Nawfal El Hage Hassan

Topologie générale et espaces normés

DUNOD

Illustration de couverture : © Alexander Lukin - Fotolia.com

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-100-56948-9

Table des matières

Pour mon fils Ali

INTRODUCTION

Ce livre est le fruit de plusieurs années d'enseignement à l'Université d'Orléans, mais je suis très endetté envers les livres cités dans la bibliographie. Il est destiné aux étudiants préparant une Licence ou un Master de Mathématiques. En outre, il sera utile aux étudiants préparant l'Agrégation ainsi qu'aux futurs chercheurs.

Le livre est organisé en deux grandes parties. La première partie est consacrée à la Topologie générale qui est utilisée abondamment en plusieurs branches de Mathématiques. Pratiquement, la Topologie générale intervient partout en Analyse. Pour comprendre cette partie, le lecteur n'a pas besoin de connaissance préalable. La deuxième partie concerne les espaces normés. Pour aborder cette partie, on suppose que l'étudiant a un certain rudiment d'algèbre linéaire.

Ce livre comprend 383 exercices, avec leurs solutions, regroupés dans le dernier paragraphe de chaque chapitre. Ces exercices sont de difficulté variable et aideront l'étudiant à contrôler l'acquis de ses connaissances et à se familiariser avec les différentes notions présentées dans ce livre. Les solutions des exercices ont été volontairement très détaillées pour permettre à l'étudiant de bien les assimiler.

Pour éviter de faire un livre très volumineux, je devais faire un choix de ne pas traiter certains sujets. En fait, j'aurais souhaité inclure un chapitre sur la Topologie algébrique, un domaine que j'aime beaucoup. J'ai aussi omis un chapitre sur les espaces L^p qui forment une classe d'espaces de Banach très importante. J'aurais aimé également ajouter un chapitre détaillé des différentes classes d'opérateurs sur les espaces de Hilbert.

Pour donner certaines démonstrations que j'ai omises et pour plus d'exercices avec solutions, un **Supplément** sous forme d'un fichier pdf, associé à ce livre, peut être téléchargé librement sur le site suivant : www.dunod.com. Le supplément contient aussi quelques appendices surtout un sur la théorie des ensembles et un autre sur le corps des nombres réels.

Je tiens à remercier le Laboratoire MAPMO et le département de Mathématiques de l'Université d'Orléans de m'avoir permis de rédiger ce livre en toute quiétude. Un grand merci à mon collègue et ami Noureddine El Jaouhari de m'avoir toujours aidé à résoudre les problèmes que je rencontrais en Latex. Je remercie également le Professeur Georges Skandalis d'avoir accepté de lire le livre avant d'être publié.

J'accueillerai avec plaisir et gratitude toutes remarques et suggestions envoyées à l'adresse électronique suivante : nawfal.elhage-hassan@univ-orleans.fr

Chapitre 1

ESPACES TOPOLOGIQUES

La topologie, ou « étude des lieux » est la formalisation mathématique de notions géométriques intuitives comme proximité, éloignement, voisinage, position limite d'un point mobile, etc., dans l'espace euclidien de dimension 2 ou 3. Cette formalisation s'exprime dans un langage axiomatique très général. La généralité du langage introduit a un avantage, celui de s'appliquer à des situations très variées, par exemple à l'étude des « espaces fonctionnels ». L'inconvénient est que l'on perd un certain nombre de propriétés intuitivement évidentes dans les cas concrets d'où l'on était parti ; par exemple la possibilité de « séparer » deux points par des voisinages disjoints. En fait, dans bien des cas, on sera amené à restreindre la généralité par des axiomes supplémentaires de manière à se rapprocher de l'intuition initiale ; étude des espaces séparés, des espaces métriques, etc. On rappelle que si X est un ensemble, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

1.1 Espaces topologiques

Définition 1.1.1. Une **topologie** sur un ensemble X est la donnée d'un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de X, *i.e.* $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, vérifiant les propriétés suivantes, appelées **axiomes des ouverts**.

(**O1**) $\emptyset,\ X \in \mathcal{T}$.

(**O2**) Si $U, V \in \mathcal{T}$, alors $U \cap V \in \mathcal{T}$.

(**O3**) Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de X appartenant à $\mathcal{T}$, alors $\underset{i\in I}{\cup} U_i \in \mathcal{T}$.

L'ensemble X, muni de la topologie $\mathcal{T}$, est appelé **espace topologique**. On notera quelquefois $(X, \mathcal{T})$ un tel espace. Les parties de X qui appartiennent à $\mathcal{T}$ sont dites **parties ouvertes** ou **ouverts** de X. Les éléments de X sont généralement appelés **points**.

Les propriétés (**O1**), (**O2**) et (**O3**) peuvent être reformulées de la manière suivante :

– La partie vide $\emptyset$ et l'ensemble X sont des ouverts.

– L'intersection de deux ouverts est un ouvert.

– La réunion de toute famille d'ouverts est un ouvert.

Définition 1.1.2. Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. On dit que A est un **fermé** ou partie fermée de X si le complémentaire de A dans X est ouvert. Autrement dit, si l'on a $X \setminus A \in \mathcal{T}$.

Construction d'une topologie à partir des axiomes des fermés. La famille $\mathcal{F}$ des fermés d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ vérifie les propriétés suivantes, appelées **axiomes des fermés**.

(**F1**) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$, *i.e.* la partie vide $\emptyset$ et l'ensemble X sont des fermés.

(**F2**) Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \cup B \in \mathcal{F}$, *i.e.* la réunion de deux fermés est un fermé.

(**F3**) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de X appartenant à $\mathcal{F}$, alors $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$, *i.e.* l'intersection de toute famille de fermés est un fermé.

Réciproquement, on peut définir une topologie à partir des ensembles fermés. De façon plus précise, si X est un ensemble et si $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant (**F1**), (**F2**) et (**F3**), alors $\mathcal{T} = \big\{X \setminus A \ ; \ A \in \mathcal{F}\big\}$ est une topologie sur X dont l'ensemble des fermés est $\mathcal{F}$.

Exemple 1.1.1. 1. Soit X un ensemble. Alors $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X, appelée **topologie discrète**. Un ensemble muni de la topologie discrète est dit **espace discret**. Dans un tel espace toute partie est à fois ouverte et fermée.
A l'autre extrême, $\mathcal{T}_g = \big\{\emptyset \, , \, X\big\}$ est une topologie sur X, appelée **topologie grossière** ou **triviale**. Le seul intérêt de ces deux topologies est de donner des contre-exemples et montrer que certains phénomènes pathologiques peuvent arriver en topologie.

2. Soit $X = \{x, y\}$ un ensemble à deux éléments. Alors les topologies sur X sont
$$\mathcal{T}_1 = \big\{\emptyset, X\big\}\,,\ \mathcal{T}_2 = \big\{\emptyset, \{x\}, X\big\}\,,\ \mathcal{T}_3 = \big\{\emptyset, \{y\}, X\big\}\,,\ \mathcal{T}_3 = \big\{\emptyset, \{x\}, \{y\}, X\big\}\,.$$

3. Soit $X = \{x, y, z\}$ un ensemble à trois éléments. Alors $\mathcal{T} = \big\{\emptyset, \{x\}, X\big\}$ est une topologie sur X, par contre $\big\{\emptyset, \{x\}, \{y\}, X\big\}$ n'est pas une topologie sur X.

4. Soit X un ensemble, alors $\mathcal{T}_{cf} = \big\{\emptyset\big\} \cup \big\{U \subset X \ ; \ X \setminus U \text{ est fini}\big\}$ est une topologie sur X, appelée **topologie cofinie**. Si l'ensemble X est fini, alors la topologie cofinie coïncide avec la topologie discrète. Si l'ensemble X est infini, alors deux ouverts quelconques non vides dans $(X, \mathcal{T}_{cf})$ ont une intersection non vide.

Définition 1.1.3. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. On dit que $\mathcal{B}$ est une **base d'ouverts** de X ou **base de la topologie** $\mathcal{T}$ si tout ouvert non vide de X est réunion d'ouverts appartenant à $\mathcal{B}$.

Tout espace topologique $(X, \mathcal{T})$ possède au moins une base d'ouverts, à savoir $\mathcal{T}$ elle-même. La notion de base d'ouverts n'est bien sûr intéressante que lorsque $\mathcal{B}$ est plus petit que $\mathcal{T}$. Comme on le verra, dans de nombreux cas, il est en effet possible de se limiter à des raisonnements sur les éléments d'une base au lieu de manipuler la totalité des ouverts. Notons aussi qu'en général il n'y a pas unicité de la base d'ouverts.

Exemple 1.1.2. Si X est un espace discret, alors $\mathcal{B} = \big\{\{x\} \ ; \ x \in X\big\}$ est une base d'ouverts de X.

Proposition 1.1.1. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X.

(ii) Pour tout $U \in \mathcal{T}$ et tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient U un ouvert de X et $x \in U$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X, alors il existe une famille $(B_j)_{j\in J}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $U = \bigcup\limits_{j\in J} B_j$. Par conséquent, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit U un ouvert non vide de X. Par hypothèse, pour tout $x \in U$, il existe $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subset U$. Donc on a $U = \bigcup\limits_{x\in U} \{x\} \subset \bigcup\limits_{x\in U} B_x \subset U$, d'où $U = \bigcup\limits_{x\in U} B_x$, avec $B_x \in \mathcal{B}$ pour tout $x \in U$. Donc $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X. ■

En faisant le même raisonnement que ci-dessus, on obtient la remarque suivante :

Remarque 1.1.1. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, A un sous-ensemble de X et $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X. Alors A est un ouvert de X si et seulement si pour tout $x \in A$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset A$.

Construction d'une topologie à partir d'une base d'ouverts. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ une base de la topologie $\mathcal{T}$. Alors $\mathcal{B}$ possède les deux propriétés suivantes.

(**B1**) Pour tout $x \in X$, il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U$.

(**B2**) Pour tout $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ et tout $x \in U_1 \cap U_2$, il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U \subset U_1 \cap U_2$.

Réciproquement, si X est un ensemble et si $\mathcal{B}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant (**B1**) et (**B2**), alors il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base. En effet, il suffit de prendre :

$$\mathcal{T} = \big\{\emptyset\big\} \cup \big\{U \subset X \ ; \ U \text{ soit réunion d'ensembles appartenant à } \mathcal{B}\big\} .$$

Autrement dit, un sous-ensemble U de X est un ouvert pour $\mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.

Exemple 1.1.3.
1. **Topologie de l'ordre**. Soit $(X, \leq)$ un ensemble totalement ordonné, et soit $\mathcal{B}$ la partie de $\mathcal{P}(X)$ constituée des intervalles ouverts, des demi-droites ouvertes et de X, voir Appendice A. Alors $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés (**B1**) et (**B2**). Par conséquent, il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base. La topologie $\mathcal{T}$ est appelée la **topologie de l'ordre**. Un sous-ensemble U de X est un ouvert pour $\mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.

2. **La droite réelle**. Le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle est totalement ordonné. La topologique de l'ordre sur $\mathbb{R}$ est appelée la **topologie euclidienne** ou **usuelle** de $\mathbb{R}$. Le corps $\mathbb{R}$ muni de cette topologie est appelé la

droite réelle. Dans la suite, sauf la mention de contraire, $\mathbb{R}$ sera muni de sa topologie usuelle. Notons que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, les ensembles $]-\infty, a[$, $]a, b[$ et $]b, +\infty[$ sont, par définition, des ouverts de $\mathbb{R}$, d'où $]-\infty, a]$, $[a, b]$ et $[b, +\infty[$ sont des fermés de $\mathbb{R}$. Notons aussi qu'un sous-ensemble U de $\mathbb{R}$ est un ouvert si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$. Autrement dit, les intervalles ouverts $]a, b[$ forment aussi une base d'ouverts pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

3. **La droite réelle achevée**. Soit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ l'ensemble qui est la réunion de $\mathbb{R}$ et de deux nouveaux éléments distincts notés $-\infty$ et $+\infty$ et appelés points à l'infini. On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre usuelle de $\mathbb{R}$ en convenant que tout $x \in \mathbb{R}$ vérifie $-\infty < x < +\infty$. Alors $\overline{\mathbb{R}}$ muni de cette relation d'ordre est totalement ordonné et la topologie de l'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$ est appelée la **topologie usuelle** de $\overline{\mathbb{R}}$, et $\overline{\mathbb{R}}$ muni de cette topologie est appelé la **droite réelle achevée**. Une partie U de $\overline{\mathbb{R}}$ est ouverte si

   i) pour tout $x \in U \cap \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$;

   ii) lorsque $-\infty \in U$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $[-\infty, \alpha[\subset U$;

   iii) lorsque $+\infty \in U$, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $]\beta, +\infty] \subset U$.

   Notons que pour tout $a \in \mathbb{R}$, les ensembles $[-\infty, a[$ et $]a, +\infty]$ sont des ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$ et que $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$[†].

Définition 1.1.4. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On dit qu'une partie V de X est un **voisinage** de x s'il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset V$. Plus généralement, soit A une partie de X, on appelle **voisinage** de A toute partie V de X telle qu'il existe un ouvert U de X vérifiant $A \subset U \subset V$.

Exemple 1.1.4. 1. Si $\mathbb{R}$ est muni de la topologie usuelle, un sous-ensemble V de $\mathbb{R}$ est un voisinage d'un point $x \in \mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset V$. Par exemple, $\left]x-\frac{1}{2}, x+1\right] \cup \{5\}$ est un voisinage de x.

2. Si $\overline{\mathbb{R}}$ est muni de la topologie usuelle, un sous-ensemble V de $\overline{\mathbb{R}}$ est un voisinage du point $-\infty$ s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $[-\infty, \alpha[\subset V$. De même, un sous-ensemble W de $\overline{\mathbb{R}}$ est un voisinage du point $+\infty$ s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $]\beta, +\infty] \subset W$.

Proposition 1.1.2. *Pour qu'une partie d'un espace topologique X soit un ouvert il faut et il suffit qu'elle soit voisinage de chacun de ses points. En particulier, pour connaître la topologie de X, il suffit de connaître les voisinages de tous les points de X.*

Démonstration. Il résulte immédiatement de la définition que tout ouvert de X est voisinage de chacun de ses points. Réciproquement, soit V une partie de X qui est voisinage de chacun de ses points. Alors pour tout $x \in V$, il existe un ouvert U_x de X contenant x et contenu dans V. Donc on a $V = \bigcup_{x \in V} U_x$. C'est une réunion d'ouverts, donc un ouvert. ■

Construction d'une topologie à partir des axiomes des voisinages. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On note $\mathcal{V}(x)$ la famille des voisinages de x. Les familles

[†]On revient sur ces deux exemples au chapitre 2.

$\mathcal{V}(x)$ de parties de X, $x \in X$, vérifient les propriétés suivantes, appelées **axiomes des voisinages**.

(**V1**) Pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$ et pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, on a $x \in V$.

(**V2**) Toute partie de X qui contient un élément de $\mathcal{V}(x)$ appartient à $\mathcal{V}(x)$.

(**V3**) L'intersection de deux éléments de $\mathcal{V}(x)$ est élément de $\mathcal{V}(x)$.

(**V4**) Pour tout $x \in X$ et tout $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que pour tout $y \in W$, on ait $V \in \mathcal{V}(y)$.

Notez que dans (**V4**), il suffit de prendre pour W un ouvert contenant x et contenu dans V.
Réciproquement, soit X un ensemble quelconque et supposons donnée pour tout $x \in X$, une famille $\mathcal{V}(x)$ de parties de X vérifiant les propriétés (**V1**), (**V2**), (**V3**) et (**V4**), alors il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X telle que pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ soit la famille des voisinages de x. En effet, il suffit de prendre :

$$\mathcal{T} = \big\{\emptyset\big\} \cup \big\{U \subset X \ ; \ U \in \mathcal{V}(x) \text{ pour tout } x \in U\big\}.$$

Définition 1.1.5. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On appelle **système fondamental de voisinages** de x ou **base de voisinages** de x, toute famille $\mathcal{B}(x)$ de voisinages de x telle que pour tout voisinage V de x, il existe $W \in \mathcal{B}(x)$ tel que $W \subset V$.

Notez que si $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages de x, alors on a :

$$\mathcal{V}(x) = \big\{V \subset X \ ; \ \text{il existe } W \in \mathcal{B}(x) \text{ avec } W \subset V\big\}.$$

Autrement dit, $\mathcal{V}(x)$ est l'ensemble des parties de X contenant un élément de $\mathcal{B}(x)$. Ainsi, on obtient $\mathcal{V}(x)$ à partir de $\mathcal{B}(x)$.
Comme pour les bases d'ouverts de X, le rôle des systèmes fondamentaux de voisinages est de simplifier les démonstrations.

Exemple 1.1.5.

1. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. Alors $\mathcal{V}(x)$ est une base de voisinages de x. L'ensemble des ouverts de X contenant x est une base de voisinages de x. Autrement dit, tout point d'un espace topologique admet une base de voisinages formée d'ensembles ouverts. Notons aussi que si $\mathcal{B}(x)$ et $\mathcal{B}'(x)$ sont des parties de $\mathcal{V}(x)$ telles que $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{B}'(x)$ et si $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages de x, alors $\mathcal{B}'(x)$ est également une base de voisinages de x.

2. Dans un espace discret, l'ensemble $\{x\}$ constitue à lui seul un système fondamental de voisinages de x.

3. Si $\mathbb{R}$ est muni de la topologie usuelle et $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble des intervalles de la forme $]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est une base de voisinages du point x formée d'ensembles ouverts. également, l'ensemble des intervalles de la forme $[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, est une base de voisinages du point x formée d'ensembles fermés.

4. Si $\overline{\mathbb{R}}$ est muni de la topologie usuelle, l'ensemble des demi-droites de la forme $[-\infty, -n[$, avec $n \in \mathbb{N}$, est une base de voisinages du point $-\infty$ formée d'ensembles ouverts. De même, l'ensemble des demi-droites de la forme $]n, +\infty]$, avec $n \in \mathbb{N}$, est une base de voisinages du point $+\infty$ formée d'ensembles ouverts.

Proposition 1.1.3. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X.

(ii) Pour tout $x \in X$, la famille $\{U \in \mathcal{B}\ ;\ x \in U\}$ est une base de voisinages de x.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient $x \in X$ et V un voisinage de x dans X, alors il existe un ouvert W de X tel que $x \in W \subset V$. Comme $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X, alors il existe une famille $(U_j)_{j\in J}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $W = \underset{j\in J}{\cup} U_j$. Par conséquent, il existe $U_j \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U_j \subset V$, donc la famille $\{U \in \mathcal{B}\ ;\ x \in U\}$ est une base de voisinages de x.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit U un ouvert non vide de X. Puisque U est voisinage de chacun de ses points, alors pour tout $x \in U$, il existe $U_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in U_x \subset U$. Par conséquent, on a $U = \underset{x\in U}{\cup} U_x$, donc $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X. ■

Construction d'une topologie à partir des systèmes fondamentaux de voisinages ouverts. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et pour tout $x \in X$, soit $\mathcal{B}(x)$ une base de voisinages de x formée d'ensembles ouverts. Les familles $\mathcal{B}(x)$ de parties de X, $x \in X$, vérifient les propriétés suivantes, appelées **axiomes de Hausdorff**.

(**H1**) Pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ et pour tout $U \in \mathcal{B}(x)$, on a $x \in U$.

(**H2**) Pour tout $x \in X$ et pour tout $U_1, U_2 \in \mathcal{B}(x)$, il existe $U_3 \in \mathcal{B}(x)$ tel que $U_3 \subset U_1 \cap U_2$.

(**H3**) Pour tout $U \in \mathcal{B}(x)$ et pour tout $y \in U$, il existe $W \in \mathcal{B}(y)$ tel que $W \subset U$.

Réciproquement, soit X un ensemble quelconque et supposons donnée pour tout $x \in X$, une famille $\mathcal{B}(x)$ de parties de X vérifiant les propriétés (**H1**), (**H2**) et (**H3**), alors il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X telle que pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ soit une base de voisinages de x formée d'ensembles ouverts. En effet, soit $\mathcal{B} = \underset{x\in X}{\cup} \mathcal{B}(x)$, alors $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés (**B1**) et (**B2**). Par conséquent, il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base. En appliquant la proposition précédente et l'axiome (**H3**), on en déduit que pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages de x formée d'ensembles ouverts.

1.2 Intérieur, adhérence, frontière d'une partie

Définition 1.2.1. Soient X un espace topologique, $x \in X$ et $A \subset X$.

1. On dit que x est intérieur à A lorsque A est un voisinage de x. L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle **l'intérieur** de A et se note $\overset{\circ}{A}$.

2. On dit que x est adhérent à A lorsque tout voisinage de x rencontre A. L'ensemble des points adhérents à A s'appelle **l'adhérence** de A et se note $\overline{A}$.

3. On dit que x est un point frontière de A, s'il est à la fois adhérent à A et à $X \setminus A$. L'ensemble des points frontières de A s'appelle **la frontière** de A et se note $\mathrm{Fr}(A)$. Autrement dit, on a $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

4. On dit que x est un **point d'accumulation** de A si tout voisinage de x dans X contient un point de A distinct de x lui-même (x n'est pas forcément dans A). L'ensemble des points d'accumulation de A s'appelle **ensemble dérivée** de A et se note A'.

5. On dit qu'un point $a \in A$ est un **point isolé** dans A s'il existe un voisinage V de a dans X tel que $V \cap A = \{a\}$.

Remarque 1.2.1. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $x \in X$ et $A \subset X$. Alors on a :

1. $\overset{\circ}{A} \subset A$ et $A \subset \overline{A}$.

2. $x \in \overset{\circ}{A} \iff$ il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset A$.

3. $x \in \overline{A} \iff$ pour tout voisinage V de x dans X, on a $V \cap A \neq \emptyset$.

4. $x \in \mathrm{Fr}(A) \iff$ pour tout voisinage V de x dans X, on a $V \cap A \neq \emptyset$ et $V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

5. $x \in A' \iff$ pour tout voisinage V de x dans X, on a $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Donc on a $\overline{A} \setminus A \subset A' \subset \overline{A}$ et $\overline{A} = A \cup A'$. Notons aussi que comme on a $V \cap (A \setminus \{x\}) = (V \setminus \{x\}) \cap A$, alors $x \in A' \iff x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

6. Un point x de X est un point isolé dans X si et seulement si le singleton $\{x\}$ est un ouvert de X.

7. Si $\mathcal{T}$ est la topologie discrète, alors $A' = \emptyset$. Donc en général $A \not\subset A'$.

Remarque 1.2.2. Soient X un espace topologique, $A \subset X$, $x \in X$ et $\mathcal{B}_x$ une base de voisinages de x. Alors on a :

1. $x \in \overset{\circ}{A}$ si et seulement s'il existe $V \in \mathcal{B}_x$ tel que $V \subset A$.

2. $x \in \overline{A}$ si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{B}_x$, on a $V \cap A \neq \emptyset$.

Proposition 1.2.1. *Soient A et B des sous-ensembles d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$.*

1. *Si $A \subset B$, alors on a $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

2. *$\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de X et si U est un ouvert de X tel que $U \subset A$, alors on a $U \subset \overset{\circ}{A}$. Donc, l'intérieur de A est le plus grand ouvert de X contenu dans A. Autrement dit, $\overset{\circ}{A}$ est la réunion des ouverts de X contenus dans A.*

3. *$\overline{A}$ est un fermé de X et si F est un fermé de X tel que $A \subset F$, alors on a $\overline{A} \subset F$. Donc, l'adhérence de A est le plus petit fermé de X contenant A. Autrement dit, $\overline{A}$ est l'intersection des fermés de X contenant A.*

4. *A est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.*

5. *A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.*

Démonstration. 1. Soit $x \in \overset{\circ}{A}$, alors il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset A$, d'où on a $x \in U \subset B$, et par conséquent $x \in \overset{\circ}{B}$, donc on a $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
Soit $x \in \overline{A}$, alors pour tout voisinage V de x dans X, on a $V \cap A \neq \emptyset$. Or on a $V \cap A \subset V \cap B$, donc $V \cap B \neq \emptyset$, et par conséquent $x \in \overline{B}$, d'où $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Pour montrer que $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de X, il suffit de montrer que $\overset{\circ}{A}$ est réunion d'une famille d'ouverts de X. Soit $x \in \overset{\circ}{A}$, alors il existe un ouvert U_x de X tel que $x \in U_x \subset A$. Pour tout $y \in U_x$, U_x est un voisinage de y dans X et on a $y \in U_x \subset A$, donc $y \in \overset{\circ}{A}$, et par conséquent $U_x \subset \overset{\circ}{A}$. Ainsi, $\overset{\circ}{A}$ est voisinage de chacun de ses points. On déduit de la proposition 1.1.2 que $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de X. Soit U un ouvert de X tel que $U \subset A$. Soit $x \in U$, alors on a $x \in U \subset A$ et U est un ouvert de X, donc $x \in \overset{\circ}{A}$ et par conséquent $U \subset \overset{\circ}{A}$.
3. Pour montrer que $\overline{A}$ est un fermé de X, on montre que $X \setminus \overline{A}$ est un ouvert de X. Soit $x \in X \setminus \overline{A}$, alors il existe un ouvert V_x de X tel que $x \in V_x$ et $V_x \cap A = \emptyset$. Pour tout $y \in V_x$, V_x est un voisinage de y dans X et on a $V_x \cap A = \emptyset$, d'où $y \notin \overline{A}$. Donc on a $V_x \cap \overline{A} = \emptyset$ et par conséquent $V_x \subset X \setminus \overline{A}$. Ainsi, $X \setminus \overline{A}$ est voisinage de chacun de ses points, donc $X \setminus \overline{A}$ est un ouvert de X. Par conséquent $\overline{A}$ est un fermé de X. Soit F un fermé de X tel que $A \subset F$. Pour montrer que $\overline{A} \subset F$, il suffit de montrer que l'on a $X \setminus F \subset X \setminus \overline{A}$. Soit $x \in X \setminus F$. Puisque $X \setminus F$ est un ouvert de X, alors $X \setminus F$ est un voisinage de x dans X. Or on a $(X \setminus F) \cap A = \emptyset$, d'où $x \notin \overline{A}$. Donc on a $x \in X \setminus \overline{A}$. Par conséquent, on a $X \setminus F \subset X \setminus \overline{A}$.
4. Si $A = \overset{\circ}{A}$, alors d'après 2, A est un ouvert de X. Réciproquement, on suppose que A est un ouvert de X. Alors il résulte du 2 que l'on a $A \subset \overset{\circ}{A}$. Or on a toujours $\overset{\circ}{A} \subset A$, donc on a $A = \overset{\circ}{A}$.
5. Si $A = \overline{A}$, alors d'après 3, A est un fermé de X. Réciproquement, on suppose que A est un fermé de X, alors d'après 3, on a $\overline{A} \subset A$. Or on toujours $A \subset \overline{A}$, donc on a $A = \overline{A}$. ■

Proposition 1.2.2. *Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique X. Alors on a :*

$$\overset{\circ}{\overbrace{X \setminus A}} = X \setminus \overline{A} \quad et \quad \overline{X \setminus A} = X \setminus \overset{\circ}{A} .$$

Démonstration. On a $A \subset \overline{A}$, d'où $X \setminus \overline{A} \subset X \setminus A$. Comme $X \setminus \overline{A}$ est un ouvert de X, d'après la proposition précédente, on a $X \setminus \overline{A} \subset \overset{\circ}{\overbrace{X \setminus A}}$. Réciproquement, soit $x \in \overset{\circ}{\overbrace{X \setminus A}}$, alors il existe un ouvert V de X tel que $x \in V$ et $V \subset X \setminus A$, d'où $V \cap A = \emptyset$. Donc $x \notin \overline{A}$. Autrement dit, on a $x \in X \setminus \overline{A}$. Donc on a $\overset{\circ}{\overbrace{X \setminus A}} \subset X \setminus \overline{A}$. Par conséquent, on a $X \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{X \setminus A}}$. D'après ce qui précède, on a $X \setminus \overline{X \setminus A} = \overset{\circ}{\overbrace{X \setminus (X \setminus A)}} = \overset{\circ}{A}$, d'où $X \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{X \setminus A}$. ■

Définition 1.2.2. Soit X un espace topologique. Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de X

est dite **localement finie** si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x dans X tel que $A_i \cap V = \emptyset$ pour tout $i \in I$, sauf peut-être pour un nombre fini d'indices $i \in I$.

Proposition 1.2.3. *Soient X un espace topologique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille localement finie de parties de X.*

1. *La famille $(\overline{A_i})_{i\in I}$ est aussi localement finie.*
2. *On a $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} = \bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i}$. Par conséquent, la réunion d'une famille localement finie de parties fermées de X est fermée dans X.*

Démonstration. 1. Soit $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V de x dans X et un sous-ensemble fini J de I tel que $V \cap A_i = \emptyset$ pour tout $i \in I \setminus J$. Comme V est un ouvert, on en déduit que pour tout $i \in I \setminus J$, on a $V \cap \overline{A_i} = \emptyset$. Donc la famille $(\overline{A_i})_{i\in I}$ est localement finie.
2. Pour tout $j \in I$, on a $\overline{A_j} \subset \overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i}$, d'où $\bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i}$. Inversement, soit $x \in X$ tel que $x \notin \bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i}$. Soient V un voisinage de x dans X et J un sous-ensemble fini de I tel que $V \cap A_i = \emptyset$ pour tout $i \in I \setminus J$. Pour tout $j \in J$, il existe un voisinage V_j de x dans X tel que $V_j \cap A_j = \emptyset$. Soit $W = \bigcap\limits_{j\in J} V \cap V_j$, alors W est un voisinage de x dans X et on a $W \cap \bigcup\limits_{i\in I} A_i = \emptyset$, donc $x \notin \overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i}$. Par conséquent, on a $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} \subset \bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i}$, d'où $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} = \bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i}$. ■

Définition 1.2.3. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$.

1. On dit que A est **dense** dans X ou **partout dense** si $\overline{A} = X$.
2. On dit que X est **séparable** s'il existe une partie au plus dénombrable A de X dense dans X.

Exemple 1.2.1. L'espace $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est séparable. En effet, les sous-ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, voir Appendice C. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, alors $\mathbb{R}$ est séparable.

Remarque 1.2.3. Soient X un espace topologique et $A \subset X$. On déduit de la proposition 1.2.2 que l'on a :

1. A est dense dans $X \iff \overbrace{X \setminus A}^{\circ} = \emptyset$.
2. $\mathring{A} = \emptyset \iff X \setminus A$ est dense dans X.

Proposition 1.2.4. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X et A un sous-ensemble de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *A est dense dans X.*

(ii) *Pour tout ouvert non vide U de X, on a $A \cap U \neq \emptyset$.*

(iii) *Pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \emptyset$, on a $A \cap B \neq \emptyset$.*

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons A dense dans X, *i.e.* $\overline{A} = X$. Alors pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de x dans X, on a $A \cap V \neq \emptyset$. Soit U un ouvert non vide de X. Comme U est voisinage de chacun de ses points, on en déduit que $A \cap U \neq \emptyset$.
L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est triviale.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons que pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \emptyset$, on a $A \cap B \neq \emptyset$. Si $\overline{A} \neq X$, alors $X \setminus \overline{A}$ est un ouvert non vide de X et on a $\left(X \setminus \overline{A}\right) \cap A = \emptyset$. Donc il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \emptyset$, $B \subset X \setminus \overline{A}$ et $A \cap B = \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse, donc on a $\overline{A} = X$. ■

Proposition 1.2.5. *Soit X un espace topologique séparable. Alors toute famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints de X est au plus dénombrable.*

Démonstration. Soient $D = \{x_n \ ; \ n \geq 0\}$ une partie au plus dénombrable et dense dans X et $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints de X. D'après la proposition précédente, pour tout $i \in I$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U_i$. Soit $n_i = \inf \left\{n \in \mathbb{N} \ ; \ x_n \in U_i\right\}$, alors $i \longmapsto n_i$ est une application injective de I dans $\mathbb{N}$, donc I est au plus dénombrable. ■

Définition 1.2.4. Soit X espace topologique.

1. On dit que X vérifie **le premier axiome de dénombrabilité** si tout $x \in X$ admet un système fondamental au plus dénombrable de voisinages.

2. On dit que X vérifie **le second axiome de dénombrabilité** si la topologie de X admet une base au plus dénombrable d'ouverts.

Tout espace topologique vérifiant le second axiome de dénombrabilité vérifie aussi le premier axiome de dénombrabilité. La réciproque est en général fausse ; il suffit de considérer un ensemble X infini non dénombrable et muni de la topologie discrète.

Exemple 1.2.2. L'espace $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle admet une base dénombrable d'ouverts. En effet, soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des intervalles ouverts d'extrémités rationnelles, *i.e.* $\mathcal{B} = \left\{]a, b[\ ; \ a, b \in \mathbb{Q} \text{ et } a < b\right\}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable, alors $\mathcal{B}$ l'est aussi. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $\mathbb{R}$, d'après la proposition 1.1.3, il suffit de montrer que tout point de $\mathbb{R}$ a une base de voisinages constituée par de tels intervalles. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $n \geq 1$, il existe $p_n, q_n \in \mathbb{Q}$ tels que $x - \frac{1}{n} < p_n < x < q_n < x + \frac{1}{n}$. Alors la famille des intervalles $]p_n, q_n[$ forme une base de voisinages de x.
De même l'espace $\overline{\mathbb{R}}$ muni de la topologie usuelle admet une base dénombrable d'ouverts. En effet, la réunion de $\mathcal{B}$ et des ensembles $\left\{[-\infty, -n[\ ; \ n \in \mathbb{N}\right\}$ et $\left\{]n, +\infty] \ ; \ n \in \mathbb{N}\right\}$ est une base dénombrable d'ouverts.

Théorème 1.2.1. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique admettant une base dénombrable d'ouverts. Alors X est séparable.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = \left\{U_n \ ; \ n \geq 0\right\}$ une base dénombrable d'ouverts de X. On peut supposer que pour tout $n \geq 0$, $U_n \neq \emptyset$, et soit $x_n \in U_n$. Montrons que l'ensemble $A = \{x_n \ ; \ n \geq 0\}$ est dense dans X. Soit U un ouvert non vide de X. Puisque $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X, alors il existe un sous-ensemble non vide J de $\mathbb{N}$ tel que $U = \bigcup\limits_{n \in J} U_n$.

Par conséquent, on a $\{x_n \ ; \ n \in J\} \subset U$, donc $A \cap U \neq \emptyset$. Il résulte de la proposition précédente que A est dense dans X. Donc X est séparable. ■

La réciproque du théorème précédent est en général fausse, voir exercice 1.18. Mais elle est vraie si par exemple l'espace X est « métrique », voir théorème 2.2.1.

1.3 Applications continues

Définition 1.3.1. Soient X, Y deux espaces topologiques, $x_0 \in X$ et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que f est **continue en** x_0 si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

(i) Pour tout voisinage W de $f(x_0)$ dans Y, $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x_0 dans X.

(ii) Pour tout voisinage W de $f(x_0)$ dans Y, il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que $f(V) \subset W$.

On peut énoncer cette définition sous la forme plus imagée suivante : dire que f est continue en x_0 signifie que $f(x)$ est aussi voisin qu'on veut de $f(x_0)$ dès que x est assez voisin de x_0.

Essayons de traduire la définition de la continuité d'une application en un point dans le cas où $X = Y = \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Alors f est continue en x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x - x_0| < \eta$, on ait $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Définition 1.3.2. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

1. On dit que f est **continue** ou **continue sur** X si elle est continue en tout point de X.

2. On dit que f est un **homéomorphisme de** X **sur** Y si elle est bijective et si f et f^{-1} sont continues.

3. On dit que les espaces topologiques X et Y sont **homéomorphes** s'il existe un homéomorphisme de X sur Y.

Les propriétés d'un espace topologique qui se conservent par homéomorphisme sont appelées **propriétés topologiques**.

