François Cottet-Emard

Algèbre linéaire et bilinéaire

maths

COURS

ET EXERCICES CORRIGÉS

LMD

Licence de mathématiques, L2

de boeck

Éléments sous droits d'auteur

François **Cottet-Emard**

Algèbre linéaire et bilinéaire

maths

COURS
ET EXERCICES CORRIGÉS

de boeck

Éléments sous droits d'auteur

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : **www.deboeck.com**

© De Boeck & Larcier s.a., 2006
Éditions De Boeck Université
Rue des Minimes 39, B-1000 Bruxelles

Tous droits réservés pour tous pays.
Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit.

Imprimé en Belgique

Dépôt légal :
Bibliothèque nationale, Paris : janvier 2006
Bibliothèque royale de Belgique : 2005/0074/170

ISBN 2-8041-4906-4

Éléments sous droits d'auteur

Table des matières

Éléments sous droits d'auteur

François Cottet-Emard

Algèbre linéaire et bilinéaire

COURS
ET EXERCICES CORRIGÉS

LMD

Licence de mathématiques, L2

de boeck

Éléments sous droits d'auteur

François **Cottet-Emard**

Algèbre linéaire et bilinéaire

maths

**COURS
ET EXERCICES CORRIGÉS**

de boeck

Éléments sous droits d'auteur

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : **www.deboeck.com**

© De Boeck & Larcier s.a., 2006
Éditions De Boeck Université
Rue des Minimes 39, B-1000 Bruxelles

Tous droits réservés pour tous pays.
Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit.

Imprimé en Belgique

Dépôt légal :
Bibliothèque nationale, Paris : janvier 2006
Bibliothèque royale de Belgique : 2005/0074/170 ISBN 2-8041-4906-4

Éléments sous droits d'auteur

Table des matières

Éléments sous droits d'auteur

Chapitre 3 Diagonalisation et trigonalisation

Éléments sous droits d'auteur

Éléments sous droits d'auteur

Éléments sous droits d'auteur

maths

Chapitre 1

Rappels d'algèbre

Ce premier chapitre est un résumé de ce qu'il est indispensable de bien avoir compris et retenu du cours d'algèbre et d'algèbre linéaire de première année. Mais attention, cela ne signifie pas qu'il faut se contenter de ce qui est résumé dans ces quelques pages ! En particulier, il n'y a ici aucune démonstration, seulement des rappels et éventuellement quelques exemples.

On ne parlera ici que de famille contenant un nombre fini de vecteurs. Les espaces vectoriels seront donc de dimension finie. La lettre K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ indifféremment.

1. Applications injectives, surjectives, bijectives

Soit E et F deux ensembles quelconques non vides, et f une application de E dans F.

1.1 Image directe d'une partie de *E*

Étant donnée une partie A de E, l'image directe de A par f est le sous-ensemble de F formé des éléments $f(a)$ lorsque a décrit A :

$$f(A) = \{y \in F : \exists a \in A,\ y = f(a)\}.$$

1.2 Image réciproque par *f* d'une partie de *F*

Soit B une partie de F. On appelle image réciproque de B par f, et on note $f^{-1}(B)$, l'ensemble des éléments $x \in E$ dont l'image par f est dans B :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

On fera attention à la notation $f^{-1}(B)$ qui prête à confusion avec l'idée que f pourrait être bijective. Il n'en est rien !

Éléments sous droits d'auteur

1.3 Injection de *E* dans *F*

On dit que f est injective de E dans F lorsque deux éléments distincts de l'ensemble E ont toujours deux images distinctes dans F :

$$(\forall x_1, x_2 \in E)\ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Par contraposée, cela équivaut à dire que l'égalité $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$.

Cela signifie aussi que pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ a **au maximum** une solution $x \in E$.

1.4 Surjection de *E* sur *F*

On dit que f est surjective de E sur F lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée F est l'image d'au moins un élément de l'ensemble de départ E :

$$(\forall y \in F)\ (\exists x \in E)\ (y = f(x)$$

Cela signifie que pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet toujours **au moins une solution** $x \in E$.

1.5 Bijection de *E* sur *F*

On dit que f est bijective lorsque tout élément de F est image d'un et d'un seul élément de E.

Cela équivaut donc à dire que f est à la fois injective et surjective.

L'application qui à chaque $y \in F$ associe l'unique élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ est une bijection de F sur E. On l'appelle bijection réciproque de f, et on la note f^{-1}.

2. Espaces vectoriels sur *K*

2.1 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

On ne démontre que très rarement qu'un ensemble E est un espace vectoriel en démontrant toutes les propriétés de la définition. On démontre toujours que E est un sous-

Éléments sous droits d'auteur

espace vectoriel d'un ensemble vectoriel connu. Pour cela, on démontre que E est stable pour l'addition et pour la multiplication par un scalaire, i.e. :

- $(\forall x, y \in E)\ (x + y \in E)$
- $(\forall x \in E)\ (\forall \lambda \in K)\ (\lambda x \in E)$.

2.2 Combinaisons linéaires de vecteurs

Une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ de E est un vecteur de la forme $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p$ où les $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des scalaires appartenant à K. Il s'agit évidemment d'un vecteur appartenant à l'espace vectoriel E.

2.3 Famille génératrice

Une famille $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ de vecteurs de E est dite génératrice de E lorsque tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Remarque En pratique, pour démontrer que $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ est une famille génératrice de E, on se donne un vecteur quelconque $x \in E$ et l'on montre qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p$.

Exemple Démontrer que la famille $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un générateur de $\mathbb{R}^2$ se fait en montrant que pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, il existe trois réels a, b, c tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, ce qui est un système de deux équations à trois inconnues.

$$\begin{cases} x = a - 4b + 2c \\ y = 2a + 2b + 5c. \end{cases}$$

Il est facile de voir que ce système admet des solutions a, b, c quels que soient x et y.

Attention La seule chose importante est l'existence des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Ils peuvent être uniques ou non, cela est un autre problème.

Éléments sous droits d'auteur

2.4 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Soit une famille donnée $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ de vecteurs de E. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$.

Exemple Dans $\mathbb{R}[X]$, la famille de polynômes $\{3, X-1, X^2-4X+9\}$ engendre le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Dire que $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel E signifie donc que le sous-espace vectoriel engendré par cette famille est égal à E tout entier.

2.5 Famille libre de vecteurs

On dit qu'une famille $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ de p vecteurs de E est libre lorsque :

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p = 0) \Rightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0).$$

Cela signifie qu'aucun des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ n'est une combinaison linéaire des autres.

Si un vecteur x de E est une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ formant une famille libre, alors l'écriture

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p$$

est unique.

Quand une famille de vecteurs n'est pas libre, on dit qu'elle est liée. L'un au moins des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

2.6 Espace vectoriel de dimension finie sur K

On dit que E est de dimension finie sur K quand il existe une famille $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ (avec un nombre fini de vecteurs) qui engendre E.

Tout vecteur de E est donc une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$.

Éléments sous droits d'auteur

3. Bases d'un espace vectoriel de dimension finie

3.1 Base de *E*

On appelle base d'un espace vectoriel E toute famille $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ qui est à la fois **libre** et **génératrice** de l'espace vectoriel E.

Tout vecteur x de E s'écrit donc de **façon unique** sous la forme :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

où les $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des scalaires appelés composantes (ou coordonnées) de x sur la base.

Exemple L'espace $\mathbb{R}^n$ est souvent rapporté à sa base dite « canonique », formée par les vecteurs

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0), \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1).$$

3.2 Théorème fondamental et définition

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre n de vecteurs. Cet entier n s'appelle la dimension de E sur K.

3.3 Caractérisation des bases

Une base est une famille libre et génératrice de l'espace vectoriel E. On doit donc *a priori* vérifier ces deux conditions.

Mais on peut aussi montrer qu'un vecteur quelconque de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs donnés.

Très souvent, on se trouve dans un espace vectoriel dont on connaît *a priori* la dimension n, et l'on veut montrer qu'une famille de vecteurs $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ avec le même nombre n de vecteurs que la dimension, est une base de E. Le travail est alors simplifié :

- $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ est une base si et seulement si c'est une famille libre dans E.
- $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ est une base si et seulement si c'est une famille génératrice de E.

Éléments sous droits d'auteur

On dit ainsi qu'une base est une famille libre maximale et une famille génératrice minimale : dès qu'on lui ajoute un vecteur, on n'obtient plus une famille libre. Dès qu'on lui enlève un vecteur, on n'obtient plus une famille génératrice de l'espace.

Exemple Pour démontrer que la famille de polynômes $\{(X-1)(X-2), X(X-1), X(X-2)\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, espace dont on sait par ailleurs qu'il est de dimension 3, il suffit de montrer que c'est une famille libre, i.e. que l'égalité :

$$a(X-1)\ (X-2) + bX(X-1) + cX(X-2) \ = \ 0 \quad \text{(le polynôme nul)}$$

implique $a = b = c = 0$.

3.4 Théorème de la base incomplète

Si l'on se donne une famille libre de p vecteurs $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ d'un espace vectoriel de dimension $n > p$, il existe des bases de E dont les p premiers vecteurs sont $u_1, \ldots, u_p$. On complète cette famille libre en lui ajoutant $n - p$ vecteurs $w_{p+1}, \ldots, w_n$ de façon que le système $\{u_1, u_2, \ldots, u_p, w_{p+1}, \ldots, w_n\}$ soit libre. Il s'agit donc d'une base de E.

Une solution très simple, dans $\mathbb{R}^n$, consiste à prendre les vecteurs w_j parmi les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

4. Rang d'une famille de vecteurs

4.1 Rang

On appelle rang d'une famille de vecteurs $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ d'un espace vectoriel E la dimension r du sous-espace vectoriel F de E engendré par ces vecteurs.

Le rang d'une famille de vecteurs est donc inférieur ou égal au nombre de vecteurs qu'il compte. Il lui est égal ($r = p$) si et seulement si c'est une famille libre.

4.2 Calcul du rang

Le calcul n'est pas toujours évident. On utilisera aussi bien des petites considérations comme celles qui suivent que des gros résultats sur les matrices.

Éléments sous droits d'auteur

- Dans un espace vectoriel de dimension n, le rang d'une famille de vecteurs est inférieur ou égal à cette dimension n.
- Une famille est de rang 1 si et seulement si tous les vecteurs sont proportionnels, ce qui est facile à constater.
- Une famille est de rang supérieur ou égal à 2 si et seulement s'il contient deux vecteurs non proportionnels. C'est facile à voir.
- Le rang de la famille $u_1, u_2, \dots, u_p$ est égal au rang de la famille
$$u_1, u_2 + \alpha_2 u_1, \dots, u_p + \alpha_p u_1$$
quels que soient les scalaires $\alpha_2, \dots, \alpha_p$. On peut itérer ce procédé.
- Une famille de p vecteurs est de rang p si et seulement si c'est une famille libre.

4.3 Représentation d'une famille de vecteurs sur une base

Dans un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$, on peut représenter une famille $\{u_1, \dots, u_p\}$ de p vecteurs par la matrice à n lignes et p colonnes contenant dans la première colonne les composantes du vecteur u_1 sur $\mathcal{B}$, en deuxième colonne les composantes du vecteur u_2 sur $\mathcal{B}$ et ainsi de suite :

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,p} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \cdots & u_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \cdots & u_{n,p} \end{pmatrix}$$

en notant $u_{i,k}$ la i-ième composante du vecteur u_k. On met traditionnellement les vecteurs en colonnes.

4.4 Calcul du rang par échelonnement

La méthode de Gauss, décrite plus bas, et qui permet d'échelonner une matrice, nous donne le rang d'une famille de vecteurs. Quand on a représenté la famille de vecteurs par sa matrice ci-dessus sur une base quelconque, on échelonne la matrice. Le rang de la famille de vecteurs, qui est aussi (par définition) celui de la matrice, est égal au nombre de **lignes** non nulles qui restent dans cette matrice échelonnée.

Éléments sous droits d'auteur

Ce résultat est facile à retenir. Il sera revu d'une façon plus complète dans ce cours : le rang d'une matrice, i.e. le nombre maximum de colonnes formant une famille libre est aussi égal au nombre maximum de lignes formant une famille libre.

5. Matrices

5.1 Matrice à *n* lignes et *p* colonnes

Il s'agit d'un tableau de $n \times p$ scalaires noté sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

et l'on note $a_{i,j}$ l'élément situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne. On dit qu'une matrice est nulle lorsque tous ses coefficients sont nuls. Quand elle admet autant de lignes que de colonnes ($n = p$), on parle de matrice carrée.

5.2 Matrices particulières

- La matrice identité d'ordre n est la matrice carrée dont tous les éléments sont nuls sauf ceux situés sur la diagonale principale – à savoir les $a_{i,i}$ – qui sont égaux à un.
- Une matrice est dite diagonale lorsque tous les éléments hors-diagonale, les $a_{i,j}$ avec $i \neq j$, sont nuls.
- Une matrice est triangulaire supérieure lorsque tous les éléments en dessous de la diagonale, i.e. les $a_{i,j}$ avec $i > j$ sont nuls. On a une définition analogue pour triangulaire inférieure.
- Une matrice est symétrique lorsque $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tous i et j.

Éléments sous droits d'auteur

5.3 Addition et produit par un scalaire

- La somme $S = A + B$ de deux matrices A et B ayant le même nombre n de lignes et le même nombre p de colonnes est la matrice de mêmes dimensions n et p dont l'élément situé sur la ligne i et la colonne j est la somme $s_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.
- Le produit d'une matrice A par un scalaire λ est la matrice de mêmes dimensions obtenue en multipliant chaque coefficient par ce scalaire.

L'ensemble $M_{n,p}(K)$ des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans K, muni de ces deux opérations, est un espace vectoriel de dimension $n \times p$ sur K.

5.4 Produit de deux matrices

Attention, on ne peut faire le produit $C = A \times B$ de deux matrices que lorsque le nombre p de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B. On fait donc le produit d'une matrice $n \times p$ par une matrice $p \times q$ pour obtenir une matrice $n \times q$ dont l'élément générique $c_{i,j}$ est donné par la formule :

$$\boxed{c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}}\ .$$

- Le produit de matrices n'est pas commutatif. En général $AB \neq BA$.
- Le produit de deux matrices non nulles peut être la matrice nulle.

5.5 Transposée d'une matrice

La transposée de la matrice $A = a_{i,j}$ à n lignes et p colonnes est la matrice notée ${}^tA$ ayant p lignes et n colonnes, et dont le terme situé sur la ligne i et la colonne j est $a_{j,i}$.

On part de A et on remplace les colonnes par les lignes.

La transposée du produit AB est le produit ${}^tB{}^tA$. Une matrice symétrique est une matrice égale à sa transposée.

Éléments sous droits d'auteur

5.6 Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice est égal au nombre maximum de colonnes formant un système libre.

Un théorème très important affirme que le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.

Le rang d'une matrice est donc aussi égal au nombre maximum de lignes formant un système libre. Il est inférieur ou égal au nombre de lignes et au nombre de colonnes de la matrice.

5.7 Inverse d'une matrice carrée

Une matrice carrée est inversible quand il existe une matrice, notée A^{-1}, telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_d$.

Une matrice est inversible si et seulement si [voir ci-dessous] l'application linéaire dont elle est la matrice sur une base quelconque est bijective (son noyau est réduit à zéro). L'inverse du produit AB de deux matrices inversible est le produit $B^{-1}A^{-1}$.

5.8 Calcul du rang par la méthode de Gauss

On ne change pas le rang d'une matrice en remplaçant chaque ligne L_k à partir de la deuxième par une combinaison linéaire $L_k - a_{k,1}/a_{1,1}L_1$, ce qui met des zéros dans la première colonne en dessous de la première ligne. On peut recommencer, en faisant apparaître des zéros dans la deuxième colonne en dessous de la deuxième ligne et ainsi de suite.

Les coefficients (comme $a_{1,1}$ au départ) par lesquels on divise doivent être non nuls : on les appelle pivots.

On finit par obtenir une matrice échelonnée : le nombre de zéros en tête (à gauche) de chaque ligne est **strictement** croissant.

Le rang de la matrice initiale est égal au nombre de lignes non identiquement nulles dans la matrice échelonnée finale.

Éléments sous droits d'auteur

6. Systèmes linéaires

Un système linéaire de n équations à p inconnues est donné sous la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots &= \cdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p &= b_n \end{cases}$$

En notant A la matrice $n \times p$ des coefficients du système et B le vecteur second membre, on cherche un vecteur $X \in \mathbb{R}^p$ solution de l'équation $AX = B$.

6.1 Échelonnement du système

Le système de n équations $E_1, E_2, \ldots, E_n$ est équivalent au système :

$$E_1, E_2 - a_{2,1}/a_{1,1}E_1, \ldots, E_n - a_{n,1}/a_{1,1}E_1$$

où les nouvelles équations, à partir de la deuxième, ne contiennent plus l'inconnue x_1. On peut recommencer, de façon que les équations à partir de la troisième ne contiennent plus l'inconnue x_2 et ainsi de suite.

En pratique, on échelonne la matrice augmentée du système, matrice à n lignes et $p + 1$ colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{pmatrix}$$

obtenue en ajoutant la colonne second membre à la matrice A des coefficients du système.

- Si cette matrice échelonnée comporte une ou plusieurs lignes avec p zéros suivis d'un dernier élément non nul, le système est impossible.
- Sinon, le rang r du système est égal au nombre de lignes non identiquement nulles, i.e. au nombre d'équations linéairement indépendantes du système initial. Ce rang est aussi le rang de la matrice A.
- Si $r < n$, cela veut dire qu'il y avait des équations « en trop » dans le système.

Éléments sous droits d'auteur

- Si $r > p$, cela veut dire que $p - r$ inconnues sont à prendre comme paramètres pour la résolution du système.
- On commence la résolution par le bas, et on remonte, en reportant dans chaque équation les valeurs trouvées précédemment.
- Un système linéaire admet soit zéro solution, soit une solution unique, soit une infinité de solutions.

6.2 Interprétation en terme de matrice

Si l'on connaît une solution X_0 du système, les autres s'obtiennent en ajoutant à X_0 un vecteur quelconque appartenant au noyau de A.

Si A est injective (noyau réduit au vecteur nul), le système admet une solution unique X_0. Sinon, le nombre d'inconnues paramètres est égal à la dimension du noyau de A.

(Voir paragraphe 7.3 pour les rappels sur le noyau.)

7. Applications linéaires

7.1 Définition

Une application d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est dite linéaire quand elle vérifie :

$$f(x+y) = f(x)+f(y), \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

pour tous vecteurs x et y de E et tout scalaire λ.

