COURS
ANALYSE HILBERTIENNE
UNIVERSITÉ DE
SIDI BELABAS

Chapitre 01 :

Généralités sur la notion d'espace de Hilbert.

1.1 : Définition et propriétés.

Déf 01 : ($\mathbb{K}$ espace vectoriel)

Un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E est un ensemble muni d'une loi $\oplus$: $E^2 \longrightarrow E$ et d'une multiplication $\odot$

$\odot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$ tq :

- $\oplus$ est associative et commutative.
- Il existe $0 \in E$ tq $0 \oplus n = n \quad \forall n \in E$.
- Pour tout $n \in E$, il existe $(-n)$ tq : $n \oplus (-n) = 0$

Pour tout $\lambda, \varepsilon \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$ on a :

- $\lambda \odot (x \oplus y) = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y)$.
- $(\lambda + \varepsilon) \odot x = (\lambda \odot x) \oplus (\varepsilon \odot x)$
- $\lambda \odot (\varepsilon \odot x) = (\lambda \varepsilon) \odot x$.
- $1 \odot x = x$

Déf 02 : (Norme) :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Une norme est une app $\|\cdot\|$ de $E \rightarrow \mathbb{R}^+$ tq :

- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
- Si $x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

* Un espace E muni d'une norme est appelé espace normé.

1.2: Espace préhilbertien complexe:

Soit V un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$.

Définition:

Une app $\langle \cdot \rangle$ de $V \times V$ dans $\mathbb{C}$ est appelé produit scalaire si elle satisfait:

$\forall x, y, z \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$:

① $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

② $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

③ $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

④ $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

* V muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est appelé espace préhilbertien.

Exemples:

. L'espace $\mathbb{C}^d$ $(d \geq 1)$ est un espace p.h

$x \in \mathbb{C}^d \Leftrightarrow x = (x_1, \dots, x_d)$ tq $x_i \in \mathbb{C}$ $\forall i = 1, 2, \dots, d$

Si $y \in \mathbb{C}^d \Leftrightarrow y = (y_1, \dots, y_d)$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i \overline{y_i}$$

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i \overline{y_i}$ $\quad 0 = x \Leftrightarrow$

① $\Rightarrow \langle y, x\rangle = \sum_{i=1}^{d} y_i \overline{x_i}$

$\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\sum_{i=1}^{d} y_i \overline{x_i}}$

$= \sum_{i=1}^{d} \overline{y_i}\, \overline{\overline{x_i}}$

$= \sum_{i=1}^{d} \overline{y_i}\, x_i = \sum_{i=1}^{d} x_i \overline{y_i} = \langle x, y\rangle$.

② Soit $\lambda \in \mathbb{C}$

$\langle \lambda x, y\rangle = \sum_{i=1}^{d} (\lambda x_i)\overline{y_i} = \sum_{i=1}^{d} \lambda (x_i \overline{y_i})$

$= \lambda \sum_{i=1}^{d} x_i \overline{y_i} = \lambda \langle x, y\rangle$

③ $\Rightarrow \langle x+y, z\rangle = \sum_{i=1}^{d} (x_i + y_i)\,\overline{z_i}$

$= \sum_{i=1}^{d} \left(x_i \overline{z_i} + y_i \overline{z_i}\right)$

$= \sum_{i=1}^{d} x_i \overline{z_i} + \sum_{i=1}^{d} y_i \overline{z_i}$

$= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

④ $\Rightarrow \langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 \geq 0$

Si $\langle x, x\rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 = 0$

$\iff \forall i = 1, \dots, d,\ |x_i|^2 = 0$

$\iff x = 0$

Conséquences immédiats de la déf du produit scalaire.

$\forall\, x, y, z \in V$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

2') $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$

En effet : $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\langle \lambda y, x \rangle}$ d'après ①

$= \overline{\lambda \langle y, x \rangle}$ d'après ②

$= \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$ d'après ①

3') $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

En effet : $\langle x, y+z \rangle = \overline{\langle y+z, x \rangle}$ d'après ①

$\langle x, y+z \rangle = \overline{\langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle}$

$= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.

4') $\langle 0, y \rangle = 0$

En effet : $\langle 0, y \rangle = \langle 0x, y \rangle$

$= 0 \langle x, y \rangle$ d'après ②

$= 0$.

5') En particulier, $\langle 0, 0 \rangle = 0$.

* Espace préhilbertien réel :

Si V est un e.v sur le corps $\mathbb{R}$. Un produit scalaire sur V est une app de $V \times V$ ds $\mathbb{R}$ tq :

$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$ vérifiant les mêmes propriétés 2), 3) et 4) de la définition (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) et la propriété 1) est remplacée par 1') $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Note importante :

Dans la suite du cours, nous nous considérons que les espaces préhilbertien complexe
Les résultats obtenus seront aussi valables pour les espaces préhilbertiens réels.

Définition.

- Pour $x \in V$, le nombre $\sqrt{\langle x, x \rangle} := \|x\|$ est appelée norme (euclidienne) du vecteur x induite par le produit scalaire (Exercice).
- x et $y \in V$ sont dite orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$.