Exemple 1.3.1. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, on a :

1. L'application identique suivante est continue.

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_X : & (X, \mathcal{T}) & \longrightarrow & (X, \mathcal{T}) \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

2. Toute application constante de $(X, \mathcal{T})$ dans $(Y, \mathcal{T}')$ est continue.

Exemple 1.3.2. Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique X. On note par χ_A ou $\mathbf{1}_A$ la **fonction indicatrice** ou **fonction caractéristique** de A. Autrement dit, $\mathbf{1}_A$ est une fonction de X dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A\,, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A\,. \end{cases}$$

Pour tout sous-ensemble U de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbf{1}_A{}^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad \{0,1\} \cap U = \emptyset\,, \\ A & \text{si} \quad 1 \in U \text{ et } 0 \notin U\,, \\ X \setminus A & \text{si} \quad 0 \in U \text{ et } 1 \notin U\,, \\ X & \text{si} \quad \{0,1\} \subset U\,. \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction $\mathbf{1}_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue si et seulement si A est à la fois ouvert et fermé dans X.

Remarque 1.3.1. Soient X et Y deux espaces topologiques, on a :

1. Si Y est muni de la topologie grossière, alors toute application de X dans Y est continue.

2. Si X est muni de la topologie discrète, alors toute application de X dans Y est continue.

3. Si X est muni de la topologie grossière, alors pour qu'une application f de X dans Y soit continue il faut et il suffit que f soit constante.

Remarque 1.3.2. Une application continue bijective n'est pas nécessairement un homéomorphisme.
Premier exemple. Si $X = Y = \mathbb{R}$ et si $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la topologie discrète de $\mathbb{R}$ et si $\mathcal{T}_2$ est la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, alors l'application identique $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ est continue bijective, mais n'est pas un homéomorphisme.
Deuxième exemple. Si X est un ensemble contenant au moins deux points, $\mathcal{T}_d$ la topologie discrète sur X et $\mathcal{T}_g$ la topologie grossière sur X. Alors l'application identique id : $(X, \mathcal{T}_d) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_g)$ est bijective continue, mais elle n'est pas un homéomorphisme.

Proposition 1.3.1. *Soient X, Y et Z des espaces topologiques, $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ des applications.*

1. *Si f est continue en un point $x \in X$ et si g est continue en $f(x)$, alors $g \circ f$ est continue en x.*

2. *Si f et g sont continues, leur composée $g \circ f$ est continue.*

Démonstration. 1. Soit W un voisinage de $g \circ f(x) = g(f(x))$ dans Z, on a $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$. Puisque g est continue en $f(x)$, alors $g^{-1}(W)$ est un voisinage de $f(x)$ dans Y et par conséquent $f^{-1}(g^{-1}(W))$ est un voisinage de x dans X car f est continue en x. Donc $(g \circ f)^{-1}(W)$ est un voisinage de x dans X, d'où la continuité de $g \circ f$ en x.
2. Ceci résulte de 1. ■

Proposition 1.3.2. *Soient f et g deux applications continues d'un espace topologique X dans $\mathbb{R}$, alors on a :*

1. *L'application $f + g : x \longmapsto f(x) + g(x)$ est continue de X dans $\mathbb{R}$.*
2. *L'application $fg : x \longmapsto f(x)g(x)$ est continue de X dans $\mathbb{R}$.*
3. *Si g ne s'annule pas, l'application $\dfrac{f}{g} : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est continue de X dans $\mathbb{R}$.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 1 du supplément.

Théorème 1.3.1. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) f est continue.

(ii) Pour tout ouvert U de Y, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

(iii) Si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de Y, alors pour tout $U \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

(iv) Pour toute partie B de Y, on a $f^{-1}\big(\overset{\circ}{B}\big) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}$.

(v) Pour tout fermé F de Y, $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.

(vi) Pour toute partie A de X, on a $f\big(\overline{A}\big) \subset \overline{f(A)}$.

(vii) Pour toute partie B de Y, on a $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\big(\overline{B}\big)$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit U un ouvert de Y. Pour tout $x \in f^{-1}(U)$, U est un voisinage de $f(x)$ dans Y, donc $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x dans X car f est continue en x. Par conséquent, $f^{-1}(U)$ est voisinage de chacun de ses points. Il résulte de la proposition 1.1.2 que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soient $x \in X$ et W un voisinage de $f(x)$ dans Y. Alors il existe un ouvert U de Y tel que $f(x) \in U \subset W$, d'où on a $x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(W)$ et $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X, donc $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x dans X. Donc f est continue en x. Par conséquent, f est continue.
L'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) résulte du fait que pour toute famille $(U_j)_{j\in J}$ de parties de Y, on a $f^{-1}\big(\underset{j\in J}{\cup} U_j\big) = \underset{j\in J}{\cup} f^{-1}(U_j)$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iv). Soit B une partie de Y. Comme $\overset{\circ}{B}$ est un ouvert de Y, alors $f^{-1}\big(\overset{\circ}{B}\big)$ est un ouvert de X et on a $f^{-1}\big(\overset{\circ}{B}\big) \subset f^{-1}(B)$, d'où $f^{-1}\big(\overset{\circ}{B}\big) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}$, voir proposition 1.2.1.
Preuve de (iv) $\Longrightarrow$ (ii). Soit U un ouvert de Y. Alors on a $U = \overset{\circ}{U}$, d'où $f^{-1}(U) = f^{-1}\big(\overset{\circ}{U}\big) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(U)}}$. Donc on a $f^{-1}(U) = \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(U)}}$. Il résulte de la proposition 1.2.1 que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.
L'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (v) résulte du fait que pour toute partie U de Y, on a $f^{-1}(X\setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$.

Preuve de (v) $\Longrightarrow$ (vi). Soit A une partie de X, alors $f^{-1}\big(\overline{f(A)}\big)$ est un fermé de X contenant A, d'où on a $\overline{A} \subset f^{-1}\big(\overline{f(A)}\big)$. Par conséquent, on a $f\big(\overline{A}\big) \subset f\big(f^{-1}\big(\overline{f(A)}\big)\big) \subset \overline{f(A)}$.
Preuve de (vi) $\Longrightarrow$ (vii). Soit B une partie de Y. On pose $A = f^{-1}(B)$, alors on a $f\big(\overline{f^{-1}(B)}\big) = f\big(\overline{A}\big) \subset \overline{f(A)} = \overline{f\big(f^{-1}(B)\big)} \subset \overline{B}$, d'où $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\big(\overline{B}\big)$.
Preuve de (vii) $\Longrightarrow$ (v). Soit F un fermé de Y, alors on a $F = \overline{F}$, d'où $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}\big(\overline{F}\big) = f^{-1}(F) \subset \overline{f^{-1}(F)}$. Par conséquent, on a $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$, donc $f^{-1}(F)$ est un fermé de X. ■

Remarque 1.3.3. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. L'image $f(V)$ d'un ouvert (*resp.* d'un fermé) de X n'est pas nécessairement ouverte (*resp.* fermée) dans Y, même lorsque f est continue. En effet, si $X = Y = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle et si $f(x) = x^2$, alors f est continue et $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$ n'est ni ouvert ni fermé de $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.3. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

1. On dit que f est **ouverte** si l'image par f de tout ouvert de X est ouverte dans Y.
2. On dit que f est **fermée** si l'image par f de tout fermé de X est fermée dans Y.

Proposition 1.3.3. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) f est une application ouverte.

(ii) Pour toute partie A de X, on a $f\big(\overset{\circ}{A}\big) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f(A)}}$.

(iii) Si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X, alors pour tout $U \in \mathcal{B}$, $f(U)$ est un ouvert de Y.

(iv) Pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de x dans X, $f(V)$ est un voisinage de $f(x)$ dans Y.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit A une partie de X, alors $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de X et donc $f\big(\overset{\circ}{A}\big)$ est un ouvert de Y contenu dans $f(A)$, d'où $f\big(\overset{\circ}{A}\big) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f(A)}}$, voir proposition 1.2.1.

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit U un ouvert de X, on a $U = \overset{\circ}{U}$, d'où $f(U) = f\big(\overset{\circ}{U}\big) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f(U)}}$.

Donc on a $f(U) = \overset{\circ}{\overbrace{f(U)}}$. Par conséquent, $f(U)$ est un ouvert de Y.
L'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) résulte du fait que pour toute famille $(U_j)_{j\in J}$ de parties de X, on a $f\big(\underset{j\in J}{\cup} U_j\big) = \underset{j\in J}{\cup} f(U_j)$.
Preuve de (i) $\Longrightarrow$ (iv). Soient $x \in X$ et V un voisinage de x dans X, alors il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset V$, d'où $f(U)$ est un ouvert de Y et on a $f(x) \in f(U) \subset f(V)$. Donc $f(V)$ est un voisinage de $f(x)$ dans Y.
Preuve de (iv) $\Longrightarrow$ (i). Soit U un ouvert de X. Alors pour tout $x \in U$, U est un voisinage de x dans X, donc $f(U)$ est un voisinage de $f(x)$ dans Y. Par conséquent, $f(U)$ est voisinage de chacun de ses points. Il résulte de la proposition 1.1.2 que $f(U)$ est un ouvert de Y. ■

Proposition 1.3.4. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) f est une application ouverte.

(ii) Pour tout sous-ensemble B de Y et pour tout fermé F dans X tel que $f^{-1}(B) \subset F$, il existe un fermé D dans Y tel que $B \subset D$ et $f^{-1}(D) \subset F$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient B un sous-ensemble de Y et F un fermé de X tel que $f^{-1}(B) \subset F$. Comme f est une application ouverte, alors $f(X \setminus F)$ est un ouvert de Y et on a $B \cap f(X \setminus F) = \emptyset$. Soit $D = Y \setminus f(X \setminus F)$, alors D est un fermé de Y tel que $B \subset D$ et $f^{-1}(D) \subset F$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soient U un ouvert de X et $A = f(U)$. Alors $X \setminus U$ est un fermé de X et on a $f^{-1}(Y \setminus A) \subset X \setminus U$. Donc il existe un fermé D de Y tel que $Y \setminus A \subset D$ et $f^{-1}(D) \subset X \setminus U$. On en déduit que l'on a $D = Y \setminus A$, donc A est un ouvert de Y. Par conséquent, f est une application ouverte. ■

Proposition 1.3.5. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) f est fermée.

(ii) Pour toute partie A de X, on a $\overline{f(A)} \subset f\big(\overline{A}\big)$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit A une partie de X, alors $f\big(\overline{A}\big)$ est un fermé de Y et on a $f(A) \subset f\big(\overline{A}\big)$, d'où $\overline{f(A)} \subset f\big(\overline{A}\big)$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit F un fermé de X, alors on a $\overline{F} = F$, d'où $\overline{f(F)} \subset f\big(\overline{F}\big) = f(F)$. Donc on a $f(F) = \overline{f(F)}$. Par conséquent, $f(F)$ est un fermé de Y, voir proposition 1.2.1. ■

Corollaire 1.3.1. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue et fermée. Alors pour toute partie A de X, on a $\overline{f(A)} = f\big(\overline{A}\big)$.*

Démonstration. Ceci résulte de la proposition précédente et du théorème 1.3.1. ■

Proposition 1.3.6. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) f est une application fermée.

(ii) Pour tout sous-ensemble B de Y et pour tout ouvert U dans X tel que $f^{-1}(B) \subset U$, il existe un ouvert V dans Y tel que $B \subset V$ et $f^{-1}(V) \subset U$.

(iii) Pour tout point $y \in Y$ et pour tout ouvert U dans X tel que $f^{-1}\big(\{y\}\big) \subset U$, il existe un voisinage V de y dans Y tel que $f^{-1}(V) \subset U$.

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 1 du supplément.

Remarque 1.3.4. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application bijective. Alors on a :

1. f est ouverte si et seulement si f est fermée.

2. f est continue si et seulement si f^{-1} est ouverte si et seulement si f^{-1} est fermée.

On déduit de ce qui précède le théorème suivant :

Théorème 1.3.2. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application bijective. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) f est un homéomorphisme.

(ii) f est continue et ouverte.

(iii) f est continue et fermée.

(iv) f et f^{-1} sont ouvertes.

(v) f et f^{-1} sont fermées.

(vi) Pour toute partie A de X, on a $f\big(\overline{A}\big) = \overline{f(A)}$.

1.4 Quelques constructions topologiques

Dans la pratique, pour définir une topologie sur un ensemble X, on ne se donne pas toujours directement l'ensemble $\mathcal{T}$ des ouverts. On aura souvent à construire une topologie satisfaisant à certaines conditions. On donne dans ce paragraphe un certain nombre de constructions topologiques classiques.

Définition 1.4.1. Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur un ensemble X. On dit que la topologie $\mathcal{T}_1$ est **moins fine** que la topologie $\mathcal{T}_2$, ou que la topologie $\mathcal{T}_2$ est **plus fine** que la topologie $\mathcal{T}_1$, si l'on a l'inclusion $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ dans l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X. Autrement dit, la topologie $\mathcal{T}_2$ est plus fine que la topologie $\mathcal{T}_1$ si tout ouvert de X pour $\mathcal{T}_1$ est un ouvert de X pour $\mathcal{T}_2$. Deux topologies dont l'une est plus fine que l'autre sont dites **comparables**.

Ainsi, la topologie discrète est la plus fine, et la topologie grossière est la moins fine, de toutes les topologies sur X.

Remarque 1.4.1. Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur un ensemble X. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. La topologie $\mathcal{T}_1$ est moins fine que la topologie $\mathcal{T}_2$.
2. Tout ouvert de X pour $\mathcal{T}_1$ est un ouvert de X pour $\mathcal{T}_2$.
3. Tout fermé de X pour $\mathcal{T}_1$ est un fermé de X pour $\mathcal{T}_2$.
4. L'application identique de X muni de la topologie $\mathcal{T}_2$ dans X muni de la topologie $\mathcal{T}_1$ est continue.
5. L'application identique de X muni de la topologie $\mathcal{T}_1$ dans X muni de la topologie $\mathcal{T}_2$ est ouverte.
6. Pour tout $x \in X$, tout voisinage de x pour $\mathcal{T}_1$ est un voisinage de x pour $\mathcal{T}_2$.

7. Pour toute partie A de X, l'intérieur de A pour $\mathcal{T}_1$ est contenu dans l'intérieur de A pour $\mathcal{T}_2$.

8. Pour toute partie A de X, l'adhérence de A pour $\mathcal{T}_1$ contient l'adhérence de A pour $\mathcal{T}_2$.

Notons enfin que si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont deux topologies sur un ensemble X et si l'on a $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$, alors l'application identique $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ est une application bijective ouverte et non continue.

I. Topologie initiale

Soient X un ensemble, $(Y_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour chaque $i \in I$, soit $f_i : X \longrightarrow Y_i$ une application. La topologie discrète sur X rend continues toutes les applications f_i, mais on cherche ici à construire la topologie la moins fine sur X rendant continues toutes les applications f_i. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des intersections finies d'ensembles de la forme $f_i^{-1}(U_i)$ où $i \in I$ et U_i ouvert de Y_i. Alors $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés (**B1**) et (**B2**), voir paragraphe 1.1. Donc il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base. Cette topologie est appelée la **topologie initiale** associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$. Notons que si Y est un espace topologique et si $f : X \longrightarrow Y$ est une application, alors la topologie initiale associée à f est tout simplement $\mathcal{T} = \{f^{-1}(U)\,;\ U \text{ ouvert de } Y\}$. Dans ce cas, la topologie initiale sur X associée à f est appelée l'**image réciproque** par f de la topologie sur Y. On vérifie facilement le lemme suivant :

Lemme 1.4.1. *Soient X un ensemble et $\big((Y_i, \mathcal{T}_i)\big)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour chaque $i \in I$, soit $f_i : X \longrightarrow Y_i$ une application et soit $\mathcal{T}$ la topologie initiale sur X associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$.*

1. *Soit $x \in X$, on obtient une base de voisinages de x formée d'ensembles ouverts pour $\mathcal{T}$ en considérant les ensembles de la forme $\bigcap_{i\in J} f_i^{-1}(U_i)$ où J est un sous-ensemble fini de I et U_i est un ouvert de Y_i contenant $f_i(x)$.*

2. *Si pour tout $i \in I$, $\mathcal{B}_i$ est une base d'ouverts de Y_i et si $\mathcal{B}'$ est l'ensemble des intersections finies d'ensembles de la forme $f_i^{-1}(U_i)$ où $i \in I$ et $U_i \in \mathcal{B}_i$, alors $\mathcal{B}'$ est une base d'ouverts de la topologie $\mathcal{T}$.*

Proposition 1.4.1. *Soient X un ensemble et $\big((Y_i, \mathcal{T}_i)\big)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour chaque $i \in I$, soit $f_i : X \longrightarrow Y_i$ une application et soit $\mathcal{T}$ la topologie initiale sur X associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$.*

1. *La topologie $\mathcal{T}$ est la moins fine sur X rendant continues toutes les applications f_i.*

2. *Soit $g : E \longrightarrow X$ une application d'un espace topologique E dans X muni de la topologie $\mathcal{T}$, alors g est continue en un point $a \in E$ si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i \circ g : E \longrightarrow Y_i$ est continue en a.*

3. *La topologie $\mathcal{T}$ est l'unique topologie sur X ayant la propriété suivante, appelée* ***propriété universelle*** *de la topologie initiale : pour tout espace topologique E, une application $g : E \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ est continue si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i \circ g : E \longrightarrow Y_i$ est continue.*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f_i \circ g"'] & X \arrow[r, "f_i"] & Y_i \end{tikzcd}$$

Démonstration. 1. Par construction, pour tout $i \in I$ et pour tout ouvert U_i de Y_i, on a $f_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}$. Donc la topologie initiale $\mathcal{T}$ sur X rend continues toutes les applications f_i. Soit $\mathcal{T}'$ une topologie sur X rendant continues toutes les applications f_i. Alors pour tout $i \in I$ et tout ouvert U_i de Y_i, on a $f_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}'$, donc on a $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.
2. La composée de deux applications continues en un point est continue, donc si g est continue en $a \in E$, alors pour tout $i \in I$, $f_i \circ g$ est continue en a. Réciproquement, supposons que pour tout $i \in I$, $f_i \circ g$ est continue en a. Soit V un voisinage de $g(a)$ dans $(X, \mathcal{T})$, alors il existe un sous-ensemble fini J de I tel que $\bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) \subset V$ où U_i est un ouvert de Y_i contenant $f_i(g(a))$. Alors on a $\bigcap_{i \in J} g^{-1}\big(f_i^{-1}(U_i)\big) \subset g^{-1}(V)$. Or on a $g^{-1}\big(f_i^{-1}(U_i)\big) = (f_i \circ g)^{-1}(U_i)$ et $f_i \circ g$ est continue en a, alors $(f_i \circ g)^{-1}(U_i)$ est un voisinage de a dans E. Par conséquent, $g^{-1}(V)$ est un voisinage de a dans E. Donc g est continue en a.
3. On vient de voir que pour tout espace topologique E, une application $g : E \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ est continue si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i \circ g : E \longrightarrow Y_i$ est continue. Soit $\mathcal{T}'$ une topologie sur X vérifiant cette propriété. Montrons que l'on a $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. Comme $\mathcal{T}$ rend continues toutes les applications f_i, alors l'application identique $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}')$ est continue, donc $\mathcal{T}'$ est moins fine que $\mathcal{T}$. Comme aussi l'application identique $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}') \longrightarrow (X, \mathcal{T}')$ est continue, alors $\mathcal{T}'$ rend continues toutes les applications f_i, donc $\mathcal{T}$ est moins fine que $\mathcal{T}'$. Par conséquent, on a $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. ■

II. Topologie induite

Définition 1.4.2. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et A un sous-ensemble de X. On appelle **topologie induite** sur A par $\mathcal{T}$ la topologie initiale sur A associée à l'injection canonique $\imath : A \hookrightarrow X$. On note une telle topologie $\mathcal{T}_A$. Un **sous-espace topologique** de X est un sous-ensemble de X muni de la topologie induite par $\mathcal{T}$.

Proposition 1.4.2. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie de X. On munit A de la topologie induite $\mathcal{T}_A$.*

1. *Les ouverts de A sont les ensembles de la forme $A \cap U$ avec U ouvert dans X, i.e.*

$$\mathcal{T}_A = \big\{A \cap U \ ; \ U \text{ ouvert de } X\big\}.$$

2. *Les fermés de A sont les ensembles de la forme $A \cap F$ avec F fermé dans X.*

3. *Soit a un point de A. Les voisinages de a dans A sont les ensembles de la forme $A \cap V$ avec V voisinage de a dans X.*

Démonstration. 1. Soit $\imath : A \hookrightarrow X$ l'injection canonique, alors pour tout sous-ensemble U de X, on a $\imath^{-1}(U) = A \cap U$, donc $\mathcal{T}_A = \big\{\imath^{-1}(U) \ ; \ U \in \mathcal{T}\big\} = \big\{A \cap U \ ; \ U \text{ ouvert de } X\big\}$.
2. Pour tout ouvert U de X, on a $A \setminus (A \cap U) = A \cap (X \setminus U)$. Donc les fermés de A sont les ensembles de la forme $A \cap F$ avec F fermé dans X.
3. Soit $a \in A$. Pour tout voisinage V de a dans X, il existe un ouvert U de X tel que

$a \in U \subset V$. D'où on a $A \cap U \subset A \cap V$. Or $A \cap U$ est un ouvert de A contenant a, donc $A \cap V$ est un voisinage de a dans A. Réciproquement, si W est un voisinage de a dans A, il existe un ouvert U de X tel que $a \in A \cap U \subset W$. Soit $V = U \cup W$, alors V est un voisinage de a dans X et on a $W = A \cap V$. ■

Remarque 1.4.2. Soient X un espace topologique et A un sous-espace topologique de X.

1. Soit B une partie de A. Pour tout ouvert U de X, on a $B \cap U = (B \cap A) \cap U = B \cap (A \cap U)$. On en déduit que les topologies sur B induites par celle de X et par celle de A coïncident.

2. Il faut bien prendre garde qu'un ouvert (*resp.* un fermé) de A n'est pas nécessairement un ouvert (*resp.* un fermé) de X. Par exemple, si $X = \mathbb{R}$ et $A = [0,\, 1[$, alors $U = \left[0,\, \frac{1}{2}\right[$ est un ouvert de A, mais il n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$, et si $F = \left[\frac{1}{2},\, 1\right[$, alors F est un fermé de A, mais n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$. De même, si $X = \mathbb{R}$ et $A = \{0\} \cup]1,\, 2]$, alors $U =]1,\, 2]$ est à la fois ouvert et fermé dans A, mais U n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

3. Si A est ouvert dans X, les parties ouvertes de A sont les ouverts de X inclus dans A.

4. A est ouvert dans X si et seulement si l'injection canonique $\imath : A \hookrightarrow X$ est une application ouverte.

5. Si A est fermé dans X, les parties fermées de A sont les fermés de X inclus dans A.

6. A est fermé dans X si et seulement si l'injection canonique $\imath : A \hookrightarrow X$ est une application fermée.

Exemple 1.4.1. On munit $\mathbb{R}$ de la topologie usuelle.

1. L'application
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,\, 1[\\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$$
est un homéomorphisme dont l'application réciproque est définie par $f^{-1}(t) = \dfrac{t}{1-|t|}$, pour tout $t \in]-1,\, 1[$, voir également exercice 6.4.

2. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $c < d$. Pour tout $t \in [a,\, b]$, soit :
$$f(t) = \frac{1}{b-a}\big((d-c)t + bc - ad\big)\,.$$
Alors f est un homéomorphisme de $[a,\, b]$ sur $[c,\, d]$ tel que $f(a) = c$ et $f(b) = d$. Donc la restriction de f à l'intervalle $]a,\, b[$ est un homéomorphisme de $]a,\, b[$ sur $]c,\, d[$.

Remarque 1.4.3. Si X est un espace topologique séparable et si A est une partie de X, alors A n'est pas forcément séparable pour la topologie induite par X, voir exercice 1.17. Mais si U est un ouvert de X, alors U est séparable pour la topologie induite par X, voir exercice 1.26. Notons aussi que si X est un espace « métrique » séparable, alors toute partie de X est séparable pour la topologie induite, voir proposition 2.4.1.

Proposition 1.4.3. *Soient X, Y des espaces topologiques, A une partie de X, $a \in A$ et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On munit A de la topologie induite par celle de X et on note $f_{|_A} : A \longrightarrow Y$ la restriction de f à A.*

1. *Si f est continue en a, alors $f_{|_A}$ est continue en a.*
2. *Si f est continue, alors $f_{|_A}$ est continue.*
3. *Si A est un voisinage de a dans X et si $f_{|_A}$ est continue en a, alors f est continue en a.*
4. *Si U est un ouvert de X et si $f_{|_U} : U \longrightarrow Y$ est continue, alors f est continue en tout point de U.*

Démonstration. 1. Soit $\imath : A \hookrightarrow X$ l'injection canonique, alors $\imath$ est continue et on a $f_{|_A} = f \circ \imath$. Donc si f est continue en $a \in A$, alors $f_{|_A}$ est continue en a.
2. On a $f_{|_A} = f \circ \imath$, donc si f est continue, alors $f_{|_A}$ est continue.
3. Soit W un voisinage de $f(a)$ dans Y, alors $f_{|_A}^{-1}(W)$ est un voisinage de a dans A. Donc il existe un voisinage V de a dans X tel que $f_{|_A}^{-1}(W) = A \cap V$. Or on a $A \cap V = f_{|_A}^{-1}(W) = f^{-1}(W) \cap A \subset f^{-1}(W)$ et $A \cap V$ est un voisinage de a dans X, donc $f^{-1}(W)$ est un voisinage de a dans X, donc f est continue en a.
4. Puisque tout ouvert de X est voisinage de chacun de ses points, ceci résulte immédiatement de la propriété précédente. ■

Remarque 1.4.4. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

montre que la restriction $f_{|_\mathbb{Q}}$ de f à $\mathbb{Q}$ est continue en tout point de $\mathbb{Q}$ et que f n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.4.4. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application.*

1. *On suppose que $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ est une réunion des ouverts. Si pour tout $i \in I$, la restriction de f à U_i est continue, alors f est continue.*
2. *On suppose que $X = \bigcup\limits_{i \in I} F_i$ est une réunion des fermés et que la famille $(F_i)_{i \in I}$ est localement finie. Si pour tout $i \in I$, la restriction de f à F_i est continue, alors f est continue.*
3. *Si $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ est une réunion finie des fermés et si pour tout $i \in I$, la restriction de f à F_i est continue, alors f est continue.*

Démonstration. 1. Ceci résulte de la proposition précédente, mais donnons quand même une preuve ici. Pour tout $i \in I$, soit f_i la restriction de f à U_i. Soit V un ouvert de Y, on a $f_i^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap U_i$ et $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(V) \cap U_i = \bigcup\limits_{i\in I} f_i^{-1}(V)$. Comme f_i est continue, alors $f_i^{-1}(V)$ est un ouvert de U_i qui est à son tour un ouvert de X, donc $f_i^{-1}(V)$ est un ouvert de X. Par conséquent, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X, donc f est continue.
2. Pour tout $i \in I$, soit f_i la restriction de f à F_i. Soit F un ouvert de Y, on a $f_i^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cap F_i$ et $f^{-1}(F) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(F) \cap F_i = \bigcup\limits_{i\in I} f_i^{-1}(F)$. Comme f_i est continue, alors $f_i^{-1}(F)$ est un fermé de F_i qui est à son tour un fermé de X, donc $f_i^{-1}(F)$ est un fermé de X. Puisque la famille $(F_i)_{i\in I}$ est localement finie, alors la famille $\big(f_i^{-1}(F)\big)_{i\in I}$ est aussi localement finie. Il résulte alors de la proposition 1.2.3 que $\bigcup\limits_{i\in I} f_i^{-1}(F)$ est fermé dans X, donc f est continue.
3. Ceci résulte immédiatement de 2 car la famille finie $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ est localement finie. ■

Proposition 1.4.5. *Soient X, Y des espaces topologiques et A, B des sous-ensembles de X tels que $X = A \cup B$. Soient $f : A \longrightarrow Y$ et $g : B \longrightarrow Y$ deux applications continues telles que pour tout $x \in A \cap B$, on ait $f(x) = g(x)$. On pose :*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in A\,, \\ g(x) & si \quad x \in B\,. \end{cases}$$

Si A et B sont fermés ou si A et B sont ouverts, alors h est continue.

Démonstration. Supposons d'abord A et B fermés dans X. Soit F un fermé de Y, on a $h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$. Puisque f et g sont continues, alors $f^{-1}(F)$ est fermé dans A qui est à son tour fermé dans X, donc $f^{-1}(F)$ est fermé dans X. De même, $g^{-1}(F)$ est fermé dans X, donc $h^{-1}(F)$ est fermé dans X. Par conséquent, h est continue.
Supposons maintenant A et B ouverts dans X. Soit U un ouvert de Y, on a $h^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cup g^{-1}(U)$. Puisque f et g sont continues, alors $f^{-1}(U)$ est ouvert dans A qui est à son tour ouvert dans X, donc $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X. De même, $g^{-1}(U)$ est ouvert dans X, donc $h^{-1}(U)$ est ouvert dans X. Par conséquent, h est continue. ■

On déduit de la proposition 1.4.1 le résultat suivant :

Proposition 1.4.6. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application.*

1. *Soit A une partie de X. On note $\imath : A \hookrightarrow X$ l'injection canonique. Alors la topologie induite sur A par celle de X est l'unique topologie sur A ayant la propriété suivante : pour tout espace topologique E, une application $g : E \longrightarrow A$ est continue si et seulement si $\imath \circ g : E \longrightarrow X$ est continue.*

2. *Soit B une partie de Y contenant $f(X)$. On munit B de la topologie induite par celle de Y et notons $g : X \longrightarrow B$ l'application qui à $x \in X$ associe $f(x) \in B$. En fait, on a $\imath \circ g = f$, où $\imath : B \hookrightarrow Y$ est l'injection canonique. Alors g est continue en un point x de X si et seulement si f l'est.*

Remarque 1.4.5. Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

1. Si f est ouverte (*resp.* fermée), alors pour toute partie B de Y, la restriction $f_B : f^{-1}(B) \longrightarrow B$ est une application ouverte (*resp.* fermée), où pour tout $x \in f^{-1}(B)$, on a $f_B(x) = f(x)$.

2. Si f est fermée et si A est une partie fermée de X, alors la restriction $f_{|_A} : A \longrightarrow Y$ est fermée.

3. Si f est ouverte et si A est une partie ouverte de X, alors la restriction $f_{|_A} : A \longrightarrow Y$ est ouverte.

III. Topologie produit

Soit $\big((X_i, \mathcal{T}_i)\big)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, où I est un ensemble quelconque d'indices. On considère le produit cartésien $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ des X_i, X peut être vu comme l'ensemble des applications f de I à valeurs dans $\underset{i\in I}{\cup} X_i$ telles que l'on ait $f(i) \in X_i$ pour tout $i \in I$. Dans la pratique, on utilisera plutôt la notation des familles : un élément de X est donc une famille $(x_i)_{i\in I}$, où pour tout $i \in I$, $x_i \in X_i$. Pour tout $i \in I$, notons $p_i : X = \prod\limits_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ la **projection canonique** de X sur le facteur X_i, *i.e.* l'application qui à $(x_j)_{j\in I}$ associe x_i. La topologie initiale associée à la famille des projections $(p_i)_{i\in I}$ est appelée la **topologie produit** sur X, et l'espace X muni de cette topologie est appelé l'**espace topologique produit** des espaces topologiques X_i. Pour tout ouvert U_i de X_i, on a $p_i^{-1}(U_i) = \prod\limits_{j\in I} U_j$, où $U_j = U_i$ si $j = i$ et $U_j = X_j$ si $j \neq i$. Donc une intersection finie d'ouverts de la forme $p_i^{-1}(U_i)$, où U_i est ouvert dans X_i, est un ouvert de X de la forme $\prod\limits_{i\in I} U_i$, où U_i est ouvert dans X_i pour tout $i \in I$ et où $U_i = X_i$ sauf au plus pour un nombre fini d'indices. On donnera à cet ouvert le nom d'**ouvert élémentaire**. Par conséquent, les ouverts élémentaires forment une base d'ouverts de la topologie produit sur X. Il résulte du lemme 1.4.1 que si pour tout $i \in I$, $\mathcal{B}_i$ est une base d'ouverts de X_i, les ouverts élémentaires $\prod\limits_{i\in I} U_i$ tels que $U_i \in \mathcal{B}_i$ pour tout i tel que $U_i \neq X_i$ forment encore une base d'ouverts de la topologie produit.
Si on a une famille finie d'espaces topologiques $(X_1, \mathcal{T}_1), \dots, (X_p, \mathcal{T}_p)$, un ouvert élémentaire dans l'espace topologique produit $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_p$ est simplement un produit $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_p$ où U_i est un ouvert de X_i pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$.
Si pour tout $i \in I$, $X_i = Y$ un espace topologique, dans ce cas, le produit cartésien $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ n'est autre que l'ensemble des applications de I dans Y que l'on note Y^I. Dans ce cas, la topologie produit sur Y^I est aussi appelée la **topologie de la convergence simple**. Si de plus, I est fini et a n éléments, on utilisera la notation Y^n.
La **topologie usuelle** de $\mathbb{R}^n$ est la topologie produit des topologies usuelles sur les n espaces facteurs $\mathbb{R}$. Ainsi, la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$ a pour base d'ouverts l'ensemble des produits de n intervalles ouverts dans $\mathbb{R}$, ensembles que l'on appelle aussi **pavés ouverts** à n dimension.
La **topologie usuelle** de $\mathbb{C}$ est la topologie initiale associée l'application $x + iy \longmapsto (x, y)$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle. Dans ce cas, cette application est un homéomorphisme.

Remarque 1.4.6. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, où I est un ensemble infini.

1. Si pour tout $i \in I$, U_i est un ouvert de X_i tel que $U_i \neq X_i$ et $U_i \neq \emptyset$, alors $\prod_{i\in I} U_i$ n'est jamais ouvert dans l'espace topologique produit $X = \prod_{i\in I} X_i$.

2. Si pour tout $i \in I$, X_i est un espace discret et $\mathrm{card}(X_i) \geq 2$, alors l'espace topologique produit $X = \prod_{i\in I} X_i$ n'est jamais discret. Ainsi, la topologie produit est souvent utilisée pour fabriquer des espaces topologiques non triviaux à partir d'espaces topologiques triviaux.

Remarque 1.4.7. Soient X un ensemble, $\big((Y_i, \mathcal{T}_i)\big)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour chaque $i \in I$, soit $f_i : X \longrightarrow Y_i$ une application. On munit $\prod_{i\in I} Y_i$ de la topologie produit et on considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} f : & X & \longrightarrow & \prod_{i\in I} Y_i \\ & x & \longmapsto & \big(f_i(x)\big)_{i\in I} \end{array}$$

Alors la topologie initiale sur X associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$ est égale à la topologie initiale sur X associée à l'application f.