Si $E = F$, on dit que f est un endomorphisme de E. L'ensemble des endomorphismes de E forme lui-même un espace vectoriel.

Une application linéaire bijective de E sur F s'appelle un isomorphisme.

7.2 Comment définir une application linéaire

En dimension finie, une application linéaire de E dans F est parfaitement définie par la donnée des images des vecteurs d'une base quelconque de E.

Éléments sous droits d'auteur

De façon précise, si l'on a une base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de E et n vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de F, il existe une et une seule application linéaire de E dans F telle que :

$$f(e_1) = v_1, \quad f(e_2) = v_2, \ldots, f(e_n) = v_n.$$

Elle est définie sur un vecteur quelconque de E par :

$$\boxed{x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n \in E \mapsto f(x) = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n \in F}\,.$$

7.3 Noyau d'une application linéaire

On appelle noyau d'une application linéaire f de E dans F l'ensemble $f^{-1}(0)$ des vecteurs de E qui s'envoient par f sur le vecteur nul de F. C'est un sous-espace vectoriel de E, et on le note $\operatorname{Ker} f$.

- $\operatorname{Ker} f$ n'est jamais vide, car il contient toujours le vecteur nul.
- Deux vecteurs x et y de E vérifient $f(x) = f(y)$ si et seulement si le vecteur $x - y$ appartient à $\operatorname{Ker} f$.
- L'application linéaire f est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.

7.4 Image de *E* par une application linéaire

L'image de E par f est le sous-espace vectoriel de F composé des vecteurs $f(x)$ lorsque x décrit E. On le note $\operatorname{Im} f$.

On appelle rang de f la dimension de $\operatorname{Im} f$.

- $\operatorname{Im} f$ est non vide, car elle contient au moins le vecteur nul.
- f est surjective de E sur F si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.
- Si on appelle $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base quelconque de l'espace de départ E, les vecteurs $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ forment une **famille génératrice** de l'image $\operatorname{Im} f$.

7.5 Application linéaire et famille libre ou famille génératrice

- Si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ est une famille génératrice de E, alors les images $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)$ sont une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

Éléments sous droits d'auteur

- Si les **images** $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ forment une famille libre dans F, alors les vecteurs de départ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ forment une famille libre dans E.
- Si f est injective, alors l'image d'une famille libre est une famille libre.

7.6 Théorème de la dimension

Pour toute application linéaire f de E dans F on a :

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E}.$$

On fera bien attention que c'est la **dimension de l'espace de départ** qui intervient.

Quand on connaît la dimension du noyau, on connaît donc immédiatement le rang de f.

7.7 Caractérisation des isomorphismes

Supposons que l'on sache *a priori* que les espaces vectoriels E et F sont bien de même dimension.

Alors, pour montrer qu'une application linéaire f de E dans F est un isomorphisme, il suffit de montrer que f est injective, i.e. que son noyau est réduit au vecteur nul.

Cela équivaut aussi à montrer que f est surjective, i.e. que $\operatorname{Im} f = F$.

Ceci est en particulier vrai dans le cas des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie ($E = F$).

8. Applications linéaires et matrices

8.1 Matrice d'une application linéaire

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. La matrice de l'application linéaire f sur ces deux bases s'obtient en mettant en première colonne le vecteur $f(e_1)$ (i.e. ses composantes sur la base $\mathcal{B}'$ de F), en mettant en deuxième colonne le vecteur $f(e_2)$ et ainsi de suite.

Si E est de dimension n et F de dimension p, la matrice A de f est donc une matrice à p lignes et n colonnes. Attention à ne pas se tromper entre n et p.

Éléments sous droits d'auteur

- Les colonnes de A forment donc une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.
- Pour obtenir une base de $\operatorname{Im} f$, on extrait donc une famille libre maximale des colonnes de la matrice.
- Pour trouver le noyau de A, on résout le système $AX = 0$.
- Quand on connaît la dimension du noyau ainsi trouvé, on peut en déduire le rang par le théorème de la dimension.

8.2 Matrice d'une composée $f \circ g$

Si f et g sont deux endomorphismes de E de matrices A et B sur une certaine base de E, alors la matrice de la composée $f \circ g$ est le produit AB (dans le même ordre) des matrices A et B.

8.3 Matrice de l'isomorphisme réciproque

Si f est un isomorphisme de E sur lui-même de matrice A sur une certaine base $\mathcal{B}$, alors la matrice A est inversible. L'isomorphisme réciproque f^{-1} a pour matrice sur cette même base $\mathcal{B}$ la matrice inverse A^{-1}.

9. Changement de bases

9.1 Matrice de passage

La matrice P de passage d'une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ (appelée « ancienne base ») à une « nouvelle base » $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ est la matrice carrée inversible dont la première colonne est formée des composantes du vecteur e'_1 sur l'ancienne base, dont la deuxième colonne est formée des composantes du vecteur e'_2 sur l'ancienne base et ainsi de suite.
La matrice de passage de la nouvelle base à l'ancienne est évidemment P^{-1}.

Éléments sous droits d'auteur

9.2 Relation entre les composantes d'un même vecteur

Soit V les composantes d'un certain vecteur sur l'ancienne base et V' ses composantes sur la nouvelle base. En appelant P la matrice de passage de l'ancienne base à la nouvelle, on a la relation fondamentale :

$$\boxed{V = PV'}$$

que l'on retient en se rappelant que quand on ne fait pas d'erreur, on n'a pas de « PV ».

9.3 Relation entre les matrices d'un même endomorphisme

Soit f un endomorphisme de E dont la matrice sur l'ancienne base est A et dont la matrice sur la nouvelle base est A'. En appelant toujours P la matrice de passage de l'ancienne base à la nouvelle, on a la relation :

$$\boxed{A' = P^{-1}AP}\,.$$

9.4 Plusieurs changements de bases

Si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et si P' est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}''$, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}''$ est le produit PP' (attention à l'ordre !).

10. Compléments sur les sous-espaces vectoriels

10.1 Intersection de deux S.E.V.

L'intersection $F \cap G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est le sous-espace vectoriel de E formé des vecteurs appartenant à F et à G.

Éléments sous droits d'auteur

10.2 Somme de deux S.E.V.

La somme $F+G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est le sous-espace vectoriel de E formé des vecteurs de E qui peuvent s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

On a la relation :

$$\boxed{\dim(F\cap G)+\dim(F+G) = \dim F+\dim G}\,.$$

10.3 Somme directe de deux S.E.V. Sous-espaces supplémentaires

On dit que les deux sous-espaces vectoriels F et G sont en somme directe lorsque tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme un vecteur de F et un vecteur de G. On dit aussi que F et G sont supplémentaires dans E.

On note $E=F\oplus G$.

- Cela équivaut à dire que $F\cap G=(0)$ et $\dim E=\dim F+\dim G$.
- Cela équivaut à dire qu'en prenant une base de F et en lui adjoignant une base de G on obtient une base de E.

Le théorème de la base incomplète signifie que tout sous espace vectoriel de E (distinct de E) admet au moins un supplémentaire.

10.4 Somme directe de *p* S.E.V.

On dit que les sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_p$ sont en somme directe dans E lorsque tout vecteur x de E s'écrit de façon unique comme somme $x=x_1+x_2+\cdots+x_p$ où $x_1\in F_1$, $x_2\in F_2$ et ainsi de suite.

On note $E=F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_p$.

Cela équivaut à dire qu'en prenant la réunion d'une base de F_1, d'une base de F_2… d'une base de F_p, on obtient une base de E.

Éléments sous droits d'auteur

11. Polynômes à une indéterminée sur un corps *K*

11.1 Degré d'un polynôme

Un polynôme est une suite $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ d'éléments de K dont seulement un nombre fini d'entre eux sont non nuls. Si n est le plus grand entier tel que $a_n \neq 0$, on note de façon symbolique :

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$$

et cet entier n s'appelle le degré du polynôme P. Si P est le polynôme nul, i.e. que tous ses coefficients sont nuls, on dit que son degré est égal à $-\infty$, par commodité.

- Un polynôme se note indifféremment P tout court ou $P(X)$.
- Pour montrer qu'un polynôme est le polynôme nul, on doit montrer que chacun de ses coefficients est nul. Ne pas confondre avec la résolution d'une équation $p(x) = 0$ qui consiste à trouver les quelques valeurs de $x \in K$ annulant le polynôme !
- Le degré de la somme de deux polynômes est inférieur ou égal au plus grand des deux degrés.

11.2 L'espace vectoriel *K*[*X*]

L'ensemble $K[X]$ des polynômes sur K, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un espace vectoriel de dimension infinie sur K.

Le sous-espace vectoriel $K_n[X]$ formé des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à n est de dimension $n + 1$. Sa base « canonique » est la famille :

$$\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}.$$

11.3 Produit de deux polynômes

La formule définissant le produit de polynômes est :

$$\left(\sum_{j=0}^{n} a_j X^j\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_k X^k\right) = \sum_{p=0}^{n+m}\left(\sum_{i=0}^{p} a_i b_{p-i}\right) X^p.$$

Éléments sous droits d'auteur

Le degré du produit est égal à la somme des degrés.

L'ensemble $K[X]$ muni de l'addition et du produit est un anneau commutatif.

On dit que le polynôme B divise le polynôme A quand il existe un polynôme C tel que $A = BC$.

11.4 Division euclidienne de deux polynômes

Il s'agit d'un théorème fondamental.

Étant donné deux polynômes A et B (avec $B \neq 0$), il existe un unique polynôme Q (appelé quotient) et un unique polynôme R (appelé reste) tels que :

$$\boxed{A = BQ + R \quad \text{et} \quad \text{degré } R < \text{degré } B}\,.$$

On dit que l'on a effectué la division euclidienne de A par B.

Interprétation. Soit $B \neq 0$ un polynôme fixé. Si l'on appelle F le sous-espace vectoriel de $K[X]$ formé des polynômes divisibles par B et G le sous-espace vectoriel des polynômes dont le degré est inférieur strictement au degré de B, le théorème de la division euclidienne signifie que $K[X] = F \oplus G$.

11.5 Racines d'un polynôme

On appelle racine du polynôme $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ tout scalaire $x \in K$ tel que $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$.

- Un polynôme de degré n admet au maximum n racines dans K.
- Le scalaire a est racine de P si et seulement si P est divisible par $X - a$.
- On dit que a est une racine simple lorsque P est divisible par $X - a$ sans être divisible par $(X - a)^2$.
- Une racine a est dite double lorsque P est divisible par $(X - a)^2$ sans être divisible par $(X - a)^3$.
- Elle est dite multiple d'ordre de multiplicité m lorsque P est divisible par $(X - a)^m$ sans être divisible par $(X - a)^{m+1}$.

Éléments sous droits d'auteur

11.6 PGCD de deux polynômes

Le PGCD de deux polynômes A et B est le polynôme de plus haut degré qui divise à la fois A et B.

En pratique, il est défini à une constante multiplicative près.

- Les polynômes divisant à la fois A et B sont donc ceux qui divisent leur PGCD.
- On dit que deux polynômes sont premiers entre eux quand leur PGCD est égal à une constante.
- Dire que le PGCD de A et B est de degré supérieur ou égal à 1 équivaut à dire qu'ils ont une racine en commun dans les complexes (voir le théorème de d'Alembert plus loin).
- Dire que P admet une racine multiple équivaut à dire que le PGCD de P et de sa dérivée P' est de degré supérieur ou égal à 1.

11.7 Théorème de Bezout

Soit A et B deux polynômes et D leur PGCD. Alors il existe deux polynômes U et V tels que :

$$\boxed{D = AU + BV}\,.$$

Deux polynômes sont donc premiers entre eux si et seulement s'il existe des polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$.

11.8 Formule de Taylor

Si P est de degré n, alors pour tout scalaire a on a :

$$\boxed{P(X) = P(a) + \frac{X-a}{1!}\,P'(a) + \frac{(X-a)^2}{2!}\,P''(a) + \cdots + \frac{(X-a)^n}{n!}\,P^{(n)}(a)}$$

Il n'y a pas de reste de Lagrange comme pour une fonction quelconque, mais à condition que n représente bien le degré de $P(X)$.

Le scalaire a est donc racine multiple d'ordre m de P lorsque :

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0\,, \quad P^{(m)}(a) \neq 0\,.$$

Éléments sous droits d'auteur

11.9 Théorème de d'Alembert

Tout polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes admet exactement n racines distinctes ou non dans $\mathbb{C}$.

Il peut donc se factoriser de façon unique sous la forme :

$$P(X) = \lambda(X - a_1)^{m_1} \times (X - a_2)^{m_2} \times \cdots \times (X - a_k)^{m_k}$$

où λ est un complexe non nul, où les $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont des complexes deux à deux distincts et où les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_k$ vérifient $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$.

Cas fondamental des polynômes réels

Un polynôme à coefficient réel peut se considérer comme un élément de $\mathbb{C}[X]$ et le théorème de d'Alembert s'applique. Les racines complexes sont deux à deux conjuguées. En regroupant les facteurs $(X - a)^m$ et $(X - \bar{a})^m$, on obtient :

$$(X - a)^m\ (X - \bar{a})^m = (X^2 + pX + q)^m$$

où ce polynôme du second degré est sans racine réelle.

Le théorème de d'Alembert s'énonce ainsi pour les polynômes à coefficients réels :

Tout polynôme à coefficients réels s'écrit comme produit de polynômes du premier degré et de polynômes du second degré à discriminant négatif.

Les seuls polynômes réels irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont donc ceux du premier degré et ceux du second degré à discriminant négatif.

Éléments sous droits d'auteur

maths

Chapitre 2

Déterminants

Éléments sous droits d'auteur

1. Présentation du problème

Dans tout ce chapitre, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Par simplification, on notera souvent $E = K^n$. On notera $C_1, \ldots, C_n$ des vecteurs de E. Un tel système de n vecteurs sera représenté par la matrice carrée d'ordre n de ses composantes sur la base canonique : le premier vecteur C_1 est mis en première colonne, et ainsi de suite. Cette matrice est aussi celle, sur la base canonique, de l'endomorphisme de E défini par $f(e_1) = C_1, \ldots, f(e_n) = C_n$.

On se propose de définir une application $A \in M_n(K) \mapsto \det(A) \in K$ possédant les propriétés suivantes :.

- $\det(A) \neq 0 \iff$ la matrice A est inversible.
- $\det({}^tA) = \det(A)$.
- $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$.
- $\det(I_d) = 1$.

Cette application, appelée déterminant, nous donnera donc une condition nécessaire et suffisante assez pratique (à défaut d'être réellement simple à calculer) pour regarder si un système de n vecteurs de E est libre, ou si un endomorphisme est un automorphisme.

Nous allons procéder de la façon suivante :

a) Donner la définition de l'application det par récurrence : comment définir le déterminant d'une matrice carrée de dimension n quand on sait le faire en dimension $n - 1$.

b) Énoncer et vérifier un certain nombre de propriétés très importantes qui vont à la fois :

- Nous donner des règles pratiques de calcul des déterminants.
- Montrer que le déterminant est ce que l'on appelle une forme multilinéaire alternée sur E.

c) Nous montrerons, ce qui est assez pénible à défaut d'être vraiment très difficile, que – à une constante multiplicative près – il y a une seule forme multilinéaire alternée sur E, le déterminant.

d) Nous en déduirons alors les propriétés :

$$\det({}^tA) = \det(A) \quad \text{et} \quad \det(A \times B) = \det(A) \times \det(B).$$

Le point **c)** pourra être admis sans état d'âme, même si nous en donnons la démonstration.

Éléments sous droits d'auteur

Rappelons enfin que le rang d'une matrice est égal au nombre maximum de colonnes ou de lignes de la matrice formant une famille libre : le rang de la transposée de A est donc égale au rang de A. Une démonstration est donnée en exercice, pour rafraîchir la mémoire !

2. Définition des déterminants

Nous allons maintenant donner la définition du déterminant d'une matrice carrée. Elle se fait par récurrence sur la dimension.

Notations. Soit $n \geq 2$ un entier et $A \in M_n(K)$ une matrice carrée de dimension n. Pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ nous noterons $A_{i,j}$ la matrice carrée de dimension $n - 1$ obtenue en supprimant dans A la ligne i et la colonne j.

Rappelons enfin qu'une matrice carrée de dimension 1 est simplement un scalaire.

Définition 1 : On définit par récurrence sur n une application

$$A \in M_n(K) \mapsto \det(A) \in K$$

de la façon suivante :

- Pour $n = 1$, $\det(a) = a$.
- Pour $n > 1$:

$$\det(A) = a_{1,1} \det(A_{1,1}) - a_{1,2} \det(A_{1,2}) + \cdots (-1)^{k+1} a_{1,k} \det(A_{1,k}) + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1,n} \det(A_{1,n}).$$

Le scalaire $\det(A)$ s'appelle déterminant de la matrice A et se note :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Exemple 1 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \det(d) - b \det(c) = ad - bc.$

Éléments sous droits d'auteur

Exemple 2

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 9 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -8 & 9 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \times 24 - 2 \times (-12 - 9) + 3 \times 8 = 186.$$

Exemple 3 Déterminant d'une matrice triangulaire. Soit A une matrice triangulaire inférieure avec les coefficients $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sur la diagonale principale. La matrice $A_{1,1}$ est une matrice triangulaire de dimension $n-1$ ayant les coefficients $d_2, \ldots, d_n$ sur la diagonale. Comme d_1 est le seul coefficient non nul de la première ligne, on obtient simplement $\det(A) = d_1 \times \det(A_{1,1})$. En recommençant, on voit facilement que $\det(A) = d_1 \times d_2 \times \cdots \times d_n$ est le produit des éléments diagonaux. Le raisonnement est légèrement différent pour une matrice triangulaire supérieure, mais conduit au même résultat. Ce résultat sera évident, d'ailleurs, quand on aura montré que $\det({}^tA) = \det(A)$.

Exemple 4 Comme cas particulier de matrice triangulaire, nous avons la matrice identité dont les éléments diagonaux valent 1. Son déterminant est donc égal à 1.

3. Propriétés fondamentales des déterminants

3.1 Proposition

Le déterminant d'une matrice carrée de dimension n est une forme n linéaire alternée sur K^n, ce qui signifie qu'il vérifie les trois propriétés :

Proposition 1 :

(1) Pour tout $\lambda \in K$ et tout indice $1 \leq j \leq n$, on a

$$\det(C_1, \ldots, \lambda C_j, \ldots, C_n) = \lambda \det(C_1, \ldots, C_j, \ldots C_n).$$

Éléments sous droits d'auteur

(2) Pour tout $1 \leq j \leq n$, si le vecteur C_j est la somme $C_j = C'_j + C''_j$ de deux vecteurs, alors

$$\det(C_1 \ldots, C'_j + C''_j, \ldots, C_n) = \det(C_1, \ldots, C'_j, \ldots C_n) + \det(C_1, \ldots, C''_j, \ldots C_n).$$

(3) Si deux vecteurs C_i et C_j sont égaux, alors $\det(C_1, \ldots C_n) = 0$.

