall x \in \omega$, 5.

(1) d'où $\sup_{x\in\omega} |u_n(x)| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

alors $\|u_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2/ $\dfrac{\partial u_n}{\partial x} = -y\, e^{-nxy}$

alors $\displaystyle\int_\omega \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|^2 dx\,dy = \int_\omega y^2 e^{-2nxy} dx\,dy$

(1) $\displaystyle\leq \int_\omega y^2\, dx\,dy = C = \left.\frac{y^3}{3}\right]_a^b \int_a^b dx$

$= \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right)(b-a)$

alors $\|\nabla u\|_{L^2(\omega)} = \left(\|\frac{\partial u}{\partial x}\|^2_{L^2(\omega)} + \|\frac{\partial u}{\partial y}\|^2_{L^2}\right)^{1/2} \leq \sqrt{2}\cdot C$

3/ La suite (u_n) est bornée dans $H^1(\omega)$, car $\|u_n\|_\infty$ est bornée

$\|u_n\|_{L^2(\omega)} \leq \|u_n\|_\infty \sqrt{|\omega|}$ et d'après 2 (∇u_n)

donc (u_n) est bornée dans $L^2(\omega)$ et d'après le th de ~~stimulant~~

(1) ~~est bornée dans $L^2(\omega)$.~~ D'après le th de ~~stimulant~~ bornée dans $H^1(\omega)$,

appliqué à (u_n) dans $H^1(\omega)$ { (u_n) bornée dans $H^1(\omega)$ } ($H^1(\omega)$ est un espace de Hilbert (Banach réflexif)), alors

(u_n) possède une sous suite encore notée (u_n) telle que

$u_n \longrightarrow u$, $u \in H^1(\omega)$, converge dans $H^1(\omega)$

Montrons que $u = 0$:

On a $u_n \longrightarrow 0$ dans $L^\infty(\omega)$, donc

(1) $u_n \longrightarrow 0$ dans $L^2(\omega)$, (*)

$u_n \longrightarrow u$ dans $H^1(\omega)$, alors $u_n \longrightarrow u$ dans $L^2(\omega)$ (**)

de plus $u_n \longrightarrow u$

Alors (*) et (**) entraînent que $u = 0$.

4/ Toute sous suite de (u_n) convergente faiblement dans $H^1(\omega)$

(1) converge vers 0, alors d'après le th de stimulant

toute la suite (u_n) converge faiblement vers 0

Exercice 3

Montrons que $u \in L^1(\omega)$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $\frac{\partial u_1}{\partial y}$, $\frac{\partial u_2}{\partial x}$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}$ sont des éléments de $L^1(\omega)$.

(1) $\int_\omega |u_1(x,y)|\,dx\,dy = \int_\omega \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy \le \int_\omega \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = |\omega| = 2\pi$ $C{+}\infty$

(1) $\int_\omega \left|\frac{\partial u_1}{\partial x}(x,y)\right| dx\,dy = \int_\omega \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy$ $\left(\frac{r^3 \sin^2\theta}{r^{3/2}}\,dr\,d\theta\right)$

$\le \int_\omega \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy \le \int \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$

$\int_\omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\, r\,dr\,d\theta = \int_0^1\int_0^{2\pi} dr\,d\theta = 2\pi < +\infty$ alors il en.

(1) Puisque x et y jouent un rôle symétrique alors $\cancel{\frac{\partial u_2}{\partial y} \in L^1(\omega)}$, $\frac{\partial u_2}{\partial x} \in L^1(\omega)$, $\frac{\partial u_2}{\partial y} \in L^1(\omega)$ ait de m̂ pour

$\frac{\partial u_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \Rightarrow \int_\omega \left|\frac{\partial u_1}{\partial y}\right| dx\,dy = \int_\omega \frac{|xy|}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r^2|\cos\theta\sin\theta|}{r^3}\, r\,dr\,d\theta$

$\le 2\pi \int_0^1 \cancel{\frac{1}{r}\sqrt{r}}\,dr \le 2\pi$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 |\cos\theta\sin\theta|\,d\theta\,dr \le 2\pi.$

Exercice 4

1) $\forall x \in \mathbb{R}^k$, $\exists c$ entre 0 et x tel que

$|F(x) - F(0)| \le |F'(c)|\,|x| \le \sup_{y\in\mathbb{R}} |F'(y)|\,|x|$

$C_1 = \sup_{y\in\mathbb{R}} |F'(y)|$

(1)

par ailleurs $|F(x) - F(0)| \le C_1|x|$,

$\big||F(x)| - |F(0)|\big| \le |F(x) - F(0)|$

d'où $F(x) \le C_1|x| + |F(0)|$, $C_2 = F(0)$

2) Soit $u \in W^{1,p}(\omega)$ alors.