Proposition 1.4.7. *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. On munit $X = \prod_{i\in I} X_i$ de la topologie produit. Alors on a :*

1. *Pour tout $i \in I$, la projection canonique $p_i : X \longrightarrow X_i$ est une application ouverte.*

2. *Pour tout $i \in I$, la projection canonique $p_i : X \longrightarrow X_i$ est continue.*

3. *Soient E un espace topologique et $f : E \longrightarrow X$ une application. Alors f est continue en un point $a \in E$ si et seulement si chacune des ses composantes $f_i = p_i \circ f : E \longrightarrow X_i$ est continue en a.*

4. *La topologie produit sur X est l'unique topologie sur X ayant la propriété suivante, appelée* ***propriété universelle*** *de la topologie produit : pour tout espace topologique E, une application $g : E \longrightarrow X$ est continue si et seulement si chacune des ses composantes $g_i = p_i \circ g : E \longrightarrow X_i$ est continue.*

Démonstration. 1. Pour montrer que p_i est une application ouverte, il suffit de montrer que l'image par p_i de tout ouvert élémentaire dans X est un ouvert de X_i. Soit $U = \prod_{j\in I} U_j$ où U_j est ouvert dans X_j pour tout $j \in I$ et où $U_j = X_j$ sauf au plus pour un nombre fini d'indices. Alors $p_i(U) = U_i$ est un ouvert de X_i, donc p_i est une application ouverte. Les propriétés 2, 3 et 4 sont des cas particuliers de la proposition 1.4.1. ■

Remarque 1.4.8. Les projections canoniques ne sont pas en général des applications fermées. En effet, il suffit de considérer l'ensemble $F = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ xy = 1\big\}$, alors F est un fermé de $\mathbb{R}^2$, mais par exemple, la première projection canonique de F sur $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}^*$ qui est ouvert non fermé dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1.4.9. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite d'espaces topologiques séparables. Alors l'espace topologique produit $\prod_{n\geq 0} X_n$ est séparable.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ une famille finie d'espaces topologiques et $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un point de l'espace topologique produit $X_1 \times \cdots \times X_n$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, l'application suivante est continue.

$$\begin{array}{ccc} X_j & \longrightarrow & X_1 \times \cdots \times X_n \\ x_j & \longmapsto & (a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) \end{array}$$

Soit f une application de $X_1 \times \cdots \times X_n$ dans l'espace topologique Y. Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on dispose d'une application

$$\begin{array}{ccc} X_j & \longrightarrow & Y \\ x_j & \longmapsto & f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) \end{array}$$

appelée la $j-$ième **application partielle** de f au point a. On sait, proposition 1.3.1, que la composée de deux applications continues est continue, on en déduit la proposition suivante :

Proposition 1.4.8. *Si $f : X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Y$ est une application continue en a, alors pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, la $j-$ième application partielle de f au point a est continue en $a_j \in X_j$.*

Remarque 1.4.10. La réciproque de la proposition précédente est inexacte. Considérons l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$. Les applications partielles associées à f sont continues sur $\mathbb{R}$, mais f n'est pas continue en $(0,0)$ car pour tout $x \neq 0$, on a $f(x,x) = \frac{1}{2}$.

On peut généraliser la proposition précédente à une famille quelconque d'espaces topologiques. En effet, soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et $a = (a_i)_{i\in I}$ un point de l'espace topologique produit $X = \prod_{i\in I} X_i$. Pour tout $j \in I$ et pour tout $x_j \in X_j$, on définit $W_{a,j}(x_j) = (x_i)_{i\in I}$, où $x_i = x_j$ si $i = j$ et $x_i = a_i$ si $i \neq j$. Alors $W_{a,j}$ est une application continue de X_j dans X. Soit f une application de X dans l'espace topologique Y. Pour tout $j \in I$, $\varphi_{a,j} = f \circ W_{a,j}$ est une application de X_j dans Y, appelée la $j-$ième **application partielle** de f au point a. Si f est continue en a, alors pour tout $j \in I$, $\varphi_{a,j}$ est continue en $a_j \in X_j$.

IV. Topologie finale

Soient X un ensemble, $\big((X_i, \mathcal{T}_i)\big)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour chaque $i \in I$, soit $f_i : X_i \longrightarrow X$ une application. La topologie grossière sur X rend continues toutes les applications f_i, mais on cherche ici à construire la topologie la plus fine sur X rendant continues toutes les applications f_i. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties U de X telles que, pour tout $i \in I$, $f_i^{-1}(U)$ soit ouvert dans X_i. Alors $\mathcal{T}$ est une topologie sur X, appelée la **topologie finale** associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$. Notons que si Y est un espace topologique et si $f : Y \longrightarrow X$ est une application, alors la topologie finale associée à f est tout simplement $\mathcal{T} = \big\{U \subset X\,;\, f^{-1}(U) \text{ ouvert de } Y\big\}$. Dans ce cas, la topologie finale sur X associée à f est appelée l'**image directe** par f de la topologie de Y.

Proposition 1.4.9. *Soient X un ensemble, $\big((X_i, \mathcal{T}_i)\big)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour chaque $i \in I$, soit $f_i : X_i \longrightarrow X$ une application.*

1. *La topologie finale $\mathcal{T}$ sur X associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$ est la plus fine rendant continues toutes les applications f_i.*

2. *La topologie finale sur X est l'unique topologie sur X ayant la propriété suivante, appelée* ***propriété universelle*** *de la topologie finale : pour tout espace topologique E, une application $g : X \longrightarrow E$ est continue si et seulement si pour tout $i \in I$, $g \circ f_i : X_i \longrightarrow E$ est continue.*

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f_i"'] & X \arrow[r, "g"] & E \end{tikzcd}$$

Démonstration. 1. Par définition de la topologie finale $\mathcal{T}$ sur X, pour tout $i \in I$ et pour tout $U \in \mathcal{T}$, on a $f_i^{-1}(U) \in \mathcal{T}_i$, donc f_i est continue. Soit $\mathcal{T}'$ une topologie sur X rendant continues toutes les applications f_i. Soit $U \in \mathcal{T}'$, alors pour tout $i \in I$, on a $f_i^{-1}(U) \in \mathcal{T}_i$, donc on a $U \in \mathcal{T}$. Par conséquent, on a $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, *i.e.* $\mathcal{T}$ est plus fine que $\mathcal{T}'$.
2. On munit d'abord X de la topologie finale $\mathcal{T}$, et soient E un espace topologique et $g : X \longrightarrow E$ une application. La composée de deux applications continues est continue, voir proposition 1.3.1, donc si g est continue, alors pour tout $i \in I$, $g \circ f_i$ est continue. Réciproquement, supposons que pour tout $i \in I$, $g \circ f_i$ est continue. Alors pour tout ouvert V de E et pour tout $i \in I$, $f_i^{-1}\big(g^{-1}(V)\big) = (g \circ f_i)^{-1}(V)$ est un ouvert de X_i, donc on a $g^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Par conséquent, g est continue.
Soit $\mathcal{T}'$ une topologie sur X vérifiant la propriété universelle. L'application identique $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}') \longrightarrow (X, \mathcal{T}')$ est continue, donc pour tout $i \in I$, l'application $f_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \longrightarrow (X, \mathcal{T}')$ est continue. Donc $\mathcal{T}'$ rend continues toutes les applications f_i. Par conséquent, on a $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Puisque $\mathcal{T}$ rend continues toutes les applications f_i, alors l'application identique $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}') \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ est continue, donc on a $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. D'où on a $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. ■

V. Topologie quotient

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X et $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient. La **topologie quotient** sur $X/\mathcal{R}$ est la topologie finale associée à l'application quotient q. Autrement dit, une partie U de $X/\mathcal{R}$ est ouverte pour la topologie quotient si et seulement si $q^{-1}(U)$ est un ouvert de X. Muni de la topologie quotient, $X/\mathcal{R}$ est dit l'**espace topologique quotient** de X par la relation $\mathcal{R}$. Notons aussi qu'une partie F de $X/\mathcal{R}$ est fermée pour la topologie quotient si et seulement si $q^{-1}(F)$ est un fermé de X. On déduit de la proposition précédente le résultat suivant :

Proposition 1.4.10. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X et $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient.*

1. *La topologie quotient sur $X/\mathcal{R}$ est la plus fine rendant continue l'application q.*

2. *La topologie quotient sur $X/\mathcal{R}$ est l'unique topologie sur $X/\mathcal{R}$ ayant la propriété suivante, appelée* ***propriété universelle*** *de la topologie quotient : pour tout espace topologique E, une application $g : X/\mathcal{R} \longrightarrow E$ est continue si et seulement si $g \circ q : X \longrightarrow E$ est continue.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[rr, bend right, "g \circ q"'] & X/\mathcal{R} \arrow[r, "g"] & E \end{tikzcd}$$

Remarque 1.4.11. Soient X un espace topologique séparable et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X, alors l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ est séparable.

Définition 1.4.3. Soient X un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X et $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient.

1. Soit A un sous-ensemble de X, le **saturé** de A pour $\mathcal{R}$ est l'ensemble $q^{-1}(q(A)) = \big\{y \in X \text{ ; il existe } x \in A \text{ avec } x\mathcal{R}y\big\}$. Autrement dit, le saturé de A est la réunion des classes d'équivalence des éléments de A.
2. On dit que A est **saturé** pour $\mathcal{R}$ si $A = q^{-1}(q(A))$. Autrement dit, A est saturé si, pour tout $x \in A$, la classe d'équivalence de x est contenue dans A.
3. On dit que la relation $\mathcal{R}$ est **ouverte** (*resp.* **fermée**) si le saturé de tout ouvert (*resp.* fermé) de X est un ouvert (*resp.* fermé) de X.

Remarque 1.4.12. Soient X un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X et $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient. On munit $X/\mathcal{R}$ de la topologie quotient.

1. Une partie A de X est saturée pour $\mathcal{R}$ si et seulement si il existe une partie B de $X/\mathcal{R}$ telle que $A = q^{-1}(B)$.
2. Une partie A de X est saturée pour $\mathcal{R}$ si et seulement son complémentaire $X \setminus A$ est saturé pour $\mathcal{R}$.
3. La relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est ouverte (*resp.* fermée) si et seulement si l'application quotient q est ouverte (*resp.* fermée).
4. L'image d'un ouvert de X saturé pour $\mathcal{R}$ est un ouvert de $X/\mathcal{R}$.
5. L'image d'un fermé de X saturé pour $\mathcal{R}$ est un fermé de $X/\mathcal{R}$.

Exemple 1.4.2. Soient X un espace topologique, F une partie fermée de X et $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence dans X obtenue en identifiant entre eux tous les éléments de F ; autrement dit, la relation d'équivalence dont les classes sont F et les ensembles $\{x\}$ pour $x \in X \setminus F$. Soient $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient et G un fermé de X. Alors on a $q^{-1}(q(G)) = F \cup G$ qui est fermé dans X. Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence fermée dans X.

Remarque 1.4.13 (propriété universelle de l'application quotient). Soient f une application d'un ensemble X dans un ensemble Y et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) f est constante sur les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.

(ii) Il existe une (unique) application $\widetilde{f}$ de $X/\mathcal{R}$ dans Y tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \\ & X/\mathcal{R} \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Dans le cas où X et Y sont des espaces topologiques et $X/\mathcal{R}$ est muni de la topologie quotient, l'application f est continue si et seulement si $\widetilde{f}$ est continue. Autrement dit, les applications continues de $X/\mathcal{R}$ dans un espace topologique Y s'identifient aux applications continues de X dans Y constantes sur les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.

Exemple 1.4.3. Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et T-périodique et $G = T\mathbb{Z}$ son groupe de périodes. Considérons sur $\mathbb{R}$, muni de la topologie euclidienne, la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par $x\,\mathcal{R}\,y \iff x - y \in G$. Notons $\mathbb{R}/G$ l'espace topologique quotient, alors il existe une unique application continue $\widetilde{f}$ de $\mathbb{R}/G$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f = \widetilde{f} \circ q$. Donc étudier les fonctions continues T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ revient à étudier les fonctions continues de $\mathbb{R}/G$ dans $\mathbb{R}$, d'où l'intérêt de la notion de la topologie quotient.

Remarque 1.4.14. Soient X, Y deux ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On note $\mathcal{R}_f$ la relation d'équivalence sur X donnée par $x\,\mathcal{R}_f\,x' \iff f(x) = f(x')$. Alors il existe une unique application $\widetilde{f}$ de $X/\mathcal{R}_f$ dans Y tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \\
& X/\mathcal{R}_f \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

De plus $\widetilde{f}$ est injective. Si f est surjective alors $\widetilde{f}$ est bijective. Dans le cas où X et Y sont des espaces topologiques et $X/\mathcal{R}_f$ est muni de la topologie quotient, l'application f est continue si et seulement si $\widetilde{f}$ est continue. Notons aussi que si f est bijective, alors X est homéomorphe à $X/\mathcal{R}_f$ et on peut identifier $\widetilde{f}$ à f.

Proposition 1.4.11. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue surjective. On munit $X/\mathcal{R}_f$ de la topologie quotient. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'application $\widetilde{f} : X/\mathcal{R}_f \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme.

(ii) L'image par f de tout ouvert de X saturé pour $\mathcal{R}_f$ est un ouvert de Y.

(iii) L'image par f de tout fermé de X saturé pour $\mathcal{R}_f$ est un fermé de Y.

(iv) Pour toute partie U de Y, U est ouvert dans Y si et seulement si $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

(v) Pour toute partie F de Y, F est fermé dans Y si et seulement si $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 1 du supplément.

Corollaire 1.4.1. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue surjective. Si f est une application ouverte ou fermée, alors $\widetilde{f} : X/\mathcal{R}_f \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme.*

Corollaire 1.4.2. *Soient X un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X et $\mathcal{T}$ une topologie sur $X/\mathcal{R}$ telle que l'application quotient $q : X \longrightarrow (X/\mathcal{R}, \mathcal{T})$ soit continue et ouverte ou fermée, alors $\mathcal{T}$ est égale à la topologie quotient.*

Espace quotient d'un sous-espace

Soient X un espace topologique, A un sous-espace de X, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X et $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient. Soit

$$\begin{array}{cccc} f : & A & \longrightarrow & q(A) \\ & a & \longmapsto & q(a) \end{array}$$

la restriction de q à A. Alors f est continue et surjective. La relation d'équivalence $\mathcal{R}_f$ sur A n'est autre que la relation $\mathcal{R}_A$ induite par $\mathcal{R}$ sur A. L'application $\widetilde{f} : A/\mathcal{R}_A \longrightarrow q(A)$ est bijective et continue. De plus, on a le résultat suivant :

Proposition 1.4.12. *Avec les mêmes notations que ci-dessus, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'application $\widetilde{f} : A/\mathcal{R}_A \longrightarrow q(A)$ est un homéomorphisme.

(ii) Pour tout ouvert U dans A et saturé pour $\mathcal{R}_A$, il existe un ouvert V dans X et saturé pour $\mathcal{R}$ tel que $U = A \cap V$.

(iii) Pour tout fermé F dans A et saturé pour $\mathcal{R}_A$, il existe un fermé F' dans X et saturé pour $\mathcal{R}$ tel que $F = A \cap F'$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit U un ouvert de A et saturé pour $\mathcal{R}_A$. Comme $\widetilde{f}$ est un homéomorphisme, il résulte de la proposition précédente que $q(U) = f(U)$ est un ouvert de $q(A)$, donc il existe un ouvert W dans $X/\mathcal{R}$ tel que $q(U) = q(A) \cap W$. Alors $q^{-1}(W)$ est un ouvert de X et saturé pour $\mathcal{R}$ tel que $U = A \cap q^{-1}(W)$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit U un ouvert de A et saturé pour $\mathcal{R}_A$. Par hypothèse, il existe un ouvert V dans X et saturé pour $\mathcal{R}$ tel que $U = A \cap V$. Alors $q(V)$ est un ouvert de $X/\mathcal{R}$, voir remarque 1.4.12, et on a $q(A) \cap q(V) = q(A \cap V) = q(U)$. D'où $f(U) = q(U)$ est ouvert dans $q(A)$. Il résulte de la proposition précédente que $\widetilde{f}$ est un homéomorphisme.
L'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) s'obtient par passage au complémentaire. ■

Corollaire 1.4.3. *Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a :*

1. *Si A est saturé pour $\mathcal{R}$ et ouvert (resp. fermé) dans X, alors $\widetilde{f} : A/\mathcal{R}_A \longrightarrow q(A)$ est un homéomorphisme.*

2. *Si A est saturé pour $\mathcal{R}$ et si q est une application ouverte (resp. fermée), alors $\widetilde{f} : A/\mathcal{R}_A \longrightarrow q(A)$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. 1. Si A est saturé pour $\mathcal{R}$ et ouvert (*resp.* fermé) dans X, et si U est un ouvert (*resp.* fermé) de A et saturé pour $\mathcal{R}_A$, alors U est un ouvert (*resp.* fermé) dans X et saturé pour $\mathcal{R}$.
2. Supposons A saturé pour $\mathcal{R}$. Si U est un ouvert (*resp.* fermé) de A et saturé pour $\mathcal{R}_A$, alors U est saturé pour $\mathcal{R}$ et il existe un ouvert V (*resp.* fermé F) dans X tel que $U = A \cap V$ (*resp.* $U = A \cap F$). Puisque U et A sont saturés pour $\mathcal{R}$, alors on a $U = A \cap V = A \cap q^{-1}(q(V))$ (*resp.* $U = A \cap V = A \cap q^{-1}(q(F))$). Comme q est ouverte (*resp.* fermée), alors $q^{-1}(q(V))$ (*resp.* $q^{-1}(q(F))$) est ouvert (*resp.* fermé) de X et saturé pour $\mathcal{R}$. ■

1.5 Espaces topologiques séparés

La définition d'un espace topologique est très générale ; pour avoir des théorèmes intéressants, on est obligé d'imposer des axiomes supplémentaires.

Définition 1.5.1. Soit X un espace topologique.

1. On dit que X est un T_0**-espace** si pour tous points distincts x et y dans X, il existe un voisinage de l'un qui ne contient pas l'autre point.

2. On dit que X est un T_1**-espace** si pour tous points distincts x et y dans X, il existe des voisinages V de x, W de y dans X tels que $y \notin V$ et $x \notin W$.

3. On dit que X est un T_2**-espace** ou X est **séparé** ou encore X est de **Hausdorff** s'il vérifie la propriété suivante, appelée **axiome de Hausdorff**.
   Pour tous points distincts x et y dans X, il existe un voisinage V_x de x dans X et un voisinage V_y de y dans X tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.

On a évidemment les implications : T_2-espace $\Longrightarrow$ T_1-espace $\Longrightarrow$ T_0-espace. Mais les implications réciproques sont en général fausses.

Exemple 1.5.1. 1. Tout ensemble de cardinal ≥ 2, muni de la topologie grossière n'est pas un T_0-espace.

2. Tout ensemble infini muni de la topologie cofinie est un T_1-espace non séparé.

3. Tout ensemble totalement ordonné X muni de la topologie de l'ordre est un espace séparé. En effet, soient x et y deux éléments distincts dans X. On peut supposer $x < y$. Alors les demi-droites ouvertes $\{z \in X \ ; \ z < y\}$ et $\{z \in X \ ; \ z > x\}$ sont disjoints et contiennent respectivement x et y.

4. L'espace $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est séparé. Ceci résulte de ce qui précède, mais donnons une autre preuve. Soient x et y deux éléments distincts dans $\mathbb{R}$. On peut supposer $x < y$. Alors les intervalles ouverts $\left]x-1, \frac{x+y}{2}\right[$ et $\left]\frac{x+y}{2}, y+1\right[$ sont disjoints et contiennent respectivement x et y.

Proposition 1.5.1. *Un espace topologique X est un T_1-espace si et seulement si tout point de X est fermé.*

Démonstration. Supposons d'abord que tout point de X est fermé. Soient x et y deux éléments distincts de X. Soient $V = X \setminus \{y\}$ et $W = X \setminus \{x\}$, alors V et W sont des ouverts de X contenant respectivement x et y et on a $y \notin V$ et $x \notin W$. Réciproquement, supposons que X est un T_1-espace et montrons que tout point de X est fermé. Soit $x \in X$, pour montrer que $\{x\}$ est fermé, il faut et il suffit de montrer que $X \setminus \{x\}$ est un ouvert de X. Soit $y \in X \setminus \{x\}$, alors il existe un voisinage V de y dans X tel que $x \notin V$, *i.e.* $V \subset X \setminus \{x\}$. Donc $X \setminus \{x\}$ est un voisinage de y dans X. Par conséquent, $X \setminus \{x\}$ est un voisinage de chacun de ses points, donc $X \setminus \{x\}$ est un ouvert par la proposition 1.1.2. ■

Corollaire 1.5.1. *Soit X un espace topologique séparé, alors tout point de X est fermé.*

Proposition 1.5.2. *Soit X un espace topologique séparé.*

1. *Si Y est un espace topologique et s'il existe une application continue injective de Y dans X, alors Y est séparé.*

2. *Tout espace topologique homéomorphe à X est séparé.*

3. *Tout sous-espace topologique de X est séparé.*

Démonstration. 1. Soient a, b des points distincts de Y et $f : Y \longrightarrow X$ une application injective continue. Puisque f est injective, on a $f(a) \neq f(b)$. Comme X est séparé, il existe un voisinage V de $f(a)$ dans X et un voisinage W de $f(b)$ dans X tels que $V \cap W = \emptyset$. Alors $f^{-1}(V)$ et $f^{-1}(W)$ sont des voisinages disjoints de a et b dans Y. Donc Y est séparé.
Les propriétés 2 et 3 résultent de 1. ■

Définition 1.5.2. Soient X un ensemble et $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. On suppose que pour tout $i \in I$, il existe une application $f_i : X \longrightarrow Y_i$. On dit que la famille $(f_i)_{i\in I}$ est **séparante** si pour tous x, $y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $i \in I$ tel que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

Lemme 1.5.1. *Soient X un ensemble et $\big((Y_i, \mathcal{T}_i)\big)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques séparés. On suppose que pour tout $i \in I$, il existe une application $f_i : X \longrightarrow Y_i$. Si la famille $(f_i)_{i\in I}$ est séparante, alors X muni de la topologie initiale associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$ est séparé.*

Démonstration. Soient x, $y \in X$ tels que $x \neq y$. Comme la famille $(f_i)_{i\in I}$ est séparante, il existe $i \in I$ tel que $f_i(x) \neq f_i(y)$. Or l'espace topologique $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ est séparé, donc il existe deux ouverts disjoints U et V dans $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ tels que $f_i(x) \in U$ et $f_i(y) \in V$. Alors $f_i^{-1}(U)$ et $f_i^{-1}(V)$ sont des ouverts disjoints dans X contenant respectivement x et y. Donc X est séparé. ■

Proposition 1.5.3. *Soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et $X = \prod_{i\in I} X_i$ l'espace topologique produit. Alors X est séparé si et seulement si pour tout $i \in I$, X_i est séparé.*

Démonstration. Supposons d'abord que pour tout $i \in I$, X_i est séparé. Pour tout $i \in I$, soit $p_i : X \longrightarrow X_i$ la projection canonique. Puisque la famille $(p_i)_{i\in I}$ est séparante, il résulte du lemme précédent que X est séparé.
Réciproquement, supposons que X est séparé. Soit $a = (a_i)_{i\in I}$ un point de X. Pour tout $j \in I$ et pour tout $x_j \in X_j$, on définit $W_{a,j}(x_j) = (x_i)_{i\in I}$, où $x_i = x_j$ si $i = j$ et $x_i = a_i$ si $i \neq j$. Alors $W_{a,j}$ est une application continue injective de X_j dans X. Il résulte de la proposition 1.5.2 que pour tout $j \in I$, X_j est séparé. ■

Proposition 1.5.4. *Soit X un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *X est séparé.*

(ii) *La diagonale $\Delta = \big\{(x, x)\ ;\ x \in X\big\}$ est fermée dans l'espace topologique produit $X \times X$.*

(iii) *L'intersection des voisinages fermés d'un point quelconque de X est l'ensemble réduit à ce point.*

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Pour montrer que Δ est un fermé de $X \times X$, on montre que son complémentaire est ouvert. Soit $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$, alors $x \neq y$. Puisque X est séparé, il existe un voisinage V de x dans X et un voisinage W de y dans X tels que $V \cap W = \emptyset$, d'où $V \times W$ est un voisinage de (x, y) dans $X \times X$ et on a $V \times W \subset (X \times X) \setminus \Delta$. Par conséquent, $(X \times X) \setminus \Delta$ est ouvert dans $X \times X$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. Alors $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$ qui est ouvert, donc il existe un voisinage V de x dans X et un voisinage W de y dans X tels que $(x, y) \in V \times W \subset (X \times X) \setminus \Delta$, d'où $V \cap W = \emptyset$. Donc X est séparé.
Preuve de (i) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des voisinages fermés d'un point $x \in X$. Alors $\mathcal{F} \neq \emptyset$ et on a $x \in \bigcap\limits_{V \in \mathcal{F}} V$. Soit $y \in X$ tel que $y \neq x$. Comme X est séparé, alors il existe un voisinage U de x dans X et un voisinage ouvert W de y dans X tels que $U \cap W = \emptyset$, d'où $\overline{U}$ est un voisinage fermé de x dans X tel que $\overline{U} \cap W = \emptyset$. Donc on a $\big(\bigcap\limits_{V \in \mathcal{F}} V\big) \cap W = \emptyset$, d'où $y \notin \bigcap\limits_{V \in \mathcal{F}} V$. Par conséquent, on a $\bigcap\limits_{V \in \mathcal{F}} V = \{x\}$.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. Par hypothèse, il existe un voisinage fermé V de x dans X tel que $y \notin V$. Alors $X \setminus V$ est un ouvert de X contenant y et on a $V \cap (X \setminus V) = \emptyset$. Donc X est séparé. ∎

Proposition 1.5.5. *Soient f et g deux applications continues d'un espace topologique X dans un espace topologique séparé Y. Alors on a :*

1. *L'ensemble $F = \big\{x \in X \; ; \; f(x) = g(x)\big\}$ est fermé dans X.*
2. *Si $f = g$ sur une partie dense dans X, alors $f = g$.*

Démonstration. 1. On pose $h(x) = (f(x), g(x))$, alors h est une application continue de X dans $Y \times Y$ et on a $F = h^{-1}(\Delta)$, où $\Delta = \{(y, y) \; ; \; y \in Y\}$. Comme Y est séparé, d'après la proposition précédente, Δ est fermé dans $Y \times Y$. Par conséquent, F est fermé dans X.
2. Soit A une partie dense dans X telle que pour tout $x \in A$, on ait $f(x) = g(x)$. On en déduit que $A \subset F$. Par conséquent, on a $X = \overline{A} \subset F \subset X$, d'où $X = F$. Autrement dit, on a $f = g$. ∎

La difficulté principale des espaces topologiques quotients est qu'ils ne sont pas en général séparés.

Exemple 1.5.2. Considérons sur $\mathbb{R}$, muni de la topologie euclidienne, la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par $x \,\mathcal{R}\, y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. On note $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ l'espace topologique quotient. Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ muni de la topologie quotient, alors $q^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}$ et il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{Q} + x \subset q^{-1}(F)$. Or $\mathbb{Q} + x$ est dense dans $\mathbb{R}$, voir Appendice C, donc $q^{-1}(F) = \mathbb{R}$, d'où $F = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Par conséquent, la topologie quotient sur $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est la topologie grossière. Comme $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est un ensemble infini, on en déduit que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas séparé.

Remarque 1.5.1. Si X et Y sont des espaces topologiques avec Y séparé et si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue, alors l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}_f$ est séparé. Ceci résulte de la remarque 1.4.14 et de la proposition 1.5.2.

La proposition suivante donne un critère de séparation des espaces topologiques quotients.

Proposition 1.5.6. *Soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un espace topologique X et $G(\mathcal{R}) = \big\{(x, y) \in X \times X \ ; \ x\mathcal{R}y\big\}$ son graphe et $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient.*

1. *Si l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ est séparé, alors $G(\mathcal{R})$ est fermé dans l'espace topologique produit $X \times X$.*

2. *Si $\mathcal{R}$ est ouverte et si $G(\mathcal{R})$ est fermé dans l'espace topologique produit $X \times X$, alors l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ est séparé.*

Démonstration. 1. Supposons $X/\mathcal{R}$ séparé, et soit $(x, y) \notin G(\mathcal{R})$, *i.e.* $q(x) \neq q(y)$. Soient U et V deux voisinages ouverts disjoints de $q(x)$ et $q(y)$ respectivement. Alors $q^{-1}(U)$ et $q^{-1}(V)$ sont deux ouverts disjoints dans X contenant respectivement x et y et on a $\big(q^{-1}(U) \times q^{-1}(V)\big) \cap G(\mathcal{R}) = \emptyset$ car $U \cap V = \emptyset$. Donc le complémentaire de $G(\mathcal{R})$ dans $X \times X$ est ouvert, d'où $G(\mathcal{R})$ est fermé dans $X \times X$.
2. Soient $q(x), q(y) \in X/\mathcal{R}$ tels que $q(x) \neq q(y)$, *i.e.* $(x, y) \notin G(\mathcal{R})$, alors il existe des voisinages ouverts U_x et U_y respectivement de x et y dans X tels que $(U_x \times U_y) \cap G(\mathcal{R}) = \emptyset$ car le complémentaire de $G(\mathcal{R})$ dans $X \times X$ est ouvert. Puisque $\mathcal{R}$ est ouverte, alors $q(U_x)$ et $q(U_x)$ sont des voisinages ouverts respectivement de $q(x)$ et $q(y)$, et on a $q(U_x) \cap q(U_x) = \emptyset$ car $(U_x \times U_y) \cap G(\mathcal{R}) = \emptyset$. Par conséquent, $X/\mathcal{R}$ est séparé. ■

1.6 Limites et valeur d'adhérence

Définition 1.6.1. Soient X et Y des espaces topologiques, A une partie de X, $a \in \overline{A}$ et $f : A \longrightarrow Y$ une application.

1. On dit qu'un point ℓ de Y est **valeur d'adhérence** de f **en** a si, pour tout voisinage V de ℓ dans Y et tout voisinage U de a dans X, il existe $x \in A \cap U$ tel que $f(x) \in V$.

2. On dit qu'un point ℓ de Y est **limite** de f **en** a, ou que $f(x)$ **tend vers** ℓ **lorsque** x **tend vers** a si, pour tout voisinage V de ℓ dans Y, il existe un voisinage W de a dans X tel que $f(W \cap A) \subset V$.

3. Soit B une partie de A tel que $a \in \overline{B}$ et soit f_B la restriction de f à B. On dit qu'un point ℓ de Y est **limite** de f **en** a **suivant** B, ou que $f(x)$ **tend vers** ℓ **lorsque** x **tend vers** a **en restant dans** B si ℓ est une limite de f_B en a. Autrement dit, pour tout voisinage V de ℓ dans Y, il existe un voisinage W de a dans X tel que $f(W \cap B) \subset V$.

Dans la définition précédente, on aurait pu se contenter de prendre V appartenant à une base de voisinages de ℓ dans Y. Notons que si $a \in A$, alors $f(a)$ est une valeur d'adhérence de f en a. Notons aussi que si on ne supposait pas $a \in \overline{A}$, il existerait un voisinage U de a dans X tel que $A \cap U = \emptyset$. Par conséquent, pour tout point ℓ de Y et pour tout voisinage V de ℓ dans Y, il existerait un voisinage $W = U$ de a dans X tel que $f(A \cap W) \subset V$, donc la définition ci-dessus serait sans intérêt. D'où la nécessité de supposer $a \in \overline{A}$.

Proposition 1.6.1. *Soient X et Y des espaces topologiques, A une partie de X, $a \in A$ et $f : A \longrightarrow Y$ une application. Pour que $f(a)$ soit limite de f en a il faut et il suffit que f soit continue en a.*

La preuve de cette proposition résulte immédiatement de la définition de la continuité et de la définition d'une limite.

Corollaire 1.6.1. *Soient X et Y des espaces topologiques, A une partie de X, $a \in \overline{A} \setminus A$, $\ell \in Y$ et $f : A \longrightarrow Y$ une application. On munit $A \cup \{a\}$ de la topologie induite par celle de X et on considère l'application $g : A \cup \{a\} \longrightarrow Y$ telle que $g(a) = \ell$ et dont la restriction à A est f. Alors ℓ est une limite de f en a si et seulement si l'application g est continue en a.*

Proposition 1.6.2. *Soient X et Y des espaces topologiques, A une partie de X, $a \in \overline{A}$, $\ell \in Y$ et $f : A \longrightarrow Y$ une application.*

1. *Si ℓ est une limite de f en a, alors ℓ est une valeur d'adhérence de f en a.*
2. *L'ensemble des valeurs d'adhérence de f en a est $\bigcap\limits_{U \in \mathcal{V}(a)} \overline{f(U \cap A)}$, où $\mathcal{V}(a)$ désigne l'ensemble des voisinages de a dans X. C'est donc une partie fermée de Y.*
3. *Si ℓ est une limite ou une valeur d'adhérence de f en a, alors $\ell \in \overline{f(A)}$.*

Démonstration. 1. Soit V un voisinage de ℓ dans Y, alors il existe un voisinage W de a dans X tel que $f(W \cap A) \subset V$. Pour tout voisinage U de a dans X, $U \cap W$ est un voisinage de a dans X, donc $U \cap W \cap A \neq \emptyset$. Par conséquent, il existe $x \in U \cap W \cap A \subset U \cap A$ tel que $f(x) \in V$. Donc ℓ est une valeur d'adhérence de f en a.
2. Soient $\ell \in \bigcap\limits_{U \in \mathcal{V}(a)} \overline{f(U \cap A)}$ et V un voisinage de ℓ dans Y. Alors pour tout $U \in \mathcal{V}(a)$, on a $\ell \in \overline{f(U \cap A)}$, d'où $V \cap f(U \cap A) \neq \emptyset$. Donc il existe $x \in U \cap A$ tel que $f(x) \in V$. Par conséquent, ℓ est une valeur d'adhérence de f en a. Réciproquement, soit ℓ une valeur d'adhérence de f en a. Alors pour tout voisinage V de ℓ dans Y et tout voisinage U de a dans X, il existe $x \in U \cap A$ tel que $f(x) \in V$, d'où $V \cap f(U \cap A) \neq \emptyset$. Donc pour tout $U \in \mathcal{V}(a)$, on a $\ell \in \overline{f(U \cap A)}$, d'où $\ell \in \bigcap\limits_{U \in \mathcal{V}(a)} \overline{f(U \cap A)}$.
3. Ceci résulte de ce qui précède. ■

Remarque 1.6.1.

1. Une application peut ne pas avoir une limite ; si $X = Y = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle et si $A = [0, 1]$, $a = 1$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $f(1) = 1$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1[$. Alors f n'a pas de limite en a.
2. Une application peut avoir plusieurs limites. Ainsi, si Y est muni de la topologie grossière, tout point ℓ de Y est limite de f en a, puisque le seul voisinage de ℓ est Y.
3. La notion de point limite n'est intéressante que dans le cas où on est assuré de l'unicité de cette limite. D'où l'importance de la proposition suivante.

Proposition 1.6.3. *Soient X un espace topologique, Y un espace topologique séparé, A une partie de X, $a \in \overline{A}$ et $f : A \longrightarrow Y$ une application. Alors on a :*

1. *Si ℓ est une limite de f en a, alors ℓ est la seule valeur d'adhérence de f en a.*
2. *L'application f admet au plus une limite en a.*
3. *Si $a \in A$ et si f admet en a la limite ℓ, alors $\ell = f(a)$.*

Démonstration. 1. On a vu, proposition précédente, que ℓ est une valeur d'adhérence de f en a. Soit ℓ' une valeur d'adhérence de f en a. Si $\ell' \neq \ell$, alors il existe un voisinage V_1 de ℓ' dans Y et un voisinage V_2 de ℓ dans Y tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Il existe un voisinage W de a dans X tel que $f(W \cap A) \subset V_2$. Alors pour tout $x \in W \cap A$, $f(x) \notin V_1$ ce qui est impossible car ℓ' est une valeur d'adhérence de f en a. Donc on a $\ell' = \ell$. Autrement dit, ℓ est la seule valeur d'adhérence de f en a.
2. Ceci résulte de 1.
3. Puisque $a \in A$ et ℓ est la limite de f en a, alors pour tout voisinage V de ℓ dans Y, on a $f(a) \in V$, d'où $f(a) = \ell$ car Y est séparé. ∎

Remarque 1.6.2. Soit $X = Y = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, alors Y est séparé.