(4) Si un vecteur est nul, alors le déterminant est nul.

Attention Dans la propriété (1), il y a un et un seul vecteur qui est multiplié par un scalaire. Dans la propriété (2), il y a un et un seul vecteur que l'on décompose comme une somme de deux vecteurs. On peut résumer les deux premières propriétés en disant que le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne.

La propriété (4) découle de la première en faisant $\lambda = 0$.

Nous faisons la démonstration par récurrence, à partir de $n = 2$.

a) Montrons que c'est vrai pour $n = 2$. Nous vérifions successivement les trois propriétés d'une application bilinéaire alternée, en nous limitant à la première colonne.

La démonstration est identique sur la seconde colonne.

- $\begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = (\lambda a)\, d - b(\lambda c) = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.
- $\begin{vmatrix} a + a' & b \\ c + c' & d \end{vmatrix} = (a + a')\, d - (c + c')\, b = (ad - bc) + (a'd - bc') = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$.
- $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$.

b) Montrons que la propriété est héréditaire. Soit $n \geq 3$ donné. Supposons que l'application déterminant soit multilinéaire alternée sur $M_{n-1}(K)$ et montrons que c'est vrai pour les matrices de dimension n. Comme précédemment, nous faisons les démonstrations sur la première colonne, pour simplifier les notations. Elles sont identiques, avec des notations un peu plus pénibles à gérer, pour les autres colonnes.

- Montrons que $\begin{vmatrix} \lambda a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

Éléments sous droits d'auteur

Appelons B la première matrice et A la seconde. Nous avons, par définition :

$$\det(B) = b_{1,1}\det(B_{1,1}) - b_{1,2}\det(B_{1,2}) + \cdots (-1)^{k+1} b_{1,k}\det(B_{1,k}) + \cdots + (-1)^{n+1} b_{1,n}\det(B_{1,n}).$$

$$\det(A) = a_{1,1}\det(A_{1,1}) - a_{1,2}\det(A_{1,2}) + \cdots (-1)^{k+1} a_{1,k}\det(A_{1,k}) + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1,n}\det(A_{1,n}).$$

Comme seule la première colonne a été multipliée par λ, nous avons $b_{1,1} = \lambda a_{1,1}$ mais $b_{1,j} = a_{1,j}$ à partir de $j = 2$.

Les deux matrices $B_{1,1}$ et $A_{1,1}$ sont égales, après suppression dans A de la première ligne et de la première colonne. Par contre, à partir de $k = 2$, la matrice $B_{1,k}$ s'obtient à partir de $A_{1,k}$ en multipliant la première colonne par λ, puisque nous conservons alors la première colonne de A. Nous avons donc finalement :

pour $k = 1$, $b_{1,1} = \lambda a_{1,1}$ et $\det(B_{1,1}) = \det(A_{1,1})$;

pour $k \geq 2$, $b_{1,k} = a_{1,k}$ et $\det(B_{1,k}) = \lambda \det(A_{1,k})$ d'après l'hypothèse de récurrence.

En reportant ces relations dans l'expression de $\det(B)$, nous avons bien :

$$\det(B) = \lambda \det(A).$$

- Montrons que :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+a'_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1}+a'_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}+a'_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a'_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Appelons B, A et A' les trois matrices intervenant ci-dessus.

Nous avons $b_{1,1} = a_{1,1} + a'_{1,1}$ et $B_{1,1} = A_{1,1} = A'_{1,1}$. Par contre, à partir de $k = 2$, la matrice $B_{1,k}$ possède une première colonne qui est la somme de la première colonne de $A_{1,k}$ et de celle de $A'_{1,k}$, les autres colonnes étant celles de $A_{1,k}$ (et d'ailleurs de $A'_{1,k}$). Nous avons donc, d'après l'hypothèse de récurrence $\det(B_{1,k}) = \det(A_{1,k}) + \det(A'_{1,k})$.

Finalement :

pour $k = 1$, $b_{1,1} = a_{1,1} + a'_{1,1}$ et $\det(B_{1,1}) = \det(A_{1,1})$;

pour $k \geq 2$, $b_{1,k} = a_{1,k}$ et $\det(B_{1,k}) = \det(A_{1,k}) + \det(A'_{1,k})$.

Éléments sous droits d'auteur

$$\begin{aligned}
\det(B) &= b_{1,1}\det(B_{1,1}) - b_{1,2}\det(B_{1,2}) + \cdots (-1)^{k+1}\, b_{1,k}\det(B_{1,k}) \\
&\quad + \cdots + (-1)^{n+1}\, b_{1,n}\det(B_{1,n}) \\
&= (a_{1,1}+a'_{1,1})\det(A_{1,1}) - a_{1,2}(\det(A_{1,2}) + \det(A'_{1,2})) \\
&\quad + \cdots + (-1)^{k+1}\, a_{1,k}(\det(A_{1,k}) + \det(A'_{1,k})) \\
&\quad + \cdots (-1)^{n+1}\, a_{1,n}(\det(A_{1,n}) + \det(A'_{1,n})) \\
&= a_{1,1}\det(A_{1,1}) - a_{1,2}\det(A_{1,2}) + \cdots (-1)^{k+1}\, a_{1,k}\det(A_{1,k}) \\
&\quad + \cdots + (-1)^{n+1}\, a_{1,n}\det(A_{1,n}) \\
&\quad + a'_{1,1}\det(A'_{1,1}) - a_{1,2}\det(A'_{1,2}) + \cdots (-1)^{k+1}\, a_{1,k}\det(A'_{1,k}) \\
&\quad + \cdots + (-1)^{n+1}\, a_{1,n}\det(A'_{1,n}) \\
&= \det(A) + \det(A').
\end{aligned}$$

- Montrons pour finir que si la matrice A possède deux colonnes égales, par exemple les deux premières, alors son déterminant est nul.

  Les matrices $A_{1,1}$ et $A_{1,2}$ sont égales puisque les deux premières colonnes de A sont identiques. À partir de $k = 3$, les matrices $A_{1,k}$ ont leurs deux premières colonnes identiques et ont donc – d'après l'hypothèse de récurrence – un déterminant nul. Il reste donc uniquement :

  $$\det(A) = a_{1,1}\det(A_{1,1}) - a_{1,2}\det(A_{1,2}) = a_{1,1}\det(A_{1,1}) - a_{1,1}\det(A_{1,1}) = 0.$$

c) Conclusion. La propriété est vraie pour $n = 2$ et héréditaire à partir de $n = 2$; elle est vraie pour une matrice de dimension quelconque.

Ces résultats nous conduisent à énoncer des propriétés encore plus importantes pour les calculs.

Théorème 1 :

(1) Quand on permute deux colonnes C_i et C_j, on change le signe du résultat :

$$\det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = -\det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n).$$

(2) On ne change pas le résultat en ajoutant à une colonne quelconque une combinaison linéaire des **autres** colonnes.

Éléments sous droits d'auteur

Cette seconde propriété est pénible à écrire dans le cas général ! Par exemple, pour $n = 3$, on aura :

$$\det(C_1, C_2, C_3) = \det(C_1, C_2 + \alpha C_1 + \beta C_3, C_3)$$

pour tous vecteurs C_1, C_2, C_3 de $\mathbb{R}^3$ et tous réels α et β.

On fera attention que l'on peut ajouter à une colonne C_j une combinaison linéaire des **autres** vecteurs, ce qui exclut d'y ajouter un vecteur proportionnel à C_j lui-même !

Démonstration (1). Faisons la démonstration pour la permutation des deux premières colonnes, pour simplifier les notations. Calculons $\det(C_1 + C_2, C_1 + C_2, \ldots, C_n)$, quantité qui vaut zéro d'après la troisième propriété de la proposition **1**, en utilisant la linéarité par rapport au premier vecteur :

$$\begin{aligned} 0 &= \det(C_1 + C_2, C_1 + C_2, \ldots, C_n) \\ &= \det(C_1, C_1 + C_2, \ldots, C_n) + \det(C_2, C_1 + C_2, \ldots, C_n). \end{aligned}$$

Utilisons ensuite la linéarité par rapport au second vecteur dans chacune des deux expressions de droite :

$$\begin{aligned} 0 = {} & \det(C_1, C_1, \ldots, C_n) + \det(C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ & + \det(C_2, C_1, \ldots, C_n) + \det(C_2, C_2, \ldots, C_n). \end{aligned}$$

Le premier et le dernier terme de cette somme sont nuls puisqu'à chaque fois nous y avons deux colonnes égales. Il reste donc :

$$0 = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n) + \det(C_2, C_1, \ldots, C_n)$$

ce qui est bien ce que nous cherchions.

Démonstration (2). Démontrons maintenant la seconde propriété avec la première colonne, pour simplifier de même les notations. Nous remplaçons donc la première colonne C_1 par $C_1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k C_k$ (nous lui ajoutons une combinaison linéaire quelconque des autres colonnes). Le fait que l'application $X \mapsto \det(X, C_2, \ldots, C_n)$ soit une application linéaire de E dans K permet d'écrire :

$$\det\left(C_1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k C_k, C_2, \ldots, C_n\right) = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n) + \det\left(\sum_{k=2}^{n} \alpha_k C_k, C_2, \ldots, C_n\right)$$

$$= \det(C_1, C_2, \ldots, C_n) + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k \det(C_k, C_2, \ldots, C_n).$$

Éléments sous droits d'auteur

Dans chacun des termes $\det(C_k, C_2, \ldots, C_n)$, nous avons deux vecteurs égaux (le premier et le k-ième). Chaque terme de la somme est donc nul. Nous avons donc bien

$$\det\left(C_1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k C_k, C_2, \ldots, C_n\right) = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Cette démonstration faite pour $j = 1$ est évidemment valable, avec des notations plus délicates à gérer, pour tout vecteur C_j.

4. Formes multilinéaires alternées et déterminants

Ce paragraphe est à sauter en première lecture, seul le théorème **3** affirmant que le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée étant à connaître impérativement.

Définition 2 : On appelle forme n-linéaire alternée sur E toute application f de $E^n = E \times E \times \cdots \times E$ dans K possédant les propriétés suivantes pour tout $(C_1, \ldots, C_n) \in E^n$:

(1) Pour tout $\lambda \in K$ et tout indice $1 \leq j \leq n$, on a

$$f(C_1, \ldots, \lambda C_j, \ldots, C_n) = \lambda f(C_1, \ldots, C_j, \ldots C_n).$$

(2) Pour tout $1 \leq j \leq n$, si le vecteur C_j est la somme $C_j = C_j' + C_j''$ de deux vecteurs, alors

$$f(C_1 \ldots, C_j' + C_j'', \ldots, C_n) = f(C_1, \ldots, C_j', \ldots C_n) + f(C_1, \ldots, C_j'', \ldots C_n).$$

(3) Si deux vecteurs C_i et C_j sont égaux, alors $f(C_1, \ldots C_n) = 0$.

Attention Dans la propriété (1), il y a un et un seul vecteur qui est multiplié par un scalaire. Dans la propriété (2), il y a un et un seul vecteur que l'on décompose comme une somme de deux vecteurs. On peut résumer les deux premières propriétés de la façon suivante :

Pour tout indice $1 \leq j \leq 1$ fixé et pour tout choix fixé des $n - 1$ vecteurs $C_1, \ldots, C_{j-1}, C_{j+1}, \ldots, C_n$, l'application $C_j \mapsto f(C_1, \ldots, C_j, \ldots C_n)$ est une application linéaire de E dans K.

Éléments sous droits d'auteur

Théorème 2 : Soit f une forme multilinéaire alternée sur $E = K^n$. Alors il existe une constante λ telle que pour tous vecteurs $C_1, C_2 \ldots, C_n$ de E on ait :

$$f(C_1, C_2, \ldots, C_n) = \lambda \det(C_1, C_2, \ldots, C_n) .$$

La notation $\det(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ désigne évidemment le déterminant de la matrice dont la première colonne est C_1 et ainsi de suite.

En démontrant ce théorème par récurrence, nous allons montrer en même temps le résultat fondamental suivant, qui va permettre d'échanger le rôle des lignes et des colonnes dans la notion de déterminant.

Théorème 3 : Pour tout entier $n \geq 1$, le déterminant d'une matrice carrée de dimension n est égal au déterminant de sa transposée :

$$\det(A) = \det({}^tA).$$

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur la dimension n. L'hypothèse $H(n)$ est la suivante, composée de deux affirmations :

- Soit f une forme multilinéaire alternée sur $E = K^n$. Alors il existe une constante λ telle que pour tous vecteurs $C_1, C_2 \ldots, C_n$ de E on ait :
$$f(C_1, C_2, \ldots, C_n) = \lambda \det(C_1, C_2, \ldots, C_n).$$
- Pour toute matrice carrée de dimension n, on a $\det(A) = \det({}^tA)$.

a) Montrons que la propriété est vraie pour $n = 2$.

Notons e_1 et e_2 les deux vecteurs de la base canonique de K^2. Soit f une forme bilinéaire alternée sur $E = K^2$. Nous avons :

$$f(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) = af(e_1, ce_1 + de_2) + bf(e_2, ce_1 + de_2)$$

$$= ac\, f(e_1, e_1) + ad\, f(e_1, e_2) + bc\, f(e_2, e_1) + bd\, f(e_2, e_2) = (ad - bc)\, f(e_1, e_2)$$

$$= f(e_1, e_2) \times \det(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2).$$

La constante est donc $\lambda = f(e_1, e_2)$. Par ailleurs, il est évident que les matrices $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ et sa transposée $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ont le même déterminant $ad - bc$.

b) Montrons que la propriété est héréditaire. Supposons-la vraie pour un entier $n - 1$ donné et montrons qu'elle est vraie pour l'entier suivant n.

Éléments sous droits d'auteur

Cette démonstration est très technique. Faisons-la dans le cas $n = 3$. Elle se généralise sans difficulté structurelle, mais avec des notations très pénibles. Le cas général est démontré dans l'annexe A, en fin de chapitre avant les exercices : *la démonstration donnée en annexe remplace le texte placé à partir d'ici jusqu'au* **c)**.

Soit donc f une forme multilinéaire alternée sur $E = K^3$. Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ la matrice stockant les trois vecteurs C_1, C_2, C_3. Nous avons, en utilisant la linéarité par rapport au premier vecteur $C_1 = a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3$:

$$\begin{aligned} f(A) &= f(a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3, C_2, C_3) \\ &= a_1 f(e_1, C_2, C_3) + b_1 f(e_2, C_2, C_3) + c_1 f(e_3, C_2, C_3). \end{aligned}$$

Nous pouvons remplacer, dans le premier de ces trois petits termes le vecteur C_2 par $C_2 - a_2e_1$ et C_3 par $C_3 - a_3e_1$, et de même dans les deux autres pour obtenir :

$$f(A) = a_1 f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} + b_1 f\begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} + c_1 f\begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- L'application $\begin{pmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ est une application bilinéaire alternée sur K^2 et est donc de la forme $\lambda_1 \det\begin{pmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix}$. Pour calculer la constante λ_1, il suffit de prendre $b_2 = 1$, $b_3 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$ et l'on obtient $\lambda_1 = f(e_1, e_2, e_3)$.

- L'application $\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ est une application bilinéaire alternée sur K^2 et est donc de la forme $\lambda_2 \det\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix}$. Pour calculer λ_2, il suffit de prendre $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$ (ce qui donne un petit déterminant égal à 1) et l'on a $\lambda_2 = f(e_2, e_1, e_3) = -f(e_1, e_2, e_3)$.

Éléments sous droits d'auteur

- L'application $\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une application bilinéaire alternée sur K^2 et est donc de la forme $\lambda_3 \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}$. Pour calculer λ_3, il suffit de prendre $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 1$ (ce qui donne un petit déterminant égal à 1) et l'on a $\lambda_3 = f(e_3, e_1, e_2) = f(e_1, e_2, e_3)$.

On a donc :

$$f(A) = f(e_1, e_2, e_3) \times [a_1 \det({}^tA_{1,1}) - b_1 \det({}^tA_{2,1}) + c_1 \det(A_{3,1})]$$

puisque $\begin{pmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} = A_{1,1}$, $\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} = A_{2,1}$ et $\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} = A_{3,1}$.

Utilisons maintenant la seconde moitié de l'hypothèse de récurrence, qui affirme que le déterminant d'une matrice carrée de dimension $n-1$ est égal à celui de sa transposée :

$$f(A) = f(e_1, e_2, e_3) \times [a_1 \det({}^tA_{1,1}) - b_1 \det({}^tA_{2,1}) + c_1 \det({}^tA_{3,1})].$$

D'une façon générale, la matrice ${}^tA_{i,j}$ s'obtient en enlevant à A la ligne i et la colonne j, puis en transposant le résultat. On peut évidemment d'abord transposer et enlever ensuite la ligne j et la colonne i. Nous avons donc ${}^tA_{i,j} = ({}^tA)_{j,i}$ et donc :

$$f(A) = f(e_1, e_2, e_3) \times [a_1 \det(({}^tA)_{1,1}) - b_1 \det(({}^tA)_{1,2}) + c_1 \det(({}^tA)_{1,3})]$$

où le crochet est la définition du déterminant de la transposée de A :

$$f(A) = f(e_1, e_2, e_3) \times \det({}^tA).$$

Nous y sommes presque ! Ce que nous venons de montrer pour une forme multilinéaire quelconque f est en particulier vrai pour le déterminant :

$$\det(A) = \det(e_1, e_2, e_3) \times \det({}^tA).$$

Comme $\det(e_1, e_2, e_3) = 1$, nous avons $\det(A) = \det({}^tA)$ et $f(A) = f(e_1, e_2, e_3) \det(A)$, ce qui montre l'hérédité de la propriété (ou du moins, le passage de la dimension 2 à la dimension 3 pour cette page… Voir l'annexe pour le cas général.).

c) Nos deux théorèmes sont donc vrais pour tout n.

Éléments sous droits d'auteur

5. Règles de calcul sur les déterminants

Les résultats précédents vont nous donner l'ensemble des règles pour calculer en pratique un déterminant. Le fait qu'une matrice et sa transposée aient le même déterminant permet de remplacer « colonne » par « ligne » (et vice-versa) dans toutes les règles énoncées.