Propriétés de la norme euclidienne :

$\forall x, y \in V, \ |\langle x,y \rangle| \leq \|x\| . \|y\|$. (l'inégalité de schwartz)

1) Si $\langle x, y \rangle = 0$, l'inégalité est évidente

2) Si $\langle x, y \rangle \neq 0$, posons $\alpha = \dfrac{\langle x, y \rangle}{|\langle x, y \rangle|}$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$\langle \lambda x + \alpha y , \lambda x + \alpha y \rangle \geqslant 0$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}: \langle \lambda x, \lambda x \rangle + \langle \lambda x, \alpha y \rangle + \langle \alpha y, \lambda x \rangle + \langle \alpha y, \alpha y \rangle \geqslant 0$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}: |\lambda|^2 \langle x, x \rangle + \lambda \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \alpha \bar{\lambda} \cancel{\langle y, x \rangle} + |\alpha|^2 \langle y, y \rangle \geqslant 0$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}: \lambda^2 \|x\|^2 + \lambda \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \alpha \bar{\lambda} \overline{\langle x, y \rangle} + 1 . \|y\|^2 \geqslant 0$.

$\left(\text{car} : |\alpha|^2 = \alpha . \bar{\alpha} = \dfrac{\langle x,y \rangle}{|\langle x, y \rangle|} \times \dfrac{\overline{\langle x, y \rangle}}{|\langle x, y \rangle|} = \dfrac{|\langle x, y \rangle|^2}{|\langle x, y \rangle|^2} = 1 \right)$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2\|x\|^2 + \lambda\left[\bar{\alpha}\langle x,y\rangle + \overline{\bar{\alpha}\langle x,y\rangle}\right] + \|y\|^2 \geq 0$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda \operatorname{Re}\left[\bar{\alpha}\langle x,y\rangle\right] + \|y\|^2 \geq 0$$

$$\bar{\alpha}\langle x,y\rangle = \frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{|\langle x,y\rangle|} \times \langle x,y\rangle = \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{|\langle x,y\rangle|} = |\langle x,y\rangle|.$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda \operatorname{Re}|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \geq 0$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \geq 0.$$

$$\Delta' = b'^2 - ac \ /\ b' = \frac{b}{2}$$

$$\Delta' = |\langle x,y\rangle|^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0 \quad \text{ie} \quad |\langle x,y\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Inégalité de Minkovsky :

$$\forall (x,y) \in V \times V,\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| \quad (\text{car } \operatorname{Re} z < |z|) \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|.\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

Théorème de Pythagore :

Si $\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2
\end{aligned}$$

Rappel :

Déf d'une suite de cauchy ds un espace normé :

Soit E un e.v.n, une suite f_n de E est dite de cauchy ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon$ tq $m \geq N_\varepsilon$ et $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|f_n - f_m\| < \varepsilon$

Définition d'un espace complet.

Un e.v.n dans lequel toute suite de cauchy converge est appelé espace vectoriel normé complet ou un espace de Banach.

Espace de Hilbert :

Déf : un espace pré hilbertien complet est appelé de Hilbert

Exemples :

1) $\mathbb{C}^d = \{x = (\underset{\in \mathbb{C}}{x_1}, \underset{\in \mathbb{C}}{x_2}, \dots, \underset{\in \mathbb{C}}{x_n})\}$

$\mathbb{C}^d$ est complet car tout espace de dimension fini est complet, donc $\mathbb{C}^d$ est un espace de Hilbert.

2) Soit $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ l'espace vectoriel des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes.

le sous ensemble $\ell^2 = \{x \in \mathbb{C}^\mathbb{N}, \sum |x_i|^2 < \infty\}$

est un espace de Hilbert

ℓ^2 est espace de Hilbert

$\ell^2 = \{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$

$x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ veut dire $x = (x_0, x_1, x_2 \ldots)$ avec $x_0 \in \mathbb{C}$, $x_1 \in \mathbb{C}$, $x_2 \in \mathbb{C}$

$x \in \ell^2$ " " $x = (x_0, \ldots)$ et $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$ ...(*)

(*) $\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 = C_{st}$ ou $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} |x_i|^2$ existe

$$(\ell^2 \text{ esp de Hilbert}) \Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{\ell^2 \underset{(1)}{\underline{e.v}} + p.s}_{\ell^2 \text{ préhilbertien}} + \text{complet}}_{\text{Hilbert}}$$

1) ℓ^2 e.v de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ on définit $(+), \cdot$ tq :

$x + y = (x_i + y_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$= (x_0 + y_0, x_1 + y_1, \ldots)$.