$\left(\int_\omega |F(u)|^p\right)^{1/p} \le \left(\int_\omega (C_1|u| + C_2)^p\right)^{1/p}$

$H^p(\omega)$ alors $(C_1|u| + C_2) \in L^p(\omega)$ (car $L^p(\omega)$ ev/ ...)

alors $\left(\int_{\Omega} |F(u)|^p\right)^{1/p} \leq C$

donc $F \in L^p(\Omega)$

par ailleur

$\frac{\partial}{\partial x_i} F(u) = F'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}$ au sens des distributions,

donc

$$\left(\int_{\Omega} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} F(u)\right|^p du\right)^{1/p} = \left(\int_{\Omega} |F'(u)|^p \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p du\right)^{1/p}$$

$$\leq C \left(\int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p du\right)^{1/p} < +\infty$$

1

{car $|F'(u)|$ est borné dans Ω (par hypothèse)

et $u \in L^p(\Omega)$.

donc $F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$.

Département de Mathématiques
Faculté des sciences
Université de Batna

15 Mai 2012

Série d'Exercices n^{0}2 Méthodes variationnelles pour les EDP

Exercice 11

Tout au long de cet exercice O désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

1/Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$, on définit l'application $\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)\ \forall\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Montrer que δ_{x_0} est une distribution.

2/ Soit $f \in L^1_{Loc}(O)$. Soit $T_f(\varphi) = \int_O f\varphi dx,\ \forall\varphi \in D(O)$, montrer que T_f est une distribution.

3/ Montrer que si $(T_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset D'(O)$ et $T \in D'(O)$,

$$\{T_i \to T \text{ dans } D'(O)\} \Rightarrow \{\frac{\partial T_i}{\partial x_k} \to \frac{\partial T}{\partial x_k} \text{ dans } D'(O),\ \forall k \in \{\overline{1,N}\}\}.$$

4/ Montrer que si $a_j \to a$ dans O alors $\delta_{a_j} \to \delta_a$ dans $D'(O)$.

Exercice 12.

i/Montrer que si $u \in L^1_{Loc}(O)$ tel que $\int_O u\varphi dx = 0\ \forall\varphi \in D(O)$ vérifiant $\int_O \varphi dx = 0$, alors $u = C$ pp O.

ii/ Montrer que si $O =]a,b[$, et si $u \in L^1_{Loc}(a,b)$ est tel que $\int_a^b u\varphi' dx = 0\ \forall\varphi \in D(a,b)$ alors u est une constante pp dans $]a,b[$.

Exercice 13

Les applications suivantes sont-elle des distributions ?

a/ $T(\varphi) = |\varphi(0)|$,

b/ $T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha \varphi(x)dx,\ \ \alpha > -1.$

Exercice 14

On veut montrer que la distribution de Dirac n'est pas régulière (ie: il n'existe pas $g \in L^1_{Loc}(\mathbb{R})$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}} g\varphi dx = \varphi(0),\ \ \forall\varphi \in D(\mathbb{R}).$$

On considère la fonction

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} e^{1-\frac{1}{1-(nx)^2}} & |x| < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1/ Montrer que $\varphi_n \in D(\mathbb{R})$

2/ En déduire le resulat.

Exercice 15

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1/ Montrer que si la distribution $u \in D'(I)$ vérifit $u' = 0$, alors u est constante.

2/ Montrer que pour tout $v \in D'(I)$, l'équation differentielle $u' = v$ admet une solution dans $D'(I)$ unique à une constante additive près (autrement dit: toute distribution admet une primitive, et deux primitives d'une même distribution diffèrent d'une constante).

Exercice 16

Soit la fonction