5.1 Règles de base

a) Dans le calcul d'un déterminant, on peut ajouter à toute colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

b) Dans le calcul d'un déterminant, on peut ajouter à toute ligne une combinaison linéaire des autres lignes.

c) Si l'on permute deux lignes (ou deux colonnes), il faut changer le signe du déterminant.

d) On peut développer un déterminant par rapport à toute ligne $1 \leq i \leq n$ suivant la formule :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

formule dans laquelle $A_{i,j}$ est la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A.

e) On peut développer un déterminant par rapport à toute colonne $1 \leq j \leq n$ suivant la formule :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

formule dans laquelle $A_{i,j}$ est la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A.

f) Quand une ligne (ou une colonne) est composée uniquement de 0, le déterminant est nul.

Éléments sous droits d'auteur

g) Quand deux lignes (ou deux colonnes) sont égales (ou proportionnelles), le déterminant est nul.

h) Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.

La propriété **a)** a déjà été énoncée et traduit que le déterminant est une forme multilinéaire alternée. La seconde vient de l'égalité $\det({}^t A) = \det(A)$ qui permet de renverser le rôle des lignes et des colonnes. Les propriétés **f), g), h)** ont déjà été énoncées et démontrées.

Montrons la propriété **d)** : l'application :

$$A \mapsto \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

est une forme multilinéaire alternée (même démonstration que celle faite avec $i = 1$ dans le paragraphe 2). Il existe donc une constante λ (indépendante de la matrice A) telle que :

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}) = \lambda \det(A).$$

Quand on prend $A = I_d$, seule la matrice $A_{i,i}$ n'a pas de colonne nulle ; c'est la matrice identité de dimension $n-1$ et son déterminant vaut 1. La somme de gauche se réduit ainsi à $(-1)^{2i} \times 1 = \lambda \times 1$. On a donc $\lambda = 1$. En permutant lignes et colonnes, on obtient la proposition **e)**.

Ces règles de calcul conduisent à l'idée suivante :

Faire apparaître un maximum de zéros sur une même ligne (ou colonne) en faisant des combinaisons linéaires de lignes ou de colonnes, et développer par rapport à cette ligne (ou colonne).

Exemple 5 Reprenons le déterminant valant 186 du premier exemple et développons-le par rapport à la troisième ligne qui compte déjà un zéro :

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 9 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} + -3 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 18 + 24 - 3(-40-8) = 186.$$

Éléments sous droits d'auteur

On peut aussi faire apparaître un deuxième zéro sur la deuxième colonne en ajoutant quatre fois la première ligne à la seconde, et en développant par rapport à cette seconde colonne :

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 9 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 24 & 0 & 21 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -(2)\begin{vmatrix} 24 & 21 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \times 93 = 186.$$

Exemple 6 Calculer $d = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

Nous faisons apparaître des zéros sur la dernière ligne en **a)** ajoutant deux fois la deuxième colonne à la quatrième **b)** ajoutant la première colonne à la troisième **c)** ajoutant deux fois la première colonne à la deuxième :

$$d = \begin{vmatrix} 5 & 14 & 7 & 9 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ -5 & -17 & -8 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 14 & 7 & 9 \\ 7 & 3 & 4 \\ -17 & -8 & -5 \end{vmatrix}.$$

On peut ensuite faire apparaître un zéro sur la seconde ligne de la première colonne en soustrayant à la première colonne la somme des deux autres :

$$d = -\begin{vmatrix} -2 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & -8 & -5 \end{vmatrix}.$$

On peut multiplier la dernière ligne par -1 pour arranger les signes :

$$d = \begin{vmatrix} -2 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 5 \end{vmatrix}.$$

On peut faire apparaître un zéro en bas de la première colonne en ajoutant deux fois la première ligne à la dernière ligne :

$$d = \begin{vmatrix} -2 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 22 & 23 \end{vmatrix}$$

Éléments sous droits d'auteur

et l'on développe finalement par rapport à la première colonne pour obtenir

$$d = -2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 22 & 23 \end{vmatrix} = 38.$$

Exemple 7 Calculer $p(x) = \begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix}$.

On ajoute la deuxième colonne à la première pour mettre un zéro en bas de cette première colonne ; ensuite on ajoute la troisième colonne à la deuxième pour mettre un zéro en haut de cette deuxième colonne :

$$p(x) = \begin{vmatrix} x+2 & 0 & 1 \\ x+2 & x-2 & 1 \\ 0 & x-2 & x+4 \end{vmatrix}.$$

On peut mettre $x+2$ en facteur dans la première colonne et $x-2$ en facteur dans la seconde :

$$p(x) = (x+2)\,(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x+4 \end{vmatrix}.$$

En soustrayant finalement la première colonne à la troisième, on obtient :

$$p(x) = (x+2)\,(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x+4 \end{vmatrix} = (x+2)\,(x-2)\,(x+4)$$

puisque le déterminant de cette dernière matrice triangulaire est égal au produit des termes diagonaux.

Éléments sous droits d'auteur

5.2 Déterminant d'un produit

Le théorème sur les formes multilinéaires nous permet aussi d'affirmer que :

Théorème 4 : Le déterminant du produit de deux matrices carrées est égal au produit des déterminants de ces deux matrices :

$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B).$$

Soit A une matrice carrée donnée de dimension n. L'application :

$$B \in M_n(K) \mapsto \det(A \times B)$$

est une forme multilinéaire alternée. Il existe donc une constante λ (indépendante de B) telle que $\det(A \times B) = \lambda \times \det(B)$. En prenant $B = I_d$, on voit que cette constante est égale à $\det(A)$.

Cette relation va nous conduire à la condition nécessaire et suffisante pour qu'un déterminant soit non nul.

6. Théorème fondamental

On va énoncer ce théorème sous deux formes, mais il s'agit du même résultat fondamental.

Théorème 5 :

Soit $V_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \cdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \ldots\ V_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \cdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix}$ n vecteurs de K^n. Le système $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ est libre si et seulement si le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \text{ est non nul.}$$

Éléments sous droits d'auteur

Autre énoncé : Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

- Supposons le système $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ lié : cela signifie que l'un des vecteurs – prenons par exemple V_1 – est une combinaison linéaire des autres :

$$V_1 = \sum_{k=2}^{n} \alpha_k V_k.$$

Dans le calcul de

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \det(V_1, V_2, \ldots, V_n),$$

on peut ajouter à la première colonne V_1 la combinaison linéaire $-\sum_{k=2}^{n} \alpha_k V_k$. On obtient alors un déterminant dont la première colonne est nulle, i.e. un déterminant nul.

- Montrons la réciproque par sa contraposée : supposons que le système $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ est libre et montrons que le déterminant $\det(V_1, \ldots, V_n)$ est non nul. Considérons l'endomorphisme de K^n défini par $f(e_1) = V_1, \ldots, f(e_n) = V_n$. Comme le système $(V_1, \ldots, V_n)$ est libre, cet endomorphisme est un automorphisme (il est bijectif) de K^n. Sa matrice sur la base canonique – à savoir la matrice A dont les colonnes sont les vecteurs $V_1, V_2, \ldots, V_n$ est inversible. Il existe donc une matrice B telle que $A \times B = I_d$. Cette relation implique que $\det(A) \times \det(B) = 1$, et donc que le nombre $\det(A)$ est non nul.

Pour montrer qu'un système de n vecteurs de K^n est libre ou lié, on fabrique la matrice carrée de dimension n dont les colonnes sont les vecteurs du système et on calcule son déterminant. Le système est libre si et seulement si le déterminant de cette matrice est non nul.

Ce principe est évidemment (et heureusement) indépendant de la base sur laquelle on travaille. Si un vecteur a pour composantes $V = (v_1, \ldots, v_n)$ sur une base $\mathcal{B}$ et $V' = (v'_1, , \ldots, v'_n)$ sur une autre base $\mathcal{B}'$, on sait que l'on a $V = PV'$ où P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Si l'on stocke les composantes d'un système de n

Éléments sous droits d'auteur

vecteurs dans une matrice carrée A sur la base $\mathcal{B}$ et dans une matrice A' sur l'autre base, nous avons donc $A = PA'$ et $\det(A) = \det(A')\det(P)$. Comme P est inversible, son déterminant est non nul. Le déterminant de A est nul si et seulement si celui de A' est nul.

Exemple 8 Pour quelles valeurs du paramètre t la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & t+4 \\ t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ?

Une addition des deux premières colonnes suivie d'une soustraction des deux dernières lignes conduit à :

$$\begin{vmatrix} 6 & -6 & t+4 \\ t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & t+4 \\ t+2 & -1 & 1 \\ t+2 & t-3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & t+4 \\ 0 & 2-t & 0 \\ t+2 & t-3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (t+2)(t-2)(t+4).$$

La matrice est inversible si et seulement si t est différent de -4, -2 et 2. On peut s'exprimer de plusieurs autres façons :

- L'endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3 dont la matrice sur une certaine base est A est un automorphisme si et seulement si t est différent de $-4, -2, 2$.
- Les vecteurs $a = (6, t+3, 5)$, $b = (-6, -1, t-3)$ et $c = (t+4, 1, 1)$ forment un système libre si et seulement si t est différent de $-4, -2, 2$.
- Les vecteurs $a = (6, -6, t+4)$, $b = (t+3, -1, 1)$ et $c = (5, t-3, 1)$ forment un système libre si et seulement si t est différent de $-4, -2, 2$ (en utilisant le fait que $\det({}^tA) = \det(A)$).

7. Applications des déterminants. Matrices carrées

Voici maintenant trois applications classiques des déterminants à des problèmes faisant intervenir des matrices carrées. On se gardera malgré tout de trop utiliser les déterminants en pratique! Il y a nombre de situations où la méthode de Gauss (ou méthode du pivot) est plus rapide. Les risques d'erreurs de calculs sont très élevés avec les détermi-

Éléments sous droits d'auteur

nants. On pensera à utiliser des logiciels comme Maple pour effectuer les calculs de gros déterminants…

7.1 Calcul de l'inverse d'une matrice

Rappelons que si A est une matrice carrée d'ordre n, on note $A_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j.

Définition 3 : On appelle comatrice de A la matrice carrée B d'ordre n dont le terme situé sur la ligne i et la colonne j est :

$$b_{i,j} = (-)^{i+j}\det(A_{i,j}).$$

Ce scalaire $(-)^{i+j}\det(A_{i,j})$ s'appelle cofacteur de $a_{i,j}$.

Nous allons montrer que

Théorème 6 : Si la matrice A est inversible, alors son inverse est donné par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times {}^tB.$$

Calculons en effet le terme général du produit de A par la transposée de la comatrice de A. Le terme situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal à :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{j+k}\det(A_{j,k}).$$

On reconnaît dans cette expression le développement par rapport à la ligne j du déterminant d'une matrice obtenue à partir de A en remplaçant la ligne numéro j par la ligne numéro i.

- Quand $i = j$, on obtient le déterminant de A.
- Quand $i \neq j$, on a le déterminant d'une matrice ayant les lignes i et j égales. On obtient donc zéro.

On a donc $c_{i,j} = \det(A)$ lorsque $i = j$ et 0 sinon. Il s'agit du terme général de la matrice $\det(A) \times I_d$. Quand la matrice est inversible, i.e. quand son déterminant est non nul, on obtient le résultat indiqué.

Éléments sous droits d'auteur

En pratique Le calcul est assez périlleux. On doit calculer chacun des déterminants $A_{i,j}$, les changer ou non de signe suivant la parité de $i+j$ et les placer en ligne j et colonne i d'une matrice ! Notons quand même que cette histoire de signes est assez logique. En dimensions 2, 3 et 4, voici le tableau des signes intervenant en $(-1)^{i+j}$:

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}.$$

Exemple 9 En dimension 2, chaque cofacteur est un scalaire lisible immédiatement.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ le cofacteur de a est d, celui de b est $-c$, celui de c est $-b$ et celui de d est a. On obtient donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemple 10 Calculons l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculons systématiquement tous les cofacteurs…

$$b_{1,1} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10\,; \quad b_{1,2} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8\,; \quad b_{1,3} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 5.$$

Ces trois cofacteurs de la première ligne de A, changés de signe suivant le tableau ci-dessus, vont former la première colonne de la matrice inverse (à la division près par le déterminant de A, qui est égal à 9) :

$$b_{2,1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\,; \quad b_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\,; \quad b_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Ces trois cofacteurs de la deuxième ligne de A, changés de signe suivant le tableau ci-dessus, vont former la deuxième colonne de la matrice inverse (à la division près par le déterminant de A, qui est égal à 9) :

$$b_{3,1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -7\,; \quad b_{3,2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2\,; \quad b_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

Éléments sous droits d'auteur

Ces trois cofacteurs de la troisième ligne de A, changés de signe suivant le tableau ci-dessus, vont former la troisième colonne de la matrice inverse (à la division près par le déterminant de A, qui est égal à 9) :

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 & -4 & -7 \\ -8 & 5 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut se dire qu'il est tout aussi facile de résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = x' \\ 2x + 5y + 4z = y' \\ -x + 2z = z' \end{cases}$$

par la méthode du pivot. Les expressions de x, y et z en fonction de x', y' et z' nous donnent les coefficients de A^{-1}.

7.2 Résolution d'un système de Cramer

On appelle système de Cramer un système linéaire de n équations à n inconnues dont la matrice est inversible et qui se traduit donc par la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \det(A) \neq 0.$$

Il admet une solution unique.

Théorème 7 : Les inconnues d'un système de Cramer sont données par les formules :

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\det(A)}$$

où Δ_k est le déterminant de la matrice carrée obtenue en remplaçant la k-ième colonne de A par la colonne second membre.

En effet, x_k est la k-ième ligne du produit de la matrice A^{-1} par le vecteur second membre. En utilisant l'expression de A^{-1}, on obtient :

Éléments sous droits d'auteur

$$x_k = \frac{1}{\det(A)} \times \sum_{j=1}^{n} b_j(-1)^{j+k} \det(A_{j,k})$$

ce qui est l'expression du développement par rapport à la k-ième colonne du déterminant de la matrice A où l'on a remplacé cette k-ième colonne par celles du second membre.

Nous ferons la même remarque que dans le paragraphe précédent : la méthode existe, mais est très onéreuse et désagréable… !

7.3 Équation d'un hyperplan

Soit $n-1$ vecteurs $V_1, \ldots, V_{n-1}$ de K^n formant une famille **libre**. Ils engendrent un hyperplan de K^n. La condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur V appartienne à cet hyperplan est que le système $V_1, \ldots, V_{n-1}, X$ forme un système lié, i.e. que son déterminant soit nul. Cette condition nécessaire et suffisante est l'équation cartésienne de l'hyperplan. Elle est donnée par :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & x_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & x_n \end{vmatrix} = 0.$$

Exemple 11 L'équation cartésienne de l'hyperplan de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs :

$$u = (1, 2, -1, 3), \quad v = (2, 5, 0, 4) \quad \text{et} \quad w = (3, 4, 2, 5)$$

est donnée par :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 5 & 4 & y \\ -1 & 0 & 2 & z \\ 3 & 4 & 5 & t \end{vmatrix} = 0$$

soit $9t + 8z + 2y - 23x = 0$.

Attention Si par malheur la famille donnée n'est pas libre, la méthode ne marche pas ! le déterminant calculé est identiquement nul.

Éléments sous droits d'auteur

8. Rang d'une famille de vecteurs ou d'une matrice. Matrices quelconques

Le théorème fondamental **4** nous dit que dans K^n, une famille de n vecteurs est libre si et seulement si son déterminant est non nul. Il affirme aussi qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Nous allons généraliser ce résultat fondamental à la notion de rang d'une famille de vecteurs et au rang d'une matrice.

- Rappelons que le rang d'une famille $(V_1, \dots, V_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel F est le nombre maximum de vecteurs de cette famille formant un système libre. C'est aussi la dimension du sous-espace vectoriel de F qu'ils engendrent.
- Rappelons que le rang d'une matrice à n lignes et p colonnes est le nombre maximum de colonnes **ou** de lignes de cette matrice linéairement indépendantes.

8.1 Rang d'une matrice quelconque

Le théorème suivant permet de calculer ce rang avec les déterminants.

Théorème 8 : Le rang d'une matrice quelconque est la dimension du plus grand déterminant non nul que l'on peut extraire de cette matrice.

En fait, nous allons démontrer le résultat suivant :

Une matrice A est de rang supérieur ou égal à q si et seulement si on peut extraire de A un déterminant non nul de dimension q.

Le théorème **8** s'en déduira en prenant la plus grande valeur possible d'un tel entier q.

a) Montrons que si le rang de A est supérieur ou égal à q, il existe un déterminant extrait de dimension q non nul.

On appellera n le nombre de lignes de A et p son nombre de colonnes. Notre entier q est donc inférieur ou égal à n et à p.

Il existe donc q colonnes de la matrice A formant une famille libre. Supposons, pour simplifier les notations, que ce soient les q premières $C_1, C_2, \dots, C_q$.

La matrice $B = (C_1, C_2, \dots, C_q)$ à n lignes et q colonnes est donc de rang q, puisque ses q colonnes forment une famille libre.

Éléments sous droits d'auteur

La caractérisation du rang de B par ses lignes montre qu'il existe q lignes de cette matrice B formant une famille libre. Supposons, toujours pour simplifier les notations, que ce soient les q premières. Soit alors H la matrice carrée de dimension q obtenue en enlevant de B les $n - q$ dernières lignes.

Les q lignes de cette matrice carrée H forment une famille libre, ce qui signifie que H est de rang q. Elle est inversible et son déterminant est non nul. On a donc trouvé dans A un déterminant de dimension q qui est non nul.

b) Montrons que si la matrice A à n lignes et p colonnes contient un déterminant de taille q non nul, alors cette matrice est au moins de rang q.

Supposons, pour simplifier les notations, que ce soit celui formé avec les q premières lignes et les q premières colonnes. Les q lignes $(a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,q})$, … $(a_{q,1}, a_{q,2}, \ldots, a_{q,q})$ forment donc une famille libre. Considérons la matrice B à n lignes et q colonnes formée par les q premières colonnes de A. Ses q premières lignes formant une famille libre, elle est au moins de rang q. Comme elle comporte q colonnes, elle est exactement de rang q, et les q premières colonnes de la matrice de départ A forment une famille libre.

Le rang de A est donc au moins égal à q.

Le théorème est donc démontré. Il implique le théorème final suivant :

> **Théorème 9 :** Le rang d'un système de p vecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie est la dimension maximale d'un déterminant non nul que l'on peut extraire de la matrice, sur une base quelconque, des composantes de cette famille de vecteurs.