$\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda . x = (\lambda x_i)_{i \in \mathbb{N}}$

1) Soient $x \in \ell^2$ et $y \in \ell^2$, montrons que $x + y \in \ell^2$

$x \in \ell^2 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 = C_1 < \infty$

$y \in \ell^2 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^2 = C_2 < \infty$

$x + y \in \ell^2$? Montrons que $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i + y_i|^2 < \infty$

on a pour tout $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$:

$(|x_i + y_i|)^2 \leq (|x_i| + |y_i|)^2$

$|x_i + y_i|^2 \leq |x_i|^2 + |y_i|^2 + 2|x_i||y_i|$

$|x_i + y_i|^2 \leq |x_i|^2 + |y_i|^2 + |x_i|^2 + |y_i|^2$ [car :

$(|x_i| - |y_i|)^2 = |x_i|^2 + |y_i|^2 - 2|x_i||y_i| \geq 0$

donc $|x_i|^2 + |y_i|^2 \geq 2|x_i||y_i|$]

$|x_i + y_i|^2 \leq 2|x_i|^2 + 2|y_i|^2$

$$\sum_{i=0}^{n} |x_i + y_i|^2 \leq 2\sum_{i=0}^{n} |x_i|^2 + 2\sum_{i=0}^{n} |y_i|^2$$

$$\leq 2\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 + 2\sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^2$$

$$\leq 2C_1 + 2C_2 = C^{te} \quad (1).$$

Posons $S_n = \sum_{i=0}^{n} |x_i + y_i|^2$ donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante car :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{i=0}^{n+1} |x_i + y_i|^2 - \sum_{i=0}^{n} |x_i + y_i|^2$$

$$= |x_{n+1} + y_{n+1}| \geq 0$$

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée car $\left(\sum_{i=0}^{n} |x_i + y_i|^2 \leq C\right)$ d'après (1)

Comme $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante majorée

donc (S_n) est cvg, qui veut dire que $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe.

ie $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} |x_i + y_i|^2$ existe.

ie $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i + y_i|^2 < \infty$ donc $x + y \in \ell^2$.

2) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \ell^2$, montrons que $\lambda x \in \ell^2$.

on a $x \in \ell^2$, donc $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 = C$ donc $|\lambda|^2 \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 = |\lambda|^2 C$

$\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda|^2 |x_i|^2 = |\lambda|^2 C \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda x_i|^2 = |\lambda|^2 C = C'$

donc $\lambda x \in \ell^2$ donc ℓ^2 est e.v uver que

$x_i \overline{y_i}$ est

nombre

• $x \in \ell^2, y \in \ell^2 \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \overline{y_i}$

Montrons que $\sum_{i=0}^{\infty} x_i \overline{y_i}$ est convergente.

càd $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i \overline{y_i}|$ converge.

$\sum_{i=0}^{n} |x_i \overline{y_i}| = \sum_{i=0}^{n} |x_i||\overline{y_i}| = \sum_{i=0}^{n} |x_i||y_i|$

On a. $|x_i||\overline{y_i}| \leq \frac{1}{2}(|x_i|^2 + |y_i|^2)$

alors: $\sum_{i=0}^{n} |x_i||\overline{y_i}| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} (|x_i|^2 + |y_i|^2)$

$\sum_{i=0}^{n} |x_i||y_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} |x_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} |y_i|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} |y_i|^2$

$\leq c_1 + c_2$

$\sum_{i=0}^{n} |x_i||y_i| \leq c$

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{i=0}^{n} |x_i||y_i| \leq c$

Posons $S_n = \sum_{i=0}^{n} |x_i||\overline{y_i}| = \sum_{i=0}^{n} |x_i \overline{y_i}|$

$\forall n \in \mathbb{N}, \ S_n \leq c$ donc (S_n) est majorée.

on a: $S_{n+1} - S_n = |x_{n+1} \cdot \overline{y_{n+1}}| \geq 0$ d'où $(S_n) \nearrow$.

donc S_n converge

donc $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i \overline{y_i}|$ est convergente alors $\sum_{i=0}^{\infty} x_i \overline{y_i}$ est abs cvg alors elle est cvg

• ℓ^2 est complet $\Leftrightarrow$ toute suite de cauchy ds ℓ^2 cvg ds ℓ^2.

Soit $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de cauchy qcq ds ℓ^2.

veut dire:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \ n, m \geq n_\varepsilon, \ \|x^n - x^m\|_{\ell^2}^2 < \varepsilon^2$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \ n, m \geq n_\varepsilon, \ \langle x^n - x^m, x^n - x^m \rangle < \varepsilon^2$

$\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n,m \geq n_\varepsilon, \sum_{i=0}^{\infty} (x_i^n - x_i^m)\overline{(x_i^n - x_i^m)} < \varepsilon$

$\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n,m \geq n_\varepsilon, \sum_{i=0}^{\infty} |x_i^n - x_i^m|^2 < \varepsilon^2$

donc. $\forall i \in \mathbb{N}$

$\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n,m \geq n_\varepsilon, |x_i^n - x_i^m|^2 < \varepsilon^2$

veut dire que la suite $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite de cauchy dans $\mathbb{C}$ (fermé $\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ complet)

donc $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ cvg de $\mathbb{C}$.

donc $\forall i \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} x_i^n = x_i \in \mathbb{C}$.