1. Si $A = [0, 1[$, $a = 1$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in A \cap \mathbb{Q}\,, \\ x & \text{si} \quad x \notin A \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

   Alors 0 est l'unique valeur d'adhérence de f en 1, mais f n'admet pas de limite en 1.

2. Si $A =]0, 1[\cup]1, 2[$, $a = 1$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in]0, 1[$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in]1, 2[$. Alors $\{0, 1\}$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de f en 1.

Notations. Soient X un espace topologique, Y un espace topologique séparé, A une partie de X, $a \in \overline{A}$ et $f : A \longrightarrow Y$ une application.

1. Si f admet la limite ℓ en a, on écrit $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

2. Si B est une partie de A tel que $a \in \overline{B}$ et si f admet la limite ℓ en a suivant B, on écrit $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x)$. Si l'ensemble B est donné par une « formule », il arrive qu'au lieu d'écrire $x \in B$, on écrive cette formule. Par exemple, si $a \in A$ et $B = A \setminus \{a\}$, où a est un point d'accumulation de A, au lieu d'écrire $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x)$, on écrit $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$.

3. Soient A une partie de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $B = A \cap]-\infty, a[$, $C = A \cap]a, +\infty[$ et $f : A \longrightarrow Y$ une application. Si $a \in \overline{B}$, on dit que f admet une **limite à gauche** en a si f admet une limite en a suivant B ; celle-ci se note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$. De même, si $a \in \overline{C}$, on dit que f admet une **limite à droite** en a si f admet une limite en a suivant C ; celle-ci se note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$.

Remarque 1.6.3. Soient X un espace topologique, A une partie de X et $a \in A$, où a est un point d'accumulation de A. Soient Y un espace topologique séparé et $f : A \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.

(ii) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$.

(iii) f est continue en a.

Dans ce cas, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$.

Remarque 1.6.4. Soient X et Y des espaces topologiques, A une partie de X, $a \in \overline{A}$ et $f : A \longrightarrow Y$ une application. Soient B une partie de A tel que $a \in \overline{B}$ et ℓ un point de Y. Si ℓ est une limite de f en a, alors ℓ est une limite de f en a suivant B, mais la réciproque n'est pas toujours vraie. On a cependant le résultat suivant :

Proposition 1.6.4. *Soient X et Y des espaces topologiques, A, B deux parties de X, $a \in \overline{A} \cap \overline{B}$ et $f : A \cup B \longrightarrow Y$ une application. Soit $\ell \in Y$, alors ℓ est une limite de f en a si et seulement si ℓ est une limite de f en a suivant A et ℓ est une limite de f en a suivant B*

Démonstration. Notons que $a \in \overline{A} \cap \overline{B}$ entraîne $a \in \overline{A \cup B}$. Puisque $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, il est clair que si ℓ est une limite de f en a, alors ℓ est une limite de f en a suivant A et ℓ est une limite de f en a suivant B. Réciproquement, soit V un voisinage de ℓ dans Y et W_1, W_2 des voisinages de a dans X tels que $f(W_1 \cap A) \subset V$ et $f(W_2 \cap B) \subset V$. Alors $W_1 \cap W_2$ est un voisinage de a dans X et on a $f(W_1 \cap W_2 \cap (A \cup B)) \subset V$. Donc ℓ est une limite de f en a ■

On déduit de la proposition précédente que si D est une partie de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $A = D \cap]-\infty, a[$, $B = D \cap]a, +\infty[$ et $f : D \longrightarrow Y$ est une application et si $a \in \overline{A} \cap \overline{B}$, alors f admet une limite ℓ lorsque x tend vers a si et seulement si f admet ℓ comme limite à droite et comme limite à gauche en a.

Proposition 1.6.5 (composition des limites). *Soient X, Y et Z des espaces topologiques, A une partie de X, $f : A \longrightarrow Y$ une application, B une partie de Y contenant $f(A)$, $g : B \longrightarrow Z$ une application, $a \in \overline{A}$, $b \in Y$ et $\ell \in Z$. Si b est une limite de f en a et si ℓ est une limite de g en b, alors ℓ est une limite de $g \circ f$ en a.*

Démonstration. Puisque b est une limite de f en a, on a $b \in \overline{f(A)} \subset \overline{B}$. Pour tout voisinage V de ℓ dans Z, il existe un voisinage U de b dans Y tel que $g(U \cap B) \subset V$; il existe aussi un voisinage W de a dans X tel que $f(W \cap A) \subset U$. D'où on a $f(W \cap A) = f(W \cap A) \cap B \subset U \cap B$. Donc on a $(g \circ f)(W \cap A) = g(f(W \cap A)) \subset g(U \cap B) \subset V$. Par conséquent, ℓ est une limite de $g \circ f$ en a. ■

Corollaire 1.6.2. *Soient X, Y et Z des espaces topologiques, A une partie de X, $f : A \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ des applications, $a \in \overline{A}$ et $b \in Y$. Si b est une limite de f en a et si g est continue en b, alors $g(b)$ est une limite de $g \circ f$ en a.*

Démonstration. Ceci résulte de la proposition précédente et de la proposition 1.6.1. ■

1.7 Suites dans les espaces topologiques

Une **suite** de points d'un ensemble non vide X est une application f de $\mathbb{N}$ dans X. L'image $f(n)$ d'un $n \in \mathbb{N}$ par f sera notée x_n et sera appelée **terme d'ordre** n de la suite f. La suite elle-même f sera représentée par la notation $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(x_n)_{n \geq 0}$, ou simplement (x_n). Il importe cependant de ne pas confondre une suite avec l'ensemble de ses valeurs.

Par extension, on appelle également suite dans X, une application $f : A \longrightarrow X$ d'une partie non vide A de $\mathbb{N}$ dans X. Si A est l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$; on dit alors que la suite f est une **suite finie**, et on la note $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$, ou encore $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Si $A = \{n \in \mathbb{N} \; ; \; n \geq n_0\}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$, la suite f est alors notée $(x_n)_{n \geq n_0}$. S'il est nécessaire, on pourrait poser $x_n = x$ pour $0 \leq n < n_0$ où x est un élément quelconque de X.
Une suite $(y_n)_{n \geq 0}$ de points de X est appelée **sous-suite** ou **suite extraite** de $(x_n)_{n \geq 0}$ s'il existe une application strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ dans lui-même telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $y_n = x_{\varphi(n)}$ [†]. En général, on note une telle sous-suite $(x_{n_k})_{k \geq 0}$, où $n_k = \varphi(k)$.

Lemme 1.7.1. *Soit* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *une application strictement croissante. Alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $\varphi(n) \geq n$.

Démonstration. On montre ce résultat par récurrence sur n. On a $\varphi(0) \in \mathbb{N}$, d'où $\varphi(0) \geq 0$. Supposons que pour certain $n \geq 0$, on a $\varphi(n) \geq n$. Comme φ est strictement croissante, alors on a $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$. Or $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$, d'où $\varphi(n+1) \geq n+1$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(n) \geq n$. ∎

Définition 1.7.1. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite dans un espace topologique X.

1. On dit qu'un point ℓ de X est **valeur d'adhérence de la suite** $(x_n)_{n \geq 0}$ si, pour tout voisinage V de ℓ dans X et pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $x_n \in V$.

2. On dit qu'un point ℓ de X est **limite de la suite** $(x_n)_{n \geq 0}$, ou que cette suite **converge vers** ℓ, ou encore que x_n **tend vers** ℓ **lorsque** n **tend vers** $+\infty$ si, pour tout voisinage V de ℓ dans X, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $x_n \in V$.

3. La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est dite **convergente** si elle a une (ou plusieurs) limite, **divergente** si elle n'a pas de limite.

Remarque 1.7.1. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite dans un espace topologique X. On a :

1. Si X est muni de la topologie grossière, alors $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers n'importe quel point de X.

2. Si $(x_n)_{n \geq 0}$ est constante à partir d'un certain rang, *i.e.* il existe $a \in X$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $x_n = a$, alors $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers a.

3. Si X est muni de la topologie discrète, alors $(x_n)_{n \geq 0}$ est convergente si elle est constante à partir d'un certain rang.

Remarque 1.7.2. Les notions d'une limite d'une suite et de valeur d'adhérence d'une suite sont des cas particuliers de celles d'applications. Prenons $\overline{\mathbb{R}}$ muni de la topologie usuelle et $A = \mathbb{N}$; le point $a = +\infty$ de $\overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à $\mathbb{N}$. En effet, si U est un voisinage de $+\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $]x, +\infty] \subset U$. Soit $N = \mathrm{E}(x) + 1$ où $\mathrm{E}(x)$ désigne

[†] Il y a une autre manière de définir les sous-suites d'une suite ; on suppose seulement φ une application de $\mathbb{N}$ dans lui-même telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $y_n = x_{\varphi(n)}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $\varphi(n) \geq m$. Notez que tous les résultats concernant les sous-suites restent valables en adoptant cette définition.

la partie entière de x, alors $]x, +\infty] \cap \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \ ; \ n \geq N\}$ et donc $U \cap \mathbb{N}$ est non vide. Soient $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ une application, $x_n = f(n)$ et $\ell \in X$. Alors ℓ est une limite de f en $+\infty$ si et seulement si ℓ est une limite de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. De même ℓ est une valeur d'adhérence de f en $+\infty$ si et seulement si ℓ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.

Proposition 1.7.1. *Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans un espace topologique X. Pour tout $n \geq 0$, soit $A_n = \{x_p \ ; \ p \geq n\}$. Alors l'intersection $\bigcap\limits_{n\geq 0} \overline{A_n}$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. En particulier, l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite quelconque est fermé dans X.*

Démonstration. Ceci résulte de la proposition 1.6.2 et de la remarque 1.7.2. ■

Proposition 1.7.2. *Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans un espace topologique X et $\ell \in X$.*

1. *Si ℓ est une limite de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$.*

2. *Si X est séparé et si $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente dans X, alors sa limite est unique et c'est la seule valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.*

3. *Si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, alors toute sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$ converge également vers ℓ.*

4. *La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite ℓ si et seulement si les sous-suites $(x_{2n})_{n\geq 0}$ et $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent vers ℓ*

5. *Si ℓ est une valeur d'adhérence d'une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$.*

6. *Si ℓ est une limite d'une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$. Réciproquement, si ℓ admet une base dénombrable de voisinages et si ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$, alors ℓ est une limite d'une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 1 du supplément.

Remarque 1.7.3. Si $X = \mathbb{R}$, $x_n = 1$ si n est pair et $x_n = n$ si n est impair. Alors 1 est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$, mais la suite n'est pas convergente.

Notation. Si ℓ est la limite d'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans un espace topologique séparé X, on note ceci $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} x_n$ ou $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème 1.7.1. *Soient X un espace topologique, $A \subset X$ et $x \in X$.*

1. *S'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans A convergeant vers x, alors $x \in \overline{A}$.*

2. *Si x admet une base dénombrable de voisinages et si $x \in \overline{A}$, alors il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans A convergeant vers x.*

Démonstration. 1. Soit V un voisinage de x dans X, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $a_n \in V$, donc $V \cap A \neq \emptyset$. Par conséquent, on a $x \in \overline{A}$.
2. Soit $\big(V_n\big)_{n\geq 0}$ une base dénombrable de voisinages de x dans X. Pour $n \geq 0$, on pose $U_n = \bigcap\limits_{k=0}^{n} V_k$, alors $\big(U_n\big)_{n\geq 0}$ est une base dénombrable de voisinages de x dans X telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $U_{n+1} \subset U_n$. On suppose $x \in \overline{A}$, alors pour tout $n \geq 0$, on a $U_n \cap A \neq \emptyset$, donc il existe $a_n \in U_n \cap A$. Montrons que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers x. Soit V un voisinage de x dans X, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $U_N \subset V$, d'où pour tout $n \geq N$, on a $U_n \subset V$. Par conséquent, pour tout $n \geq N$, on a $a_n \in V$, donc la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers x. ■

Corollaire 1.7.1. *Soient X un espace topologique vérifiant le premier axiome de dénombrabilité, $A \subset X$ et $x \in X$. Alors on a :*

1. *$x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans A convergeant vers x.*

2. *A est fermé dans X si et seulement si la limite de toute suite convergeant d'éléments de A appartient à A.*

Remarque 1.7.4. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans un espace topologique X, $\ell \in X$ et $B = \{x_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$.

1. Si ℓ est une limite ou une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$, alors $\ell \in \overline{B}$.

2. Si $\ell \in \overline{B}$, alors ℓ n'est pas forcément une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. En effet, soient $X = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ et $x_n = 1$ pour tout $n \geq 1$. Alors $0 \in B \subset \overline{B}$, mais 0 n'est pas une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$.

3. Si $\ell \in \overline{B}$, alors ℓ n'est pas forcément une limite d'une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$. En effet, on reprend le même exemple que dans 2.

4. Si X est séparé, les points d'accumulation de B sont des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$; mais la réciproque n'est pas vraie à moins que les points x_n ne soient tous distincts. On en déduit que l'adhérence $\overline{B}$ est la réunion de B et de l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$, voir remarque 1.2.1.

Théorème 1.7.2. *Soient X, Y des espaces topologiques, $A \subset X$, $a \in \overline{A}$, $\ell \in Y$ et $f : A \longrightarrow Y$ une application.*

1. *Si ℓ est une limite de f en a, alors pour toute suite $(a_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de A convergeant vers a, la suite $(f(a_n))_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.*

2. *Si a admet une base dénombrable de voisinages et si pour toute suite $(a_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de A convergeant vers a, la suite $(f(a_n))_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, alors ℓ est une limite de f en a.*

Démonstration. 1. Soit V un voisinage de ℓ dans Y ; il existe alors un voisinage W de a dans X tel que $f(W \cap A) \subset V$. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de A convergeant vers a, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $a_n \in W \cap A$. On en déduit que pour tout $n \geq N$, on a $f(a_n) \in V$. Donc la suite $(f(a_n))_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.
2. Soit $\big(W_n\big)_{n\geq 0}$ une base dénombrable de voisinages de a dans X. Pour tout $n \geq 0$, on

pose $U_n = \bigcap_{k=0}^{n} W_k$, alors $\big(U_n\big)_{n\geq 0}$ est une base dénombrable de voisinages de a dans X telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $U_{n+1} \subset U_n$. Supposons que f n'admet pas ℓ pour limite en a ; il existe alors un voisinage V de ℓ dans Y tel que pour tout voisinage U de a dans X, il existe $z \in U \cap A$ tel que $f(z) \notin V$. Pour tout $n \geq 0$, soit $a_n \in U_n \cap A$ tel que $f(a_n) \notin V$. Alors la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers a, mais $(f(a_n))_{n\geq 0}$ ne converge pas vers ℓ. Ce qui contredit l'hypothèse. Donc ℓ est une limite de f en a. ■

Corollaire 1.7.2. *Soient X, Y des espaces topologiques, avec Y séparé, $A \subset X$, $a \in \overline{A}$ et $f : A \longrightarrow Y$ une application. Supposons que a admet une base dénombrable de voisinages, alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) f admet une limite en a.

(ii) Pour toute suite $(a_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de A convergeant vers a, la suite $(f(a_n))_{n\geq 0}$ est convergente dans Y.

Dans ce cas, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que si $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont des suites d'éléments de A convergeant vers a, alors les suites $(f(a_n))_{n\geq 0}$ et $(f(b_n))_{n\geq 0}$ convergent vers la même limite. Pour tout $n \geq 0$, soient $x_{2n} = a_n$ et $x_{2n+1} = b_n$, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de A convergeant vers a. Donc la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ est convergente dans Y. Or $(f(a_n))_{n\geq 0}$ et $(f(b_n))_{n\geq 0}$ sont des sous-suites de $(f(x_n))_{n\geq 0}$, donc $(f(a_n))_{n\geq 0}$ et $(f(b_n))_{n\geq 0}$ convergent vers la même limite. ■

On déduit du théorème précédent le théorème suivant :

Théorème 1.7.3. *Soient X, Y des espaces topologiques, $x \in X$ et $f : X \longrightarrow Y$ une application.*

1. *Si f est continue en x, alors pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans X convergeant vers x, la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$.*

2. *Si x admet une base dénombrable de voisinages et si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans X convergeant vers x, la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$, alors f est continue en x.*

Corollaire 1.7.3. *Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ des suites dans $\mathbb{R}$ convergeant respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2. Alors on a :*

1. *Les suites $(x_n + y_n)_{n\geq 0}$ et $(x_n y_n)_{n\geq 0}$ convergent respectivement vers $\ell_1 + \ell_2$ et $\ell_1\ell_2$.*

2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite $(\lambda x_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\lambda\ell_1$.*

3. *Si $\ell_2 \neq 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $y_n \neq 0$, et la suite $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\geq N}$ converge vers $\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$.*

Démonstration. Ceci résulte du théorème précédent et de la proposition 1.3.2. ■

Proposition 1.7.3. *Soient X un ensemble, $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour chaque $i \in I$, soit $f_i : X \longrightarrow Y_i$ une application. On munit X de la topologie initiale associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans X. Alors $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers un élément $x \in X$ si et seulement si pour tout $i \in I$, la suite $(f_i(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f_i(x)$ dans Y_i.*

Démonstration. Supposons d'abord que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers un élément $x \in X$. Puisque pour tout $i \in I$, f_i est continue de X dans Y_i, alors la suite $(f_i(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f_i(x)$ dans Y_i.
Réciproquement, supposons que pour tout $i \in I$, la suite $(f_i(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f_i(x)$ dans Y_i. Soit U un ouvert de X contenant x. Alors il existe un sous-ensemble fini J de I et pour tout $i \in J$, un ouvert U_i de Y_i contenant $f_i(x)$ tels que $\bigcap\limits_{i\in J} f_i^{-1}(U_i) \subset U$. Par hypothèse, pour tout $i \in J$, il existe $N_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_i$, on ait $f_i(x_n) \in U_i$, d'où $x_n \in f_i^{-1}(U_i)$. Soit $N = \max\limits_{i\in J} N_i$, alors $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \geq N$, on a $x_n \in \bigcap\limits_{i\in J} f_i^{-1}(U_i) \subset U$. Donc la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers $x \in X$. ∎

1.8 Familles filtrantes croissantes dans les espaces topologiques

Dans un espace topologique X vérifiant le premier axiome de dénombrabilité, l'existence pour tout point x de X d'un système fondamental dénombrable de voisinages entraîne que la notion des suites dans X est adéquate pour déterminer l'adhérence d'une partie, la limite et la continuité d'une application, etc. Par contre, dans un espace topologique quelconque, cette notion ne suffit plus. Afin de combler cette carence, on a introduit la notion des familles filtrantes croissantes.

Définition 1.8.1. Un ensemble **ordonné filtrant croissant** est un ensemble Λ muni d'une relation d'ordre, notée $\leq$, qui vérifie l'axiome suivant : quels que soient les éléments α et β de Λ, il existe au moins un élément λ de Λ vérifiant $\alpha \leq \lambda$ et $\beta \leq \lambda$.

Exemple 1.8.1. Les exemples les plus importants d'ensembles ordonnés filtrants croissants sont les suivants :

1. Les ensembles totalement ordonnés. En particulier, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$.

2. Soient X un espace topologique, $x \in X$ et $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x. Alors $\mathcal{V}(x)$ est un ensemble ordonné filtrant croissant pour la relation d'ordre suivante : pour $U, V \in \mathcal{V}(x)$, $U \leq V \iff V \subset U$. Plus généralement, tout système fondamental de voisinages de x est un ensemble ordonné filtrant croissant pour la même relation d'ordre.

3. Soient X un ensemble quelconque et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Alors $\mathcal{P}(X)$ est un ensemble ordonné filtrant croissant pour la relation d'ordre suivante : pour $A, B \in \mathcal{P}(X)$, $A \leq B \iff A \subset B$. De même, si on note $\mathcal{P}_f(X)$ l'ensemble des parties finies de X, $\mathcal{P}_f(X)$ est aussi un ensemble ordonné filtrant croissant pour la même relation d'ordre.

Définition 1.8.2. Soit X un espace topologique. On appelle **famille filtrante croissante**[†] d'éléments de X toute application d'un ensemble ordonné filtrant croissant Λ dans X. Si $\lambda \in \Lambda$, on note usuellement $f(\lambda)$ par x_λ et la famille filtrante croissante f par $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ou tout simplement (x_λ) s'il n'y a pas de risque de confusion.

Dans le cas $\Lambda = \mathbb{N}$, on retrouve la définition des suites, car on suppose implicitement que $\mathbb{N}$ est muni de son ordre naturel. Donc on devrait regarder les familles filtrantes croissantes comme des suites généralisées.

Définition 1.8.3. Soit $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille filtrante croissante dans un espace topologique X.

1. On dit qu'un point ℓ de X est **valeur d'adhérence** de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ si pour tout voisinage V de ℓ dans X et pour tout $\alpha \in \Lambda$, il existe $\lambda \in \Lambda$ vérifiant $\alpha \leq \lambda$ tel que l'on ait $x_\lambda \in V$.

2. On dit qu'un point ℓ de X est **limite** de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, ou que cette famille filtrante croissante **converge vers** ℓ si pour tout voisinage V de ℓ dans X, il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$ vérifiant $\lambda_0 \leq \lambda$, on ait $x_\lambda \in V$. Une famille filtrante croissante qui converge est dite **convergente**.

Remarque 1.8.1. Soit $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille filtrante croissante dans un espace topologique X. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on pose $A_\lambda = \{x_\mu \ ; \ \lambda \leq \mu\}$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est l'intersection $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$ des adhérences des ensembles A_λ, il est donc fermé dans X.

Définition 1.8.4. Soient X un espace topologique et $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $(y_\mu)_{\mu\in\Gamma}$ deux familles filtrantes croissantes dans X. On dit que $(y_\mu)_{\mu\in\Gamma}$ est **plus fine** que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ s'il existe une application $\varphi : \Gamma \longrightarrow \Lambda$ telle que l'on ait

1. Pour tout $\mu \in \Gamma$, $y_\mu = x_{\varphi(\mu)}$.

2. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe $\mu_0 \in \Gamma$ tel que pour tout $\mu \in \Gamma$ vérifiant $\mu_0 \leq \mu$, on ait $\lambda \leq \varphi(\mu)$.

Proposition 1.8.1. *Soit X un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) X est séparé.

(ii) Toute famille filtrante croissante dans X admet au plus une limite.

Démonstration. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est triviale. Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). On raisonne par l'absurde. Supposons que X n'est pas séparé ; il existe alors deux points distincts x et y dans X tels que pour tout $U \in \mathcal{V}(x)$, l'ensemble des voisinages de x dans X, et tout $V \in \mathcal{V}(y)$, l'ensemble des voisinages de y dans X, on ait $U \cap V \neq \emptyset$. Choisissons un point $x_{(U,V)} \in U \cap V$. L'ensemble produit $\mathcal{V}(x) \times \mathcal{V}(y)$ est ordonné

[†] Les familles filtrantes croissantes sont souvent appelées **nets** dans les textes mathématiques en langue anglaise, qui utilisent cette notion bien plus souvent que les textes français. Les ensembles ordonnés filtrants croissants sont appelés **directed sets**, mais en général, on ne suppose pas que l'axiome d'antisymétrie soit vérifié.

filtrant croissant pour la relation d'ordre suivante : pour (U,V), $(U',V') \in \mathcal{V}(x) \times \mathcal{V}(y)$, $(U,V) \leq (U',V') \iff U' \subset U$ et $V' \subset V$. Alors la famille filtrante croissante $\big(x_{(U,V)}\big)_{(U,V)\in\mathcal{V}(x)\times\mathcal{V}(y)}$ converge à la fois vers x et vers y, ce qui contredit l'hypothèse faite sur l'unicité de la limite. Donc X est bien séparé. ■

Notation. Dans un espace topologique séparé, si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille filtrante croissante convergente, on note sa limite $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$.

Proposition 1.8.2. *Soient $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille filtrante croissante dans un espace topologique X et $\ell \in X$.*

1. *Si ℓ est une limite de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, alors ℓ est aussi une valeur d'adhérence de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, et lorsque X est séparé, c'est la seule valeur d'adhérence.*
2. *Si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers ℓ, alors toute famille filtrante croissante plus fine que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge également vers ℓ.*
3. *Si ℓ est une valeur d'adhérence d'une famille filtrante croissante plus fine que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, alors ℓ est aussi une valeur d'adhérence de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.*
4. *ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ si et seulement si ℓ est une limite d'une famille filtrante croissante plus fine que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.*

Démonstration. On adaptera facilement la démonstration de la proposition 1.7.2 pour montrer les propriétés 1, 2, 3 et le fait que si ℓ est une limite d'une famille filtrante croissante plus fine que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Montrons seulement que si ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, alors ℓ est une limite d'une famille filtrante croissante plus fine que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Par hypothèse, pour tout voisinage V de ℓ dans X, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $x_\lambda \in V$. Soit Γ l'ensemble des couples (λ, V) où $\lambda \in \Lambda$ et V est un voisinage de ℓ dans X tel que $x_\lambda \in V$. L'ensemble Γ est ordonné filtrant croissant pour la relation d'ordre suivante : pour (λ_1, V_1), $(\lambda_2, V_2) \in \Gamma$, $(\lambda_1, V_1) \leq (\lambda_2, V_2) \iff \lambda_1 \leq \lambda_2$ et $V_2 \subset V_1$. Pour tout $\mu = (\lambda, V) \in \Gamma$, on pose $x_\mu = x_\lambda$ et $\varphi(\mu) = \lambda$. Alors φ est une application surjective, d'où $(x_\mu)_{\mu\in\Gamma}$ est une famille filtrante croissante plus fine que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ convergeant vers ℓ. ■

Remarque 1.8.2. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans un espace topologique X. Alors une famille filtrante croissante plus fine que $(x_n)_{n\geq 0}$ n'est pas forcément une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$.

Théorème 1.8.1. *Soient X un espace topologique, $A \subset X$ et $x \in X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $x \in \overline{A}$.

(ii) Il existe une famille filtrante croissante $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans A convergeant vers x.

Démonstration. Il est clair que si x est une limite d'une famille filtrante croissante $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans A, alors $x \in \overline{A}$.
Réciproquement, supposons $x \in \overline{A}$. Alors pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, l'ensemble des voisinages de x dans X, on a $V \cap A \neq \emptyset$ et on choisit $a_V \in V \cap A$. L'ensemble $\mathcal{V}(x)$ est ordonné filtrant croissant pour la relation d'ordre suivante : pour U, $V \in \mathcal{V}(x)$, $U \leq V \iff V \subset U$. Alors la famille filtrante croissante $(a_V)_{V\in\mathcal{V}(x)}$ converge vers x. ■

Corollaire 1.8.1. *Soient X un espace topologique et $A \subset X$. Alors A est fermé dans X si et seulement si la limite de toute famille filtrante croissante convergeant de points de A appartient à A.*

Théorème 1.8.2. *Soient X, Y des espaces topologiques, $x \in X$ et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *f est continue en x.*

(ii) *Pour toute famille filtrante croissante $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans X convergeant vers x, la famille filtrante croissante $\big(f(x_\lambda)\big)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers $f(x)$.*

Démonstration. Supposons que f est continue en x. Alors pour tout voisinage V de $f(x)$ dans Y, il existe un voisinage W de x dans X tel que $f(W) \subset V$. Soit $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille filtrante croissante dans X convergeant vers x ; il existe alors $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$ vérifiant $\lambda_0 \leq \lambda$, on ait $x_\lambda \in W$, d'où $f(x_\lambda) \in V$. Donc $\big(f(x_\lambda)\big)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers $f(x)$.
Réciproquement, supposons que pour toute famille filtrante croissante $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans X convergeant vers x, la famille filtrante croissante $\big(f(x_\lambda)\big)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers $f(x)$. On raisonne par l'absurde et on suppose que f n'est pas continue en x. Alors il existe un voisinage V de $f(x)$ dans Y tel que pour tout voisinage U de x dans X, il existe $z \in U$ tel que $f(z) \notin V$. Pour tout $U \in \mathcal{V}(x)$, l'ensemble des voisinages de x dans X, on choisit $x_U \in U$ tel que $f(x_U) \notin V$. Alors $(x_U)_{U\in\mathcal{V}(x)}$ est une famille filtrante croissante convergente vers x, mais la famille filtrante croissante $\big(f(x_U)\big)_{U\in\mathcal{V}(x)}$ ne converge pas vers $f(x)$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc f est bien continue en x. ■

Proposition 1.8.3. *Soient X un ensemble, $\big((Y_i, \mathcal{T}_i)\big)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour chaque $i \in I$, soit $f_i : X \longrightarrow Y_i$ une application. On munit X de la topologie initiale associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$. Soient $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille filtrante croissante dans X et $x \in X$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(a) *La famille filtrante croissante $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers x dans X.*

(b) *Pour tout $i \in I$, la famille filtrante croissante $\big(f_i(x_\lambda)\big)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers $f_i(x)$ dans $(Y_i, \mathcal{T}_i)$.*

Démonstration. L'implication (a) $\Longrightarrow$ (b) résulte du théorème précédent, car pour tout $i \in I$, f_i est une application continue de X dans $(Y_i, \mathcal{T}_i)$.
Preuve de (b) $\Longrightarrow$ (a). Soit V un voisinage de x dans X. D'après le lemme 1.4.1, il existe un sous-ensemble fini J de I tel que pour tout $i \in J$, il existe un voisinage ouvert U_i de $f_i(x)$ dans $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ et tels que $\bigcap\limits_{i\in J} f_i^{-1}(U_i) \subset V$. Comme pour tout $i \in I$, la famille $\big(f_i(x_\lambda)\big)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers $f_i(x)$, alors pour tout $i \in J$, il existe $\lambda_i \in \Lambda$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$ vérifiant $\lambda_i \leq \lambda$, on ait $f_i(x_\lambda) \in U_i$, d'où pour tout $\lambda \in \Lambda$ vérifiant $\lambda_i \leq \lambda$, on a $x_\lambda \in f_i^{-1}(U_i)$. Soit $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que pour tout $i \in J$, on ait $\lambda_i \leq \lambda_0$. Alors pour tout $\lambda \in \Lambda$ vérifiant $\lambda_0 \leq \lambda$, on a $x_\lambda \in \bigcap\limits_{i\in J} f_i^{-1}(U_i) \subset V$. Par conséquent, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers x dans X. ■

Corollaire 1.8.2. *Soit $\big((Y_i, \mathcal{T}_i)\big)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. On munit l'espace $Y = \prod\limits_{i\in I} Y_i$ de la topologie produit. Soient $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille filtrante croissante dans*

Y ; pour tout $\lambda \in \Lambda$, $y_\lambda = (y_{i,\lambda})_{i\in I}$, et soit $y = (y_i)_{i\in I} \in Y$. Alors $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers y dans Y si et seulement si pour tout $i \in I$, la famille filtrante croissante $(y_{i,\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers y_i dans $(Y_i, \mathcal{T}_i)$.

Proposition 1.8.4. *Soient X un ensemble, $\big((Y_i, \mathcal{T}_i)\big)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour chaque $i \in I$, soit $f_i : X \longrightarrow Y_i$ une application. On munit X de la topologie initiale associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$. On suppose que la famille $(f_i)_{i\in I}$ est séparante. Considérons l'application suivante :*

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \longrightarrow & \prod\limits_{i\in I} Y_i \\ & x & \longmapsto & \big(f_i(x)\big)_{i\in I} \end{array}$$

Alors f est un homéomorphisme de X sur son image $f(X)$.

Démonstration. Comme la famille $(f_i)_{i\in I}$ est séparante, alors f est une application injective. Soient $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille filtrante croissante dans X et $x \in X$. D'après la proposition précédente, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers x dans X si et seulement si pour tout $i \in I$, la famille filtrante croissante $(f_i(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers $f_i(x)$ dans $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ si et seulement si la famille filtrante croissante $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers $f(x)$ dans l'espace topologique produit $\prod\limits_{i\in I} Y_i$. Donc f est un homéomorphisme de X sur son image $f(X)$. ■

1.9 Espaces réguliers, normaux

Définition 1.9.1. Soit X un espace topologique séparé.

1. On dit que X est un espace **régulier** ou **T_3-espace** si pour toute partie fermée F de X et pour tout point x de X tels que $x \notin F$, il existe deux ouverts disjoints U et V dans X tels que $x \in U$ et $F \subset V$.

2. On dit que X est un espace **complètement régulier** ou espace de **Tychonoff** si pour toute partie fermée F de X et pour tout point x de X tels que $x \notin F$, il existe une application continue $f : X \longmapsto [0, 1]$ telle que $f(x) = 1$ et $f(y) = 0$ pour tout $y \in F$.

3. On dit que X est un espace **normal** ou **T_4-espace** si pour tous ensembles fermés et disjoints A et B dans X, il existe deux ouverts disjoints U et V dans X tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Il est clair que tout espace complètement régulier est régulier. On verra, corollaire 1.9.2, que tout espace normal est complètement régulier. Pour un exemple d'un espace complètement régulier qui n'est pas un espace normal, voir exercice 3.57 du supplément. On verra également au chapitre 2 que tout « espace métrique » est un espace normal. Pour un exemple d'un espace régulier qui n'est pas complètement régulier, voir ([13], p. 40). Donnons un exemple d'un espace topologique séparé qui n'est pas régulier. Soient $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ \max(|x|, |y|) < 1\big\}$, $S = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ \max(|x|, |y|) = 1\big\}$ et $X = D \cup S$. Soient $z = (x, y) \in X$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $z \in D$, on pose $B_n(z) = \big(\,]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\times]y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}[\,\big) \cap D$, et si $z \in S$, on pose $B_n(z) = \{z\} \cup \Big(\big(\,]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\times]y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}[\,\big) \cap D\Big)$. Pour tout $z \in X$, soit $\mathcal{B}(z) = \big\{B_n(z)\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\big\}$. Il est clair que les familles $\mathcal{B}(z)$,

$z \in X$, vérifient les propriétés (**H1**), (**H2**) et (**H3**), voir page 6, donc il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur X telle que pour tout $z \in X$, $\mathcal{B}(z)$ soit une base de voisinages de z formée d'ensembles ouverts. Notons que la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur D coïncide avec celle induite sur D par la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$. Il est clair que $(X, \mathcal{T})$ est séparé. Soient $z \in S$, $A = \{z\}$ et $B = S \setminus \{z\}$. Alors B est fermé dans X car $X \setminus B = D \cup B_1(z)$ est un ouvert de X. Donc A et B sont deux sous-ensembles fermés disjoints dans X et on ne peut pas les séparer par deux ouverts disjoints dans X. Donc $(X, \mathcal{T})$ n'est pas régulier.

Si X est un espace complètement régulier (*resp.* régulier) et si A est un sous-espace de X, alors A est un espace complètement régulier (*resp.* régulier). Mais un sous-espace d'un espace normal n'est pas en général un espace normal. Par contre, un sous-espace fermé d'un espace normal est un espace normal.