Exemple 12 Trouver dans $\mathbb{R}^4$ le rang de la famille de vecteurs :
$u = (1, 2, 3, -1)$, $v = (1, 1, 4, 5)$, $w = (5, 7, 18, 14)$.

On forme la matrice à quatre lignes et trois colonnes des composantes de cette famille :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 18 \\ -1 & 5 & 14 \end{pmatrix}.$$

Le rang du système est au maximum égal à 3 et au minimum égal à 2 (puisque les vecteurs u et v forment manifestement un système libre). Pour regarder s'il vaut 3, on extrait des déterminants d'ordre 3 de cette matrice, en espérant en trouver un non nul :

Éléments sous droits d'auteur

- Avec les lignes 1, 2, 3 : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 18 \end{vmatrix} = 0$. Pas de chance !

- Avec les lignes 1, 2, 4 : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 5 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 7 \\ -1 & 6 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 6 & 19 \end{vmatrix} = -1$.

C'est bon ! On s'arrête ici : il existe un déterminant d'ordre 3 extrait non nul, ce qui prouve que la famille de vecteurs est de rang 3.

Exemple 13 Trouver dans $\mathbb{R}^4$ le rang de la famille de vecteurs :
$u = (1, 2, 3, -1)$, $v = (1, 1, 4, 5)$, $w = (5, 7, 18, 13)$.

On vérifiera à la main que les quatre déterminants d'ordre 3 que l'on peut extraire de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 18 \\ -1 & 5 & 13 \end{pmatrix}$ de la famille sont tous nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 5 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 18 \\ -1 & 5 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 18 \\ -1 & 5 & 13 \end{vmatrix} = 0.$$

Le système n'est donc pas de rang 3. Comme u et v ne sont pas proportionnels, il est au moins de rang 2 et donc exactement de rang 2.

Exemple 14 Trouver le rang de $A = \begin{pmatrix} 4 & 14 & 1 & 2 \\ 8 & -2 & 7 & 2 \\ 18 & -12 & 17 & 4 \end{pmatrix}$.

Ce rang est au maximum égal à 3 (il y a seulement trois lignes) et au minimum égal à 2, puisque les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles.

Appliquer froidement le théorème **9** peut conduire à calculer les quatre déterminants d'ordre 3 que contient cette matrice A. Mais on va procéder de la façon suivante :

Éléments sous droits d'auteur

- On regarde si les trois premières colonnes forment un système libre, en calculant leur déterminant $\begin{vmatrix} 4 & 14 & 1 \\ 8 & -2 & 7 \\ 18 & -12 & 17 \end{vmatrix}$. Manque de chance, il vaut 0. La troisième colonne est une combinaison linéaire des deux premières.
- On regarde donc si les colonnes 1, 2 et 4 forment ou non un système libre en calculant leur déterminant $\begin{vmatrix} 4 & 14 & 2 \\ 8 & -2 & 2 \\ 18 & -12 & 4 \end{vmatrix}$. Il vaut aussi 0.

Les deux dernières colonnes sont donc des combinaisons linéaires des deux premières. La matrice est seulement de rang 2.

Exemple 15 Discuter suivant la valeur du réel a le rang de la famille de trois vecteurs :

$$u = (a, 1, 1, a, -a)\ ; \quad v = (1, a, 1, 1, -1)\ ; \quad w = (1, a, a, a, -1).$$

On sait *a priori* que ce rang est inférieur ou égal à 3.

Formons la matrice de cette famille sur la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & a \\ -a & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et calculons **UN** déterminant extrait d'ordre 3, par exemple celui avec les trois premières lignes :

$$d = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 1 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2\,(a+1).$$

(On a soustrait la deuxième colonne aux deux autres pour arriver au résultat.)

Lorsque a est différent de 1 et de -1, ce déterminant extrait d'ordre 3 est non nul et le système de vecteurs est de rang 3. Actuellement, on ne peut rien dire pour $a = \pm 1$. On peut simplement dire que pour $a = \pm 1$,la famille est **susceptible** de ne pas être de rang 3. Il faut étudier chacun de ces deux cas particuliers.

- Pour $a = 1$, les trois vecteurs sont égaux et le système est de rang 1.

Éléments sous droits d'auteur

- Pour $a = -1$, la matrice de la famille est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La famille peut très bien être de rang 3, et il faut regarder les déterminants d'ordre 3 extraits, pour voir s'il y en a un non nul. On trouve effectivement que celui extrait avec les lignes 1, 3, 4 est non nul :

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

La famille de vecteurs est encore de rang 3 pour $a = -1$. En conclusion, elle est de rang 1 pour $a = 1$ et de rang 3 sinon.

Remarque Les calculs avec ces déterminants extraits risquent d'être très longs, surtout si l'on a beaucoup de vecteurs mais que le rang est faible. On va être obligé de calculer énormément de déterminants pour arriver à la conclusion. On donne en exercice une façon plus rapide d'y arriver, évitant de calculer trop de petits déterminants. Ceci dit, il semble que la méthode du pivot soit plus rapide dans bien des cas pour calculer le rang d'un système de vecteurs ou d'une matrice... !

L'application du théorème **9** n'est donc pas, en pratique, la meilleure façon de chercher un rang. On risque de calculer trop de déterminants nuls qui ne prouvent rien. C'est cependant très utile dans le cas où l'on a des paramètres : il est en général facile de trouver un déterminant de taille maximale qui soit une fonction non identiquement nulle du paramètre. On a ainsi les cas particuliers où le système est **susceptible** de ne pas être de rang maximal.

8.2 Systèmes d'équations cartésiennes d'un S.E.V.

On se donne un système libre de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et l'on veut écrire un système d'équations cartésiennes du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent. On sait le faire par la méthode du pivot qui montre qu'il y a exactement $n - p$ équations cartésiennes. On peut retrouver ces $n - p$ équations avec les déterminants.

Éléments sous droits d'auteur

On va le faire sur un exemple, pour avoir des notations simples. Le cas général se traite suivant le même principe.

Exemple 16 Trouver un système d'équations cartésiennes du S.E.V. de $\mathbb{R}^5$ engendré par les deux vecteurs :

$$a = (1, 2, -1, -2, 3) \quad \text{et} \quad b = (1, 3, 5, 2, 0).$$

Il est clair que ce système de vecteurs est libre. Trouver un système d'équations cartésiennes du plan engendré par a et b, c'est trouver les conditions nécessaires et suffisantes liant les composantes (x, y, z, t, u) d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^5$ pour que le système (a, b, v) soit lié, i.e. pour que la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 3 & y \\ -1 & 5 & z \\ -2 & 2 & t \\ 3 & 0 & u \end{pmatrix}$$

soit de rang 2, c'est-à-dire qu'elle ne soit pas de rang 3 (puisque son rang ne peut pas dépasser 3).

Comme le petit déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ pris dans les deux premières lignes est non nul, dire que M est de rang 2 équivaut à dire que :

- La troisième **ligne** de M est une combinaison linéaire des deux premières lignes.
- La matrice $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 3 & y \\ -2 & 2 & t \\ 3 & 0 & u \end{pmatrix}$ obtenue en enlevant cette troisième **ligne** de M est de rang 2.

De même, cette matrice M_3 sera de rang 2 si et seulement si sa troisième ligne (qui est la quatrième de M) est combinaison linéaire des deux premières et si la matrice

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 3 & y \\ 3 & 0 & u \end{pmatrix}$$

obtenue en enlevant cette troisième ligne de M_3 est de rang 2.

Éléments sous droits d'auteur

Cette dernière matrice est de rang 2 si et seulement si sa dernière ligne, qui est la cinquième ligne de M, est une combinaison linéaire des deux premières.

Finalement M est de rang 2 si et seulement si ses lignes 3, 4 et 5 sont combinaisons linéaires des deux premières, ce qui se traduit en écrivant que les trois petits déterminants suivants sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 3 & y \\ -1 & 5 & z \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 3 & y \\ -2 & 2 & t \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 3 & y \\ 3 & 0 & u \end{vmatrix} = 0.$$

Un système d'équations du plan engendré est donc :

$$z - 6y + 13x = 0, \quad t - 4y + 10x = 0, \quad u + 3y - 9x = 0.$$

Remarque importante *A priori*, il fallait calculer cinq déterminants d'ordre 3 pour dire que la matrice (ou le système de vecteurs) était de rang 2. En pratique, cela est donc inutile : il suffit d'écrire que les trois déterminants obtenus en conservant les lignes 1 et 2 (qui sont indépendantes) et en ajoutant l'une des trois dernières lignes sont nuls.

On a utilisé le fait que le rang d'une matrice est égal au nombre de lignes formant un système libre aussi bien qu'au nombre de colonnes formant un système libre.

Ce procédé est général. Il montre que le S.E.V. possède bien $n - p$ équations et donne la façon de les écrire.

En pratique, il faut connaître le principe, comme celui donné par la méthode du pivot, mais il vaut mieux faire faire les calculs par Maple… !

9. Déterminant d'un endomorphisme

Nous avons parlé du déterminant d'un système de vecteurs ou d'une matrice. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n. Si A est la matrice de f sur une base $\mathcal{B}$ et C sa matrice sur une autre base $\mathcal{B}'$, nous savons que les matrices A et C sont liées par la relation :

$$C = P^{-1}AP$$

où P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Éléments sous droits d'auteur

Nous avons alors :

$$\det(C) = \det(P^{-1}) \times \det(A) \times \det(P) = \det(P^{-1}) \times \det(P) \times \det(A) = \det(A)$$

puisque le déterminant de P^{-1} est l'inverse du déterminant de P. Le nombre $\det(A)$ ne dépend donc pas de la base sur laquelle on écrit la matrice de f. On l'appelle déterminant de l'endomorphisme f.

En particulier, pour déterminer si f est ou non bijectif, il suffit de prendre sa matrice sur une base quelconque et de calculer son déterminant.

Annexe : Preuve des théorèmes 2 et 3. Cas général

Soit donc f une forme multilinéaire alternée sur $E = K^n$. Calculons-la sur n vecteurs $C_1, C_2, \ldots C_n$ que nous considérons comme les n colonnes d'une matrice A de terme général $a_{i,j}$. Avec ces notations, nous avons $C_1 = \sum_{k=1}^{n} a_{k,1} e_k$. La linéarité de f par rapport au premier vecteur nous donne :

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,1} f(e_k, C_2, \ldots, C_n).$$

Dans chaque $f(e_k, C_2, \ldots, C_n)$, nous pouvons remplacer le vecteur C_2 par $C_2 - a_{k,2}\, e_2$ (pour que la composante sur e_k devienne nulle) et ainsi de suite pour C_3 et les suivants. Nous avons donc :

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,1} f(\Phi_k(A))$$

en appelant $\Phi_k(A)$ la matrice obtenue à partir de A en mettant des zéros sur la première colonne et sur la ligne numéro k, sauf le premier coefficient de cette k-ième ligne qui devient 1.

Étant donnée une matrice carrée B de dimension $n - 1$ et un entier $1 \leq k \leq n$, considérons la matrice $\Psi_k(B)$ de dimension n obtenue de la façon suivante :

- On ajoute une colonne de zéros en première colonne.

Éléments sous droits d'auteur

- Entre la ligne $k-1$ et la ligne k on introduit une ligne composée d'un 1 en première position et de zéros ensuite. (Pour $k = 1$, on ajoute cette ligne en première ligne de la matrice.)

On a donc $\Phi_k(A) = \Psi_k(A_{k,1})$.

Il est facile de constater que l'application $B \mapsto f(\Psi_k(B))$ est multilinéaire alternée sur E^{n-1}. L'hypothèse de récurrence affirme donc qu'il existe une constante λ_k (dépendant seulement de k et pas de la matrice B) telle que :

$$f(\Psi_k(B)) = \lambda_k \det(B).$$

Pour calculer cette constante, il suffit de prendre $B = I_{n-1}$ (matrice identité de dimension $n-1$). La matrice $\Psi_k(I_{n-1})$ contient en colonnes les vecteurs

$$(e_k, e_1, \ldots, e_{k-1}, e_{k+1}, \ldots e_n).$$

Cette matrice se déduit de la matrice $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ en effectuant $k-1$ permutations de colonnes, et donc :

$$\lambda_k = f(e_k, e_1, \ldots, e_{k-1}, e_{k+1}, \ldots e_n) = (-1)^{k+1} f(e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

On en déduit que :

$$f(\Phi_k(A)) = f(\Psi_k(A_{k,1})) = (-1)^{k+1} \det(A_{k,1})$$

soit $$f(A) = f(e_1, \ldots, e_n) \times \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k,1} \det(A_{k,1}).$$

Utilisons maintenant la seconde partie de l'hypothèse de récurrence qui affirme que le déterminant d'une matrice carrée de dimension $n-1$ est égal à celui de sa transposée :

$$f(A) = f(e_1, \ldots, e_n) \times \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k,1} \det({}^tA_{k,1}).$$

D'une façon générale, la matrice ${}^tA_{i,j}$ s'obtient en enlevant à A la ligne i et la colonne j, puis en transposant le résultat. On peut évidemment d'abord transposer et enlever ensuite la ligne j et la colonne i. Nous avons donc ${}^tA_{i,j} = ({}^tA)_{j,i}$ et donc

$$f(A) = f(e_1, \ldots, e_n) \times \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k,1} \det(({}^tA)_{1,k}).$$

où la somme est la définition du déterminant de la transposée de A :

$$f(A) = f(e_1, \ldots, e_n) \times \det({}^tA).$$

Éléments sous droits d'auteur

Nous y sommes presque ! Ce que nous venons de montrer pour une forme multilinéaire quelconque f est en particulier vrai pour le déterminant :

$$\det(A) = \det(e_1, e_2, \ldots e_n) \times \det({}^tA).$$

Comme $\det(e_1, e_2, \ldots e_n) = 1$, nous avons :

$$\det(A) = \det({}^tA) \quad \text{et} \quad f(A) = f(e_1, e_2, \ldots e_n)\det(A),$$

ce qui montre l'hérédité de la propriété et le résultat voulu.

Éléments sous droits d'auteur

Exercices

1. Calculs de déterminants

On rappelle que la présence d'un coefficient égal à un dans une ligne ou dans une colonne permet de faire apparaître des zéros sur le restant de cette ligne ou colonne par combinaisons linéaires. Dans les corrigés, L_1, L_2… désignent les lignes numéros 1, 2, … du déterminant, et il en va de même pour les colonnes C_1, C_2, ….

▸ **Exercice 1** Calculer les déterminants suivants. Quand ils dépendent de paramètres, on les donnera sous forme factorisée.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & -14 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & -4 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$; **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$; **f)** $\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$; **g)** $\begin{vmatrix} \sin 2t & \sin 3t & \sin 4t \\ \sin 3t & \sin 4t & \sin 5t \\ \sin 4t & \sin 5t & \sin 6t \end{vmatrix}$; **h)** $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & -4 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}$.

Corrigé

a) $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & -14 \end{vmatrix} = 2 \times -14 - 5 \times 6 = -58.$

b) $\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$

c) On fait apparaître des zéros en dernière colonne en remplaçant L_2 par $L_2 + 4L_1$, puis L_3 par $L_3 - L_1$. On développe ensuite par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & -4 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 13 & 28 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 13 & 28 & 0 \\ 2 & -11 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 28 \\ 2 & -11 \end{vmatrix}$$

$$= -11 \times 13 - 2 \times 28 = -199.$$

Éléments sous droits d'auteur

d) On fait apparaître des zéros en première ligne en soustrayant la première colonne aux deux autres. On voit alors que l'on peut mettre $b-a$ en facteur dans la nouvelle deuxième colonne, et $c-a$ dans la troisième :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix}.$$

Et on développe ensuite par rapport à la première ligne. On obtient finalement $(b-a)(c-a)(c-b)$.

e) Chaque ligne (ou colonne) contient les mêmes éléments, deux fois b et une fois a. Si l'on additionne les trois lignes (ou les trois colonnes), on va pouvoir mettre $a+2b$ en facteur dans le déterminant. Remplaçons donc L_1 par $L_1+L_2+L_3$:

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2b & a+2b & a+2b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}.$$

On remplace ensuite C_2 par C_2-C_1 et C_3 par C_3-C_1, ce qui nous donne le déterminant d'une matrice triangulaire :

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a-b & 0 \\ b & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2.$$

f) En remplaçant C_2 par C_2+C_3, on fait apparaître un zéro en première ligne, et l'on peut mettre $a+1$ en facteur dans la deuxième nouvelle colonne. On fait apparaître un nouveau zéro dans la deuxième colonne en remplaçant L_3 par L_3-L_2, et on développe par rapport à cette deuxième colonne :

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = a(a+1)(a-1).$$

g) On utilise la formule $\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ pour remplacer C_1 par C_1+C_3 :

$$\begin{vmatrix} \sin 2t & \sin 3t & \sin 4t \\ \sin 3t & \sin 4t & \sin 5t \\ \sin 4t & \sin 5t & \sin 6t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos t\sin 3t & \sin 3t & \sin 4t \\ 2\cos t\sin 4t & \sin 4t & \sin 5t \\ 2\cos t\sin 5t & \sin 5t & \sin 6t \end{vmatrix}$$

Éléments sous droits d'auteur

$$= 2\cos t \begin{vmatrix} \sin 3t & \sin 3t & \sin 4t \\ \sin 4t & \sin 4t & \sin 5t \\ \sin 5t & \sin 5t & \sin 6t \end{vmatrix} = 0$$

puisque ce dernier déterminant a deux colonnes égales, et est donc nul.

h) Pour une fois, on a aussi vite fait de développer directement par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & -4 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 13x - 22.$$

▸ **Exercice 2** Calculer les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ 3a^2 & 2a & 1 & 0 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ 3b^2 & 2b & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -6 & 6+m^2 \\ 1 & 0 & m+1 & 3 \\ -3 & 3 & 6 & m^2-16 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \end{vmatrix}$; **d)** $\begin{vmatrix} -x & 2m-6 & 2m-4 \\ 1 & 5-m-x & 2-m \\ -1 & 2m-5 & 2m-2-x \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 2-x & -1 & -1 \\ -1 & 2-x & m \\ -1 & m & 2-x \end{vmatrix}$.

On fera des combinaisons linéaires de lignes et de colonnes pour aboutir à une expression factorisée des résultats. À quelle condition les matrices correspondantes sont-elles inversibles ?