15/11/2017 • Théorème de projection sur un convexe fermé:

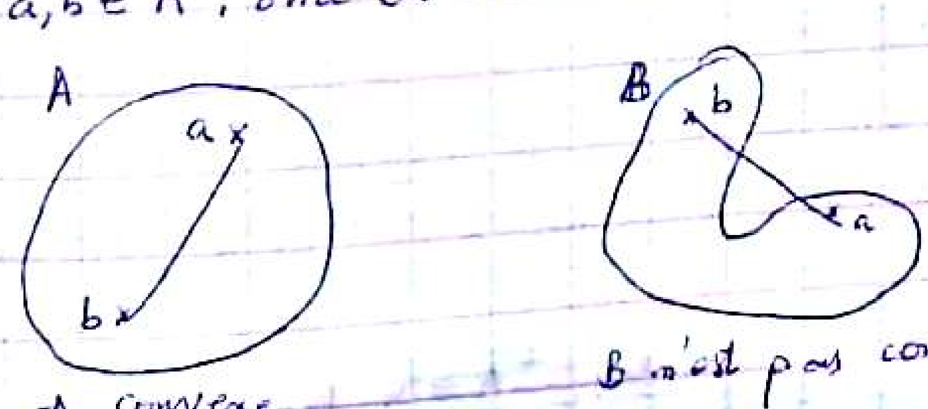
Soit V un espace vectoriel (non mésuré) normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on rappelle les définitions suivantes:

Déf 1: On appelle segment d'extrémités $a,b \in V$ le sous ensemble de V défini par

$[a,b] = \{ \lambda a + (1-\lambda) b, \ 0 \leq \lambda \leq 1 \}$

Déf 2:

Un sous ensemble $A \subset V$ est convexe si pour tout a,b $a,b \in A$, on a $[a,b] \subset A$



A convexe

B n'est pas convexe.

Déf 3 : F est un sous ensemble fermé de V.

F fermé $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}\text{toute suite } (x_n) \subset F \text{ convergente} \\ \text{converge vers } x \in F\end{array}\right]$

$[x_n \subset F$ et $x_n \to x \in F] \Leftrightarrow$ F fermé.

Déf 4 : la borne inférieure :

Soit A un ensemble $A \neq \phi$

Soit $\delta = \inf A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in A$ tq : $\delta \leq x \leq \delta + \varepsilon$

Proposition :

Si $\delta = \inf A \Leftrightarrow \exists\, (x_n) \subset A$ tq $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \delta$.

pour $\varepsilon = 1$ $\exists\, x_1 \in A$ tq $\delta \leq x_1 \leq \delta + 1$

pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists\, x_2 \in A$ tq $\delta \leq x_2 \leq \delta + \frac{1}{2}$

$\vdots$

pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $\exists\, x_n \in A$ tq $\delta \leq x_n \leq \delta + \frac{1}{n}$

Alors $\delta \leq \lim\limits_{n \to +\infty} x_n \leq \delta$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \delta$

- L'orthogonal de A ($A^{\perp}$)

$A \subset V$ muni d'un produit scalaire

$A^{\perp} \{x \in V, \langle x, y \rangle = 0, \forall\, y \in A\}$

$x \in A^{\perp} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0\ \forall\, y \in A$

ie x est perpendiculaire à tous les éléments de A.

Proposition :

$A^\perp$ est un s.e.v fermé.

Preuve :

1) $A^\perp$ s.e.v :

i/ Soient $x_1, x_2 \in A^\perp$, donc $\begin{cases} \forall y \in A, & \langle x_1, y\rangle = 0 \\ \forall y \in A, & \langle x_2, y\rangle = 0 \end{cases}$

d'où $\forall y \in A$, $\langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle = \langle x_1 + x_2, y\rangle = 0$

Donc $x_1, x_2 \in A^\perp$.

ii/ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in A^\perp$

$$\begin{aligned} \forall y \in A, \ \langle x, y\rangle = 0 &\Rightarrow \lambda \langle x, y\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \lambda x, y\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \lambda x \in A^\perp \end{aligned}$$

iii/ $A^\perp \neq \phi$ car $\langle 0, y\rangle = 0$ $\forall y \in A$ ie $0 \in A^\perp$.

donc $A^\perp$ est un s.e.v.

2) $A^\perp$ est fermé :

Soit (x_n) une suite ds $A^\perp$ convergente.

$(x_n) \subset A^\perp$, $x_n \longrightarrow x$

$\forall y \in A$, $\langle x_n, y\rangle = 0$. $\qquad \langle\, ,\, \rangle$ est continue.

$\forall y \in A$, $\lim_{n \to +\infty} \langle x_n, y\rangle = 0$

$\forall y \in A$ $\langle \lim_{n \to +\infty} x_n, y\rangle = 0$

donc $\forall y \in A$, $\langle x, y\rangle = 0$

veut dire que $x \in A^\perp$ ie $A^\perp$ est fermé.

(*) .... * Théorème de projection sur un convexe fermé.

Soit A un ensemble convexe fermé non vide de H (Hilb

Alors $\forall x \in H$, $\exists ! y \in A$ tq: $\inf_{x \in A} \|x-a\| = \|x-y\|$

Preuve:

Posons: $\delta = \inf_{a \in A} \|x-a\| =$

$\exists y_n \in A$ tq $\lim_{n \to +\infty} \|x-y_n\| \overset{?}{=} \delta$

(i y) Prouvons que (y_n) est une suite de Cauchy

$\|y_n - y_m\|^2 = \|y_n - x + x - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 - \|y_n + y_m - 2x\|^2$

$/ \|U+V\|^2 = 2\|U\|^2 + 2\|V\|^2 - \|U-V\|^2$ $\quad \|2(\frac{y_n+y_m}{2})\|$

$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 - 4\|x - \frac{y_n-y_m}{2}\|^2$

on a $y_n \in A$ et $y_m \in A$ et A convexe

alors: $\underbrace{\frac{y_n+y_m}{2}}_{a \in A} \in A$ (A convexe).