Proposition 1.9.1. *Soit X un espace topologique séparé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'espace X est régulier.

(ii) Pour tout $x \in X$ et pour tout voisinage V_x de x dans X, il existe un ouvert U_x dans X tel que $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset V_x$. Autrement dit, tout point x de X admet une base de voisinages formée d'ensembles fermés.

(iii) Pour tout $x \in X$ et pour toute partie fermée F de X tels que $x \notin F$, il existe deux ouverts U et V dans X tels que $x \in U$, $F \subset V$ et $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient $x \in X$ et V_x un voisinage de x dans X. Il existe un ouvert W_x de X tel que $x \in W_x \subset V_x$. Soit $F = X \setminus W_x$, alors F est fermé dans X. Comme X est un espace régulier, alors il existe deux ouverts disjoints U_x et U'_x dans X tels que $x \in U_x$ et $F \subset U'_x$. Puisque l'on a $U_x \cap U'_x = \emptyset$ et U'_x est un ouvert de X, alors $\overline{U_x} \cap U'_x = \emptyset$, donc on a $\overline{U_x} \cap F = \emptyset$, d'où $\overline{U_x} \subset W_x \subset V_x$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soient $x \in X$ et F un fermé de X tel que $x \notin F$. Soit $W = X \setminus F$, alors W est un ouvert de X contenant x, donc il existe un ouvert U_1 de X tel que $x \in U_1 \subset \overline{U_1} \subset W$. On applique de nouveau l'hypothèse, on trouve un ouvert U de X tel que $x \in U \subset \overline{U} \subset U_1$. Soit $V = X \setminus \overline{U_1}$, alors V est un ouvert de X tel que $F \subset V$ et $U_1 \cap V = \emptyset$, d'où $U_1 \cap \overline{V} = \emptyset$. Par conséquent, on a $x \in U$, $F \subset V$ et $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.
L'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i) est triviale. ■

Théorème 1.9.1. *Soient A une partie dense d'un espace topologique X, Y un espace topologique régulier et $g : A \longrightarrow Y$ une application continue. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe $f : X \longrightarrow Y$ une application continue prolongeant g.

(ii) Pour tout $x \in X$, $\lim\limits_{a \to x} g(a)$ existe dans Y.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). S'il existe un prolongement continue $f : X \longrightarrow Y$ de g , alors pour tout $x \in X$, on a $\lim\limits_{a \to x} g(a) = \lim\limits_{\substack{a \to x \\ a \in A}} f(a) = f(x)$ dans Y.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons que pour tout $x \in X$, $\lim\limits_{a \to x} g(a)$ existe dans Y, et posons $f(x) = \lim\limits_{a \to x} g(a)$. Puisque g est continue, alors pour tout $x \in A$, on a $f(x) = g(x)$, voir

proposition 1.6.1. Il reste à montrer que f est continue, *i.e.* pour tout ensemble fermé F de Y, $f^{-1}(F)$ est fermé dans X. Soit F un sous-ensemble fermé de Y. Soit $x \in X$ tel que $x \notin f^{-1}(F)$, d'où $f(x) \notin F$. Donc il existe deux ouverts disjoints U et V dans Y tels que $F \subset U$ et $f(x) \in V$. Comme on a $f(x) = \lim\limits_{a \to x} g(a)$, alors il existe un voisinage ouvert W de x dans X tel que $g(W \cap A) \subset V$. Si $x \in \overline{f^{-1}(F)}$, on a $W \cap f^{-1}(F) \neq \emptyset$, donc il existe $x' \in W \cap f^{-1}(F)$, d'où $f(x') \in F \subset U$. On a aussi $f(x') = \lim\limits_{a \to x'} g(a)$, donc il existe un voisinage ouvert W' de x dans X tel que $x' \in W' \subset W$ et $g(W' \cap A) \subset U$. Or on a $g(W' \cap A) \subset g(W \cap A) \subset V$, d'où $g(W' \cap A) \subset U \cap V = \emptyset$, donc on a $W' \cap A = \emptyset$, c'est une contradiction, car A est dense dans X et W' est un ouvert non vide de X. Donc on a $x \notin \overline{f^{-1}(F)}$. Par conséquent, on a $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$, donc $f^{-1}(F)$ est fermé dans X. ■

Proposition 1.9.2. *Soit X un espace topologique séparé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'espace X est normal.

(ii) Pour tout fermé A de X et pour tout ouvert U de X tels que $A \subset U$, il existe un ouvert W dans X tel que $A \subset W \subset \overline{W} \subset U$.

(iii) Pour tous ensembles fermés et disjoints A et B dans X, il existe deux ouverts U et V dans X tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient A un fermé de X et U un ouvert de X tels que $A \subset U$. Soit $B = X \setminus U$, alors B est un fermé de X tel que $A \cap B = \emptyset$. Comme X est un espace normal, alors il existe deux ouverts disjoints W et V de X tels que $A \subset W$ et $B \subset V$. Puisque l'on a $W \cap V = \emptyset$ et V est un ouvert de X, alors $\overline{W} \cap V = \emptyset$. Par conséquent, on a $A \subset W \subset \overline{W} \subset U$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soient A et B deux fermés disjoints de X. Soit $W = X \setminus B$, alors W est un ouvert de X tel que $A \subset W$. Par hypothèse, il existe un ouvert U de X tel que $A \subset U \subset \overline{U} \subset W$. Soit $W' = X \setminus \overline{U}$, alors W' est un ouvert de X tel que $B \subset W'$. Par hypothèse, il existe un ouvert V de X tel que $B \subset V \subset \overline{V} \subset W'$. Par conséquent, U et V sont des ouverts de X tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.
L'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i) est triviale. ■

Lemme 1.9.1. *Soit X un T_1-espace. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) X est un espace normal.

(ii) Pour tous ouverts U' et V' de X tels que $U' \cup V' = X$, il existe des fermés E et F de X tels que $E \subset U'$, $F \subset V'$ et $E \cup F = X$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient U' et V' deux ouverts de X tels que $U' \cup V' = X$. Soient $A = X \setminus U'$ et $B = X \setminus V'$, alors A et B sont des fermés disjoints de X. Comme X est un espace normal, il existe des ouverts disjoints U et V de X tels que $A \subset U$ et $B \subset V$. Soient $E = X \setminus U$ et $F = X \setminus V$, alors E et F sont des fermés de X tels que $E \subset U'$, $F \subset V'$ et $E \cup F = X$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soient A et B des fermés disjoints de X. Soient $U' = X \setminus B$ et $V' = X \setminus A$, alors U' et V' sont des ouverts de X tels que $U' \cup V' = X$. Par hypothèse, il existe des fermés E et F de X tels que $E \subset U'$, $F \subset V'$ et $E \cup F = X$. Soient $V = X \setminus E$

et $U = X \setminus F$. Alors U et V sont deux ouverts disjoints de X tels que $A \subset U$ et $B \subset V$. Puisque X est un T_1-espace, le même raisonnement que ci-dessus montre que X est un espace séparé. Par conséquent, X est un espace normal. ■

Proposition 1.9.3. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue, fermée et surjective.*

1. *Si X est un T_1-espace, alors Y est un T_1-espace.*

2. *Si X est un espace normal, alors Y est un espace normal.*

Démonstration. 1. Puisque X est un T_1-espace et l'application f est fermée, alors pour tout $x \in X$, $\{f(x)\}$ est fermé dans Y. Or f est surjective, donc Y est un T_1-espace.
2. Tout espace normal est un T_1-espace, d'où Y est un T_1-espace. Pour montrer que Y est un espace normal, on utilise le lemme précédent. Soient U et V deux ouverts de Y tels que $U \cup V = Y$. Comme f est continue, alors $f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(V)$ sont des ouverts de X tels que $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = X$. Comme X est un espace normal, alors il existe deux parties fermées A et B de X telles que $A \subset f^{-1}(U)$, $B \subset f^{-1}(V)$ et $A \cup B = X$. Comme f est une application fermée, alors $f(A)$ et $f(B)$ sont fermées dans Y et on a $f(A) \subset U$, $f(B) \subset V$ et $f(A) \cup f(B) = Y$. Donc Y est un espace normal. ■

Corollaire 1.9.1. *Soient X un espace normal et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence fermée dans X. Alors l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ est un espace normal.*

Lemme 1.9.2. *Soit X un espace normal, F un fermé de X et V un ouvert de X tels que $F \subset V$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $D_n = \left\{\frac{k}{2^n}\ ;\ k \in \mathbb{N}^* \text{ et } 1 \leq k < 2^n\right\}$, et soit $D = \bigcup\limits_{n \geq 1} D_n$. Alors il existe une famille $\left(U_r\right)_{r \in D}$ d'ouverts de X telle que pour tous $r, s \in D$ satisfaisant $r < s$, on ait $F \subset U_r \subset \overline{U_r} \subset U_s \subset \overline{U_s} \subset V$.*

Démonstration. Notons d'abord que pour tout $n \geq 1$, on a $D_n \subset D_{n+1}$ et $D_{n+1} \setminus D_n = \left\{\frac{1}{2^{n+1}}\right\} \cup \left\{\frac{2k+1}{2^{n+1}}\ ;\ k \in \mathbb{N}^* \text{ et } 1 \leq k < 2^n - 1\right\} \cup \left\{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right\}$. En plus, D est dense dans $[0, 1]$. On va montrer par récurrence sur n l'existence de la famille $\left(U_r\right)_{r \in D}$. On a $D_1 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Comme X est normal, d'après la proposition 1.9.2, il existe un ouvert $U_{\frac{1}{2}}$ de X tel que $F \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset V$. On a $D_2 = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$. Ensuite, on applique la proposition 1.9.2 aux deux couples $\left(F, U_{\frac{1}{2}}\right)$ et $\left(\overline{U_{\frac{1}{2}}}, V\right)$. Alors il existe deux ouverts $U_{\frac{1}{4}}$ et $U_{\frac{3}{4}}$ de X tels que $F \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subset U_{\frac{1}{2}}$ et $\overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subset V$. Ainsi, on a construit trois ouverts $U_{\frac{1}{4}}$, $U_{\frac{1}{2}}$ et $U_{\frac{3}{4}}$ de X tels que :

$$F \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subset V\,.$$

Supposons que pour un $n \geq 2$, on a construit des ouverts U_r, avec $r \in D_n$, de X tels que pour tous $r, s \in D_n$ satisfaisant $r < s$, on ait :

$$F \subset U_r \subset \overline{U_r} \subset U_s \subset \overline{U_s} \subset V\,.$$

Soit $r \in D_{n+1} \setminus D_n$. On distingue trois cas :
Premier cas : $r = \frac{1}{2^{n+1}}$. On applique la proposition 1.9.2 au couple $\left(F, U_{\frac{1}{2^n}}\right)$, on obtient un ouvert $U_{\frac{1}{2^{n+1}}}$ de X tel que $F \subset U_{\frac{1}{2^{n+1}}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2^{n+1}}}} \subset U_{\frac{1}{2^n}}$.

Deuxième cas : $r = \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$. On applique la proposition 1.9.2 au couple $\left(\overline{U_{\frac{2^n-1}{2^n}}}, V\right)$, on obtient un ouvert $U_{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}}$ de X tel que $\overline{U_{\frac{2^n-1}{2^n}}} \subset U_{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}} \subset \overline{U_{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}}} \subset V$.
Troisième cas : il existe un unique $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leq k < 2^n - 1$ et $r = \frac{2k+1}{2^{n+1}}$. Alors $\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \in D_n$ et on applique la proposition 1.9.2 au couple $\left(\overline{U_{\frac{k}{2^n}}}, U_{\frac{k+1}{2^n}}\right)$, on obtient un ouvert $U_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$ de X tel que $\overline{U_{\frac{k}{2^n}}} \subset U_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} \subset \overline{U_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}} \subset U_{\frac{k+1}{2^n}}$. Ainsi, on a construit des ouverts U_r, avec $r \in D_{n+1}$, de X tels que pour tous $r, s \in D_{n+1}$ satisfaisant $r < s$, on ait $F \subset U_r \subset \overline{U_r} \subset U_s \subset \overline{U_s} \subset V$. Par conséquent, il existe bien une famille $\left(U_r\right)_{r \in D}$ d'ouverts de X telle que pour tous $r, s \in D$ satisfaisant $r < s$, on ait $F \subset U_r \subset \overline{U_r} \subset U_s \subset \overline{U_s} \subset V$. ■

Lemme 1.9.3. *Soit X un espace topologique, F un fermé de X et V un ouvert de X tels que $F \subset V$. Soit D un ensemble dense dans $[0, 1]$ et soit $\left(U_r\right)_{r \in D}$ une famille d'ouverts de X telle que pour tous $r, s \in D$ satisfaisant $r < s$, on ait :*

$$F \subset U_r \subset \overline{U_r} \subset U_s \subset \overline{U_s} \subset V\,.$$

Pour tout $x \in \bigcup_{r \in D} U_r$, on pose $f(x) = \inf\left\{r \in D \,;\, x \in U_r\right\}$, et pour tout $x \in X \setminus \bigcup_{r \in D} U_r$, on pose $f(x) = 1$. Alors f est une fonction continue de X dans $[0, 1]$ telle que pour tout $x \in F$, on ait $f(x) = 0$ et pour tout $x \in X \setminus V$, on ait $f(x) = 1$.

Démonstration. Il est clair que f est une fonction de X dans $[0, 1]$ telle que pour tout $x \in F$, on ait $f(x) = 0$ et pour tout $x \in X \setminus V$, on ait $f(x) = 1$. Il reste à montrer la continuité de f. Notons d'abord que l'on a les propriétés suivantes :
Soient $x \in X$ et $r \in D$.

1. Si $x \in U_r$, alors $f(x) \leq r$.

2. Si $f(x) < r$, alors $x \in U_r$.

3. Si $x \in \overline{U_r}$, alors $x \in U_s$, pour tout $s > r$, d'où $f(x) \leq r$.

Soient $a \in X$ et $0 < \varepsilon < 1$. Montrons que f est continue en a. On distingue trois cas :
Premier cas : $f(a) = 0$. Soit $r \in D$ tel que $0 < r < \varepsilon$. Alors U_r est un voisinage ouvert de a dans X et pour tout $x \in U_r$, on a $|f(x) - f(a)| = |f(x)| \leq r < \varepsilon$. Donc f est continue en a.
Deuxième cas : $f(a) = 1$. Soient $r, s \in D$ tels que $1 - \varepsilon < r < s < 1$. Alors $a \notin U_s$, $X \setminus \overline{U_r}$ est un voisinage ouvert de a dans X et pour tout $x \in X \setminus \overline{U_r}$, on a $|f(x) - f(a)| = 1 - f(x) \leq 1 - r < \varepsilon$. Donc f est continue en a.
Troisième cas : $0 < f(a) < 1$. Soient $r, s \in D$ tels que $r < f(a) < s$ et $\max\left(s - f(a), f(a) - r\right) < \varepsilon$. Alors $U_s \setminus \overline{U_r}$ est un voisinage ouvert de a dans X et pour tout $x \in U_s \setminus \overline{U_r}$, on a $r \leq f(x) \leq s$, d'où $|f(x) - f(a)| \leq \max\left(s - f(a), f(a) - r\right) < \varepsilon$. Donc f est continue en a. Par conséquent, f est continue. ■

Théorème 1.9.2 (Urysohn). *Soit X un espace topologique séparé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) X est un espace normal.

(ii) *Pour tous ensembles fermés, non vides et disjoints A et B dans X, il existe une fonction continue $f : X \longrightarrow [0,\, 1]$ telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in A$ et $f(y) = 1$ pour tout $y \in B$.*

Démonstration. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) est triviale. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte de deux lemmes précédents. ∎

Corollaire 1.9.2. *Tout espace normal est complètement régulier.*

Définition 1.9.2. Soient X un espace topologique et A, B deux sous-ensembles de X. On dit que A et B sont **complètement séparés** s'il existe une fonction continue $f : X \longrightarrow [0,\, 1]$ telle que pour tout $x \in A$, on ait $f(x) = 0$, et pour tout $y \in B$, on ait $f(y) = 1$. On dit alors que f **sépare** A et B.

Le théorème d'Urysohn précédent nous dit que deux sous-ensembles fermés disjoints dans un espace normal sont complètement séparés.

Remarque 1.9.1. Soient X un espace topologique et A, B deux sous-ensembles de X. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) A et B sont complètement séparés.

(ii) Il existe $r, s \in \mathbb{R}$ tels que $r < s$ et il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in A$, on ait $g(x) \leq r$, et pour tout $y \in B$, on ait $g(y) \geq s$.

En effet, l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est triviale.
Réciproquement, supposons qu'il existe $r, s \in \mathbb{R}$ tels que $r < s$ et qu'il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in A$, on ait $g(x) \leq r$, et pour tout $y \in B$, on ait $g(y) \geq s$. Pour tout $x \in X$, on pose $f(x) = \min\big(1, \frac{1}{s-r} \max\big(0, g(x) - r\big)\big)$. Alors f est une fonction continue de X dans $[0,\, 1]$ telle que pour tout $x \in A$, on ait $f(x) = 0$, et pour tout $y \in B$, on ait $f(y) = 1$. Donc A et B sont complètement séparés.

Remarque 1.9.2. Soient X un espace topologique et A, B deux sous-ensembles disjoints de X. Supposons qu'il existe des fonctions continues g et h de X dans $[0,\, 1]$ telles que $A = g^{-1}\big(\{0\}\big)$ et $B = h^{-1}\big(\{0\}\big)$. Alors il existe une fonction continue $f : X \longrightarrow [0,\, 1]$ telle que $A = f^{-1}\big(\{0\}\big)$ et $B = f^{-1}\big(\{1\}\big)$. En particulier, A et B sont complètement séparés. En effet, il suffit de poser $f(x) = \dfrac{g(x)}{g(x) + h(x)}$, pour tout $x \in X$.

Théorème 1.9.3 (Urysohn). *Soient X un espace topologique et Y un sous-ensemble de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *Pour toute fonction continue $f : Y \longrightarrow [-1,\, 1]$, il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow [-1,\, 1]$ prolongeant f.*

(ii) *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et pour toute fonction continue $f : Y \longrightarrow [a,\, b]$, il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow [a,\, b]$ prolongeant f.*

(iii) *Deux sous-ensembles complètement séparés dans Y sont aussi complètement séparés dans X.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 1 du supplément.

Théorème 1.9.4 (Tietze). *Soit X un espace topologique séparé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) X est un espace normal.

(ii) Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, pour tout ensemble fermé A dans X et pour toute fonction continue $f : A \longrightarrow [a, b]$, il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow [a, b]$ prolongeant f.

(iii) Pour tout ensemble fermé A dans X et pour toute fonction continue $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ prolongeant f.

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 1 du supplément associé à ce livre.

Remarque 1.9.3. Soient $X = [0, 1]$ et $A =]0, 1]$, et pour tout $x \in A$, soit $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Alors X est un espace normal, voir proposition 2.2.7 ou corollaire 3.1.3, f est continue de A dans $\mathbb{R}$ mais non prolongeable par continuité sur X. Donc l'hypothèse A est fermé dans le théorème précédent est essentielle.

Définition 1.9.3. Soit X un espace topologique.

1. Un **recouvrement ouvert** de X est une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de X telle que $X = \underset{i\in I}{\cup} U_i$.
2. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Si $J \subset I$ tel que $X = \underset{j\in J}{\cup} U_j$, on dit que $(U_j)_{j\in J}$ est un **sous-recouvrement** de $(U_i)_{i\in I}$. Si de plus, J est au plus dénombrable (*resp.* fini), on dit alors que $(U_j)_{j\in J}$ est un **sous-recouvrement au plus dénombrable** (*resp.* **fini**).

Définition 1.9.4. Soit X un espace topologique. On dit que X est un espace de **Lindelöf** si de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement au plus dénombrable. Autrement dit, pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de X telle que $X = \underset{i\in I}{\cup} U_i$, il existe un sous-ensemble au plus dénombrable J de I tel que $X = \underset{i\in J}{\cup} U_i$.

Théorème 1.9.5. *Soit X un espace topologique admettant une base dénombrable d'ouverts. Alors X est un espace de Lindelöf.*

Démonstration. Soient $(U_n)_{n\geq 0}$ une base dénombrable d'ouverts de X et $(V_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Pour tout $i \in I$, il existe un sous-ensemble I_i de $\mathbb{N}$ tel que $V_i = \underset{n\in I_i}{\cup} U_n$. Soit $J = \underset{i\in I}{\cup} I_i \subset \mathbb{N}$, alors $(U_n)_{n\in J}$ est recouvrement ouvert de X tel que pour tout $n \in J$, il existe $i_n \in I$ tel que $U_n \subset V_{i_n}$. Par conséquent, $(V_{i_n})_{n\in J}$ est un sous-recouvrement au plus dénombrable de $(V_i)_{i\in I}$. Donc X est un espace de Lindelöf. ■

Théorème 1.9.6 (Tychonoff). *Soit X un espace de Lindelöf. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) X est un espace régulier.

(ii) X est un espace complètement régulier.

(iii) X est un espace normal.

En particulier, si X est un espace topologique admettant une base dénombrable d'ouverts, alors les trois conditions précédentes sont équivalentes.

Pour une preuve du théorème précédent, voir ([17], p. 113) ou ([13], p. 192).

1.10 Exercices

Exercice 1.1. Soit X un ensemble quelconque.

1. On munit X de la topologie discrète. Quelles sont les parties fermées de X ? Quel est l'intérieur, quelle est l'adhérence d'un sous-ensemble A de X ? Quels sont les voisinages d'un point x de X ?

2. Mêmes questions pour X muni cette fois de la topologie grossière.

Solution. 1. Quand on munit X de la topologie discrète, alors tout sous-ensemble de X est ouvert, et par conséquent tout sous-ensemble de X est fermé. Donc si $A \subset X$, alors on a $\overset{\circ}{A} = A = \overline{A}$. Si $x \in X$, alors tout sous-ensemble de X contenant x est un voisinage de x dans X.
2. Si on munit X de la topologie grossière, alors un sous-ensemble U de X est ouvert si et seulement si $U = \emptyset$ ou $U = X$. Donc un sous-ensemble F de X est fermé si et seulement si $F = \emptyset$ ou $F = X$. Si A est un sous-ensemble non trivial de X, *i.e.* $A \neq \emptyset$ et $A \neq X$, alors on a $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ et $\overline{A} = X$. Si $x \in X$, alors le seul voisinage de x dans X est l'ensemble X lui-même.

Exercice 1.2. On munit $\mathbb{R}$ de la topologie usuelle et soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$.

1. Montrer que l'on a $\overline{]-\infty, a[} =]-\infty, a]$ et $\overline{]b, +\infty[} = [b, +\infty[$.

2. Montrer que l'on a $\overbrace{]-\infty, a]}^{\circ} =]-\infty, a[$ et $\overbrace{[b, +\infty[}^{\circ} =]b, +\infty[$.

3. Montrer que l'on a $\overline{]a, b[} = \overline{]a, b]} = \overline{[a, b[} = [a, b]$.

4. Montrer que l'on a $\overbrace{]a, b]}^{\circ} = \overbrace{[a, b[}^{\circ} = \overbrace{[a, b]}^{\circ} =]a, b[$.

Solution. 1. Comme $]-\infty, a]$ est fermé dans $\mathbb{R}$, voir exemple 1.1.3, et on a $]-\infty, a[\subset]-\infty, a]$, alors on a $\overline{]-\infty, a[} \subset]-\infty, a]$. Par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap]-\infty, a[\neq \emptyset$, donc $a \in \overline{]-\infty, a[}$. Par conséquent, on a $\overline{]-\infty, a[} =]-\infty, a]$. De même, on a $]b, +\infty[\subset [b, +\infty[$ et $[b, +\infty[$ est fermé dans $\mathbb{R}$, donc on a $\overline{]b, +\infty[} \subset [b, +\infty[$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\cap]b, +\infty[\neq \emptyset$, donc $b \in \overline{]b, +\infty[}$. Par conséquent, on a $\overline{]b, +\infty[} = [b, +\infty[$.
2. Puisque $]-\infty, a[$ et $]b, +\infty[$ sont des ouverts dans $\mathbb{R}$, voir exemple 1.1.3, et on a $]-\infty, a[\subset]-\infty, a]$ et $]b, +\infty[\subset [b, +\infty[$, alors on a $]-\infty, a[\subset \overbrace{]-\infty, a]}^{\circ} \subset]-\infty, a]$ et $]b, +\infty[\subset \overbrace{[b, +\infty[}^{\circ} \subset [b, +\infty[$. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\not\subset]-\infty, a]$ et $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\not\subset [b, +\infty[$, donc on a $a \notin \overbrace{]-\infty, a]}^{\circ}$ et $b \notin \overbrace{[b, +\infty[}^{\circ}$. Par conséquent, on a $\overbrace{]-\infty, a]}^{\circ} =]-\infty, a[$ et $\overbrace{[b, +\infty[}^{\circ} =]b, +\infty[$.
3. Comme $[a, b]$ est fermé dans $\mathbb{R}$, et on a les inclusions $]a, b[\subset]a, b] \subset [a, b]$ et $]a, b[\subset [a, b[\subset [a, b]$, alors on a $\overline{]a, b[} \subset \overline{]a, b]} \subset [a, b]$ et $\overline{]a, b[} \subset \overline{[a, b[} \subset [a, b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap]a, b[\neq \emptyset$ et $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\cap]a, b[\neq \emptyset$, donc on a $a, b \in \overline{]a, b[}$. Par conséquent,

on a $\overline{]a,b[} = [a,b]$, d'où $\overline{]a,b[} = \overline{]a,b]} = \overline{[a,b[} = [a,b]$.
4. Comme $]a,b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, et on a les inclusions $]a,b[\subset]a,b] \subset [a,b]$ et $]a,b[\subset [a,b[\subset [a,b]$, alors on a $]a,b[\subset \overbrace{]a,b]}^{\circ} \subset \overbrace{[a,b]}^{\circ} \subset [a,b]$ et $]a,b[\subset \overbrace{[a,b[}^{\circ} \subset \overbrace{[a,b]}^{\circ} \subset [a,b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\not\subset [a,b]$ et $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\not\subset [a,b]$, donc $a \notin \overbrace{[a,b]}^{\circ}$ et $b \notin \overbrace{[a,b]}^{\circ}$. Par conséquent, on a $\overbrace{[a,b]}^{\circ} =]a,b[$, d'où $\overbrace{]a,b]}^{\circ} = \overbrace{[a,b[}^{\circ} = \overbrace{[a,b]}^{\circ} =]a,b[$.

Exercice 1.3. On munit $\mathbb{R}$ de la topologie usuelle. Décrire l'adhérence, l'intérieur, la frontière des parties suivantes : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $\left\{\frac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
Solution. On a $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, voir Appendice C, d'où on a $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Fr}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ et $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}\setminus\left(\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\right) = \emptyset$ et $\overbrace{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}^{\circ} = \mathbb{R}\setminus\overline{\mathbb{Q}} = \emptyset$. Soit $A = \left\{\frac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n} \in \overline{\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[} \subset \overline{\mathbb{R}\setminus A}$, donc on a $\overline{\mathbb{R}\setminus A} = \mathbb{R}$. On déduit de la proposition 1.2.2 que $\overset{\circ}{A} = \emptyset$. On a $\mathbb{R}\setminus\left(A\cup\{0\}\right) =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\cup \underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cup} \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$ qui est ouvert dans $\mathbb{R}$, donc $A\cup\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ contenant A, d'où on a $\overline{A} \subset A\cup\{0\}$. Comme la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0, alors on a $0 \in \overline{A}$, donc $\overline{A} = A\cup\{0\}$. Par conséquent, on a $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A}\cap\overline{\mathbb{R}\setminus A} = \overline{A} = A\cup\{0\}$.

Exercice 1.4. Soient X un espace topologique et A, B deux parties de X.

1. Montrer que l'on a $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$ et $\overline{A\cap B} \subset \overline{A}\cap\overline{B}$. Donner un exemple dans $\mathbb{R}$, montrant que l'inclusion peut être stricte.
2. Montrer que l'on a $\overbrace{A\cap B}^{\circ} = \overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}$ et $\overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{B} \subset \overbrace{A\cup B}^{\circ}$. Donner un exemple dans $\mathbb{R}$, montrant que l'inclusion peut être stricte.
3. Montrer que si on a $\overline{A}\cap B = A\cap\overline{B} = \emptyset$, alors on a $\overbrace{A\cup B}^{\circ} = \overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{B}$.
4. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X. Montrer que l'on a $\underset{i\in I}{\cup}\overline{A_i} \subset \overline{\underset{i\in I}{\cup} A_i}$. Donner un exemple dans $\mathbb{R}$, montrant que l'inclusion peut être stricte.
5. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties denses de X telle que $\mathrm{card}(I) \geq 2$. Montrer que si les A_i sont deux à deux disjoints, alors pour tout $i \in I$, on a $\overset{\circ}{A_i} = \emptyset$.

Solution. 1. Comme on a $A \subset A\cup B$ et $B \subset A\cup B$, alors $\overline{A} \subset \overline{A\cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A\cup B}$, donc on a $\overline{A}\cup\overline{B} \subset \overline{A\cup B}$. Puisque on a $A\cup B \subset \overline{A}\cup\overline{B}$ et $\overline{A}\cup\overline{B}$ est un fermé de X, alors on a $\overline{A\cup B} \subset \overline{A}\cup\overline{B}$. Par conséquent, on a $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$.
Comme on a $A\cap B \subset A$ et $A\cap B \subset B$, alors $\overline{A\cap B} \subset \overline{A}$ et $\overline{A\cap B} \subset \overline{B}$, d'où on a $\overline{A\cap B} \subset \overline{A}\cap\overline{B}$.
Si $X = \mathbb{R}$, $A =]0,1[$ et $B =]1,2[$, alors on a $\overline{A\cap B} = A\cap B = \emptyset$, mais $\overline{A}\cap\overline{B} = \{1\}$.

2. Comme on a $A\cap B \subset A$ et $A\cap B \subset B$, alors $\overbrace{A\cap B}^{\circ} \subset \overset{\circ}{A}$ et $\overbrace{A\cap B}^{\circ} \subset \overset{\circ}{B}$, d'où on a $\overbrace{A\cap B}^{\circ} \subset \overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}$.

Puisque $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ est un ouvert de X et on a $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset A \cap B$, alors $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$. Par conséquent, on a $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Comme on a $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$ et $\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$, d'où on a $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$.

Si $X = \mathbb{R}$, $A =]0, 1]$ et $B = [1, 2[$, alors on a $\overset{\circ}{A} =]0, 1[$, $\overset{\circ}{B} =]1, 2[$, $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} =]1, 2[$ et $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} =]0, 1[\cup]1, 2[$.
3. Puisque on a $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$, alors $A \cup B \subset \big(X \setminus \overline{A}\big) \cup \big(X \setminus \overline{B}\big)$. Donc on a :

$$\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} = \Big(\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \cap \big(X \setminus \overline{A}\big)\Big) \cup \Big(\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \cap \big(X \setminus \overline{B}\big)\Big).$$

Or $U = \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \cap \big(X \setminus \overline{A}\big)$ $\big($*resp.* $V = \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \cap \big(X \setminus \overline{B}\big)\big)$ est un ouvert de X contenu dans B (*resp.* A), donc on a $U \subset \overset{\circ}{B}$ et $V \subset \overset{\circ}{A}$, d'où $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$. Par conséquent, on a $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.
4. Pour tout $j \in I$, on a $A_j \subset \underset{i \in I}{\cup} A_i$, d'où $\overline{A_j} \subset \overline{\underset{i \in I}{\cup} A_i}$. Par conséquent, on a $\underset{i \in I}{\cup} \overline{A_i} \subset \overline{\underset{i \in I}{\cup} A_i}$.
Si $X = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{Q}$, $A_i = \{i\}$, alors on a $\underset{i \in I}{\cup} A_i = \mathbb{Q}$, $\overline{A_i} = \{i\}$, $\underset{i \in I}{\cup} \overline{A_i} = \mathbb{Q}$ et $\overline{\underset{i \in I}{\cup} A_i} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
5. Soit $i \in I$, alors il existe $j \in I$ tel que $i \neq j$. On a $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $\overline{A_j} = X$, d'où $A_j \subset X \setminus A_i$ et $\overline{X \setminus A_i} = X$. Or on a $X \setminus \overset{\circ}{A_i} = \overline{X \setminus A_i}$, d'où $X \setminus \overset{\circ}{A_i} = X$. Donc on a $\overset{\circ}{A_i} = \emptyset$.

Exercice 1.5. Soient X un ensemble et $\alpha : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ une application vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\alpha(X) = X$.
2. Pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, on a $\alpha(A) \subset A$.
3. Pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, on a $(\alpha \circ \alpha)(A) = \alpha(A)$.
4. Pour tout A, $B \in \mathcal{P}(X)$, on a $\alpha(A \cap B) = \alpha(A) \cap \alpha(B)$.

Montrer que la famille $\mathcal{T} = \{\alpha(A) \; ; \; A \in \mathcal{P}(X)\}$ est une topologie sur X telle que pour toute partie A de X, on ait $\overset{\circ}{A} = \alpha(A)$.
Solution. On a $X = \alpha(X) \in \mathcal{T}$. On a $\alpha(\emptyset) \subset \emptyset$, d'où $\emptyset = \alpha(\emptyset) \in \mathcal{T}$. Soient $\alpha(A), \alpha(B) \in \mathcal{T}$, alors on a $\alpha(A) \cap \alpha(B) = \alpha(A \cap B) \in \mathcal{T}$. Donc $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie. Soit $\big(\alpha(A_i)\big)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$. Soient A, $B \in \mathcal{P}(X)$ tels que $A \subset B$, alors on a $\alpha(A) = \alpha(A \cap B) = \alpha(A) \cap \alpha(B) \subset \alpha(B)$. Donc pour tout $i \in I$, on a $\alpha(A_i) \subset \alpha\big(\underset{i \in I}{\cup} A_i\big)$, d'où $\underset{i \in I}{\cup} \alpha(A_i) \subset \alpha\big(\underset{i \in I}{\cup} A_i\big)$. Par conséquent, on a $\underset{i \in I}{\cup} \alpha(A_i) = \underset{i \in I}{\cup} \alpha(\alpha(A_i)) \subset \alpha\big(\underset{i \in I}{\cup} \alpha(A_i)\big) \subset \underset{i \in I}{\cup} \alpha(A_i)$, d'où on a $\underset{i \in I}{\cup} \alpha(A_i) = \alpha\big(\underset{i \in I}{\cup} \alpha(A_i)\big) \in \mathcal{T}$. Donc $\mathcal{T}$ est stable par réunion quelconque. Donc $\mathcal{T}$ est bien une topologie sur X. Pour tout

$A \subset X$, $\alpha(A)$ est un ouvert de X et on a $\alpha(A) \subset A$, d'où $\alpha(A) \subset \overset{\circ}{A}$. Puisque $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de X, il existe $B \subset X$ tel que $\overset{\circ}{A} = \alpha(B)$, d'où on a $\alpha\big(\overset{\circ}{A}\big) = \alpha(\alpha(B)) = \alpha(B) = \overset{\circ}{A}$. Comme on a $\overset{\circ}{A} \subset A$, alors $\overset{\circ}{A} = \alpha\big(\overset{\circ}{A}\big) \subset \alpha(A)$. Par conséquent, on a $\overset{\circ}{A} = \alpha(A)$.

Exercice 1.6. Soient X un ensemble et $\beta : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ une application vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\beta(\emptyset) = \emptyset$.
2. Pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, on a $A \subset \beta(A)$.
3. Pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, on a $(\beta \circ \beta)(A) = \beta(A)$.
4. Pour tout $A,\ B \in \mathcal{P}(X)$, on a $\beta(A \cup B) = \beta(A) \cup \beta(B)$.

Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{\beta(A)\ ;\ A \in \mathcal{P}(X)\}$ est l'ensemble des fermés d'une topologie $\mathcal{T}$ sur X telle que pour toute partie A de X, on ait $\overline{A} = \beta(A)$.
Solution. On a $\emptyset = \beta(\emptyset) \in \mathcal{F}$. On a $X \subset \beta(X)$ et $\beta(X) \in \mathcal{P}(X)$, *i.e.* $\beta(X) \subset X$, donc on a $X = \beta(X) \in \mathcal{F}$. Soient $\beta(A), \beta(B) \in \mathcal{T}$, on a $\beta(A) \cup \beta(B) = \beta(A \cup B) \in \mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F}$ est stable par réunion finie.
Soit $\big(\beta(A_i)\big)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$. Soient $A,\ B \in \mathcal{P}(X)$ tels que $A \subset B$, alors on a $\beta(A) \subset \beta(A) \cup \beta(B) = \beta(A \cup B) = \beta(B)$. Donc pour tout $i \in I$, on a $\beta\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \subset \beta(A_i)$, d'où $\beta\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \subset \bigcap_{i\in I} \beta(A_i)$. Par conséquent, on a $\bigcap_{i\in I} \beta(A_i) \subset \beta\big(\bigcap_{i\in I} \beta(A_i)\big) \subset \bigcap_{i\in I} \beta(\beta(A_i)) = \bigcap_{i\in I} \beta(A_i)$, d'où on a $\bigcap_{i\in I} \beta(A_i) = \beta\big(\bigcap_{i\in I} \beta(A_i)\big) \in \mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F}$ est stable par intersection quelconque. Donc $\mathcal{F}$ est bien l'ensemble des fermés d'une topologie $\mathcal{T}$ sur X.
Pour tout $A \subset X$, $\beta(A)$ est un fermé de X et on a $A \subset \beta(A)$, d'où $\overline{A} \subset \beta(A)$. Comme $\overline{A}$ est fermé dans X, alors il existe $B \subset X$ tel que $\overline{A} = \beta(B)$, d'où on a $\beta\big(\overline{A}\big) = \beta(\beta(B)) = \beta(B) = \overline{A}$. Comme on a $A \subset \overline{A}$, alors $\beta(A) \subset \beta(\overline{A}) = \overline{A}$. Par conséquent, on a $\overline{A} = \beta(A)$.

Exercice 1.7. Montrer que si une partie A d'un espace topologique X n'a pas de point isolé, il en est de même de son adhérence $\overline{A}$ dans X.
Solution. Si $\overline{A}$ possède un point isolé b, alors il existe un voisinage V de b dans X tel que $V \cap \overline{A} = \{b\}$. Alors on a $V \cap A = \{b\}$, car $V \cap A \neq \emptyset$ et $V \cap A \subset V \cap \overline{A}$, donc b est un point isolé de A, ce qui est impossible. Par conséquent, $\overline{A}$ n'a pas de point isolé.

Exercice 1.8. Soient U et V deux ouverts d'un espace topologique X. Montrer que si $U \cap V = \emptyset$, alors on a $\overset{\circ}{\overline{U}} \cap \overset{\circ}{\overline{V}} = \emptyset$.
Solution. On a $U \cap V = \emptyset$, d'où $U \subset X \setminus V$ qui est fermé dans X, donc on a $\overline{U} \subset X \setminus V$. Par conséquent, on a $\overline{U} \cap V = \emptyset$ et $\overset{\circ}{\overline{U}} \cap V = \emptyset$. On en déduit que $V \subset X \setminus \overset{\circ}{\overline{U}}$ qui est fermé dans X, d'où $\overline{V} \subset X \setminus \overset{\circ}{\overline{U}}$. Donc on a $\overset{\circ}{\overline{V}} \subset X \setminus \overset{\circ}{\overline{U}}$, d'où $\overset{\circ}{\overline{U}} \cap \overset{\circ}{\overline{V}} = \emptyset$.

Exercice 1.9. Soient X un espace topologique séparé et A un sous-ensemble de X. On note par A' l'ensemble des points d'accumulation de A.

1. Montrer que $\big(\overline{A}\big)' = A'$.

2. Montrer que A' est fermé dans X. En déduire que $\big(A'\big)' \subset A'$.

Solution. 1. On a $A \subset \overline{A}$, d'où $A' \subset \big(\overline{A}\big)'$. Inversement, soit $x \in \big(\overline{A}\big)'$, alors pour tout voisinage ouvert V de x dans X, on a $\big(V\setminus\{x\}\big)\cap\overline{A} \neq \emptyset$. On en déduit que $(V\setminus\{x\})\cap A \neq \emptyset$, car $V \setminus \{x\}$ est un ouvert de X, donc $x \in A'$. Par conséquent, on a $\big(\overline{A}\big)' = A'$.
2. Pour montrer que A' est fermé dans X, on montre que $X \setminus A'$ est ouvert dans X. Soit $x \in X$, alors $x \in X \setminus A'$ si et seulement s'il existe un ouvert V de X contenant x tel que $V \cap A = \{x\}$ ou $V \cap A = \emptyset$. Supposons $x \in X \setminus A'$, et soit $z \in V$ tel que $z \neq x$. Alors il existe un voisinage ouvert W de z dans X tel que $x \notin W$ et $W \subset V$. Alors on a $W \cap A = \emptyset$, donc $z \in X \setminus A'$. D'où on a $V \subset X \setminus A'$. Donc $X \setminus A'$ est ouvert dans X.
On a toujours $(A')' \subset \overline{A'}$. D'après ce qui précède, A' est fermé dans X, donc $\overline{A'} = A'$. Par conséquent, on a $\big(A'\big)' \subset A'$.

Exercice 1.10. Soient X un espace topologique et A un partie de X. Montrer que :

1. $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.
2. $\mathrm{Fr}\big(\overline{A}\big) \subset \mathrm{Fr}(A)$, $\mathrm{Fr}\big(\,\mathring{A}\,\big) \subset \mathrm{Fr}(A)$ et donner des exemples où ces inclusions sont strictes.
3. A est fermé dans $X \iff \mathrm{Fr}(A) \subset A$.
4. A est ouvert dans $X \iff \mathrm{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.
5. Si A est ouvert (ou fermé) dans X, alors on a $\overbrace{\mathrm{Fr}(A)}^{\circ} = \emptyset$.
6. A est ouvert et fermé dans $X \iff \mathrm{Fr}(A) = \emptyset$.

Solution. 1. Par définition, on a $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \cap (X\setminus \mathring{A}) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.
2. On a $\mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}} \subset \overline{A}$, d'où $\big(\overline{A} \setminus \mathring{\overline{A}}\,\big) \subset \big(\overline{A} \setminus \mathring{A}\,\big)$. Par conséquent, on a $\mathrm{Fr}\big(\overline{A}\big) \subset \mathrm{Fr}(A)$.
On a $\mathring{A} \subset \overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}$, d'où $\big(\overline{\mathring{A}} \setminus \mathring{A}\,\big) \subset \big(\overline{A} \setminus \mathring{A}\,\big)$. Par conséquent, on a $\mathrm{Fr}\big(\,\mathring{A}\,\big) \subset \mathrm{Fr}(A)$.
Si $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle et $A = \mathbb{Q}$, on a $\mathrm{Fr}\big(\overline{A}\big) = \emptyset$, $\mathrm{Fr}(A) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{Fr}\big(\,\mathring{A}\,\big) = \emptyset$.
3. On a $\mathrm{Fr}(A) \subset \overline{A}$ et $\overline{A} = \mathring{A} \cup \mathrm{Fr}(A) \subset A \cup \mathrm{Fr}(A)$. Si A est fermé dans X, alors $A = \overline{A}$, d'où $\mathrm{Fr}(A) \subset A$. Réciproquement, si $\mathrm{Fr}(A) \subset A$, alors $\overline{A} \subset A$, donc A est fermé dans X.
4. Si A est ouvert dans X, alors $\mathring{A} = A$, d'où $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \big(\overline{A} \setminus A\big) \cap A = \emptyset$. Inversement, supposons $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \emptyset$. Comme on a $A \subset \overline{A} = \mathring{A} \cup \mathrm{Fr}(A)$, alors $A \subset \mathring{A}$. Donc A est ouvert dans X.

5. Si A est fermé dans X, d'après 3, on a $\overbrace{\mathrm{Fr}(A)}^{\circ} \subset \mathring{A}$. Or on a $\mathrm{Fr}(A) \cap \mathring{A} = \emptyset$, d'où $\overbrace{\mathrm{Fr}(A)}^{\circ} = \emptyset$. Si A est ouvert dans X, alors on a $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus A = \overline{A} \cap (X \setminus A)$. On déduit de l'exercice 1.4 que l'on a $\overbrace{\mathrm{Fr}(A)}^{\circ} = \mathring{\overline{A}} \cap \overbrace{X \setminus A}^{\circ} = \mathring{\overline{A}} \cap \big(X \setminus \overline{A}\big) = \emptyset$.

6. Ceci résulte de 3 et 4.

Exercice 1.11. Soient X un espace topologique et A, B des parties de X.

1. Montrer que $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$ et donner un exemple où cette inclusion est stricte.

2. Montrer que si $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$, alors on a $\mathrm{Fr}(A \cup B) = \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$.

Solution. 1. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fr}(A \cup B) &= \overline{A \cup B} \cap \overline{X \setminus (A \cup B)} \\
&= \left[\overline{A} \cup \overline{B}\right] \cap \overline{(X \setminus A) \cap (X \setminus B)} \\
&\subset \left[\overline{A} \cup \overline{B}\right] \cap \overline{(X \setminus A)} \cap \overline{(X \setminus B)} \\
&= \left[\overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)} \cap \overline{(X \setminus B)}\right] \cup \left[\overline{B} \cap \overline{(X \setminus A)} \cap \overline{(X \setminus B)}\right] \\
&\subset \left[\overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}\right] \cup \left[\overline{B} \cap \overline{(X \setminus B)}\right] = \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B).
\end{aligned}$$

Si $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle et $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a $\mathrm{Fr}(A \cup B) = \emptyset$ et $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(B) = \mathbb{R}$.

2. Puisque $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$, d'après l'exercice 1.4, on a $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fr}(A \cup B) &= \overline{A \cup B} \setminus \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \\
&= \left[\overline{A} \cup \overline{B}\right] \setminus \left[\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}\right] \\
&= \left[\overline{A} \cup \overline{B}\right] \cap \left[X \setminus \left(\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}\right)\right] \\
&= \left[\overline{A} \cup \overline{B}\right] \cap \left[\left(X \setminus \overset{\circ}{A}\right) \cap \left(X \setminus \overset{\circ}{B}\right)\right] \\
&= \left[\overline{A} \cap \left(X \setminus \overset{\circ}{A}\right) \cap \left(X \setminus \overset{\circ}{B}\right)\right] \cup \left[\overline{B} \cap \left(X \setminus \overset{\circ}{A}\right) \cap \left(X \setminus \overset{\circ}{B}\right)\right] \\
&= \left[\overline{A} \cap \left(X \setminus \overset{\circ}{A}\right)\right] \cup \left[\overline{B} \cap \left(X \setminus \overset{\circ}{B}\right)\right] = \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B).
\end{aligned}$$

Exercice 1.12. Soient X un ensemble infini, $x_0 \in X$ et

$$\mathcal{T} = \left\{U \subset X \; ; \; x_0 \notin U\right\} \cup \left\{U \subset X \; ; \; X \setminus U \text{ est fini}\right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.

2. Montrer que pour tout $x \in X \setminus \{x_0\}$, $\{x\}$ est ouvert et fermé dans X et que $\{x_0\}$ est fermé non ouvert dans X.

3. Montrer que pour tout $A \subset X$, on a :
$$\overline{A} = \begin{cases} A & \text{si} \quad A \text{ est fini}\,, \\ A \cup \{x_0\} & \text{si} \quad A \text{ est infini}\,. \end{cases}$$
En déduire que l'intersection de deux ensembles fermés infinis est non vide.
4. Montrer que pour tout $A \subset X$, on a :
$$\overset{\circ}{A} = \begin{cases} A & \text{si} \quad X \setminus A \text{ est fini}\,, \\ A \setminus \{x_0\} & \text{si} \quad X \setminus A \text{ est infini}\,. \end{cases}$$
5. Montrer que si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors l'ensemble $\{x \in X \;;\; f(x) \neq f(x_0)\}$ est au plus dénombrable.

Solution. 1. Comme $x_0 \notin \emptyset$ et $X \setminus X = \emptyset$ est fini, alors on a $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
Soient $U, V \in \mathcal{T}$. Si $x_0 \notin U$ ou $x_0 \notin V$, alors $x_0 \notin U \cap V$, donc on a $U \cap V \in \mathcal{T}$. Supposons que $X \setminus U$ et $X \setminus V$ sont finis, alors $X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ est fini, donc on a $U \cap V \in \mathcal{T}$.
Soient $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$. Si pour tout $i \in I$, $x_0 \notin U_i$, alors $x_0 \notin \underset{i \in I}{\cup} U_i$ et donc on a $\underset{i \in I}{\cup} U_i \in \mathcal{T}$. Supposons qu'il existe $j \in I$ tel que $X \setminus U_j$ soit fini. Comme on a $X \setminus \underset{i \in I}{\cup} U_i \subset X \setminus U_j$, alors $X \setminus \underset{i \in I}{\cup} U_i$ est fini, donc $\underset{i \in I}{\cup} U_i \in \mathcal{T}$. Par conséquent, $\mathcal{T}$ est bien une topologie sur X.
2. Pour tout $x \in X \setminus \{x_0\}$, $x_0 \notin \{x\}$, donc $\{x\}$ est ouvert dans X. Pour tout $z \in X$, $U = X \setminus \{z\}$ est ouvert dans X car $X \setminus U = \{z\}$ est fini. Donc $\{z\}$ est fermé dans X. Si $\{x_0\}$ était ouvert dans X, alors $X \setminus \{x_0\}$ serai fini, ce qui est impossible. Donc $\{x_0\}$ n'est pas ouvert dans X.
3. Il résulte de la définition de $\mathcal{T}$ que tout sous-ensemble fini de X est fermé, donc si A est fini, on a $\overline{A} = A$. Supposons maintenant A infini. Soit U un ouvert de X contenant x_0, alors $X \setminus U$ est fini, donc $U \cap A \neq \emptyset$. Par conséquent, on a $x_0 \in \overline{A}$. Comme $x_0 \notin X \setminus (A \cup \{x_0\})$, alors $X \setminus (A \cup \{x_0\})$ est ouvert dans X, donc $A \cup \{x_0\}$ est fermé dans X. Par conséquent on a $\overline{A} = A \cup \{x_0\}$. On en déduit que tout ensemble infini fermé de X contient le point x_0, donc l'intersection de deux ensembles infinis fermés de X est non vide.
4. Soit $A \subset X$. Si $X \setminus A$ est fini, alors A est ouvert et donc on a $\overset{\circ}{A} = A$. Supposons maintenant $X \setminus A$ infini. Si $x_0 \notin A$, alors A est un ouvert de X et donc on a $\overset{\circ}{A} = A = A \setminus \{x_0\}$. Supposons $x_0 \in A$, alors $A \setminus \{x_0\}$ est un ouvert de X contenu dans A, donc on a $A \setminus \{x_0\} \subset \overset{\circ}{A} \subset A$. Si $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, on aurait $A = \overset{\circ}{A}$ qui est ouvert dans X, ce qui est impossible car $x_0 \in A$ et $X \setminus A$ infini. Par conséquent, on a $\overset{\circ}{A} = A \setminus \{x_0\}$.
5. On a $\{x \in X \;;\; f(x) \neq f(x_0)\} = \underset{n \in \mathbb{N}^*}{\cup} f^{-1}(F_n)$, où $F_n = \mathbb{R} \setminus \left]f(x_0) - \frac{1}{n},\, f(x_0) + \frac{1}{n}\right[$, car $\mathbb{R} \setminus \{f(x_0)\} = \underset{n \in \mathbb{N}^*}{\cup} F_n$. Comme F_n est fermé dans $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(F_n)$ est un fermé de X ne contenant pas x_0, donc $f^{-1}(F_n)$ est fini. Par conséquent, $\{x \in X \;;\; f(x) \neq f(x_0)\}$ est au plus dénombrable.

Exercice 1.13. Soient X un ensemble infini, $x_0 \in X$ et
$$\mathcal{F} = \big\{A \subset X \;;\; x_0 \in A\big\} \cup \big\{A \subset X \;;\; A \text{ est au plus dénombrable}\big\}\,.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fermés d'une topologie $\mathcal{T}$ sur X et que $(X, \mathcal{T})$ est séparé.

2. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Montrer que f est continue si et seulement si l'ensemble $\{x \in X \ ; \ f(x) \neq f(x_0)\}$ est au plus dénombrable.

Solution. 1. On a $x_0 \in X$, donc $X \in \mathcal{F}$. L'ensemble $\emptyset$ est bien sûr au plus dénombrable, donc $\emptyset \in \mathcal{F}$. Soient $A, B \in \mathcal{F}$. Si $x_0 \in A$ ou $x_0 \in B$, alors $x_0 \in A \cup B$ et donc on a $A \cup B \in \mathcal{F}$. Si A et B sont au plus dénombrables, alors $A \cup B$ est au plus dénombrable, d'où $A \cup B \in \mathcal{F}$. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$. Si pour tout $i \in I$, on a $x_0 \in A_i$, alors $x_0 \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ et donc $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$. S'il existe $j \in I$ tel que A_j soit au plus dénombrable, alors $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ est au plus dénombrable, donc on a $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$. Par conséquent, $\mathcal{F}$ est bien l'ensemble des fermés d'une topologie $\mathcal{T}$ sur X.
Pour tout $x \in X$ tel que $x \neq x_0$, $\{x\}$ est ouvert et fermé dans X. On en déduit que $(X, \mathcal{T})$ est séparé.
2. Supposons d'abord f continue. On a $\{x \in X \ ; \ f(x) \neq f(x_0)\} = \bigcup\limits_{n \geq 1} f^{-1}(F_n)$, où $F_n = \mathbb{R} \setminus]f(x_0) - \frac{1}{n}, \, f(x_0) + \frac{1}{n}[$. Comme F_n est fermé dans $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(F_n)$ est un fermé de X ne contenant pas x_0, donc $f^{-1}(F_n)$ est au plus dénombrable. Par conséquent, $\{x \in X \ ; \ f(x) \neq f(x_0)\}$ est au plus dénombrable.
Réciproquement, supposons que $\{x \in X \ ; \ f(x) \neq f(x_0)\}$ est au plus dénombrable, donc son complémentaire $\{x \in X \ ; \ f(x) = f(x_0)\}$ est ouvert dans X. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Si $f(x_0) \notin U$, alors $x_0 \notin f^{-1}(U)$, donc c'est un ouvert de X. Si $f(x_0) \in U$, alors $f^{-1}(U) = \{x \in X \ ; \ f(x) = f(x_0)\} \cup V$, où V est un sous-ensemble de X ne contenant pas x_0, donc V est un ouvert de X. Donc $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X. Par conséquent, f est continue.

Exercice 1.14. On note $\mathcal{T} = \big\{\emptyset\big\} \cup \big\{U \subset \mathbb{R} \ ; \ \mathbb{R} \setminus U \text{ est au plus dénombrable}\big\}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$ et que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ n'est pas séparé.

2. Montrer que toute intersection dénombrable d'ouverts dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est un ouvert.

3. Montrer qu'une suite dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est convergente si elle est stationnaire à partir d'un certain rang.

4. Soit $\mathcal{T}_u$ la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Montrer que l'application identique $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ n'est pas continue, et pourtant, pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ convergeant avec une limite ℓ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, la suite $(\mathrm{id}(x_n))_{n \geq 0}$ converge vers $\mathrm{id}(\ell)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.

Solution. 1. Il est clair que $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$. Soient $U, V \in \mathcal{T}$. Si $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$, alors $U \cap V = \emptyset \in \mathcal{T}$. Supposons donc $U \neq \emptyset$ et $V \neq \emptyset$. On a $\mathbb{R} \setminus (U \cap V) = (\mathbb{R} \setminus U) \cup (\mathbb{R} \setminus V)$. Comme $\mathbb{R} \setminus U$ et $\mathbb{R} \setminus V$ sont au plus dénombrables, alors $\mathbb{R} \setminus (U \cap V)$ est au plus dénombrable. Donc on a $U \cap V \in \mathcal{T}$. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$. Si pour tout $i \in I$, on a $U_i = \emptyset$, alors $\bigcap\limits_{i \in I} U_i = \emptyset \in \mathcal{T}$. Supposons qu'il existe $j \in I$ tel que $U_j \neq \emptyset$. Comme on a $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i \in I} U_i = \bigcap\limits_{i \in I} \mathbb{R} \setminus U_i \subset \mathbb{R} \setminus U_j$, alors $\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ est au plus dénombrable, donc $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$. Par conséquent, $\mathcal{T}$ est bien une topologie sur $\mathbb{R}$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq y$ et U, V deux ouverts dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ contenant respectivement x et y. Alors $\mathbb{R} \setminus U$ et $\mathbb{R} \setminus V$ sont au plus dénombrables, donc $\mathbb{R} \setminus (U \cap V) = (\mathbb{R} \setminus U) \cup (\mathbb{R} \setminus V)$ est au plus dénombrable, d'où

$U \cap V \neq \emptyset$. Par conséquent, $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ n'est pas séparé.
2. Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite d'ouverts dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. S'il existe $n \geq 0$ tel que $U_n = \emptyset$, alors on a $\bigcap\limits_{n\geq 0} U_n = \emptyset \in \mathcal{T}$. Supposons que pour tout $n \geq 0$, on a $U_n \neq \emptyset$, alors pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{R} \setminus U_n$ est au plus dénombrable. Comme on a $\mathbb{R} \setminus \bigcap\limits_{n\geq 0} U_n = \bigcup\limits_{n\geq 0} \mathbb{R} \setminus U_n$, alors $\mathbb{R} \setminus \bigcap\limits_{n\geq 0} U_n$ est au plus dénombrable. Donc $\bigcap\limits_{n\geq 0} U_n$ est un ouvert de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.
3. Il est clair que dans n'importe quel espace topologique, toute suite stationnaire à partir d'un certain rang est convergente. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite convergeant vers un point ℓ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Soit $U = \mathbb{R} \setminus \{x_n \ ; \ x_n \neq \ell\}$, alors U est un ouvert de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ contenant ℓ. Comme $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $x_n \in U$. Donc pour tout $n \geq N$, on a $x_n = \ell$.
4. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $]a, b[\in \mathcal{T}_u$, mais $]a, b[\notin \mathcal{T}$, donc l'application identique id n'est pas continue de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite convergeant vers une limite ℓ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, d'après 3, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $x_n = \ell$. Par conséquent, $(\mathrm{id}(x_n))_{n\geq 0}$ converge aussi vers $\mathrm{id}(\ell)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.

Exercice 1.15. Soit $\mathcal{B} = \big\{[a, +\infty[\ ; \ a \in \mathbb{R}\big\}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ forme une base pour une topologie sur $\mathbb{R}$ que l'on note $\mathcal{T}$.

2. Montrer que toute intersection d'ouverts dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est un ouvert.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'adhérence de $\{x\}$ par rapport à $\mathcal{T}$ est l'intervalle $]-\infty, x]$. En déduire que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ n'est pas un T_1-espace.

4. Montrer que l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est un T_0-espace.

Solution. 1. Il est clair que $\mathcal{B}$ vérifie les conditions (B1) et (B2), voir page 3, donc il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{R}$ pour laquelle $\mathcal{B}$ est une base.
2. Puisque tout ouvert de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est réunion d'ouverts appartenant à $\mathcal{B}$, pour montrer que toute intersection d'ouverts dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est un ouvert, il suffit de montrer que toute intersection d'éléments de $\mathcal{B}$ est un ouvert. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}$. Si $\sup\limits_{i\in I} a_i = +\infty$, on a $\bigcap\limits_{i\in I} [a_i, +\infty[= \emptyset \in \mathcal{T}$. Si $\sup\limits_{i\in I} a_i = a \in \mathbb{R}$, on a $\bigcap\limits_{i\in I} [a_i, +\infty[= [a, +\infty[\in \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $]x, +\infty[= \bigcup\limits_{n\geq 1} \big[x + \frac{1}{n}, +\infty\big[$, donc $]x, +\infty[$ est un ouvert de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Par conséquent, $]-\infty, x]$ est fermé dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, d'où $\overline{\{x\}} \subset]-\infty, x]$. Pour tout $y \in]-\infty, x]$ et pour tout voisinage V de y dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, on a $[y, +\infty[\subset V$, voir proposition 1.1.3, donc $V \cap \{x\} \neq \emptyset$. Par conséquent, on a $y \in \overline{\{x\}}$, d'où $\overline{\{x\}} =]-\infty, x]$.
D'après la proposition 1.5.1, un espace topologique X est un T_1-espace si et seulement si tout point de X est fermé, donc $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ n'est pas un T_1-espace.
4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq y$. Supposons $x < y$, alors $[y, +\infty[$ est un voisinage de y ne contenant pas x. Donc $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est un T_0-espace.

Exercice 1.16. Soient $\mathcal{B}_l = \big\{]a, b] \ ; \ a, b \in \mathbb{R}\big\}$ et $\mathcal{B}_r = \big\{[a, b[\ ; \ a, b \in \mathbb{R}\big\}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_l$ (*resp.* $\mathcal{B}_r$) forme une base pour une topologie, dite **topologie gauche** (*resp.* **topologie droite**), que l'on note $\mathcal{T}_l$ (*resp.* $\mathcal{T}_r$) sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la topologie $\mathcal{T}_l$ est plus fine que la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$. En déduire que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ est un espace séparé.
3. Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ est un espace séparable.
4. Montrer que tout ouvert de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ est réunion au plus dénombrable d'intervalles de la forme $]\alpha,\, \beta]$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ n'admet pas une base dénombrable d'ouverts.
6. Montrer que l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ vérifie le premier axiome de dénombrabilité.
7. Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ est un espace de Lindelöf.
8. Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ est un espace normal.

Solution. 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \in]x-1,\, x] \in \mathcal{B}_l$. Pour tout $x \in]a,\, b] \cap]c,\, d]$, on a $x \in]\max(a,c),\, \min(b,d)] \subset]a,\, b] \cap]c,\, d]$. Donc $\mathcal{B}_l$ vérifie les conditions (B1) et (B2), voir page 3, donc il existe une unique topologie $\mathcal{T}_l$ sur $\mathbb{R}$ pour laquelle $\mathcal{B}_l$ est une base. On fait le même raisonnement pour $\mathcal{B}_r$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que $a < b - \frac{1}{N} < b$. Alors on a $]a,\, b[= \bigcup\limits_{n \geq N}]a,\, b - \frac{1}{n}] \in \mathcal{T}_l$. On en déduit que tout ouvert de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle est un ouvert de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$. Autrement dit, $\mathcal{T}_l$ est plus fine que la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est séparé, alors $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ est un espace séparé.
3. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, voir Appendice C, alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on ait $\mathbb{Q} \cap]a,\, b[\neq \emptyset$, d'où $\mathbb{Q} \cap]a,\, b] \neq \emptyset$. Autrement dit, pour tout $]a,\, b] \in \mathcal{B}_l$ tel que $]a,\, b] \neq \emptyset$, on ait $\mathbb{Q} \cap]a,\, b] \neq \emptyset$. Donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$, voir proposition 1.2.4. Par conséquent, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ est un espace séparable.
4. Soit U un ouvert non vide de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$, on a $U = \bigcup\limits_{i \in I}]a_i,\, b_i]$, avec $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ et $a_i < b_i$. D'après 3, pour tout $i \in I$, $]a_i,\, b_i] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. On a $\mathbb{Q} \cap U = \{r_n \;;\; n \geq 0\}$. Pour tout $n \geq 0$, soient $I_n = \big\{i \in I \;;\; r_n \in]a_i,\, b_i]\big\}$ et $U_n = \bigcup\limits_{i \in I_n}]a_i,\, b_i]$. Alors on a $\bigcup\limits_{n \geq 0} I_n = I$ et $U = \bigcup\limits_{n \geq 0} U_n$. Soient $a_n = \inf\limits_{i \in I_n} a_i$ et $b_n = \sup\limits_{i \in I_n} b_i$, on a $a_n, b_n \in [-\infty,\, +\infty]$ et

$$U_n = \begin{cases}]a_n,\, b_n] & \text{si} \quad b_n \in U_n\,, \\ ]a_n,\, b_n[& \text{si} \quad b_n \notin U_n\,. \end{cases}$$

On distingue plusieurs cas :
Si $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait $]a_n,\, b_n[= \bigcup\limits_{k \geq N}]a_n,\, b_n - \frac{1}{k}]$.
Si $a_n \in \mathbb{R}$ et $b_n = +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait $]a_n,\, +\infty[= \bigcup\limits_{k \geq N}]a_n,\, k]$.
Si $a_n = -\infty$ et $b_n \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait $]-\infty,\, b_n[= \bigcup\limits_{k \geq N}]-k,\, b_n - \frac{1}{k}]$.
De même pour les autres cas. En tout cas, on peut écrire U_n comme réunion au plus dénombrable d'intervalles de la forme $]\alpha,\, \beta]$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Par conséquent, U est réunion au plus dénombrable d'intervalles de la forme $]\alpha,\, \beta]$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
5. Supposons que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ admet une base dénombrable d'ouverts $(U_n)_{n \geq 0}$. D'après 4, on peut supposer que pour tout $n \geq 0$, $U_n =]a_n,\, b_n]$, avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $b \neq b_n$ pour tout $n \geq 0$. Alors $]a,\, b]$ ne peut pas s'écrire comme

réunion d'intervalles $]a_n,\, b_n]$, c'est une contradiction. Donc $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ n'admet pas de base dénombrable d'ouverts.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intervalles $\big]x - \frac{1}{n},\, x\big]$, où $n \in \mathbb{N}^*$, forment un système fondamental de voisinages de x dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$.
7. Soit $\big(U_i\big)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$. Il s'agit de trouver un sous-recouvrement au plus dénombrable de $\big(U_i\big)_{i\in I}$. Comme $\mathcal{B}_l$ est une base d'ouverts de la topologie $\mathcal{T}_l$, on peut supposer que pour tout $i \in I$, on a $U_i =]a_i,\, b_i]$, avec $a_i < b_i$. On a $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{i\in I}]a_i,\, b_i]$, et soient $U = \bigcup\limits_{i\in I}]a_i,\, b_i[$ et $F = \mathbb{R} \setminus U$. Alors U est un ouvert de $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle. Comme $\mathbb{R}$ admet une base dénombrable d'ouverts, voir exemple 1.2.2, alors U muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$ admet une base dénombrable d'ouverts. On déduit du théorème 1.9.5 que U est un espace de Lindelöf. Donc il existe un sous-ensemble au plus dénombrable J de I tel que $U = \bigcup\limits_{i\in J}]a_i,\, b_i[$. Montrons maintenant que F est un ensemble au plus dénombrable. Soit $x \in F$. Comme on a $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{i\in I}]a_i,\, b_i]$, alors il existe $i_x \in I$ tel que $x = b_{i_x}$. Comme $]a_{i_x},\, x[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, on choisit $q_x \in]a_{i_x},\, x[\cap \mathbb{Q}$, d'où $q_x < x$ et on a $]q_x,\, x[\subset U$. Soient $x, y \in F$ tels que $x < y$. Si $q_x \geq q_y$, alors on a $q_y \leq q_x < x < y$. Comme on a $]q_y,\, y[\subset U$, on en déduit que $x \in U$, ce qui est impossible. Donc on a $q_x < q_y$. Ainsi, on définit une application injective $x \longmapsto q_x$ de F dans $\mathbb{Q}$. Par conséquent, F est au plus dénombrable. Donc l'ensemble $K = J \cup \{i_x\ ;\ x \in F\}$ est au plus dénombrable et on a $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{i\in K}]a_i,\, b_i]$. Donc $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ est bien un espace de Lindelöf.
8. Comme $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ est un espace de Lindelöf, d'après le théorème 1.9.6, il suffit de montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ est un espace régulier. Soient $b \in \mathbb{R}$ et F un fermé de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ tels que $b \notin F$. Alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $]a, b] \cap F = \emptyset$. Soient $U = \big]\frac{a+b}{2},\, b\big]$ et $V = \big] -\infty,\, \frac{a+b}{2}\big[\cup \big]b,\, +\infty\big[$. Alors U et V sont deux ouverts disjoints de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ tels que $b \in U$ et $F \subset V$. Donc $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ est un espace régulier.

Exercice 1.17. Soit $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie $\mathcal{T}_l$. D'après l'exercice précédent, X est normal et séparable. Soit $Y = X \times X$ muni de la topologie produit, donc Y est séparable. Soit $D = \{(x, y) \in Y\ ;\ x + y = 0\}$.

1. Montrer que D muni de la topologie induite par celle de Y est discret. En déduire que D n'est pas séparable. Ainsi, un sous-espace d'un espace topologique séparable n'est pas forcément séparable.
2. Montrer que D est fermé dans Y. En déduire que Y n'est pas un espace de Lindelöf. Ainsi, le produit de deux espaces de Lindelöf n'est pas forcément un espace de Lindelöf.

Solution. 1. Pour tout $(x, y) \in D$, $U =] -\infty,\, x] \times] -\infty,\, y]$ est un ouvert de Y et on a $U \cap D = \{(x, y)\}$. Donc D est un espace discret. Comme D n'est pas dénombrable, alors D n'est pas séparable.
2. Soit $(x, y) \in Y \setminus D$, alors on a $y \neq -x$. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]y - \varepsilon,\, y + \varepsilon[\cap] - x - \varepsilon,\, -x + \varepsilon[= \emptyset$. Puisque $U =]x - \varepsilon,\, x + \varepsilon[\times]y - \varepsilon,\, y + \varepsilon[$ est un ouvert de Y tel que $(x, y) \in U \subset Y \setminus D$, alors $Y \setminus D$ est un ouvert de Y, donc D est fermé dans Y. Il est clair que tout sous-espace fermé d'un espace de Lindelöf est un espace de Lindelöf. Comme D n'est pas un espace de Lindelöf, car D est discret et infini non dénombrable, on en déduit que Y n'est pas un espace de Lindelöf.

Exercice 1.18. Soit X un ensemble infini muni de la topologie cofinie, voir exemple 1.1.1.

1. Montrer que toute partie infinie de X est dense. En déduire que X est séparable.
2. On suppose de plus que X est non dénombrable. Montrer que X n'admet pas de base dénombrable d'ouverts.

Solution. 1. Soient A une partie infinie de X et U un ouvert non vide de X, alors $X \setminus U$ est fini, donc $A \cap U \neq \emptyset$. Il résulte de la proposition 1.2.4 que A est dense dans X. En particulier, toute partie dénombrable de X est dense. Donc X est séparable.
2. Si X admet une base dénombrable d'ouverts, alors il existe une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ de sous-ensembles finis de X telle que $(X \setminus A_n)_{n\geq 1}$ forme une base d'ouverts de X. Soient $x \in X$ tel que $x \notin \underset{n\geq 1}{\cup} A_n$ et $U = X \setminus \{x\}$, alors U est un ouvert de X. Donc il existe $n \geq 1$ tel que $X \setminus A_n \subset U$. Or on a $A_n \subset U$, donc $U = X$, ce qui est impossible. Par conséquent, X n'admet pas de base dénombrable d'ouverts.