Éléments sous droits d'auteur

Corrigé

a) On peut (par exemple) garder la dernière ligne, et faire apparaître des zéros en première colonne en remplaçant L_1 par $L_1 - 5L_4$, L_2 par $L_2 - 2L_4$ et L_3 par $L_3 + 5L_4$:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 14 & 7 & -19 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 14 & 7 & -19 \\ 0 & 7 & 3 & -10 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 14 & 7 & -19 \\ 0 & 7 & 3 & -10 \\ 0 & -17 & -8 & 29 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 14 & 7 & -19 \\ 7 & 3 & -10 \\ -17 & -8 & 29 \end{vmatrix}.$$

On fait apparaître un zéro en première ligne en remplaçant L_1 par $L_1 - 2L_2$. On peut ensuite soit s'arrêter là et faire le calcul de deux déterminants d'ordre deux, soit faire apparaître un second zéro en première ligne en remplaçant C_3 par $C_3 - C_2$:

$$\begin{vmatrix} 14 & 7 & -19 \\ 7 & 3 & -10 \\ -17 & -8 & 29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -10 \\ -17 & -8 & 29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & -13 \\ -17 & -8 & 37 \end{vmatrix} = -38.$$

Il ne faut pas oublier le signe moins. Notre déterminant est égal à 38.

b) On remplace L_3 par $L_3 - L_1$ pour avoir trois zéros dans la dernière colonne, et on développe par rapport à cette quatrième colonne, en mettant $a - b$ en facteur (attention au signe) :

$$\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ 3a^2 & 2a & 1 & 0 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ 3b^2 & 2b & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ 3a^2 & 2a & 1 & 0 \\ b^3 - a^3 & b^2-a^2 & b-a & 0 \\ 3b^2 & 2b & 1 & 0 \end{vmatrix} = (a-b) \begin{vmatrix} 3a^2 & 2a & 1 \\ b^2 + ab + a^2 & b+a & 1 \\ 3b^2 & 2b & 1 \end{vmatrix}.$$

On soustrait ensuite la première ligne aux deux autres, ce qui permet de mettre $b - a$ en facteurs deux fois. On obtient :

$$(a-b) \begin{vmatrix} 3a^2 & 2a & 1 \\ b^2 + ab - 2a^2 & b-a & 0 \\ 3b^2 - 3a^2 & 2b-2a & 0 \end{vmatrix} = (a-b)^3 \begin{vmatrix} 3a^2 & 2a & 1 \\ b + 2a & 1 & 0 \\ 3(b+a) & 2 & 0 \end{vmatrix} = (a-b)^4.$$

La matrice correspondante est inversible si et seulement si $a \neq b$.

Éléments sous droits d'auteur

c) On fait apparaître trois zéros en dernière ligne en remplaçant C_1 par $C_1 - 2C_2$, C_3 par $C_3 - 8C_2$ et C_4 par $C_4 - 4C_2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -6 & 6+m^2 \\ 1 & 0 & m+1 & 3 \\ -3 & 3 & 6 & m^2-16 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 10 & 14+m^2 \\ 1 & 0 & m+1 & 3 \\ -9 & 3 & -18 & m^2-28 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 10 & 14+m^2 \\ 1 & m+1 & 3 \\ -9 & -18 & m^2-28 \end{vmatrix}.$$

On fait apparaître un zéro en troisième colonne en remplaçant C_3 par $C_3 - 3C_1$, ce qui permet de mettre en facteurs $m^2 - 1$. Finalement, on remplace L_3 par $L_3 - L_1$et on obtient :

$$(m^2-1)\begin{vmatrix} 5 & 10 & 1 \\ 1 & m+1 & 0 \\ -9 & -18 & 1 \end{vmatrix} = (m^2-1)\begin{vmatrix} 5 & 10 & 1 \\ 1 & m+1 & 0 \\ -14 & -28 & 0 \end{vmatrix} = 14(m-1)^2\,(m+1).$$

La matrice est inversible si et seulement si m est différent de ± 1.

d) Additionner les deux dernières lignes fait apparaître un zéro en première colonne, et permet de mettre $m - x$ en facteur :

$$\begin{vmatrix} -x & 2m-6 & 2m-4 \\ 1 & 5-m-x & 2-m \\ -1 & 2m-5 & 2m-2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & 2m-6 & 2m-4 \\ 1 & 5-m-x & 2-m \\ 0 & m-x & m-x \end{vmatrix}.$$

On remplace ensuite C_2 par $C_2 - C_3$ et on développe par rapport à la dernière ligne. On obtient :

$$(m-x)\begin{vmatrix} -x & 2m-6 & 2m-4 \\ 1 & 5-m-x & 2-m \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (m-x)\begin{vmatrix} -x & -2 & 2m-4 \\ 1 & 3-x & 2-m \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (m-x)\begin{vmatrix} -x & -2 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} = (m-x)\,(x-2)\,(x-1).$$

La matrice est inversible si et seulement si x est différent de m, 1 et 2.

Éléments sous droits d'auteur

e) Remplacer C_3 par $C_3 - C_2$ fait apparaître un zéro et met $m - 2 + x$ en facteur. On remplace ensuite L_2 par $L_2 + L_3$:

$$\begin{vmatrix} 2-x & -1 & -1 \\ -1 & 2-x & m \\ -1 & m & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & m-2+x \\ -1 & m & 2-x-m \end{vmatrix}$$

$$= (m-2+x) \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & 1 \\ -1 & m & -1 \end{vmatrix} = (m-2+x) \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & 1 \\ -2 & m+2-x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (m-2+x) \begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ -2 & m+2-x \end{vmatrix} = (m-2+x)\,(x^2 - x(m+4) + 2m + 2).$$

La matrice est inversible lorsque $x \neq 2 - m$ et $x \neq \dfrac{m + 4 \pm \sqrt{m^2 + 8}}{2}$.

▸ Exercice 3 On pose

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

1. Calculer D_1, D_2 et D_3.

2. Exprimer D_n en fonction de D_{n-1} et D_{n-2} et en déduire la valeur de D_n.

Corrigé

1. Un calcul évident donne $D_1 = a + b$ et $D_2 = (a + b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2$. On calcule D_3 en développant par rapport à la première ligne, ce qui donne :

$$D_3 = (a + b)\, D_2 - abD_1 = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3.$$

On voit apparaître :

$$D_1 = \frac{b^2 - a^2}{b - a}, \quad D_2 = \frac{b^3 - a^3}{b - a}, \quad D_3 = \frac{b^4 - a^4}{b - a}.$$

Éléments sous droits d'auteur

2. On calcule D_n en le développant par rapport à la première ligne. On a la formule de récurrence immédiate :

$$D_n = (a+b)\,D_{n-1} - abD_{n-2}.$$

En partant de l'hypothèse de récurrence $D_k = \dfrac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b-a}$ supposée vraie jusqu'à l'ordre $n-1$, on obtient :

$$D_n = (a+b)\,\frac{b^n - a^n}{b-a} - ab\,\frac{b^{n-1} - a^{n-1}}{b-a} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}.$$

L'hypothèse de récurrence est bien vraie pour tout entier n.

▸ **Exercice 4** On se propose de calculer :

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que l'on peut se limiter au cas où les scalaires $a_1, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts.

On définit le polynôme $P(x) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} \end{vmatrix}.$

2. Quel est le degré maximal de P ? Trouver toutes ses racines.

3. Trouver le coefficient directeur de P, et en déduire l'expression de P.

4. Donner l'expression générale de $V(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Corrigé

1. Si l'on a deux scalaires égaux $a_i = a_j$, le déterminant possède deux lignes L_i et L_j égales, et il est nul.

2. Quand on calcule $P(x)$ en développant le déterminant par rapport à la dernière ligne, on voit apparaître une somme de la forme $P(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x^{j-1}(-1)^{n+j} \det A_{n,j}$, où $A_{n,j}$ est la matrice de dimension $n-1$ obtenue en supprimant dans la matrice de départ la dernière ligne et la colonne j. Cette petite matrice ne comporte pas de x, et son déter-

Éléments sous droits d'auteur

minant est donc un scalaire dépendant uniquement des $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. C'est bien là définition d'un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ en x.

Ce polynôme admet donc au maximum $n-1$ racines. Quand on remplace x par a_1 ou $a_2 \ldots$ ou a_{n-1}, le déterminant possède deux lignes égales et est donc nul. Les $n-1$ scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ (supposés deux à deux distincts) sont donc exactement toutes les racines de $P(x)$.

On a donc $P(x) = K \times (x-a_1)(x-a_2) \ldots (x-a_{n-1})$, où K est un scalaire dépendant des $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

3. Pour calculer K, il suffit de trouver le coefficient de x^{n-1} dans le déterminant. On a vu ci-dessus que ce coefficient est le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne. Il s'agit donc du déterminant noté $V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$:

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x) = V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \times (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})$$

ce que l'on peut écrire aussi :

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \times (a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1}).$$

4. On a donc une relation de récurrence permettant le calcul.

Sachant que $V(a_1, a_2) = a_2 - a_1$, on en déduit :

$$V(a_1, a_2, a_3) = (a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_2-a_1)$$

$$V(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_2-a_1)$$

et plus généralement :

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{i<j}(a_j - a_i).$$

Ce déterminant, appelé déterminant de Vandermonde des scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_n$, est nul si et seulement si deux des nombres sont égaux.

2. Applications au rang et aux S.E.V.

▸ Exercice 5

1. Écrire un système d'équations cartésiennes de la droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $u = (-2, 5, 7)$. On donnera une façon « lycée » de procéder, et une façon utilisant les déterminants.

Éléments sous droits d'auteur

2. Écrire l'équation du plan $\mathcal{P}$ engendré par les vecteurs $u = (1, 2, 5)$ et $v = (-4, 7, 3)$.

Corrigé

1. Le vecteur (x, y, z) appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si il est proportionnel au vecteur u.

- Le plus simple est de dire que deux vecteurs proportionnels ont des composantes proportionnelles :
$$\frac{x}{-2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$$
ce qui est équivalent aux deux équations $\{5x + 2y = 0, \quad 7y - 5z = 0\}$.

- On peut aussi dire que la matrice $\begin{pmatrix} x & -2 \\ y & 5 \\ z & 7 \end{pmatrix}$ est de rang un, i.e. que tous ses déterminants extraits d'ordre deux sont nuls. En pratique, il en suffit de deux sur les trois possibles :
$$\begin{vmatrix} x & -2 \\ y & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} y & 5 \\ z & 7 \end{vmatrix} = 0$$
ce qui donne le même résultat.

2. Les deux vecteurs u et v forment une famille libre, et ils engendrent bien un plan. Le vecteur $X = (x, y, z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si la famille $\{X, u, v\}$ est liée, i.e. si et seulement si son déterminant (sur une base quelconque) est nul. L'équation du plan est donc :
$$\begin{vmatrix} x & 1 & -4 \\ y & 2 & 7 \\ z & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$
à savoir $29x + 23y - 15z = 0$.

▸ **Exercice 6** On considère dans $\mathbb{R}^4$ les deux vecteurs $a = (1, 1, -3, 2)$, $b = (-2, 0, 3, 1)$ et soit $\mathcal{P}$ le plan qu'ils engendrent. Soit $v = (x, y, z, t)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$.

1. Trouver un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{P}$ en utilisant les déterminants.

2. En utilisant la méthode du pivot, trouver un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{P}$.

Éléments sous droits d'auteur

Corrigé

Quelle que soit la méthode utilisée, nous devons traduire que les trois vecteurs $X = (x, y, z, t)$, a et b forment un système lié, i.e. que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 1 & 0 & y \\ -3 & 3 & z \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix}$$

est de rang deux seulement.

1. Cette matrice est de rang deux si et seulement si les quatre déterminants d'ordre trois que l'on peut en extraire sont nuls. Cependant, il est inutile de les calculer tous les quatre. Sachant que le petit déterminant $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ est non nul, il faut et il suffit simplement que les deux déterminants « bordant » de dimension trois contenant ce petit déterminant soient nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & x \\ 1 & 0 & y \\ -3 & 3 & z \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & x \\ 1 & 0 & y \\ 2 & 1 & t \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne les deux équations $\{3x + 3y + 2z = 0, \quad x - 5y + 2t = 0\}$.

2. On échelonne cette matrice par la méthode classique de Gauß. On obtient successivement les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 1 & 0 & y \\ -3 & 3 & z \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 0 & 2 & y - x \\ 0 & -3 & z + 3x \\ 0 & 5 & t - 2x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 0 & 2 & y - x \\ 0 & -0 & 2(z + 3x) + 3(y - x) \\ 0 & 0 & -2(t - 2x) + 5(y - x) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang deux si et seulement si les deux dernières lignes sont identiquement nulles, soit $2(z + 3x) + 3(y - x) = -2(t - 2x) + 5(y - x) = 0$.

On retrouve les deux équations données par la première méthode, mais ce n'est pas toujours le cas. Le plan d'équations $\{3x + 3y + 2z = 0, \quad x - 5y + 2t = 0\}$ admet aussi comme équations :

$$\{p(3x + 3y + 2z) + q(x - 5y + 2t) = 0, \quad p'(3x + 3y + 2z) + q'(x - 5y + 2t) = 0\}$$

du moment que les réels p, p', q, q' vérifient $pq' - q'p \neq 0$.

Éléments sous droits d'auteur

▸ Exercice 7

1. Donner l'équation du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u=(1, 3, 4, 5)$, $v=(1, 2, 3, 4)$ et $w=(3, 1, 4, 2)$. On donnera deux méthodes différentes.

2. Même question pour le S.E.V. de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u=(1, 3, 4, 5)$, $v=(1, 2, 3, 4)$ et $w'=(1, 0, 1, 2)$. Que se passe-t-il ? Comment doit-on procéder, si l'on veut utiliser les déterminants ?

Corrigé

A priori, on a envie de dire que le vecteur $X=(x, y, z, t)$ appartient au sous-espace vectoriel engendré par $\{u, v, w\}$ si et seulement si la famille $\{u, v, w, X\}$ est liée. Mais attention, ceci est vrai uniquement lorsque les trois vecteurs donnés $\{u, v, w\}$ forment une famille libre. Si ce n'est pas le cas, la famille $\{X, u, v, w\}$ est liée quel que soit le vecteur X, qu'il soit ou non dans le sous-espace vectoriel engendré ! Regardons les deux exemples proposés.

1. En dimension quatre, une famille de quatre vecteurs est liée si et seulement si son déterminant sur une base quelconque est nul. Calculons donc ce déterminant sur la base canonique, en remplaçant C_2 par $C_2 - C_1$, puis C_3 par $C_3 - 3C_1$, puis C_4 par $C_4 - xC_1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & x \\ 3 & 2 & 1 & y \\ 4 & 3 & 4 & z \\ 5 & 4 & 2 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -8 & y-3x \\ 4 & -1 & -8 & z-4x \\ 5 & -1 & -13 & t-5x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -8 & y-3x \\ -1 & -8 & z-4x \\ -1 & -13 & t-5x \end{vmatrix}.$$

On soustrait ensuite la première ligne aux deux autres pour obtenir finalement un déterminant valant $5x+5y-5z$.

Ce déterminant n'est pas identiquement nul, ce qui montre en premier lieu que la famille de départ est bien une famille libre, et que l'équation de l'hyperplan engendré est $x+y-z=0$.

L'échelonnement de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & x \\ 3 & 2 & 1 & y \\ 4 & 3 & 4 & z \\ 5 & 4 & 2 & t \end{pmatrix}$, qui doit être de rang trois pour que X soit dans le sous-espace vectoriel engendré par $\{u, v, w\}$, conduit au même résultat, et est tout aussi désagréable !

Éléments sous droits d'auteur

2. Si l'on procède de la même façon, sans précautions, on voit que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 3 & 2 & 0 & y \\ 4 & 3 & 1 & z \\ 5 & 4 & 2 & t \end{vmatrix} = 0.$

Cela signifie que la famille $\{u, v, w'\}$ forme une famille liée. La famille $\{u, v, w'\}$ est une famille liée, uniquement de rang deux. La méthode employée dans la question précédente ne marche plus. Nous allons maintenant avoir deux équations cartésiennes pour le sous-espace vectoriel engendré (c'est un plan).

Nous devons maintenant écrire que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 3 & 2 & 0 & y \\ 4 & 3 & 1 & z \\ 5 & 4 & 2 & t \end{pmatrix}$ est de rang deux.

Il y a deux façons de procéder :

- On échelonne la matrice par la méthode de Gauß :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 3 & 2 & 0 & y \\ 4 & 3 & 1 & z \\ 5 & 4 & 2 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & -3 & y-3x \\ 0 & -1 & -3 & z-4x \\ 0 & -1 & -3 & t-5x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & -3 & y-3x \\ 0 & 0 & 0 & z-x-y \\ 0 & 0 & 0 & t-2x-y \end{pmatrix}.$$

  Cette matrice est de rang deux si et seulement si on a simultanément

$$\{z-x-y=0, \quad t-2x-y=0\}$$

  qui sont donc un système d'équations cartésiennes du plan cherché.

- Sachant que la famille de départ est liée, et est seulement de rang deux, nous pouvons garder uniquement les vecteurs v et w'. Le vecteur $X=(x, y, z, t)$ appartient au plan de base $\{v, w'\}$ si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 1 & z \\ 4 & 2 & t \end{pmatrix}$ est de rang deux.

  Comme le petit déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ est non nul, la matrice est de rang deux si et seulement si les deux déterminants « bordant » sont nuls :

Éléments sous droits d'auteur

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 1 & z \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 0 & y \\ 4 & 2 & t \end{vmatrix} = 0.$$

On retombe en pratique sur les mêmes équations que par échelonnement.

▸ **Exercice 8** On considère dans $\mathbb{R}^4$ les quatre vecteurs :

$a = (1, 1, -3, 2)$, $b = (-2, 0, 3, 1)$, $c = (-6, m+1, 6, 8)$, $d = (6 + m^2, 3, -16 + m^2, 4)$

où m est un paramètre. On utilisera le résultat de l'exercice **2** ci-dessus.

1. Discuter suivant la valeur de m le rang de ce système de vecteurs.

2. Pour les cas particuliers, donner un système d'équations cartésiennes du S.E.V. qu'ils engendrent.

Corrigé

1. La famille de vecteurs $\{a, b, c, d\}$ est de rang quatre si et seulement si son déterminant sur une base quelconque est non nul. On a vu que le déterminant sur la base canonique vaut $14(m-1)^2(m+1)$. Il y a donc exactement deux valeurs de m où la famille est liée, et donc de rang inférieur ou égal à trois.