$\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\| \geq \delta$

donc $-4\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\|^2 \leq -4\delta^2$

on a $\lim_{n \to +\infty} \|x - y_n\| = \delta$ $\quad (*)$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, $\underbrace{\| \|x-y_n\| - \delta \|}_{=} < \varepsilon$

$| \|x - y_n\| - \delta |$ car $(*) \in \mathbb{R}$

$=$

$\underline{\|x - y_n\| - \delta}$ car $\|x \ldots\| \geq 0$.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ $\|x - y_n\| - \delta \leq \varepsilon$

19/11/2017

$\Rightarrow \|x-y_n\| \leq \delta + \varepsilon$

$\Rightarrow \|x-y_n\|^2 \leq (\delta+\varepsilon)^2$

un fermé dans un complet est complet.

donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, n, m \geq N_\varepsilon$ tq :

$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2(\delta+\varepsilon)^2 - 2(\delta+\varepsilon)^2 - 4\delta^2$

$\|y_n - y_m\|^2 \leq 4(\delta^2 + \varepsilon^2 + 2\delta\varepsilon) - 4\delta^2$

$\|y_n - y_m\|^2 \leq 4\varepsilon^2 + 8\delta\varepsilon$

donc (y_n) est une suite de cauchy ds A (fermé).

$\boxed{\left\{\begin{array}{l} A \text{ fermé} \\ A \subset \text{complet} \end{array}\right. \Rightarrow A \text{ complet}}$ (Exercice).

$A \subseteq H$ (complet) donc A complet.

Alors (y_n) converge ds A, donc $\exists y \in A$ tq $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = y$

on a : $\delta = \lim\limits_{n \to +\infty} \|x - y_n\| = \|x - y\|$.

Montrons l'unicité :

Supposons $\delta = \|x - y_1\|$ et $\delta = \|x - y_2\|$ tq $y_1 \neq y_2$.

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\|^2 &= \|(y_1 - x) + (x - y_2)\|^2 \\ &= 2\|x - y_1\|^2 + 2\|x - y_2\|^2 - 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|^2 \\ &\leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 \end{aligned}$$

$\|y_1 - y_2\|^2 = 0$ donc $y_1 = y_2$

* Projection sur un sous-espace fermé :

Le cas particulier le plus important du théorème précédent est la projection sur un sous espace vectoriel fermé F de H.

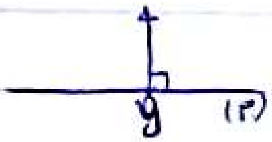
Rem :

Un s.e.v est convexe (exercice).

Notation $(*)$:

Ce pt y s'appelle la projection de x sur F et on la note $P_F(x) = y$

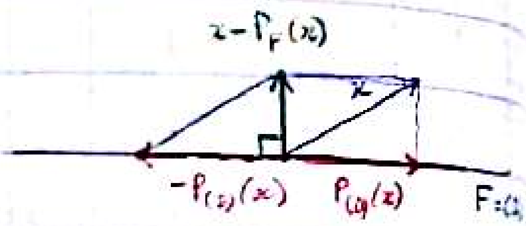
22/11/2017 Corollaire :



1) $\forall x \in H$, $P_F(x) \in F$

2) Si $x \in F$, $P_F(x) = x$

3) $\forall x \in H$, $x - P_F(x) \perp F$



$/x - P_{(F)}(x) = x + (-P_F(x))/$

$\forall x \in H$, $\langle x - P_F(x), z \rangle = 0$ $\forall z \in F$.

Théorème :

Soient H, F un s.e.v fermé de H $(F \neq \phi)$.

i) $P_F : H \longrightarrow F$

$x \longmapsto P_F(x)$ $\quad P_F$ linéaire.

ii) $P_F \circ P_F = P_F^2 = P_F$

iii) $\mathrm{Ker}\, P_F = F^\perp$ (exercice).

Preuve :

i) $\forall x_1, x_2 \in H$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $P_F(\alpha x_1 + x_2) \overset{??}{=} \alpha P_F(x_1) + P_F(x_2)$ ... (I)

Soit $x_1 \in H$, $\exists! y_1 \in F / P_F(x_1) = y_1$, donc d'après (3) :

$\langle x_1 - P_F(x_1), z \rangle = 0$ $\forall z \in F$.

et on a : $x_2 \in H$, $\exists!\, y_2 \in F$ t.q $P_F(x_2) = y_2$, donc d'après (3) : $\langle x_2 - P_F(x_2), z \rangle = 0 \quad \forall z \in F$.

pour montrer (I) : il faut montrer que :

$$\langle \alpha_1 x_1 + x_2 - [\alpha_1 P_F(x_1) + P_F(x_2)], z \rangle = 0 \quad \forall z \in F.$$

on a :

$$\langle \alpha_1 x_1 + x_2 - [\alpha_1 P_F(x_1) + P_F(x_2)], z \rangle = \langle (\alpha_1 x_1 - \alpha_1 P_F(x_1)) + (x_2 - P_F(x_2)), z \rangle$$
$$= \langle \alpha_1 x_1 - \alpha_1 P_F(x_1), z \rangle + \langle x_2 - P_F(x_2), z \rangle$$
$$= 0 + 0 = 0$$

donc $P_F(\alpha_1 x_1 + x_2) = \alpha_1 P_F(x_1) + P_F(x_2)$

donc P_F est linéaire

ii) $P_F \circ P_F = P_F$??.