Exercice 1.19. Soient X un espace topologique et A un sous-ensemble de X muni de la topologie induite par celle de X.

1. Soit $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X. Montrer que $\big\{U \cap A \ ; \ U \in \mathcal{B}\big\}$ est une base d'ouverts de A.
2. Soient $x \in A$ et $\mathcal{B}_x$ une base de voisinages de x dans X. Montrer que $\big\{V \cap A \ ; \ V \in \mathcal{B}_x\big\}$ est une base de voisinages de x dans A.

Solution. 1. Soit U' un ouvert non vide de A, alors il existe un ouvert non vide U de X tel que $U' = A \cap U$. Comme il existe une famille $(U_i)_{i\in I}$ dans $\mathcal{B}$ telle que $U = \underset{i\in I}{\cup} U_i$, alors on a $U' = \underset{i\in I}{\cup}(U_i \cap A)$. Par conséquent, $\big\{U \cap A \ ; \ U \in \mathcal{B}\big\}$ est une base d'ouverts de A.
2. Soit W un voisinage de x dans A, alors il existe un voisinage V' de x dans X tel que $W = A \cap V'$, et il existe $V \in \mathcal{B}_x$ tel que $V \subset V'$. D'où on a $A \cap V \subset W$, donc $\big\{V \cap A \ ; \ V \in \mathcal{B}_x\big\}$ est une base de voisinages de x dans A.

Exercice 1.20.

1. Soient X un ensemble et A une partie de X. Quelle est la topologie de A induite par la topologie discrète de X ? Par la topologie grossière de X ?
2. Quelle est la topologie de $\mathbb{Z}$ induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$?

Solution. 1. Pour tout $x \in X$, $\{x\}$ est un ouvert de $(X, \mathcal{T}_d)$, donc pour tout $a \in A$, $\{a\} = \{a\} \cap A$ est un ouvert de A. Par conséquent, la topologie de A induite par la topologie discrète de X est la topologie discrète de A.
On a $\{U \cap A \ ; \ U \in \mathcal{T}_g\} = \{\emptyset, A\}$, donc la topologie de A induite par la topologie grossière de X est la topologie grossière de A.
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\big]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\big[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et on a $\big]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\big[\cap \mathbb{Z} = \{n\}$. Donc la topologie de $\mathbb{Z}$ induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est la topologie discrète.

Exercice 1.21. Soient X un espace topologique, A un sous-ensemble de X et $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X telle que $\underset{i\in I}{\cup} U_i = X$.

1. Montrer que A est ouvert dans X si et seulement si pour tout $i \in I$, $A \cap U_i$ est ouvert dans U_i.

2. Montrer que A est fermé dans X si et seulement si pour tout $i \in I$, $A \cap U_i$ est fermé dans U_i.

Solution. 1. Supposons d'abord que A est ouvert dans X. Alors pour tout $i \in I$, $A \cap U_i$ est ouvert dans X et contenu dans U_i, donc $A \cap U_i$ est ouvert dans U_i.
Réciproquement, supposons que pour tout $i \in I$, $A \cap U_i$ est ouvert dans U_i. Alors $A \cap U_i$ est ouvert dans X car U_i est un ouvert de X. Or on a $A = \underset{i \in I}{\cup} (A \cap U_i)$, donc A est ouvert dans X.
2. A est fermé dans X si et seulement si $X \setminus A$ est ouvert dans X si et seulement si pour tout $i \in I$, $(X \setminus A) \cap U_i$ est ouvert dans U_i. Or on a $(X \setminus A) \cap U_i = U_i \setminus (A \cap U_i)$, donc $(X \setminus A) \cap U_i$ est ouvert dans U_i si et seulement si $A \cap U_i$ est fermé dans U_i. Par conséquent, A est fermé dans X si et seulement si pour tout $i \in I$, $A \cap U_i$ est fermé dans U_i.

Exercice 1.22. Soient X un espace topologique, A un sous-ensemble de X et $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de fermées de X telle que $\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} F_i = X$.

1. Montrer que A est fermé dans X si et seulement si pour tout $i \in I$, $A \cap F_i$ est fermé dans F_i.

2. Montrer que A est ouvert dans X si et seulement si pour tout $i \in I$, $A \cap F_i$ est ouvert dans F_i.

3. A-t-on le même résultat si la famille (F_i) était infinie ?

Solution. 1. Supposons d'abord que A est fermé dans X. Alors pour tout $i \in I$, $A \cap F_i$ est fermé dans X et contenu dans F_i, donc $A \cap F_i$ est fermé dans F_i.
Réciproquement, supposons que pour tout $i \in I$, $A \cap F_i$ est fermé dans F_i. Alors $A \cap F_i$ est fermé dans X car F_i est un fermé de X. Or on a $A = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} (A \cap F_i)$, donc A est fermé dans X.
2. A est ouvert dans X si et seulement si $X \setminus A$ est fermé dans X si et seulement si pour tout $i \in I$, $(X \setminus A) \cap F_i$ est fermé dans F_i. Or on a $(X \setminus A) \cap F_i = F_i \setminus (A \cap F_i)$, donc $(X \setminus A) \cap F_i$ est fermé dans F_i si et seulement si $A \cap F_i$ est ouvert dans F_i. Par conséquent, A est ouvert dans X si et seulement si pour tout $i \in I$, $A \cap F_i$ est ouvert dans F_i.
3. Si $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle et $A =]0, 1]$ et si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F_x = \{x\}$, alors F_x est fermé dans $\mathbb{R}$ et on a $\mathbb{R} = \underset{x \in \mathbb{R}}{\cup} F_x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A \cap F_x$ est fermé et ouvert dans F_x, mais A n'est ni fermé ni ouvert dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.23. Soient Y et Z deux parties d'un espace topologique X. Soit A une partie de $Y \cap Z$.

1. On suppose que A est un ouvert du sous-espace Y et un ouvert du sous-espace Z. Montrer que A est un ouvert du sous-espace $Y \cup Z$.

2. On suppose que A est un fermé du sous-espace Y et un fermé du sous-espace Z. Montrer que A est un fermé du sous-espace $Y \cup Z$.

Solution. 1. Par hypothèse, il existe des ouverts U et V dans X tels que $A = U \cap Y$ et $A = V \cap Z$. Soit $W = U \cap V$, alors W est un ouvert de X et on a $W \cap (Y \cup Z) = A$, donc A est un ouvert de $Y \cup Z$.
2. Par hypothèse, il existe des fermés F et G dans X tels que $A = F \cap Y$ et $A = G \cap Z$. Soit $D = F \cap G$, alors D est un fermé de X et on a $D \cap (Y \cup Z) = A$, donc A est un fermé de $Y \cup Z$.

Exercice 1.24. Soient X un espace topologique, Y un sous-ensemble de X muni de la topologie induite par celle de X, et A un sous-ensemble de Y.

1. Montrer que l'adhérence de A dans Y est égal à $\overline{A} \cap Y$.
2. Montrer que l'ensemble des points d'accumulation de A dans Y est égal à $A' \cap Y$.
3. Vérifier que l'intérieur de A dans Y contient $\overset{\circ}{A}$.
4. Montrer que Y est ouvert dans X si et seulement si pour toute partie B de Y, l'intérieur de B dans Y coïncide avec l'intérieur de B dans X.
5. Montrer que la frontière de A dans Y est contenue dans $\mathrm{Fr}(A) \cap Y$.

Solution. 1. Soit $\overline{A}_Y$ l'adhérence de A dans Y. Comme les fermés de Y sont de la forme $Y \cap F$ avec F fermé de Y, alors $\overline{A} \cap Y$ est un fermé de Y contenant A, donc on a $\overline{A}_Y \subset \overline{A} \cap Y$. Inversement, soit $x \in \overline{A} \cap Y$. Alors pour tout voisinage W de x dans Y, il existe un voisinage V de x dans X tel que $W = V \cap Y$ et $V \cap A \neq \emptyset$, d'où on a $W \cap A = V \cap Y \cap A = V \cap A \neq \emptyset$, donc $x \in \overline{A}_Y$. Par conséquent, on a $\overline{A}_Y = \overline{A} \cap Y$.
2. Soit A'_Y l'ensemble des points d'accumulation de A dans Y. Soit $x \in Y$, alors $x \in A'_Y$ si et seulement si pour tout voisinage V de x dans X, on a $((V \cap Y) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Or on a $((V \cap Y) \setminus \{x\}) \cap A = (V \setminus \{x\}) \cap A$, alors on en déduit que l'on a $A'_Y = A' \cap Y$.
3. Soit $\overset{\circ}{A}_Y$ l'intérieur de A dans Y. On a $\overset{\circ}{A} \subset A \subset Y$ et $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de X, donc $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de Y contenu dans A. Par conséquent, on a $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{A}_Y$.
4. Supposons d'abord que Y est un ouvert de X. Soit B une partie de Y. Comme $\overset{\circ}{B}_Y$ est un ouvert de Y, alors il existe un ouvert U de X tel que $\overset{\circ}{B}_Y = Y \cap U$, donc $\overset{\circ}{B}_Y$ est un ouvert de X contenu dans B. Par conséquent, on a $\overset{\circ}{B}_Y \subset \overset{\circ}{B}$. D'après 3, on a aussi $\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{B}_Y$, d'où $\overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{B}_Y$.
Réciproquement, supposons que pour toute partie B de Y, on a $\overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{B}_Y$. Alors on a $Y = \overset{\circ}{Y}_Y = \overset{\circ}{Y}$, donc Y est un ouvert de X.
5. Soit $\mathrm{Fr}_Y(A)$ la frontière de A dans Y. Comme on a $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{A}_Y \subset \overline{A}_Y = \overline{A} \cap Y \subset \overline{A}$, alors $\mathrm{Fr}_Y(A) = \overline{A}_Y \setminus \overset{\circ}{A}_Y \subset \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \mathrm{Fr}(A)$. Donc on a $\mathrm{Fr}_Y(A) \subset \mathrm{Fr}(A) \cap Y$.

Exercice 1.25. Soient X un espace topologique, Y un sous-ensemble de X muni de la topologie induite par celle de X, et A un sous-ensemble de Y. Montrer que si A est dense dans Y et Y est dense dans X, alors A est dense dans X.
Solution. Soit $\overline{A}_Y$ l'adhérence de A dans Y, on a $Y = \overline{A}_Y = \overline{A} \cap Y$, d'où $Y \subset \overline{A}$. Or on a $\overline{Y} = X$, donc $\overline{A} = X$, *i.e.* A est dense dans X.

Exercice 1.26. Soient X un espace topologique, A une partie de X et U un ouvert de X.

1. Montrer que l'on a $\overline{A} \cap U \subset \overline{U \cap A}$.
2. En déduire que si A est dense dans X, alors on a $\overline{U} = \overline{U \cap A}$ et $U \cap A$ est dense dans U.
3. En déduire que si A est dense dans X et si $x \in A$ et W est un voisinage de x dans A, alors l'adhérence $\overline{W}$ de W dans X est un voisinage de x dans X.
4. En déduire que si A et U sont denses dans X, alors $U \cap A$ est dense dans X.
5. Donner un exemple d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ tel que A et $\mathbb{R} \setminus A$ soient denses dans $\mathbb{R}$. Ainsi, l'intersection de deux ensembles denses n'est pas en général dense.

Solution. 1. Soient $x \in \overline{A} \cap U$ et V un voisinage de x dans X. Alors $V \cap U$ est un voisinage de x dans X et $x \in \overline{A}$, donc on a $V \cap U \cap A \neq \emptyset$. Par conséquent, on a $x \in \overline{U \cap A}$, d'où $\overline{A} \cap U \subset \overline{U \cap A}$.
2. Si A est dense dans X, on a $\overline{A} = X$, d'où $U \cap \overline{A} = U$. Donc on a $U \subset \overline{U \cap A} \subset \overline{U}$, d'où $\overline{U} = \overline{U \cap A}$. D'après l'exercice 1.24, l'adhérence de $U \cap A$ dans U est égal à $\overline{U \cap A} \cap U = \overline{U} \cap U = U$, donc $U \cap A$ est dense dans U.
3. Soit W un voisinage de x dans A. Alors il existe un voisinage V de x dans X et un ouvert U de X tels que $x \in U \subset V$ et $W = V \cap A$. Comme A est dense dans X, on déduit de 2 que l'on a $\overline{U} = \overline{U \cap A} \subset \overline{V \cap A} \subset \overline{W}$. Donc $\overline{W}$ est un voisinage de x dans X.
4. D'après 2, on a $\overline{U \cap A} = \overline{U} = X$, donc $U \cap A$ est dense dans X.
5. On munit $\mathbb{R}$ de la topologie usuelle, alors $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ et pourtant on a $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$.

Exercice 1.27. Soient X un espace topologique et $(A_i)_{i \in I}$ une famille localement finie de parties de X. Montrer que si pour tout $i \in I$, on a $\overset{\circ}{\overline{A_i}} = \emptyset$, alors $\overset{\circ}{\overline{\bigcup_{i \in I} A_i}} = \emptyset$.

Solution. Pour montrer que $\overset{\circ}{\overline{\bigcup_{i \in I} A_i}} = \emptyset$, on montre que pour tout ouvert non vide U de X, $U \not\subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$. Soient U un ouvert non vide de X et $x \in U$. Alors il existe un voisinage ouvert V de x dans X et un sous-ensemble fini J de I tels que $V \subset U$ et $V \cap A_i = \emptyset$ pour tout $i \in I \setminus J$, d'où $V \cap \overline{A_i} = \emptyset$. Donc on a $V \cap \bigcup_{i \in I \setminus J} \overline{A_i} = \emptyset$. Il résulte de la proposition 1.2.3 que l'on a $V \cap \overline{\bigcup_{i \in I \setminus J} A_i} = \emptyset$. Pour tout $i \in J$, on a $\overline{X \setminus \overline{A_i}} = X \setminus \overset{\circ}{\overline{A_i}} = X$, donc $X \setminus \overline{A_i}$ est un ouvert dense dans X. D'après l'exercice précédent, $\bigcap_{i \in J} X \setminus \overline{A_i}$ est dense dans X. Or on a $\bigcup_{i \in J} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i \in J} A_i}$ et $X \setminus \bigcup_{i \in J} \overline{A_i} = \bigcap_{i \in J} X \setminus \overline{A_i}$, donc $\overset{\circ}{\overline{\bigcup_{i \in J} A_i}} = \emptyset$. On en déduit que $V \not\subset \overline{\bigcup_{i \in J} A_i}$, donc $V \not\subset \overline{\bigcup_{i \in J} A_i} \cup \overline{\bigcup_{i \in I \setminus J} A_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$. Par conséquent, on a $\overset{\circ}{\overline{\bigcup_{i \in I} A_i}} = \emptyset$.

Exercice 1.28. Soient X un espace topologique et A une partie de X. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe un ouvert U de X et un fermé F de X tels que $A = U \cap F$.

(ii) A est ouvert dans son adhérence $\overline{A}$.

(iii) $\overline{A} \setminus A$ est fermé dans X.

(iv) Pour tout $x \in A$, il existe un voisinage V de x dans X tel que $V \cap A$ soit fermé dans V.

Une partie A vérifiant ces propriétés est dite **localement fermée** dans X.
Solution. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Par hypothèse, il existe un ouvert U de X et un fermé F de X tels que $A = U \cap F$. Alors on a $\overline{A} = \overline{U \cap F} \subset \overline{U} \cap \overline{F} = \overline{U} \cap F$ et $A \subset U \cap \overline{A} \subset U \cap \overline{U} \cap F = U \cap F = A$. Donc on a $A = U \cap \overline{A}$, d'où A est ouvert dans $\overline{A}$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Par hypothèse, A est ouvert dans son adhérence $\overline{A}$. Donc $\overline{A} \setminus A$ est fermé dans $\overline{A}$, et comme $\overline{A}$ est fermé dans X, alors $\overline{A} \setminus A$ est fermé dans X.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). Soient $F = \overline{A}$ et $U = X \setminus (\overline{A} \setminus A)$, alors F est fermé dans X, U est ouvert dans X et on a $A = U \cap F$.
Preuve de (i) $\Longrightarrow$ (iv). Soient $x \in A$ et V un voisinage de x dans X. D'après l'exercice 1.24, l'adhérence de $V \cap A$ dans V est $\overline{V \cap A} \cap V$. Donc $V \cap A$ est fermé dans V si l'on a $\overline{V \cap A} \cap V = V \cap A$. Par hypothèse, il existe un ouvert U de X et un fermé F de X tels que $A = U \cap F$, d'où on a $A = U \cap \overline{A}$. Pour tout $x \in A$, U est un voisinage de x dans X et on a $U \cap A = A$ et $\overline{U \cap A} \cap U = \overline{A} \cap U = A \cap U$. Donc $U \cap A$ est fermé dans U.
Preuve de (iv) $\Longrightarrow$ (i). Par hypothèse, pour tout $x \in A$, il existe un voisinage V_x de x dans X tel que $V_x \cap A$ soit fermé dans V, *i.e.* $\overline{V_x \cap A} \cap V_x = V_x \cap A$. Vérifions que l'on peut supposer V_x ouvert dans X. En effet, soit W_x l'intérieur de V_x dans X, on a $x \in W_x$ et $\overline{W_x \cap A} \cap W_x \subset \overline{V_x \cap A} \cap V_x = V_x \cap A$, d'où $\overline{W_x \cap A} \cap W_x \subset V_x \cap A \cap W_x = W_x \cap A \subset \overline{W_x \cap A} \cap W_x$. Donc on a $\overline{W_x \cap A} \cap W_x = W_x \cap A$. Par conséquent, $W_x \cap A$ est fermé dans W_x. Désormais, on peut supposer V_x ouvert dans X. On pose $U = \bigcup_{x \in A} V_x$, alors U est un ouvert de X. Montrons que l'on a $A = U \cap \overline{A}$. Comme $V_x \cap A$ est fermé dans V_x, alors $V'_x = V_x \setminus (V_x \cap A)$ est un ouvert de V_x, donc V'_x est un ouvert de X et on a $V'_x \cap A = \emptyset$, d'où $V'_x \cap \overline{A} = \emptyset$. On a $V_x = V'_x \cup (V_x \cap A)$, d'où $V_x \cap \overline{A} = (V'_x \cap \overline{A}) \cup (V_x \cap A \cap \overline{A}) = V_x \cap A$. Par conséquent, on a $U \cap \overline{A} = \bigcup_{x \in A} V_x \cap \overline{A} = \bigcup_{x \in A} V_x \cap A = U \cap A = A$.

Exercice 1.29. Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et $X = \prod_{i \in I} X_i$ l'espace topologique produit. Pour tout $i \in I$, soit A_i une partie de X_i. On pose $A = \prod_{i \in I} A_i$.

1. Montrer que l'on a $\overline{A} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.

2. En déduire qu'un produit $\prod_{i \in I} A_i$ d'ensembles non vides est fermé dans X si et seulement si pour tout $i \in I$, A_i est fermé dans X_i.

3. Supposons que $I = \{1, \ldots, n\}$ est un ensemble fini. Montrer que l'on a $\mathring{A} = \prod_{i \in I} \mathring{A}_i$.

Solution. 1. On a $\prod_{i \in I} \overline{A_i} = \bigcap_{i \in I} F_i$ où $F_i = \prod_{j \in I} B_j$ avec $B_i = \overline{A_i}$ et $B_j = X_j$ si $j \neq i$. On a $X \setminus F_i = \prod_{j \in I} U_j$ avec $U_i = X_i \setminus \overline{A_i}$ et $U_j = X_j$ si $j \neq i$. Donc $X \setminus F_i$ est ouvert dans X. Par conséquent, F_i est fermé dans X, d'où $\prod_{i \in I} \overline{A_i}$ est un fermé de X contenant A. Donc on a $\overline{A} \subset \prod_{i\in I} \overline{A_i}$. Réciproquement, soient $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$ et $U = \prod_{i\in I} U_i$ un ouvert élémentaire de X contenant x. Pour tout $i \in I$, U_i est un ouvert de X_i et il existe un sous-ensemble fini J de I tel que pour tout $i \in I \setminus J$, on ait $U_i = X_i$. Pour tout $i \in I$, on a $x_i \in \overline{A_i} \cap U_i$, alors il existe $a_i \in A_i \cap U_i$, d'où $a = (a_i)_{i\in I} \in A \cap U$. Donc on a $A \cap U \neq \emptyset$. Par conséquent, on a $x \in \overline{A}$, d'où $\overline{A} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$.

2. Ceci résulte immédiatement de 1.

3. Puisque $\prod_{i\in I} \mathring{A_i}$ est un ouvert de X contenu dans A, alors on a $\prod_{i\in I} \mathring{A_i} \subset \mathring{A}$.

Réciproquement, soit $a = (a_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathring{A}$, alors il existe un ouvert élémentaire $\prod_{i\in I} U_i$ dans X tel que $a = (a_i)_{1\leq i\leq n} \in \prod_{i\in I} U_i \subset A$. Donc pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $a_i \in U_i \subset A_i$, d'où $a_i \in \mathring{A_i}$. Autrement dit, on a $a \in \prod_{i\in I} \mathring{A_i}$. Par conséquent, on a $\mathring{A} = \prod_{i\in I} \mathring{A_i}$.

Exercice 1.30. Soient X, Y deux espaces topologiques et $A \subset X$, $B \subset Y$. Déterminer la frontière de $A \times B$.

Solution. Comme on a $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ et $\overset{\circ}{\widehat{A \times B}} = \mathring{A} \times \mathring{B}$, alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}(A\times B) &= \big(\overline{A}\times\overline{B}\big)\setminus\big(\mathring{A}\times\mathring{B}\big) \\ &= \big[\big(\overline{A}\setminus\mathring{A}\big)\times\overline{B}\big]\cup\big[\overline{A}\times\big(\overline{B}\setminus\mathring{B}\big)\big] \\ &= \big[\mathrm{Fr}(A)\times\overline{B}\big]\cup\big[\overline{A}\times\mathrm{Fr}(B)\big]. \end{aligned}$$

Exercice 1.31. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Montrer que X et $G(f)$, le graphe de f, sont homéomorphes.

Solution. Rappelons que l'on a $G(f) = \big\{(x, f(x))\ ;\ x \in X\big\} \subset X \times Y$ et que l'on munit $G(f)$ de la topologie induite par la topologie produit de $X \times Y$. L'application $F : x \longmapsto (x, f(x))$ est continue, voir proposition 1.4.7, et bijective de X sur $G(f)$. Soit p_1 la projection canonique de $X \times Y$ sur X, alors p_1 est continue et F^{-1} est la restriction de p_1 à $G(f)$, donc F^{-1} est continue. Par conséquent, F est un homéomorphisme.

Exercice 1.32. Soient X et Y deux espaces topologiques, avec Y séparé et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

1. Montrer que si f est continue, alors $G(f)$, le graphe de f, est fermé dans $X \times Y$ [†].
2. Donner un exemple montrant que la réciproque dans 1 n'est pas toujours vraie.
3. Montrer que si f est continue, alors $g : x \longmapsto (x, f(x))$ est une application continue fermée de X dans $X \times Y$.

Solution. 1. Soient p_1 et p_2 les projections canoniques de $X\times Y$ sur X et Y respectivement. Alors les applications $h = f \circ p_1$ et p_2 sont continues de $X \times Y$ dans Y et on a $G(f) = \big\{(x, y) \in X \times Y\ ;\ h(x, y) = p_2(x, y)\big\}$. Puisque Y est séparé, il résulte de la

[†] La réciproque est vraie si Y est « compact », voir chapitre 3, exercice 3.22. Voir également théorème 7.1.2

proposition 1.5.5 que $G(f)$ est fermé dans $X \times Y$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Alors son graphe $G(f) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ xy = 1\big\} \cup \big\{(0, 0)\big\}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$, mais f n'est pas continue car la suite de terme général $x_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}$, mais la suite $(f(x_n))_{n\geq 1}$ n'est pas convergente dans $\mathbb{R}$.
3. La continuité de g résulte de la proposition 1.4.7. Montrons que g est une application fermée. Soit F un fermé de X. Montrons que $(X \times Y) \setminus g(F)$ est ouvert dans $X \times Y$. Soit $(x, y) \in (X \times Y) \setminus g(F)$. Si $(x, y) \notin G(f)$, d'après 1, il existe un ouvert V de $X \times Y$ contenant (x, y) tel que $V \cap G(f) = \emptyset$, donc $V \cap g(F) = \emptyset$, d'où $V \subset (X \times Y) \setminus g(F)$. Si $(x, y) \in G(f)$, alors $y = f(x)$. Comme $(x, f(x)) \notin g(F)$, alors $x \notin F$, donc $(X \setminus F) \times Y$ est un ouvert de $X \times Y$ contenant (x, y) et $((X \setminus F) \times Y) \cap g(F) = \emptyset$, d'où $(X \setminus F) \times Y \subset (X \times Y) \setminus g(F)$. Par conséquent, $(X \times Y) \setminus g(F)$ est un ouvert de $X \times Y$, donc $g(F)$ est fermé dans $X \times Y$.

Exercice 1.33. Soit X un ensemble infini muni de la topologie cofinie $\mathcal{T}_{cf}$, voir exemple 1.1.1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application $f : (X, \mathcal{T}_{cf}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_{cf})$ soit continue.
Solution. L'application f est continue si et seulement si ou bien f est constante ou bien pour tout $y \in X$, $f^{-1}\big(\{y\}\big)$ est un sous-ensemble fini de X.

Exercice 1.34. Soient X un espace topologique et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}\big(]a, +\infty[\big)$ et $f^{-1}\big(]-\infty, a[\big)$ sont des ouverts de X.
Solution. Supposons d'abord f continue. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $]a, +\infty[$ et $]-\infty, a[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$, donc $f^{-1}\big(]a, +\infty[\big)$ et $f^{-1}\big(]-\infty, a[\big)$ sont des ouverts de X.
Réciproquement, supposons que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}\big(]a, +\infty[\big)$ et $f^{-1}\big(]-\infty, a[\big)$ sont des ouverts de X. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on a $f^{-1}\big(]a, b[\big) = f^{-1}\big(]-\infty, b[\big) \cap f^{-1}\big(]a, +\infty[\big)$, donc $f^{-1}\big(]a, b[\big)$ est ouvert dans X. Par conséquent, f est continue car les intervalles $]a, b[$ forment une base d'ouverts de $\mathbb{R}$.

Exercice 1.35. Soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et $X = \prod_{i\in I} X_i$ l'espace topologique produit. Soient $a = (a_i)_{i\in I}$ un point de X et D l'ensemble des points $(x_i)_{i\in I}$ de X tels que $x_i = a_i$ sauf pour un nombre fini d'indices $i \in I$. Montrer que D est dense dans X.
Solution. D'après la proposition 1.2.4, l'ensemble D est dense si et seulement si pour tout ouvert élémentaire non vide U de X, on a $U \cap D \neq \emptyset$. Soit U un tel ouvert, alors $U = \prod_{i\in I} U_i$ où U_i est un ouvert non vide de X_i pour tout $i \in I$ et il existe un sous-ensemble fini J de I tel que pour tout $i \in I \setminus J$, on ait $U_i = X_i$. Pour tout $i \in J$, soit $x_i \in U_i$ et pour tout $i \in I \setminus J$, soit $x_i = a_i$. Alors on a $x = (x_i)_{i\in I} \in U \cap D$, donc D est dense dans X.

Pour plus d'exercices, voir le supplément associé à ce livre.

Chapitre 2

ESPACES MÉTRIQUES

La plupart des topologies qui interviennent dans la pratique sont « métrisables », *i.e.* peuvent être définies à partir d'une « distance ». C'est en particulier le cas de la topologie usuelle dans l'espace euclidien de dimension 2 ou 3. Par contre, tout espace topologique non séparé n'est pas métrisable, et même on verra, exemple 2.5.1 et remarque 2.5.2, qu'il existe des espaces topologiques normaux non métrisables, voir également exemple 3.6.1 et remarque 3.5.3. Dans ce chapitre, le corps des scalaires $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.

2.1 Espaces métriques

Définition 2.1.1. Une **distance** (ou **métrique**) sur un ensemble X est une application :

$$d : \begin{array}{ccc} X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \longmapsto & d(x, y) \end{array}$$

possédant, pour tous $x, y, z \in X$, les propriétés suivantes :

(**M1**) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(**M2**) $d(x, y) = d(y, x)$;

(**M3**) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (**inégalité triangulaire**).

Muni de la distance d, X est appelé **espace métrique**, on note parfois un tel espace (X, d). Le nombre réel positif $d(x, y)$ est appelé la **distance entre** x **et** y dans X.

Proposition 2.1.1. *Soit* (X, d) *un espace métrique.*

1. *Pour tout* $x, y, z \in X$, *on a* $\left|d(x, z) - d(z, y)\right| \leq d(x, y)$.

2. *Pour tout* $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in X$, *on a* $d(x_1, x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1})$.

Démonstration. 1. D'après les propriétés (**M2**) et (**M3**), on a $d(x,z) \leq d(x,y)+d(z,y)$ et $d(z,y) \leq d(x,z)+d(x,y)$, d'où $d(x,z)-d(z,y) \leq d(x,y)$ et $d(z,y)-d(x,z) \leq d(x,y)$. Par conséquent, on a $\big|d(x,z)-d(z,y)\big| \leq d(x,y)$.
2. On appelle I_n l'inégalité que l'on cherche à montrer. Il est clair que I_1 est vraie. Supposons que I_n est vraie, *i.e.* que l'on a $d(x_1,x_{n+1}) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} d(x_i,x_{i+1})$. Par l'inégalité triangulaire, on a $d(x_1,x_{n+2}) \leq d(x_1,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})$, d'où :

$$d(x_1,x_{n+2}) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i,x_{i+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) = \sum_{i=1}^{n+1} d(x_i,x_{i+1})\,.$$

Donc I_{n+1} est vraie. Par conséquent, I_n est vraie pour tout $n \geq 1$. ■

Proposition 2.1.2. *Pour tous $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :*

1. $\displaystyle \Big|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}$ (**inégalité de Cauchy-Schwarz**).

2. $\displaystyle \Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}$ (**inégalité de Minkowski**).

Démonstration. 1. On donnera au chapitre 8 une autre preuve de l'inégalité de Cauchy–Schwarz en utilisant la notion du produit scalaire, mais pour l'instant on va donner une preuve élémentaire. On a :

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i\Big)^2 &= \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i\Big)^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_i^2\,y_j^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\,y_j\Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_i^2\,y_j^2 - \sum_{i,j=1}^{n} x_i\,y_j\,x_j\,y_i \\
&= \frac{1}{2}\Big[\sum_{i,j=1}^{n} \big(x_i^2\,y_j^2 + x_j^2\,y_i^2\big) - \sum_{i,j=1}^{n} 2\,x_i\,y_j\,x_j\,y_i\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\sum_{i,j=1}^{n} \big(x_i\,y_j - x_j\,y_i\big)^2\Big] \geq 0\,.
\end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2+y_i^2+2\,x_i\,y_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2+2\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2+2\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&= \Big[\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]^2 .
\end{aligned}$$

■

Définition 2.1.2. Soient $(X,\, d)$ un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$.

1. On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$B(a,r) = \{x \in X \;;\; d(a,x) < r\}\,.$$

2. On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$B'(a,r) = \{x \in X \;;\; d(a,x) \leq r\}\,.$$

3. On appelle **sphère** de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$S(a,r) = \{x \in X \;;\; d(a,x) = r\}\,.$$

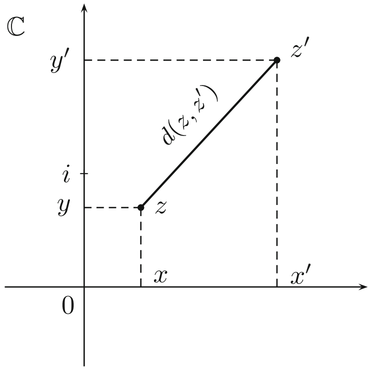
Notons que l'on a $B'(a,r) = B(a,r) \cup S(a,r)$.

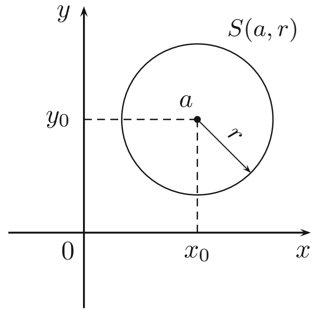
Exemple 2.1.1. 1. Un exemple fondamental d'espace métrique est l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la **distance usuelle** ; pour tout $x,\, y \in \mathbb{R}$, on a $d(x,y) = |x-y|$, la valeur absolue du nombre réel $x-y$. On a alors :

$$B(a,r) =]a-r, a+r[\quad , \quad B'(a,r) = [a-r, a+r] \quad , \quad S(a,r) = \{a-r, a+r\}.$$

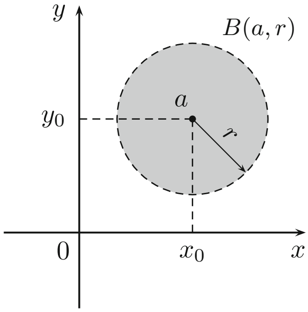
Lorsque $\mathbb{R}$ est considéré comme un espace métrique, sans mention explicite d'une distance, il est toujours sous-entendu que $\mathbb{R}$ est muni de la distance usuelle.

2. Un autre exemple fondamental est l'ensemble $\mathbb{C}$ muni de la distance euclidienne ; pour tout $z,\, z' \in \mathbb{C}$, on a $d(z,z') = |z-z'|$, le module du nombre complexe $z-z'$.

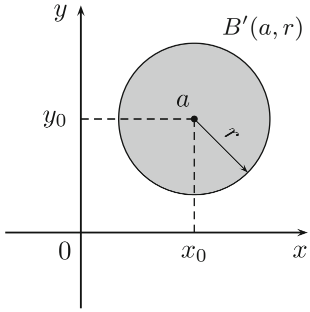




Sphère $S(a,r)$ dans $\mathbb{C}$



Boule ouverte $B(a,r)$ dans $\mathbb{C}$



Boule fermée $B'(a,r)$ dans $\mathbb{C}$

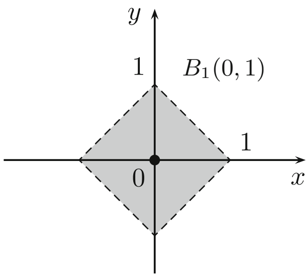
Exemple 2.1.2. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :

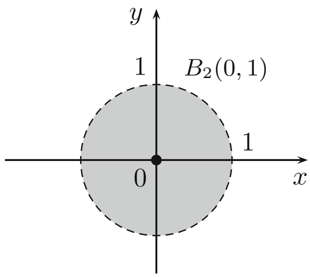
$$d_p(x,y) = \begin{cases} \big(\, |x_1 - y_1|^p \ + \cdots + \ |x_n - y_n|^p \,\big)^{\frac{1}{p}} & \text{si} \quad p = 1 \text{ ou } p = 2\,, \\ \\ \max\big(\, |x_1 - y_1|\,, \dots,\ |x_n - y_n|\,\big) & \text{si} \quad p = \infty\,. \end{cases}$$

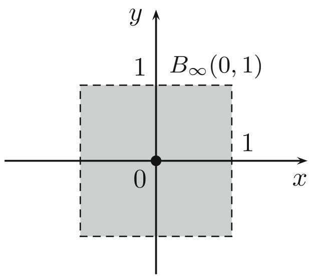
Alors d_p est une distance sur $\mathbb{K}^n$. La distance d_2 est appelée **la distance euclidienne** sur $\mathbb{K}^n$. En effet, il est clair que d_1 et d_∞ sont des distances sur $\mathbb{K}^n$. Vérifions que d_2 est une distance sur $\mathbb{K}^n$. Il est clair que l'on a $d_2(x,y) = 0 \iff x = y$, et que $d_2(x,y) = d_2(y,x)$. Il reste à montrer l'inégalité triangulaire. Soient $x = (x_1, \dots, x_n),\ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\begin{aligned} d_2(x,z) &= \Big(\sum_{i=1}^n |x_i - z_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \Big(\sum_{i=1}^n \big(|x_i - y_i| + |y_i - z_i|\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \Big(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{i=1}^n |x_i - z_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(inégalité de Minkowski)} \\ &= d_2(x,y) + d_2(y,z)\,. \end{aligned}$$

Pour $n = 2$, on a les trois boules ouvertes de centre 0 et de rayon 1 correspondantes dans $\mathbb{R}^2$:







Notons que cet exemple montre qu'une boule ouverte ou fermée dans un espace métrique n'est pas forcément « ronde ».