- Pour $m = -1$: la matrice des composantes de la famille de vecteurs sur la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 6 & -15 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

  On voit à l'œil nu que le déterminant formé par les trois premières colonnes et les trois dernières lignes est non nul. La matrice, contenant un déterminant d'ordre trois non nul, est donc de rang supérieur ou égal à trois. Comme elle n'est pas de rang quatre, elle est exactement de rang trois.

- Pour $m = 1$: la matrice des composantes de la famille de vecteurs sur la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 & -15 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Éléments sous droits d'auteur

Le fait que $m = 1$ soit racine double du déterminant (considéré comme polynôme en m) incite à penser que la matrice est peut-être de rang deux seulement, et qu'il est donc hasardeux de se lancer à chercher un déterminant extrait d'ordre trois non nul… Soyons donc prudent, et revenons à la méthode du pivot de Gauß :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 & -15 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & -4 \\ 0 & -3 & -12 & 6 \\ 0 & 5 & 20 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Effectivement, la matrice est de rang deux seulement. Il en va de même de la famille de vecteurs.

2. Traitons les deux cas particuliers :

- Pour $m = -1$: nous savons que les vecteurs $\{a, b, c\}$ forment une famille libre, puisque nous avons trouvé un déterminant extrait de dimension trois non nul parmi les trois premières colonnes de la matrice. Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les quatre vecteurs est un hyperplan, celui engendré par $\{a, b, c\}$. On trouve son équation cartésienne en écrivant que la famille $\{a, b, cX\}$, où $X = (x, y, z, t)$ est liée. On procède par déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -6 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ -3 & 3 & 6 & z \\ 2 & 1 & 8 & t \end{vmatrix} = -18x - 10z - 6t.$$

Une équation de cet hyperplan est donc $9x + 5z + 3t = 0$.

- Pour $m = 1$: le sous-espace vectoriel est maintenant un plan, engendré (par exemple) par les deux premiers vecteurs a et b. On obtient ses équations cartésiennes en écrivant que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 1 & 0 & y \\ -3 & 3 & z \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix}$ est de rang deux.

On peut utiliser deux déterminants bordant ou, plus simplement, l'échelonnement :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 1 & 0 & y \\ -3 & 3 & z \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 0 & 2 & y-x \\ 0 & 0 & 3/2x+3/2y+z \\ 0 & 0 & x/2-5/2y+t \end{pmatrix}.$$

Éléments sous droits d'auteur

On calcule alors :

$$\det(C_1, C_2, C_3) = \begin{vmatrix} 4 & 14 & 1 \\ 8 & -2 & 7 \\ 18 & -12 & 17 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \det(C_1, C_2, C_4) = \begin{vmatrix} 4 & 14 & 2 \\ 8 & -2 & 2 \\ 18 & -12 & 4 \end{vmatrix}.$$

Le calcul montre que ces deux déterminants sont nuls.

La matrice A_1 est de rang deux seulement. On n'a donc pas eu besoin de calculer les quatre déterminants d'ordre trois qu'elle contient ; deux ont suffi.

Puisque la matrice A_1 est seulement de rang deux, cela signifie que ses trois lignes forment une famille liée. Comme on sait que les deux premières lignes forment une famille libre, cela implique que la troisième ligne de A_1 est une combinaison linéaire des deux premières. Cela est vrai aussi pour la matrice A. Celle-ci a le même rang que la matrice A_2 obtenue à partir de A en supprimant la troisième ligne.

3. La matrice A_2 est au moins de rang deux, car ses deux premières lignes (ou colonnes) sont indépendantes. On utilise le même principe que pour A_1 : elle est de rang deux si et seulement si ses deux dernières colonnes sont des combinaisons linéaires des deux premières.

On calcule alors :

$$\det(C_1, C_2, C_3) = \begin{vmatrix} 4 & 14 & 1 \\ 8 & -2 & 7 \\ 7 & 17 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \det(C_1, C_2, C_4) = \begin{vmatrix} 4 & 14 & 2 \\ 8 & -2 & 2 \\ 7 & 17 & 3 \end{vmatrix}.$$

Le calcul montre que ces deux déterminants sont nuls.

La matrice A_2 est de rang deux, ce qui signifie que ses trois lignes forment une famille liée. Comme on sait que les deux premières lignes sont indépendantes, cela signifie que la dernière ligne de A_2, à savoir la quatrième ligne de A, est une combinaison linéaire des deux premières lignes.

La matrice A est donc de rang deux seulement : on a montré que la troisième et la quatrième ligne sont des combinaisons linéaires des deux premières.

▸ **Exercice 10** Soit f_t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $N_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$ sur la base canonique.

1. Quelles sont les valeurs de t pour lesquelles N_t n'est pas de rang 3 ?

2. Pour chacune de ces valeurs, donner une base de $\operatorname{Im} f_t$ et de $\operatorname{Ker} f_t$.

Éléments sous droits d'auteur

▸ **Exercice 13** Discuter le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} ax + y + z = 8 - a \\ 2x - y - z = -10 \\ ax - y + z = 2 \end{cases}.$$

On utilisera les déterminants pour déterminer le rang du système et trouver les cas particuliers.

Corrigé

Écrivons ce système sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-a \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice du système se calcule aisément : il est égal à $-2a-4$.

- Pour $a=-2$: la matrice du système n'est pas de rang trois (déterminant nul) et pas non plus de rang un (les lignes ne sont pas toutes proportionnelles). Elle est donc de rang deux. Le système est donc soit impossible, soit indéterminé avec une inconnue paramètre. En remplaçant, on voit que les deux premières équations sont identiques. Le système devient $\{2x-y-z=-10, \quad -2x-y+z=2\}$ qui se résout aisément en $x=x$, $y=4$, $z=6+2x$.
- Cas général : la matrice est de rang trois, et le système est de Cramer, admettant une solution unique. Une méthode quelconque (par déterminants ou par échelonnement) donne $x=-1$, $y=3-a/2$, $z=5+a/2$.

▸ **Exercice 14** Soit T l'application qui au polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le polynôme :

$$T(P) = 3XP - (X^2-1)\,P'.$$

Montrer que T est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

Corrigé

La linéarité de T comme opérateur de $\mathbb{R}_3[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ est claire.

Il faut cependant vérifier que le degré de $T(p)$ reste bien inférieur ou égal à trois, lorsque $p \in \mathbb{R}_3[X]$. Il suffit de le vérifier en calculant les images des vecteurs de la base « canonique » :

$$f(1) = 3X, \quad f(X) = 2X^2+1, \quad f(X^2) = X^3+2X, \quad f(X^3) = 3X^2.$$

Éléments sous droits d'auteur

2. Les formules permettant de calculer un déterminant montrent que $f(z) = \det(P + zQ)$ est un polynôme en z, et que son degré est inférieur ou égal à la dimension n des matrices. Comme la matrice $S = P + iQ$ est inversible, on a $f(i) \neq 0$. Cela signifie que le polynôme f n'est pas identiquement nul.

Il admet donc au maximum n racines réelles ou complexes. Il y a ainsi au maximum n nombres réels x tels que $f(x) = 0$, ce qui veut dire qu'il y a au maximum n réels x tels que $P + xQ$ ne soit pas inversible. Pour tous les autres (une grosse majorité !), la matrice $P + xQ$ est inversible. Comme on a alors $(P + xQ)\,B = A(P + xQ)$, on a $B = (P + xQ)^{-1}\,A(P + xQ)$, et les matrices A et B sont semblables *via* une matrice réelle.

▸ **Exercice 17** Cet exercice ne fait pas appel aux déterminants. On y démontre très simplement qu'une matrice et sa transposée ont le même rang. C'est une révision de la première année, mais trouvant bien sa place ici.

1. Soit $A \in M_{n,p}(K)$ une matrice quelconque et P et Q deux matrices carrées inversibles dont les dimensions sont telles que le produit $B = Q^{-1}AP$ existe. Montrer que A et B ont le même rang : on utilisera une application linéaire de K^p dans K^n.

2. Montrer que toute matrice $A \in M_{n,p}(K)$ de rang r peut s'écrire sous la forme $A = QI_r P^{-1}$ où P et Q sont des matrices inversibles et où I_r est la matrice $n \times p$ où les seuls éléments non nuls sont les r premiers coefficients de la diagonale, égaux à 1.

3. Déduire des résultats précédents qu'une matrice et sa transposée ont le même rang, i.e. que le nombre maximum de lignes formant une famille libre est égal au nombre maximum de colonnes formant une famille libre.

Corrigé

1. Munissons K^p et K^n de leurs bases canoniques, et soit f l'application linéaire de K^p dans K^n dont la matrice sur ces deux bases est A.

Soit maintenant $\mathcal{U}$ la base de K^p dont P est la matrice de passage depuis la base canonique de K^p : les composantes du premier vecteur de $\mathcal{U}$ sur la base canonique sont dans la première colonne de P et ainsi de suite. Soit $\mathcal{V}$ la base de K^n dont la matrice de passage depuis la base canonique est Q. La matrice de f sur la base $\mathcal{U}$ (au départ) et sur la base $\mathcal{V}$ (arrivée) est la matrice $B = Q^{-1}AP$, d'après la formule de changement de base pour les applications linéaires. Le rang de f est égal au rang de A et au rang de B. Les deux matrices ont le même rang.

2. Dire que la matrice A est de rang r signifie que le noyau de f est de dimension $p - r$. Construisons une base de K^p et une base de K^n de la façon suivante :

- Partons d'une base $\{u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_p\}$ de $\operatorname{Ker} f$. Nous les numérotons de $r + 1$ à p par commodité.

Éléments sous droits d'auteur

- Utilisons le théorème de la base incomplète pour compléter cette famille libre en une base de K^p. Il faut lui ajouter r vecteurs, que nous appelons $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$.
- La famille $\{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_r)\}$ est libre (dans K^n). En effet, une relation $a_1 f(u_1) + a_2 f(u_2) + \cdots + a_r f(u_r) = 0$, à savoir $f(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_r u_r) = 0$ implique que $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_r u_r \in \mathrm{Ker}\, f$. Par construction de la base dans K^p, ceci demande $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_r u_r = 0$, et donc $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$.
- Complétons alors la famille libre $\{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_r)\}$ en une base de K^n en lui ajoutant $n - r$ vecteurs.
- La matrice de f sur ces deux nouvelles bases est bien celle demandée, avec l'identité de dimension r en haut à gauche, et des zéros ailleurs.

En appelant P et Q les deux matrices de passage aux nouvelles bases dans K^p et K^n, nous avons $I_r = Q^{-1} AP$.

3. La relation $A = QI_r P^{-1}$ nous donne ${}^tA = ({}^tP)^{-1} ({}^tI_r) ({}^tQ)$, où ${}^tI_r$ est la matrice à p lignes et n colonnes dont tous les éléments sont nuls, sauf les r premiers sur la diagonale. Cette matrice est donc de rang r comme I_r. La matrice ${}^tA$ est donc aussi de rang r.

▸ **Exercice 18** Soit D un déterminant de dimension n dont chaque coefficient est une constante ou un polynôme de degré un en une indéterminée x.

1. Montrer que D est un polynôme de degré inférieur ou égal à n en x.

2. Soit $k \leq n$ un entier. On suppose en outre que seulement k coefficients de ce déterminant sont véritablement du premier degré en x. Montrer que le degré de D est inférieur ou égal à k.

Corrigé

1. Ce résultat se démontre par récurrence.

a) Il est vrai pour $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}x + b_{1,1} & a_{1,2}x + b_{1,2} \\ a_{2,1}x + b_{2,1} & a_{2,2}x + b_{2,2} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{1,1}x + b_{1,1})(a_{2,2}x + b_{2,2}) - (a_{1,2}x + b_{1,2})(a_{2,1}x + b_{2,1})$$

est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à deux.

b) Montrons que la propriété est héréditaire : supposons-la vraie à l'ordre n et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$. Soit donc C une matrice carrée de dimension $n + 1$, dont chaque coefficient $c_{i,j}$ est de la forme $c_{i,j} = a_{i,j}\, x + b_{i,j}$.

Éléments sous droits d'auteur

Corrigé

1. Le déterminant de M est égal à zéro, quel que soit a. La matrice n'est donc jamais de rang quatre. Comme les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles, elle n'est pas non plus de rang un. Elle est donc toujours soit de rang deux, soit de rang trois.

2. Prenons la sous-matrice de dimension trois formée des trois premières lignes et colonnes. Son déterminant est égal à $57(1-a)$.

Lorsque $a \neq 1$, la matrice M contient une sous matrice inversible de dimension trois, et elle est donc aussi de dimension trois. Pour $a = 1$, on ne peut pas conclure à ce stade : la matrice M contient au total seize sous-matrices d'ordre trois. Nous n'en avons regardé qu'une seule, et il est possible que l'une des quinze autres soit inversible, et que M soit aussi de rang trois.

Nous pouvons seulement dire que $a = 1$ est l'unique valeur où M est **peut-être** de rang deux.

3. Pour $a = 1$, nous avons $M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 14 & 14 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -11 & -11 \\ 4 & 0 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

Pour chercher le rang et le noyau de M, le mieux est de résoudre le système $MX = 0$ qui définit le noyau. Maple nous donne $x = -2z - 2t$, $y = 3z + 3t$, $z = z$, $t = t$. Il s'agit d'un plan dont une base est $\{(-2, 3, 1, 0), (-2, 3, 0, 1)\}$. La matrice est donc de rang deux, et les deux premières colonnes de la matrice forment une base de l'image.

▸ Exercice 22

1. En utilisant les déterminants, discuter suivant la valeur du paramètre réel m le rang de la matrice :

$$A(m) = \begin{pmatrix} m-1 & 0 & -1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & m+1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Résoudre le système linéaire $A(m) \times X = B(m)$ avec $B(m) = (1, m, 2m+1, 7)$. On regardera le cas général et les cas particuliers : les problèmes une fois identifiés, on utilisera directement l'instruction *linsolve*.

Éléments sous droits d'auteur

Corrigé

1. Cette matrice est au maximum de rang quatre. Prenons (par exemple) la sous-matrice de dimension quatre formée par ses quatre premières colonnes et lignes. Maple donne :

$$\begin{vmatrix} m-1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & m+1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2m(2-m).$$

La matrice $A(m)$ est de rang quatre lorsque m est différent de 0 et de de 2. Pour ces deux valeurs particulières, on ne sait rien dire pour l'instant. Il faut regarder de plus près :

- Pour $m = 0$: $A(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

  La recherche du noyau avec l'instruction linsolve(A(0), [0$5]) donne :

  $$(x = 2t + u,\ \ y = -2t - 3u,\ \ z = -t - u,\ \ t = t,\ \ u = u).$$

  Le noyau est de dimension deux, et la matrice de rang trois.

- Pour $m = 2$: $A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

  La recherche du noyau donne $(x = 2t,\ \ y = 2t,\ \ z = 3t,\ \ t = t,\ \ u = 0)$. Il s'agit d'une droite, ce qui implique que la matrice est de rang quatre.

2. Regardons les divers cas possibles :

- Cas $m = 0$: l'instruction linsolve (A(0), b(0)) donne :

  $$(x = 7 + 2t + u,\ \ y = -8 - 2t - 3u,\ \ z = -8 - t - u,\ \ t = t, u = u).$$

  Il y a deux paramètres, puisque le système est de rang trois seulement.

- Cas général où m est différent de 0 : Maple donne :

$$x = \frac{-2 + m - 3u + um}{2 - m}, \quad y = \frac{u}{m-2}, \quad z = \frac{6m + m^2 + u - 2um - 16}{2(2-m)},$$

$$t = \frac{-10m + m^2 + 5u - 2um + 16}{2(m-2)}, \quad u = u$$

Éléments sous droits d'auteur

3. Valeurs et vecteurs propres

La définition que nous donnons est valable pour un espace vectoriel E sur K de dimension finie ou non. Ceci dit, nous passerons très vite en dimension finie.

Définition 2 : On dit qu'un scalaire λ est une valeur propre de l'endomorphisme f de E lorsqu'il existe un vecteur non nul V tel que :

$$f(V) = \lambda V.$$

Un tel vecteur V s'appelle vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

Insistons bien sûr le fait que le vecteur propre est non nul ! Sinon, la définition n'a aucun intérêt.

Exemple 1 Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 sur $\mathbb{R}$ et f l'endomorphisme qui associe au polynôme P le polynôme $f(P)$ défini par $f(P)(X) = 3XP - (X^2 - 1)P'$.
Le calcul montre que $f((X-1)^2(X+1)) = -(X-1)^2(X+1)$. L'endomorphisme f admet donc -1 comme valeur propre. Un vecteur propre associé à cette valeur propre est le polynôme $(X-1)^2(X+1)$.

Exemple 2 Dans $E = \mathbb{R}^2$, prenons pour f la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, i.e. l'application linéaire qui au vecteur (x, y) associe le vecteur $(-y, x)$.

Pour tout vecteur V non nul, le vecteur $f(V)$ est orthogonal à V : il est donc impossible qu'il existe un réel λ tel $f(V) = \lambda V$. Cet endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ n'admet pas de valeur propre réelle.

Exemple 3 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, soit f la symétrie orthogonale par rapport au plan P d'équation $x + y + z = 0$.
Tout vecteur V appartenant à ce plan P reste invariant dans cette symétrie ; il vérifie donc $f(V) = V$. Tous les vecteurs (hormis le vecteur nul) du plan P sont donc des vecteurs propres de f associés à la valeur propre $\lambda = 1$.
Le vecteur $W = (1, 1, 1)$ est perpendiculaire au plan P et est donc transformé en son opposé : $f(W) = -W$. Ce vecteur W, et par suite tout vecteur non nul proportionnel à W, est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda = -1$.

Exemple 4 Soit E l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et D l'endomorphisme de E qui associe à chaque élément de E sa dérivée : $D(g) = g'$.
Pour tout réel λ, nous savons que la dérivée de la fonction $g_\lambda : x \to e^{\lambda x}$ est la fonction $x \to \lambda e^{\lambda x}$, i.e. la fonction λg_λ.

Éléments sous droits d'auteur

Pour tout réel λ, nous avons donc $D(g_\lambda) = \lambda g_\lambda$. Tout réel λ est valeur propre de D et la fonction $x \to e^{\lambda x}$ est un vecteur propre de D pour cette valeur propre λ.