$\forall x \in H$, $P_F \circ P_F(x) = P_F(x)$? $_{\in F}$

Soit $x \in H$, $P_F \circ P_F(x) = P_F(P_F(x))$ d'après (1)

$= P_F(x)$ [car $P_F(x) \in F$ et (2)]

$= P_F(x)$.

Théorème :

Soit H un espace de Hilbert et F un s.e.v fermé $(F \neq \phi)$.

i) $H = F \oplus F^{\perp}$

ii) P_F : est continue et vérifie $\forall x \in H$, $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$.

iii) $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Preuve :

$$\boxed{H = F \oplus F^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap F^{\perp} = \{0\}. \\ \forall x \in H, \; x = \underset{\in F}{x_1} + \underset{\in F^{\perp}}{x_2} \end{cases}}$$

i) $F \cap F^{\perp} = \{0\}$?

a) $F \cap F^{\perp} \neq \emptyset$ car $0 \in F \cap F^{\perp}$ (car F et $F^{\perp}$ sont des s.e.v)

b) Supposons $x \in F \cap F^{\perp}$ et $x \neq 0 \Rightarrow x \in F$ et $x \in F^{\perp}$

$\Rightarrow \langle x, x \rangle = 0$

$\Rightarrow \|x\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (contradiction)

2/ $\forall x \in H$, $x = x_1 + x_2$ tq $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^{\perp}$??

Soit $x \in H$, $x = \underbrace{P_F(x)} + \underbrace{x - P_F(x)}$

d'après (2) $x_1 \in F$ $\quad$ $x_2 \in F^{\perp}$ d'après (3).

On montre que la décomposition est unique :

Supposons que : $x = x_1 + x_2$ tq $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^{\perp}$

alors. $x_1 = P_F(x)$, $x_2 = x - P_F(x)$.

• $P_F(x) = P_F(x_1 + x_2)$ P_F app lin.

$P_F(x) = P_F(x_1) + P_F(x_2)$ $[P_F(x_2) = 0$ car $x_2 \in F^{\perp} = \mathrm{Ker}\, P_F$ (3) $P_F(x_2) = 0]$

$P_F(x) = x_1 + 0$ donc $x_1 = P_F(x)$.

• $x = x_1 + x_2$ · donc :

$(I - P_F)(x) = (I - P_F)[x_1 + x_2]$

$(I - P_F)(x) = (I - P_F)(x_1) + (I - P_F)(x_2)$

$Ix - P_F(x) = Ix_1 - P_F(\underset{\in F}{x_1}) + Ix_2 - P_F(\underset{\in F^{\perp}}{x_2})$

$x - P_F(x) = x_1 - x_1 + x_2 - 0$

$x_2 = x - P_F(x)$

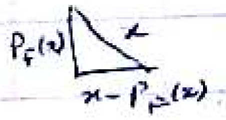
29/11/2017

ii) On a P_F est linéaire

$[P_F \text{ continue}] \Leftrightarrow [\exists\, C>0, \forall x \in H, \|P_F(x)\| \leq C\|x\|]$

on a $x = x - P_F(x) + P_F(x)$

On a : $\underbrace{(x - P_F(x))}_{\in F^\perp} \perp \underbrace{P_F(x)}_{\in F}$



d'après phythagore :

$\|x\|^2 = \|x - P_F(x) + P_F(x)\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x)\|^2$

donc : $\|P_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$

$\|P_F(x)\| \leq \|x\|$

$\exists\, C = 1$ donc P_F continue

iii) $(F^\perp)^\perp = F$ (exercice)

Décompositions orthogonales :

Soit D un ensemble fini ou dénombrable, dans toute la suite, on pose $D = \{1, 2, \dots, d\}$

Si D est fini et $D = \mathbb{N}^*$ si D est infini dénombrable. Soit alors H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n \in D}$ une famille de vecteurs.

Définition :

On dit que $(e_n)_{n \in D}$ est un système orthogonal ds H si $\forall n \neq m \in D$, $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ $\forall n \in D$ $\| e_n \| = 1$.

Théorème : (projection sur un s.e.v de dim finie) :

Soit $e_1, \dots, e_n$ un système (orthogonal) orthonormal fini et $V = V[e_1, e_2, \dots, e_n]$ le sous espace vectoriel de H engendré par les e_i, alors $\forall x \in H$, $P_V(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$

preuve :

d'après le corollaire on a : $\forall x \in H$, $x - P_V(x) \perp V$

$\forall i \in \{1, 2, \dots, d\}$

$\langle x - \sum_{i=1}^{d} \langle x, e_i \rangle e_i , e_i \rangle = \langle x - (\langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x, e_d \rangle e_d , e_i \rangle$

$= \langle x, e_i \rangle - \langle \langle x, e_1 \rangle e_1, e_i \rangle - \langle \langle x, e_2 \rangle e_2, e_i \rangle - \dots - \langle \langle x, e_d \rangle e_d, e_i \rangle$

$= \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_1 \rangle \langle e_1, e_i \rangle - \langle x, e_2 \rangle \langle e_2, e_i \rangle - \dots - \langle x, e_d \rangle \langle e_d, e_i \rangle$

$= \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle = 0$

donc $P_V(x) = \sum_{i=1}^{d} \langle x, e_i \rangle e_i$

/pour montrer : $P_F(x) = K$ on Mq $\langle x - K, z \rangle = 0$ $\forall z \in F$.

Scanned by CamScanner

Système total.

Définition: On dit que $(e_n)_{n\in D}$ est un système total ds H si $\{e_n, n\in D\}^{\perp} = \{0\}$

ie $x \in \{e_n, n\in D\}^{\perp} \Leftrightarrow x = 0$.

Définition: (Base Hilbertienne):

Un système orthonormale total $(e_n)_{n\in D}$ de H est appelé base Hilbertienne.

Exemple:

$H = \ell^2 = \{x = (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$

on montre que le système $\{e_1, e_2, \dots\}$ est une base Hilbertienne tq: $e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$ ds ℓ^2

$e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$

$\vdots$

$e_n = (0, 0, \dots, \underset{n}{1}, 0, 0 \dots)$

D'abord montrons que $\{e_1, e_2 \dots\}$ est orthonormale:

$\forall n \in D$, $\langle e_n, e_n \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \overline{e_n} = \sum_{n=1}^{\infty} |e_n|^2 = 1$ donc $\|e_n\|^2 = 1$

si $n \neq m$:

$\langle e_n, e_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \cdot \overline{e_m} = 0$

on montre que $\{e_1, e_2, \dots\}$ est total.

On montre $\{e_1, e_2, \dots\}^{\perp} = \{0\}$?

ie: $x \in \ell^2$ ($x = (x_1, x_2, \dots)$ suite), $x \in \{e_1, e_2, \dots\} \Leftrightarrow x = 0$

$\langle x, e_i \rangle = 0 \ \forall e_i \in \{e_1, e_2, \dots\}$

$\forall i \ \langle x, e_i \rangle_{\ell^2} = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \ \forall i$, $\Leftrightarrow x = 0$

$x = (x_1, x_2 \cdots\cdots x_i, x_{i+1} \cdots\cdots)$

$e_i = (0, 0 \cdots, 1, 0, 0, \cdots\cdots)$

$\langle x, e_i \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{e}_n$

03/12/2017 **Théorème de la base orthonormale :**

Soit H espace de Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système orthonormale de H.

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) $\forall x \in H$ on a $\|x\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$

ii) $\forall x \in H \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$

iii) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne.

Exercice :

$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

former un système orthonormal à partir de ces trois vecteurs.

/ u_1, u_2, u_3 forment un sys ort $\Leftrightarrow \langle U_1, U_2 \rangle = 0$

et $\|U_1\| = \|U_2\| = \|U_3\| = 1$ /

$\|U_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \neq 1$.

on a : $U_1' = \frac{U_1}{\|U_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$U_2' = U_2 - P_{v\{U_1'\}}(U_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \langle U_2, U_1' \rangle_{\mathbb{R}^3} U_1'$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$$\|U_2'\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$V_2 = \frac{U_2'}{\|U_2'\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -\sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$U_3' = U_3 - P_{\{U_1', V_2\}}(U_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left[\langle U_3, U_1'\rangle U_1' + \langle U_3', V_2\rangle V_2\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -\sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\|U_3'\| = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$V_3 = \frac{U_3'}{\|U_3'\|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Donc le système $\left\{ U_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\}$ est orthonormal.

Vérification:

$$\langle U_1', V_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{18}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3} = 0$$

$$\langle U_1', V_3\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = 0$$

$$\langle V_2, V_3\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = 0$$

Sur l'espace vectoriel $C[-1,1]$

$f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{C[-1,1]} = \int_{-1}^{1} f(t)\,\bar{g}(t)\,dt$$

On considère la famille des fcts monomes.

$b_n : t \longrightarrow t^n \quad (n \in \mathbb{N})$.

$/ b_0 : t \longrightarrow 1 \,,\ b_1 : t \longrightarrow t \ ;\ b_2 : t \longrightarrow t^2 /$

$$\| b_0 \|^2 = \langle b_0, b_0 \rangle_{C[-1,1]} = \int_{-1}^{1} b_0(t) \cdot \overline{b_0(t)}\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} 1\,dt$$

$$= [t]_{-1}^{1} = 1-(-1) = 2$$

$\| b_0 \| = \sqrt{2}$.