Comme nous allons beaucoup travailler avec les matrices, donnons la définition analogue – et logique – pour une matrice carrée :

Définition 3 : On dit qu'un scalaire λ est une valeur propre de la matrice carrée A de dimension n lorsqu'il existe un vecteur non nul $V \in K^n$ tel que :

$$A \times V = \lambda V.$$

Un tel vecteur V s'appelle vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

- Cette définition a bien un sens : si A est une matrice carrée de dimension n et V un vecteur de K^n (et donc une matrice colonne de dimensions $n \times 1$), le produit $A \times V$ est bien un vecteur de K^n.
- Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n et dont la matrice sur une certaine base $\mathcal{B}$ est A, les valeurs propres de f et de A sont identiques. Écrits dans la base $\mathcal{B}$, les vecteurs propres de f sont exactement les vecteurs propres de A.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'ensemble des vecteurs propres d'un endomorphisme f associés à une valeur propre λ donné.

Théorème 1 et définition 4 : Quitte à ajouter le vecteur nul, l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ de l'endomorphisme f de E est un sous-espace vectoriel de E.
On l'appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ, et on le note E_λ.

En effet, dire que $f(V) = \lambda V$ équivaut à dire que $f(V) = \lambda I_d(V)$, soit $(f - \lambda I_d)(V) = 0$. Nous retombons sur la définition du noyau de l'application linéaire $f - \lambda I_d$. Il faut bien sûr ajouter le vecteur nul à l'ensemble des vecteurs propres pour avoir un espace-vectoriel !

Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est le noyau de l'endomorphisme $f - \lambda I_d$.

Dire que λ est valeur propre de f équivaut donc à dire que l'endomorphisme $f - \lambda I_d$ n'est pas injectif.

Éléments sous droits d'auteur

Nous pouvons traduire ceci en terme de matrice :

- Le scalaire λ est valeur propre de la matrice A si et seulement si la matrice $A - \lambda I_d$ n'est pas inversible.
- Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de la matrice A est le noyau de la matrice $A - \lambda I_d$.

En effet, dire qu'il existe un vecteur non nul V tel que $AV = \lambda V$ équivaut à dire que $(A - \lambda I_d)(V) = 0$, i.e. que le noyau de la matrice $A - \lambda I_d$ n'est pas réduit au vecteur nul. On se rappellera qu'une matrice est inversible si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.
Mais on sait aussi qu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Cela signifie donc que λ est valeur propre de la matrice A si et seulement si le déterminant de la matrice $A - \lambda I_d$ est nul. Cette condition nécessaire et suffisante nous donne un moyen très pratique pour calculer les valeurs propres d'une matrice.

4. Polynôme caractéristique. Calcul des valeurs propres

4.1 Polynôme caractéristique d'une matrice

Définition 5 : Si A est une matrice carrée de dimension n, $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_d)$ est un polynôme de degré n en λ.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}.$$

On l'appelle polynôme caractéristique de A.

Le fait que $P(\lambda)$ soit un polynôme vient de la façon dont se calcule le déterminant d'une matrice : on y fait uniquement des sommes et des produits de coefficients intervenant dans la matrice.
En y regardant de plus près (développement par rapport à la première ligne), on peut constater que le déterminant $P(\lambda)$ contient une fois le terme $(a_{1,1} - \lambda)(a_{2,2} - \lambda) \ldots (a_{n,n} - \lambda)$,

Éléments sous droits d'auteur

qui est un polynôme de degré n en λ et commençant par $(-1)^n\lambda^n$ et la somme d'autres produits faisant intervenir au maximum $n-2$ coefficients contenant λ (et donnant donc naissance à des polynômes de degré inférieur strictement à $n-1$). On a bien finalement un polynôme de degré n commençant par $(-1)^n\lambda^n$.

Quand on développe le produit $(a_{1,1}-\lambda)(a_{2,2}-\lambda)\ldots(a_{n,n}-\lambda)$, on constate aussi que le coefficient de λ^{n-1} est $(a_{1,1}+a_{2,2}+\ldots+a_{n,n})(-1)^{n-1}$, qui fait intervenir la trace de la matrice A.

La constante intervenant dans $P(\lambda)$ est la valeur $P(0)$, i.e. le déterminant de A.

On peut finalement dire que le polynôme caractéristique de A se présente sous la forme :

$$P(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\mathrm{Tr}(A) + \ldots + \det(A.)$$

Exemple 1 Prenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculons son polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 4 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 0 \\ 3-\lambda & -2-\lambda & 4 \\ 3-\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 4 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5-\lambda & 4 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2+4\lambda+3) = (3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+3).$$

Exemple 2 Prenons la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculons son polynôme caractéristique : $P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -4 \\ 1 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix}$.

En ajoutant les deux dernières colonnes à la première, on peut mettre en facteur $-1-\lambda$. On ajoute ensuite la nouvelle première colonne (formée uniquement de 1) à la deuxième et l'on obtient deux zéros en première ligne. Le développement par rapport à cette première ligne donne finalement :

$$P(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-1).$$

Éléments sous droits d'auteur

Exemple 3 La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Exemple 4 Prenons la matrice C de dimension 4 dont tous les coefficients valent 1. Son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

On ajoute les trois dernières colonnes à la première pour obtenir $4 - \lambda$ partout sur cette première colonne, on le met en facteur et on soustrait la première ligne à toutes les autres :

$$P(\lambda) = (4-\lambda) \le \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3(\lambda - 4).$$

4.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Si A et B sont les matrices de f sur deux bases distinctes, on sait qu'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. Calculons les polynômes caractéristiques de ces deux matrices :

$$\det(B - \lambda I_d) = \det(P^{-1}\mathrm{AP} - \lambda I_d) = \det(P^{-1}\mathrm{AP} - \lambda P^{-1} I_d P) = \det(P^{-1}(A - \lambda I_d)P)$$

$$= \det(P^{-1}) \times \det(A - \lambda \mathrm{Id}) \times \det(P) = \det(A - \lambda I_d)$$

puisque $\det(P^{-1}) \times \det(P) = 1$.

Le polynôme caractéristique des matrices de f est donc indépendant de la base sur laquelle on a choisi d'écrire la matrice de f. On l'appelle polynôme caractéristique de l'endomorphisme f.

Éléments sous droits d'auteur

Exemple Reprenons l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$f(P)(X) = 3XP - (X^2 - 1)P'.$$

Prenons comme base de cet espace vectoriel la famille $\{1, X, X^2, X^3\}$. Nous avons :

$$f(1) = 3X\,; \quad f(X) = 1 + 2X^2\,; \quad f(X^2) = 2X + X^3\,; \quad f(X^3) = 3X^2.$$

(ce qui prouve en passant que f est bien une application linéaire de E dans E, puisque le degré ne dépasse pas trois !).

La matrice de f sur cette base est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et son polynôme caractéristique est :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda + 3).$$

(On additionne toutes les lignes pour mettre $3 - \lambda$ en facteur, puis l'on soustrait la première colonne à toutes les autres.)

4.3 Calcul des valeurs propres

Soit donc A une matrice de dimension n. Si l'on part d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension n, on appellera A la matrice de f sur une base quelconque.

Les valeurs propres de A sont les scalaires pour lesquels la matrice $A - \lambda I_d$ a un noyau non réduit au vecteur nul, i.e. pour lesquelles $A - \lambda I_d$ n'est pas inversible. Ce sont donc exactement les racines du polynômes caractéristique de A.

Théorème 3 : Les valeurs propres d'une matrice A sont les racines de son polynôme caractéristique.

Cette affirmation amène instantanément la remarque suivante :

- Si $K = \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de A est un polynôme de degré n à coefficients complexes qui admet exactement n racines distinctes ou non dans $\mathbb{C}$. Une matrice carrée de dimension n à coefficients complexes admet exactement n valeurs propres distinctes ou non.

Éléments sous droits d'auteur

- Si $K = \mathbb{R}$, le polynôme caractéristique de A est un polynôme de degré n à coefficients réels qui admet au maximum n racines réelles distinctes ou non. Il peut très bien ne pas en avoir. Considérée comme élément de $M_n(\mathbb{R})$, une matrice carrée réelle de dimension n admet au maximum n valeurs propres ; considérée comme élément de $M_n(\mathbb{C})$, elle admet exactement n valeurs propres distinctes ou non.

Exemple 1 Reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de l'exemple 1 du paragraphe 3.

Son polynôme caractéristique $P(\lambda) = (3 - \lambda)(\lambda + 1)(\lambda + 3)$ admet trois racines -3, -1 et 3. La matrice A admet donc trois valeurs propres distinctes -3, -1 et 3.

Exemple 2 Reprenons la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ de l'exemple 2 du paragraphe 3.

Nous avons obtenu ci-dessus $P(\lambda) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$.

Cette matrice admet une valeur propre simple égale à 1 et une valeur propre double -1.

Exemple 3 La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

qui n'admet pas de racine réelle. Considérée comme matrice sur $\mathbb{R}$ elle n'a pas de valeur propre. Considérée comme matrice sur $\mathbb{C}$, elle a deux valeurs propres distinctes $-i$ et i.

Exemple 4 Reprenons la matrice C de dimension 4 dont tous les coefficients valent 1. Son polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 4)$ qui admet une racine simple 4 et une racine triple 0. La matrice a donc une valeur propre simple et une valeur propre triple réelles.

Éléments sous droits d'auteur

5. Sous-espaces propres. Théorème de dimension. Indépendance

5.1 Sous-espaces propres

Si λ est une valeur propre de la matrice A, le sous-espace propre associé est le noyau de la matrice $A - \lambda I_d$. On doit donc résoudre le système linéaire $(A - \lambda I_d)X = 0$.
Comme ce noyau n'est pas réduit au vecteur nul, le système a une infinité de solutions. la résolution, faite par une méthode ou une autre, nous donne l'ensemble des solutions et nous donne ainsi une base du sous-espace propre cherché.

Remarque Une valeur propre λ est une racine du polynôme caractéristique. Elle peut être une racine simple ou une racine multiple. Rappelons que l'ordre de multiplicité α d'une racine a d'un polynôme $P(X)$ est le plus grand entier α tel que $(X - a)^\alpha$ puisse être mis en facteur dans $P(X)$. Par exemple, pour $P(X) = (X - 1)(X + 2)^3(X - 3)^2(X^2 + X + 2)$, $a = 1$ est racine simple, $a = 3$ est racine d'ordre de multiplicité 2 (racine double) et $a = -2$ est racine triple.

Il existe une relation d'inégalité simple entre l'ordre de multiplicité d'une valeur propre d'un endomorphisme (ou d'une matrice) et la dimension du sous-espace propre associé :

Théorème 4 : La dimension du sous-espace propre E_ℓ associé à une valeur propre ℓ d'ordre de multiplicité α est inférieure ou égale à cet ordre de multiplicité α.

Soit m la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre ℓ d'ordre de multiplicité m : il existe donc m vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ formant une base de E_ℓ. Ces vecteurs vérifient par définition $f(v_1) = \ell v_1, \ldots, f(v_m) = \ell v_m$. Complétons ce système libre de m vecteurs en une base de l'espace vectoriel E par des vecteurs $v_{m+1} \ldots, v_n$. La matrice de f sur cette base est de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} \ell & 0 & \cdots & 0 & b_{1,m+1} & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & \ell & \cdots & 0 & b_{2,m+1} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ell & b_{m,m+1} & \cdots & b_{m,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{m+1,m+1} & \cdots & b_{m+1,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n,m+1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Éléments sous droits d'auteur

Le polynôme caractéristique de f, que l'on peut calculer sur cette nouvelle base, est donc :

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix} \ell-\lambda & 0 & \cdots & 0 & b_{1,m+1} & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & \ell-\lambda & \cdots & 0 & b_{2,m+1} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ell-\lambda & b_{m,m+1} & \cdots & b_{m,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{m+1,m+1}-\lambda & \cdots & b_{m+1,n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n,m+1} & \cdots & b_{n,n}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Un développement m fois de suite par rapport à la première colonne montre que l'on peut au moins mettre en facteur $(\ell-\lambda)^m$ dans ce polynôme. On a donc $m \leq \alpha$.

Cas d'une valeur propre simple : si λ est une racine simple du polynôme caractéristique, le sous-espace propre correspondant est nécessairement de dimension 1, i.e. est une droite.

Pour une valeur propre double, le sous-espace propre associé sera une droite ou un plan et ainsi de suite…

5.2 Exemples de calculs

Calcul des valeurs et vecteurs propres d'une matrice

a) Former le polynôme caractéristique de la matrice.

b) En chercher les racines dans K. On a les valeurs propres de A.

c) Pour chaque valeur propre λ ainsi trouvée, résoudre le système linéaire $(A-\lambda I_d)X=0$. On obtient ainsi le sous-espace propre associé à λ.

Ne pas oublier que le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est une droite. Il suffit donc de trouver « un » vecteur propre.

Exemple 1 Reprenons la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Nous avons déjà calculé son polynôme caractéristique $P(\lambda)=(3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+3)$. Le polynôme caractéristique admet trois racines réelles. La matrice a trois valeurs propres réelles. Calculons chacun des sous-espaces propres correspondants.

Éléments sous droits d'auteur

a) Valeur propre $\lambda = -3$. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des solutions du système linéaire $AX = -3X$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ x + y + 4z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre correspondant est la droite engendrée par le vecteur $u = (-1, 1, 0)$.

b) Valeur propre $\lambda = -1$. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des solutions du système linéaire $AX = -X$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x - y + 4z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre correspondant est la droite engendrée par le vecteur $v = (-3, 1, 1)$.

c) Valeur propre $\lambda = 3$. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des solutions du système linéaire $AX = 3X$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ x - 5y + 4z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre correspondant est la droite engendrée par le vecteur $w = (1,1,1)$.

Anticipation : il est facile de constater que les trois vecteurs u, v, w forment un système libre (il suffit de calculer le déterminant) et donc une base de $\mathbb{R}^3$. Si f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A sur (par exemple) la base canonique, nous avons $f(u) = -3u$, $f(v) = -v$ et $f(w) = 3w$. L'endomorphisme f est donc diagonalisable. La matrice de passage de la base canonique à la base (u, v, w) est la matrice obtenue en mettant en colonnes les trois vecteurs u, v, w, soit $P = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Un calcul montre effectivement que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Éléments sous droits d'auteur

Exemple 2 Reprenons la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Nous avons obtenu ci-dessus $P(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-1)$.

a) Valeur propre simple $\lambda = 1$. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des solutions du système linéaire $BX = X$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} -x - y = 0 \\ x + y - 4z = 0 \\ x + y - 4z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre correspondant est la droite engendrée par le vecteur $u = (-1, 1, 0)$.

b) Valeur propre double $\lambda = -1$. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des solutions du système linéaire $AX = -X$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 3y - 4z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Le sous-espace propre correspondant est la droite engendrée par le vecteur $v = (1, 1, 1)$. On remarque que le sous-espace propre associé à la valeur propre double -1 est seulement de dimension 1.

Anticipation : nous avons trouvé seulement « deux » vecteurs propres pour cette matrice. Cela ne suffit pas à former une base de $\mathbb{R}^3$… La matrice B ne sera pas diagonalisable (pas plus sur $\mathbb{C}$ que sur $\mathbb{R}$.)

Exemple 3 La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

qui n'admet pas de racine réelle. Elle n'admet pas de valeur propre ni de sous-espace propre sur les réels. Nous pouvons toutefois la considérer comme élément de $M_2(\mathbb{C})$. Elle admet alors deux valeurs propres complexes $-i$ et i et nous pouvons chercher les sous-espaces propres correspondants.

Éléments sous droits d'auteur

a) Valeur propre $\lambda = i$. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des solutions du système linéaire $AX = iX$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} -ix & - & y & = & 0 \\ x & - & iy & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = iy.$$

Le sous-espace propre associé est la droite engendré par le vecteur $u = (i, 1)$.

b) Valeur propre $\lambda = -i$. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des solutions du système linéaire $AX = -iX$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} ix & - & y & = & 0 \\ x & + & iy & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow y = ix.$$

Le sous-espace propre associé est la droite engendré par le vecteur $v = (1, i)$.

Anticipation : cette matrice n'est évidemment pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, mais elle le sera sur $\mathbb{C}$. En posant $P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$, on vérifie aisément que : $P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

Exemple 4 Reprenons la matrice C de dimension 4 dont tous les coefficients valent 1. Son polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 4)$. Il y a une valeur propre simple et une valeur propre triple.

a) Valeur propre simple $\lambda = 4$. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des solutions du système linéaire $CX = 4X$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} -3x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & - & 3y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & - & 3z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & - & 3t & = & 0 \end{cases}$$

On sait que l'ensemble des solutions est une droite. Comme le vecteur $u = (1, 1, 1, 1)$ fait l'affaire, le sous-espace propre associé à la valeur propre 4 est la droite engendrée par ce vecteur.

b) Valeur propre triple $\lambda = 0$. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des solutions du système linéaire $CX = 0$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \end{cases}$$

Éléments sous droits d'auteur

François Cottet-Emard

Algèbre linéaire et bilinéaire

« Un cours vivant et clair, écrit comme il est enseigné, avec de très nombreux exemples et exercices corrigés, sans concession à la rigueur mais sans abstraction inutile. »

Cet ouvrage regroupe l'algèbre linéaire enseignée dans l'année L2 de licence de mathématiques, depuis les déterminants jusqu'à la diagonalisation, et l'algèbre bilinéaire ainsi que les espaces euclidiens. Tout est fait systématiquement **en dimension finie sur les réels ou les complexes**, sans tomber dans une abstraction trop théorique. **Un résumé des prérequis de l'algèbre de l'année L1 de licence permet au lecteur de vérifier ses connaissances préalables.**

La définition des déterminants est donnée par récurrence, ce qui donne immédiatement les techniques de calculs importantes. Certaines parties peuvent être admises en première lecture sans nuire à une bonne assimilation des notions nouvelles. La technique de trigonalisation des matrices est donnée sous la forme de Jordan, suivant un algorithme clair et simple. Sa démonstration difficile est complétée par une suite d'exercices en fin de chapitre. Les isométries sont abordées uniquement dans le plan et dans l'espace. La diagonalisation des matrices symétriques est faite à la main, sans utiliser de notions trop théoriques.

+

Les « plus »

- Résumé des prérequis de L1 en début d'ouvrage.
- 60 % de cours, 40% d'exercices corrigés (démarche et résultats).
- Rédaction très proche du lecteur : chaque notion nouvelle est illustrée par des exemples détaillés.

François Cottet-Emard *Directeur d'études pour la Licence Maths à Paris Sud Orsay*
Maître de Conférences Hors Classe à l'Université de Paris Sud

Dans le cadre du nouveau Système Européen de Transfert de Crédits (E.C.T.S.), ce manuel couvre **en France** le niveau : Licence 2.

En Belgique Baccalauréat 2
En Suisse Bachelor 2

ISBN : 2-8041-4906-4

Éléments sous droits d'auteur