$b_0' : t \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\| b_0' \| = 1)$.

$$b_1' = b_1 - \underset{V\{b_0'\}}{P}(b_1) = b_1 - \langle b_1, b_0' \rangle b_0'$$

$$= t - \left(\int_{-1}^{1} t \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) dt \right)$$

$$= t - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} t \; dt = t.$$

:/12/2017

$\| b_1' \| = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

$b_1'' : t \longrightarrow \frac{t}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t$.

$$b_2' = b_2 - \underset{V\{b_0', b_1''\}}{P}(b_2) = b_2 - \langle b_2, b_0' \rangle b_0' - \langle b_2, b_1'' \rangle b_1'' = t^2 - \frac{1}{3}$$

$\|b_2'\|^2 = \frac{8}{45} \Rightarrow \|b_2'\| = \sqrt{\frac{8}{45}}$.

$b_2'' : t \longrightarrow \frac{t^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{8}{45}}} = \sqrt{\frac{45}{8}}\,(t^2 - \frac{1}{3})$.

A ce stade, on constate que :

$$\boxed{b_n' : t \longrightarrow \frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n}$$ pour : $\langle f,g\rangle = \int f(t)\overline{g(t)}\,dt$

ce sont les polynômes de Legendre.

Théorème :

Les polynômes de Legendre forment une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2[-1,1]$.

base hilbertienne $\Leftrightarrow$ orthonormale + totale

Les polynômes de Laguerre :

De même pour le produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\overline{g(t)}\,dt$ de $L^2(\mathbb{R}_+, e^{-t}dt)$ on obtient comme base orthonormale les polynômes de Laguerre.

$$\boxed{b_n''(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt}(e^{-t}t^n)}$$

Les polynômes de Hermite :

De m̂ pour le produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\overline{g(t)}\,e^{-t^2/2}\,dt$ de $L^2(\mathbb{R}, e^{-t^2/2}dt)$, on obtien " - " les polynômes de Hermite.

$$\boxed{b_n''(t) = (-1)^n e^{t^2/2}\frac{d^n}{dt^n}\cdot e^{-t^2/2}}$$

Exercice:

Calculer $\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-x}(x^2-a-bx)^2\,dx$

$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-x}(x^2-a-bx)^2\,dx = \inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-x}(x^2-a-bx)\overline{(x^2-a-bx)}\,dx$

$= \inf_{a,b\in\mathbb{R}} \langle x^2-a-bx, x^2-a-bx\rangle$ tq $\langle f,g\rangle = \int e^{-x} f(x)\cdot\overline{g(x)}\,dx$.

$= \inf \| x^2-a-bx\|^2 = \|x^2 - P_F(x^2)\|^2$, $H = P_2(x)$

$/ \forall x \in H, \exists! y\in F, \inf_{a\in F} \|x-a\|^2 = \|x-P_F(x)\|^2 /$.

tq $P_2(x)$ est l'espace de polynômes de degré ≤ 2

et F est l'espace de polynôme de degré ≤ 1

Calculons $P_F(x^2)$:

comme $P_F(x^2)\in F$ donc $P_F(x^2)$ est un polynome de degré 1 alors:

$P_F(x^2) = \alpha x + \beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

on a : $x^2 - P_F(x^2) \perp F$ alors.

$\langle x^2 - P_F(x^2), z\rangle = 0 \quad \forall z\in F$.

$\langle x^2-\alpha x-\beta, z\rangle = 0 \quad \forall z\in F$.

- pour $z=1$: $\langle x^2-\alpha x-\beta, 1\rangle = 0$
- pour $z=x$: $\langle x^2-\alpha x-\beta, x\rangle = 0$

on a :

$$(I)\ldots \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-x}(x^2-\alpha x-\beta)\,dx = 0 \\ \int_0^{+\infty} e^{-x}(x^2-\alpha x-\beta)\,x\,dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^{+\infty} (e^{-x}x^2 - \alpha x e^{-x} - \beta e^{-x})\,dx = 0 \\ \int_0^{+\infty} (e^{-x}x^3 - \alpha e^{-x}x^2 - \beta e^{-x}x)\,dx = 0 \end{cases}$$

$$\left(R: \int_0^{+\infty} e^{-x}(x^2 - \alpha x - \beta)x \, dx = 0\right)$$

$$R: \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n \, dx = n!$$

$$(I) \ldots \Rightarrow \begin{cases} 2! - \alpha - \beta = 0 \\ 3! - 2!\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - \alpha - \beta = 0 \\ 6 - 2\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Donc : $P_F(x^2) = 4x - 2 = y$

$$\inf_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-x}(x^2 - a - \beta x)^2 dx = \| x^2 - P_F(x^2) \|$$

$$= \| x^2 - (4x - 2) \|^2$$

$$= \langle x^2 - 4x + 2, x^2 - 4x + 2 \rangle$$

$$\inf \int_0^{+\infty} e^{-x}(x^2 - a - bx)^2 dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}(x^2 - 4x + 2)^2 dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x}(x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x + 4) \, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} (e^{-x}x^4 - 8e^{-x}x^3 + 20e^{-x}x^2 - 16e^{-x}x + 4e^{-x}) \, dx$$

$$= 4! - 8 \times 3! + 20 \times 2! - 16 \times 4$$

$$= 24 - 48 + 40 - 16 + 4 = 4$$