Exemple 2.1.3. 1. Soit X un ensemble quelconque. Pour tout $x, y \in X$, on pose :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y\,, \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y\,. \end{cases}$$

Alors d est une distance sur X, appelée **distance triviale** ou **distance discrète**. Soient $a \in X$ et $r > 0$.

i) Si $0 < r < 1$, on a $B(a, r) = B'(a, r) = \{a\}$ et $S(a, r) = \emptyset$.

ii) Si $r = 1$, on a $B(a, r) = \{a\}$, $B'(a, r) = X$ et $S(a, r) = X \setminus \{a\}$.

iii) Si $r > 1$, on a $B(a, r) = B'(a, r) = X$ et $S(a, r) = \emptyset$.

2. Soient (X, d) un espace métrique et $\alpha > 0$. Pour tout $x, y \in X$, on pose $d_\alpha(x, y) = \alpha d(x, y)$, alors d_α est aussi une distance sur X.

3. Soit $E = C\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tous $f, g \in E$, on pose $d(f, g) = \displaystyle\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$. Alors d est une distance sur E. En effet, il est clair que pour tous $f, g \in E$, on a $d(f, g) = d(g, f)$, et que

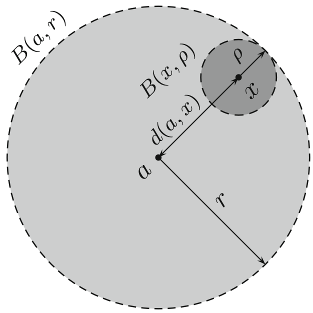
$d(f,g) = 0 \iff f = g$ car $f - g$ est continue. Soient $f, g, h \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
d(f,g) &= \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx \\
&= \int_0^1 |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)|\, dx \\
&\leq \int_0^1 \big(|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|\big)\, dx \\
&= \int_0^1 |f(x) - h(x)|\, dx + \int_0^1 |h(x) - g(x)|\, dx \\
&= d(f,h) + d(h,g)\,.
\end{aligned}$$

Donc d est bien une distance sur E.

2.2 Topologie des espaces métriques

Proposition 2.2.1. *Soit (X, d) espace métrique.*



1. *L'ensemble X est la réunion des boules ouvertes.*
2. *Soient $a \in X$ et $r > 0$. Soit $x \in B(a,r)$ et $\rho = r - d(a,x)$, alors $\rho > 0$ et on a $B(x,\rho) \subset B(a,r)$.*
3. *Soient $a, b \in X$ et $r_1, r_2 > 0$. Pour tout $x \in B(a,r_1) \cap B(b,r_2)$, il existe $\rho > 0$ tel que $B(x,\rho) \subset B(a,r_1) \cap B(b,r_2)$. Donc l'intersection de deux boules ouvertes est une réunion de boules ouvertes.*

Démonstration. 1. Soient $a \in X$ et $r > 0$, alors on a $a \in B(a,r)$, donc X est la réunion des boules ouvertes.
2. Soit $y \in B(x,\rho)$, alors on a $d(x,y) < \rho = r - d(a,x)$, d'où $d(a,x) + d(x,y) < r$. D'après l'inégalité triangulaire, on a $d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y)$. Par conséquent, on a $d(a,y) < r$. Autrement dit, on a $y \in B(a,r)$, donc $B(x,\rho) \subset B(a,r)$.
3. Soit $\rho = \inf\big\{r_1 - d(a,x), r_2 - d(b,x)\big\}$, alors $\rho > 0$ et il résulte de 2 que l'on a $B(x,\rho) \subset B(a,r_1) \cap B(b,r_2)$. ■

Soit (X, d) espace métrique. On déduit de la proposition précédente que les boules ouvertes de (X, d) vérifient les propriétés (**B1**) et (**B2**), voir chapitre 1, page 3. Par conséquent, il existe une unique topologie $\mathcal{T}_d$ sur X pour laquelle les boules ouvertes forment une base d'ouverts. La topologie $\mathcal{T}_d$ est appelée la **topologie associée à la distance** d. Un espace métrique (X, d) sera toujours considéré comme un espace topologique, muni de la topologie $\mathcal{T}_d$.

Ce qu'il faut retenir concernant la définition de la topologie $\mathcal{T}_d$ est : soit U un sous-ensemble de X, alors U est un ouvert pour $\mathcal{T}_d$ si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.
Si d_2 est la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, alors $\mathcal{T}_{d_2}$ est appelée la **topologie euclidienne** ou **usuelle** de $\mathbb{R}^n$, voir également paragraphe 1.4.

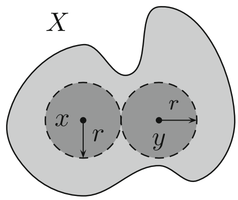
Proposition 2.2.2. *Soit $(X,\, d)$ espace métrique. Alors on a :*

1. *L'espace $(X,\, d)$ est séparé.*

2. *L'espace $(X,\, d)$ vérifie le premier axiome de dénombrabilité.*

3. *Soient $(Y,\, d')$ un espace métrique, $a \in X$ et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Alors f est continue en a si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $f(B(a, \eta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$. Autrement dit, f est continue en a si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in X$ vérifiant $d(a, x) < \eta$, on ait $d'(f(a), f(x)) < \varepsilon$.*

Démonstration. 1. Soient $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, alors on a $d(x, y) > 0$. Soit $r = \frac{d(x,y)}{2}$, alors $r > 0$ et on a $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$. Par conséquent, $(X,\, d)$ est séparé.
2. Pour tout point x de X, $\big(B\big(x, \frac{1}{n}\big)\big)_{n\geq 1}$ forme un système fondamental dénombrable de voisinages de x dans $(X,\, d)$.
3. Ceci résulte de la définition de la continuité, voir définition 1.3.1, et de la définition de la topologie associée à une distance. ∎



Remarque 2.2.1. Soit $(X,\, d)$ un espace métrique.

1. Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans $(X,\, d)$ converge vers un élément a de X si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $d(x_n, a) < \varepsilon$. Autrement dit, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers a dans X si, et seulement si, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, a) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

2. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites convergentes dans $(X,\, d)$ respectivement vers x et y. Alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$ dans $\mathbb{R}$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \big|d(x,y) - d(x_n, y_n)\big| &= \big|d(x,y) - d(x_n, y) + d(x_n, y) - d(x_n, y_n)\big| \\ &\leq \big|d(x,y) - d(x_n, y)\big| + \big|d(x_n, y) - d(x_n, y_n)\big| \\ &\leq d(x, x_n) + d(y, y_n)\,. \end{aligned}$$

Comme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x, x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(y, y_n) = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

On déduit des proposition 2.2.2, proposition 1.7.2, corollaire 1.7.1 et théorème 1.7.3, les résultats suivants :

Proposition 2.2.3. *Soient $(X,\, d)$ espace métrique et $a \in X$. Alors on a :*

1. *Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans X. Le point a est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ si et seulement si a est la limite d'une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$.*

2. *Soit $A \subset X$. Alors $a \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans A telle que $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.*

3. *Soit $A \subset X$. Alors A est fermé dans X si et seulement si la limite de toute suite convergeant d'éléments de A appartient à A.*

4. *Soient Y un espace topologique et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Alors f est continue en a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans X convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(a)$.*

Définition 2.2.1. Soient A et B des parties non vides d'un espace métrique $(X,\, d)$.

1. Si $x \in X$, la **distance de x à A** est $d(x, A) = \inf\limits_{y\in A} d(x, y)$.

2. La **distance de A à B** est $d(A, B) = \inf \big\{d(x, y)\ ;\ x \in A,\ y \in B\big\}$.

3. Le **diamètre de** A est le nombre $\delta(A) = \sup \big\{d(x, y)\ ;\ x, y \in A\big\}\ \big(\in [0, +\infty]\big)$.

4. La distance d est dite **bornée** si $\delta(X) < +\infty$.

5. Le sous-ensemble A de X est dit **borné** si son diamètre est fini. Autrement dit, s'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $x, y \in A$, on ait $d(x, y) \leq \lambda$. Ceci est équivalent à dire qu'il existe $x \in X$ et $r > 0$ tels que $A \subset B(x, r)$.

6. Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans $(X,\, d)$ est dite bornée si l'ensemble $\{x_n\ ;\ n \geq 0\}$ est borné dans $(X,\, d)$.

Proposition 2.2.4. *Soit A une partie non vide d'un espace métrique $(X,\, d)$.*

1. *Pour tout $x, y \in X$, on a $\big|d(x, A) - d(y, A)\big| \leq d(x, y)$. En particulier, l'application $x \longmapsto d(x, A)$ est continue de X dans $\mathbb{R}$.*

2. *On a $\overline{A} = \big\{x \in X\ ;\ d(x, A) = 0\big\}$ et $\overset{\circ}{A} = \big\{x \in X\ ;\ d(x, X \setminus A) > 0\big\}$.*

3. *Si A est fermée dans X et si $x \notin A$, alors on a $d(x, A) > 0$.*

Démonstration. 1. Pour tout $z \in A$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, d'où on a :

$$\begin{aligned} d(x, A) = \inf_{z\in A} d(x, z) &\leq \inf_{z\in A} \big(d(x, y) + d(y, z)\big) \\ &= d(x, y) + \inf_{z\in A} d(y, z) \\ &= d(x, y) + d(y, A)\,. \end{aligned}$$

Donc on a $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. De même, on a $d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x) = d(x, y)$. Par conséquent, on a $\big|d(x, A) - d(y, A)\big| \leq d(x, y)$.
2. Soit $x \in X$. Si $x \in \overline{A}$, d'après la proposition 2.2.3, il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans A telle que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x, a_n) = 0$. Comme pour tout $n \geq 0$, on a $|d(x, A) - d(a_n, A)| \leq d(x, a_n)$ et $d(a_n, A) = 0$, alors on a $d(x, A) = 0$.
Réciproquement, supposons que $d(x, A) = 0$. Comme on a $d(x, A) = \inf\limits_{a\in A} d(x, a)$, alors

pour tout $n \geq 0$, il existe $a_n \in A$ tel que $d(x, a_n) < \frac{1}{n+1}$. Par conséquent, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers x, d'où on a $x \in \overline{A}$.
D'après la proposition 1.2.2, on a $\overset{\circ}{A} = X \setminus \overline{X \setminus A}$, d'où $\overset{\circ}{A} = \big\{x \in X \ ; \ d(x, X \setminus A) > 0\big\}$.
3. Ceci résulte de 2. ■

Remarque 2.2.2. Soit d l'une des distances d_1, d_2 ou d_∞ sur $\mathbb{R}^2$. Alors $A = \big\{(x, 0) \ ; \ x \in \mathbb{R}\big\}$ et $B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ xy = 1\big\}$ sont des sous-ensembles fermés disjoints de $\mathbb{R}^2$, mais on a $d(A, B) = 0$ car pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq d(A, B) \leq \frac{1}{n} = d\big((n, 0), \big(n, \frac{1}{n}\big)\big)$.

Proposition 2.2.5. *Soient A et B des parties non vides d'un espace métrique $(X,\, d)$.*

1. *Si $A \subset B$, alors on a $\delta(A) \leq \delta(B)$*
2. *On a $\delta\big(\overline{A}\big) = \delta(A)$.*
3. *Pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, on a $\delta(B(x, r)) \leq \delta(B'(x, r)) \leq 2r$.*
4. *On a $d(A, B) = d\big(\overline{A}, B\big) = d\big(A, \overline{B}\big) = d\big(\overline{A}, \overline{B}\big)$.*
5. *On a $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$. Donc si A et B sont bornées, alors $A \cup B$ est borné.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 2 du supplément.

Proposition 2.2.6. *Soit $(X,\, d)$ un espace métrique.*

1. *Tout ouvert de X est une réunion dénombrable de fermés de X.*
2. *Tout fermé de X est une intersection dénombrable d'ouverts de X.*

Démonstration. 1. Soient U un ouvert de X et $F = X \setminus U$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $F_n = \big\{x \in X \ ; \ d(x, F) \geq \frac{1}{n}\big\}$. D'après la proposition 2.2.4, F_n est fermé dans X et on a $U = \big\{x \in X \ ; \ d(x, F) > 0\big\} = \bigcup\limits_{n\geq 1} F_n$.
2. Soit F un fermé de X, d'où $U = X \setminus F$ est ouvert dans X. D'après ce qui précède, il existe une famille dénombrable $(F_n)_{n\geq 1}$ de fermés de X telle que $U = \bigcup\limits_{n\geq 1} F_n$. Donc on a $F = X \setminus U = \bigcap\limits_{n\geq 1} X \setminus F_n$ et pour tout $n \geq 1$, $X \setminus F_n$ est ouvert dans X. ■

Proposition 2.2.7. *Soit $(X,\, d)$ espace métrique. Alors X est un espace normal.*

Démonstration. Soient A et B deux parties fermées disjointes de X. Pour tout $x \in X$, soit $f(x) = d(x, A) - d(x, B)$. D'après la proposition 2.2.4, f est continue de X dans $\mathbb{R}$. Soient $U = \big\{x \in X \ ; \ f(x) < 0\big\}$ et $V = \big\{x \in X \ ; \ f(x) > 0\big\}$. Alors U et V sont deux ouverts disjoints de X tels que $A \subset U$ et $B \subset V$. Par conséquent, X est un espace normal.
Notons que si on pose $g(x) = \dfrac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$, alors g est continue de X dans $[0,\, 1]$ telle que pour tout $x \in A$, on ait $g(x) = 0$ et pour tout $x \in B$, on ait $g(x) = 1$. ■

Soient $(X,\, d)$ espace métrique, A un fermé de X et $f : A \longrightarrow [a,\, b]$ une fonction continue. Puisque X est un espace normal, d'après le théorème de Tietze, théorème 1.9.4, il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow [a,\, b]$ prolongeant f. Notons que l'on peut supposer $1 \leq a$. Il s'agit dans le cas des espaces métriques de donner une formule explicite de g.

Proposition 2.2.8 (Tietze). *Soient A un fermé d'un espace métrique $(X,\, d)$ et $f : A \longrightarrow [a,\, b]$ une fonction continue. On suppose de plus que l'on a $1 \leq a$. Pour tout $x \in X$, on pose :*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in A\,, \\ \\ \inf\limits_{y\in A} \dfrac{f(y)d(x,y)}{d(x,A)} & si \quad x \notin A\,. \end{cases}$$

Alors g est une fonction continue de X dans $[a,\, b]$ prolongeant f.

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 2 du supplément.

Théorème 2.2.1. *Soit $(X,\, d)$ un espace métrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) X admet une base dénombrable d'ouverts.

(ii) X est séparable.

(iii) X est un espace de Lindelöf.

Démonstration. Les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) et (i) $\Longrightarrow$ (iii) résultent des théorèmes 1.2.1 et 1.9.5.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $A = \{x_n \ ;\ n \geq 1\}$ une partie au plus dénombrable dense dans X. Pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_{n,k} = B\big(x_n,\, \frac{1}{k}\big)$. Alors $\big(U_{n,k}\big)_{n,k\in\mathbb{N}^*}$ est une famille dénombrable d'ouverts de X. Soient U un ouvert de X et $x \in U$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2}{k} < r$. Puisque A est dense dans X, il existe $x_n \in A$ tel que $d(x, x_n) < \frac{1}{k}$. Alors on a $x \in U_{n,k} = B\big(x_n,\, \frac{1}{k}\big) \subset B(x,r) \subset U$. Par conséquent, $\big(U_{n,k}\big)_{n,k\in\mathbb{N}^*}$ est une base d'ouverts de X.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $X = \bigcup\limits_{x\in X} B\big(x,\, \frac{1}{k}\big)$. Puisque X est un espace de Lindelöf, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $(x_{n,k})_{n\geq 1}$ telle que $X = \bigcup\limits_{n\geq 1} B\big(x_{n,k},\, \frac{1}{k}\big)$. Montrons que la partie au plus dénombrable $A = \big\{x_{n,k} \ ;\ n, k \geq 1\big\}$ est dense dans X. Soient $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Comme on a $X = \bigcup\limits_{n\geq 1} B\big(x_{n,k},\, \frac{1}{k}\big)$, alors il existe $x_{n,k} \in A$ tel que $x \in B\big(x_{n,k},\, \frac{1}{k}\big)$, d'où $x_{n,k} \in B\big(x,\, \frac{1}{k}\big) \subset B(x, \varepsilon)$. Par conséquent, A est dense dans X. ■

2.3 Comparaison de distances

Définition 2.3.1. Soient $(X,\, d)$, $(Y,\, d')$ deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

1. On dit que f est **uniformément continue** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, z \in X$ vérifiant $d(x, z) < \eta$, on ait $d'(f(x), f(z)) < \varepsilon$.

2. On dit que f est **lipschitzienne** s'il existe une constante $k \geq 0$, appelé **rapport de** f, tel que pour tout $x, z \in X$, on ait $d'(f(x), f(z)) \leq k\, d(x, z)$. Si de plus $k \in [0, 1[$, on dit que f est **contractante**.

3. On dit que f est **isométrique** si pour tout $x, z \in X$, on a $d'(f(x), f(z)) = d(x, z)$. On dit que f est une **isométrie** de X sur Y si c'est une application isométrique surjective. Les espaces (X, d) et (Y, d') sont dits **isométriques** s'il existe une isométrie de X sur Y.

Remarque 2.3.1. Il résulte immédiatement de la définition précédente que l'on a :

1. Toute application uniformément continue est continue.
2. Toute application lipschitzienne est uniformément continue.
3. Toute application isométrique est injective et lipschitzienne.
4. La composée de deux applications uniformément continues est uniformément continue. De même, pour les applications lipschitziennes et isométriques.
5. L'application identique de tout espace métrique est une isométrie.
6. Toute isométrie est un homéomorphisme.
7. L'application réciproque d'une isométrie est une isométrie.

Exemple 2.3.1. On a vu, proposition 2.2.4, que si (X, d) est un espace métrique et si A est une partie non vide de X, alors l'application $x \longmapsto d(x, A)$ est lipschitzienne de rapport 1 de (X, d) dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2.3.2. Toute translation $x \longmapsto x + a$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une isométrie.

Proposition 2.3.1. *Soient (X, d), (Y, d') deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) f est uniformément continue.

(ii) Pour toutes suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ dans X telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, z_n) = 0$, on ait $\lim\limits_{n\to+\infty} d'(f(x_n), f(z_n)) = 0$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ des suites dans X telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, z_n) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, puisque f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, z \in X$ vérifiant $d(x, z) < \eta$, on ait $d'(f(x), f(z)) < \varepsilon$. Comme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, z_n) = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $d(x_n, z_n) < \eta$, d'où on a $d'(f(x_n), f(z_n)) < \varepsilon$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d'(f(x_n), f(z_n)) = 0$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons que f n'est pas uniformément continue. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x, z \in X$ tels que $d(x, z) < \eta$ et $d'(f(x), f(z)) \geq \varepsilon$. En prenant, $\eta = \frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve deux suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(z_n)_{n\geq 1}$ dans X telles que pour tout $n \geq 1$, on ait $d(x_n, z_n) < \frac{1}{n}$ et $d'(f(x_n), f(z_n)) \geq \varepsilon$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, z_n) = 0$, mais la suite de réels $\big(d'(f(x_n), f(z_n))\big)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0 dans $\mathbb{R}$. C'est une contradiction. ■

Exemple 2.3.3. L'application $f : x \longmapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue, mais elle n'est pas uniformément continue car $f(n+\frac{1}{n}) - f(n) = 2 + \frac{1}{n^2}$ ne tend pas vers 0.
De même l'application $f : x \longmapsto \cos(x^2)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue et bornée, mais elle n'est pas uniformément continue car si $x_n = \sqrt{2n\pi}$ et $y_n = \sqrt{(2n+1)\pi}$, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - y_n = 0$, mais $f(x_n) - f(y_n) = 2$ pour tout $n \geq 0$.

Proposition 2.3.2. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Alors il existe deux constantes positives A et B telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $|f(x)| \leq A|x| + B$.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 2 du supplément.
La réciproque dans la proposition précédente n'est pas toujours vraie ; il suffit de prendre $f(x) = \cos(x^2)$, alors f n'est pas uniformément continue. Si $B = 1$ et $A > 0$ quelconque, alors on a $|f(x)| \leq 1 \leq A|x| + B$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.3.3. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Soit $k \in \mathbb{R}_+$, alors f est lipschitzienne de rapport k si et seulement si pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$, on ait $|f'(x)| \leq k$. En particulier, f est lipschitzienne si et seulement si f' est bornée sur $\overset{\circ}{I}$.*

Démonstration. Supposons d'abord que f est lipschitzienne de rapport k. Alors pour tous $x, x_0 \in \overset{\circ}{I}$ tels que $x \neq x_0$, on a $\left|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leq k$. Or on a :
$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, d'où $|f'(x)| \leq k$.
Réciproquement, supposons $|f'|$ est majorée par k sur $\overset{\circ}{I}$. D'après le théorème des accroissements finis, pour tous $x, y \in I$, il existe $u \in \overset{\circ}{I}$ tel que $f(x) - f(y) = (x - y)f'(u)$, d'où on a $|f(x) - f(y)| = |x - y||f'(u)| \leq k\,|x - y|$. Par conséquent, f est lipschitzienne de rapport k. ■

Exemple 2.3.4. Soit $\alpha > 0$. La fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est uniformément continue sur $[\alpha, +\infty[$, mais elle n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$. En effet, la fonction f est dérivable sur $[\alpha, +\infty[$ et on a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, d'où $|f'(x)| \leq \frac{1}{\alpha^2}$ pour tout $x \in [\alpha, +\infty[$. Donc f' est bornée sur $[\alpha, +\infty[$. Par conséquent, f est lipschitzienne sur $[\alpha, +\infty[$, donc uniformément continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f\big(\frac{1}{n+1}\big) - f\big(\frac{1}{n}\big) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = 0$, donc f n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$.

Exemple 2.3.5. L'application $f : t \longmapsto \sqrt{t}$ de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue, mais elle n'est pas lipschitzienne, voir exercice 3.51 du supplément.

Lemme 2.3.1. *Soient (X, d) un espace métrique et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions k-lipschitziennes de X dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $x_0 \in X$ tel que $\inf\limits_{i\in I} f_i(x_0)$ existe dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in X$, on pose $f(x) = \inf\limits_{i\in I} f_i(x)$. Alors f est bien définie et k-lipschitzienne.*

Démonstration. Pour tout $x \in X$ et pour tout $i \in I$, on a $|f_i(x_0) - f_i(x)| \leq k\,d(x_0, x)$, d'où $f_i(x_0) - k\,d(x_0, x) \leq f_i(x)$. Donc $\inf\limits_{i\in I} f_i(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ pour tout $x \in X$. Pour tous $x, y \in X$ et pour tout $i \in I$, on a $f_i(x) \leq f_i(y) + k\,d(x, y)$, d'où $f(x) \leq f(y) + k\,d(x, y)$. On échange x et y, on obtient $f(y) \leq f(x) + k\,d(x, y)$. Donc on a $|f(x) - f(y)| \leq k\,d(x, y)$. Par conséquent, f est k-lipschitzienne. ■

Proposition 2.3.4. *Soient $(X,\, d)$ un espace métrique et A une partie non vide de X. Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne. Pour tout $x \in X$, on pose $g(x) = \inf_{a\in A} \big\{ f(a) + k\, d(x,a) \big\}$. Alors g est bien définie et k-lipschitzienne et g prolonge f.*

Démonstration. Pour tous $a, b \in A$ et pour tout $x \in X$, on a :

$$f(b) - f(a) \leq |f(b) - f(a)| \leq k\, d(b,a) \leq k\, d(x,b) + k\, d(x,a)\,.$$

D'où on a $f(b) - k\, d(x,b) \leq f(a) + k\, d(x,a)$, donc l'ensemble $\big\{ f(a) + k\, d(x,a)\ ;\ a \in A \big\}$ est minorée dans $\mathbb{R}$, donc g est bien définie. Il est clair que pour tout $a \in A$, l'application $x \longmapsto f(a) + k\, d(x,a)$ est k-lipschitzienne de $(X,\, d)$ dans $\mathbb{R}$. On déduit du lemme précédent que g est k-lipschitzienne. Puisque f est k-lipschitzienne, pour tous $a, b \in A$, on a $f(b) \leq f(a) + k\, d(b,a)$, d'où $f(b) \leq g(b)$. Si $a = b$, on a $f(a) + k\, d(b,a) = f(b)$, donc $g(b) \leq f(b)$. Par conséquent, pour tout $b \in A$, on a $g(b) = f(b)$. Donc g prolonge f. ■

Définition 2.3.2. Soient d_1 et d_2 deux distances sur un ensemble X.

1. On dit que d_1 et d_2 sont **topologiquement équivalentes** si $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$. Ceci est équivalent à dire que les deux applications identiques suivantes sont continues.

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id} : & (X,\, \mathcal{T}_{d_1}) & \longrightarrow & (X,\, \mathcal{T}_{d_2}) \\ & x & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \mathrm{id} : & (X,\, \mathcal{T}_{d_2}) & \longrightarrow & (X,\, \mathcal{T}_{d_1}) \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

2. On dit que d_1 et d_2 sont **uniformément équivalentes** si les deux applications identiques suivantes sont uniformément continues.

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id} : & (X,\, \mathcal{T}_{d_1}) & \longrightarrow & (X,\, \mathcal{T}_{d_2}) \\ & x & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \mathrm{id} : & (X,\, \mathcal{T}_{d_2}) & \longrightarrow & (X,\, \mathcal{T}_{d_1}) \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

   On dira que deux distances uniformément équivalentes sur un ensemble X définissent **la même structure d'espace métrique**.

3. On dit que d_1 et d_2 sont **équivalentes** ou **comparables** s'il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que pour tout $x, y \in X$, on ait $A\, d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq B\, d_1(x,y)$. Ceci est équivalent à dire que les deux applications identiques suivantes sont lipschitziennes.

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id} : & (X,\, \mathcal{T}_{d_1}) & \longrightarrow & (X,\, \mathcal{T}_{d_2}) \\ & x & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \mathrm{id} : & (X,\, \mathcal{T}_{d_2}) & \longrightarrow & (X,\, \mathcal{T}_{d_1}) \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

Remarque 2.3.2. Soient d_1 et d_2 des distances sur un ensemble X.

1. On a évidemment les implications suivantes :
   d_1 et d_2 sont équivalentes $\Longrightarrow$ d_1 et d_2 sont uniformément équivalentes $\Longrightarrow$ d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes.
   On verra par la suite, remarques 2.3.3 et 2.6.2, que les implications réciproques sont en général fausses.

2. Si d_1 et d_2 sont équivalentes et si A est un sous-ensemble de X, alors A est borné pour d_1 si et seulement si A est borné pour d_2.

Exemple 2.3.6. Les distances d_1, d_2 et d_∞ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. En effet, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $d_\infty(x,y) \leq d_1(x,y) \leq \sqrt{n}\, d_2(x,y) \leq n\, d_\infty(x,y)$. L'inégalité $d_1(x,y) \leq \sqrt{n}\, d_2(x,y)$ est une conséquence immédiate de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition 2.3.5. *Soient $(X,\, d)$ un espace métrique et $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) > 0$ si $t > 0$ et $\varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s)$ pour tout $t, s \in \mathbb{R}_+$.*

1. *Pour tout $x, y \in X$, on pose $d'(x,y) = \varphi\big(d(x,y)\big)$. Alors d' est une distance sur X.*

2. *Si φ est continue en 0, alors d et d' sont uniformément équivalentes.*

3. *Les fonctions $\varphi(r) = \min(1,r)$ et $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ satisfont les hypothèses précédentes et en plus elles sont continues sur $\mathbb{R}_+$. Donc toute distance sur un espace métrique est uniformément équivalente à une distance bornée.*

4. *Soit $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(t) = 1$ si $t > 0$, alors φ satisfait les hypothèses précédentes, mais elle n'est pas continue en 0. Si $X = \mathbb{R}$ et d est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$, alors d' est la distance discrète sur $\mathbb{R}$, et donc d et d' ne sont même pas topologiquement équivalentes.*

Démonstration. 1. On a $d'(x,y) = 0 \iff \varphi\big(d(x,y)\big) \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$. On a $d'(x,y) = \varphi\big(d(x,y)\big) = \varphi\big(d(y,x)\big) = d'(y,x)$. On a $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, d'où $d'(x,z) = \varphi\big(d(x,z)\big) \leq \varphi\big(d(x,y) + d(y,z)\big) \leq \varphi\big(d(x,y)\big) + \varphi\big(d(y,z)\big) = d'(x,y) + d'(y,z)$. Donc d' est bien une distance sur X.
2. Soit $d'(x,y) = \varphi\big(d(x,y)\big)$. D'après la proposition 2.3.1, d et d' sont uniformément équivalentes si et seulement si pour toutes suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ dans X, on a :

$$d(x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff d'(x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Supposons d'abord que $d(x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Puisque φ est continue en 0, alors :
$d'(x_n, y_n) = \varphi\big(d(x_n, y_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Réciproquement, supposons que $d'(x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\varphi(\varepsilon) > 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\varphi\big(d(x_n, y_n)\big) = d'(x_n, y_n) < \varphi(\varepsilon)$. Puisque φ est croissante, alors pour tout $n \geq N$, on a $d(x_n, y_n) < \varepsilon$. Par conséquent, $d(x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = \min(1,t)$. On a $\varphi(t) = 0 \iff \min(1,t) = 0 \iff t = 0$. Soient $t, s \in \mathbb{R}_+$ tels que $t \leq s$. Alors on a $\varphi(t) = \min(1,t) \leq t \leq s$ et $\varphi(t) \leq 1$, d'où $\varphi(t) \leq \min(1,s) = \varphi(s)$, donc φ est croissante. Vérifions que pour tout $t, s \in [0, +\infty[$, on a $\varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s)$.
Si $\varphi(t+s) = \min(1, t+s) = t+s$, alors on a $t+s \leq 1$, d'où $t \leq 1$ et $s \leq 1$. Donc on a $\varphi(t) = t$ et $\varphi(s) = s$, d'où $\varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s)$.
Si $\varphi(t+s) = \min(1, t+s) = 1$, alors on a $1 \leq t+s$. Si $t \geq 1$ ou $s \geq 1$, alors on a $\min(1,t) + \min(1,s) \geq 1 = \min(1, t+s)$, d'où $\varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s)$. Si $t < 1$ et $s < 1$, alors on a $\varphi(t) = t$ et $\varphi(s) = s$, d'où $\varphi(t) + \varphi(s) = t + s \geq 1 = \varphi(t+s)$.
Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$. Il est clair que l'on a $\varphi(t) = 0 \iff t = 0$.

Puisque φ est dérivable et on a $\varphi'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} \geq 0$, alors φ est croissante. On a aussi :

$$\varphi(t+s) = \frac{t+s}{1+t+s} = \frac{t}{1+t+s} + \frac{s}{1+t+s} \leq \frac{t}{1+t} + \frac{s}{1+s} = \varphi(t) + \varphi(s)\,.$$

4. Ceci est clair. ■

Remarque 2.3.3. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, soient $d(x,y) = |x-y|$ et $d'(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Alors d et d' sont des distances uniformément équivalentes sur $\mathbb{R}$, mais qu'elles ne sont pas équivalentes sur $\mathbb{R}$ car d' est bornée, mais d n'est le pas.

2.4 Quelques constructions métriques

I. Distance induite

Soient $(X,\, d)$ un espace métrique et A une partie de X. L'application de $A \times A$ dans $\mathbb{R}_+$ induite par d est une distance sur A, notée encore d, appelée **distance induite** sur A par d. L'espace métrique $(A,\, d)$ est dit **sous-espace métrique** de $(X,\, d)$. On remarque que la topologie de $(A,\, d)$ coïncide avec celle induite par $\mathcal{T}_d$ sur A. Soient $a \in A$ et $\varepsilon > 0$. Si $B_A(a,\varepsilon)$ (*resp.* $B'_A(a,\varepsilon)$) désigne la boule ouverte (*resp.* fermée) de centre a dans A, alors on a $B_A(a,\varepsilon) = B(a,\varepsilon) \cap A$ et $B'_A(a,\varepsilon) = B'(a,\varepsilon) \cap A$.
On déduit du théorème 2.2.1 le résultat suivant :

Proposition 2.4.1. *Tout sous-espace d'un espace métrique séparable est séparable.*

II. Distance produit

Proposition 2.4.2. *Soient $(X_1,\, d_1), \dots, (X_n,\, d_n)$ des espaces métriques et $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ l'ensemble produit. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in X$, on pose :*

$$D_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i),\ D_2(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}},\ D_\infty(x,y) = \sup_{1\leq i\leq n} d_i(x_i,y_i)\,.$$

Alors D_1, D_2 et D_∞ sont trois distances équivalentes sur X, et la topologie associée à l'une de ces distances coïncide avec la topologie produit sur X.

Démonstration. Il est clair que D_1 et D_∞ sont des distances sur X. Vérifions que D_2 est une distance sur X. Il est clair que l'on a $D_2(x,y) = 0 \iff x = y$, et que $D_2(x,y) = D_2(y,x)$. Il reste à montrer l'inégalité triangulaire. Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n)$, $z =$

$(z_1, \ldots, z_n) \in X$, on a :

$$\begin{aligned}
D_2(x,z) &= \Big(\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,z_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Big(\sum_{i=1}^{n} \big(d_i(x_i,y_i)+d_i(y_i,z_i)\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Big(\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,z_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(inégalité de Minkowski)} \\
&= D_2(x,y)+D_2(y,z)\,.
\end{aligned}$$

Il est clair que pour tout $x, y \in X$, on a $D_\infty(x,y) \leq D_1(x,y) \leq \sqrt{n}\, D_2(x,y) \leq n\, D_\infty(x,y)$. L'inégalité $D_1(x,y) \leq \sqrt{n}\, D_2(x,y)$ est une conséquence immédiate de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc D_1, D_2 et D_∞ sont équivalentes. Ainsi, les trois distances D_1, D_2 et D_∞ définissent la même topologie sur X. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on note $B_\infty(x,\varepsilon)$ la boule ouverte de centre x et de rayon ε dans $(X,\, D_\infty)$, et on note $B_i(x_i,\varepsilon)$ la boule ouverte de centre x_i et de rayon ε dans $(X_i,\, d_i)$. Comme on a $B_\infty(x,\varepsilon) = B_1(x_1,\varepsilon)\times\cdots\times B_n(x_n,\varepsilon)$, on en déduit que la topologie produit sur X coïncide avec la topologie associée à la distance D_∞. ■

L'espace $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ muni de l'une des distances ci-dessus est dit l'**espace métrique produit** des espaces métriques $(X_1,\, d_1), \ldots, (X_n,\, d_n)$.

Proposition 2.4.3. *Soit $\big((X_n,\, d_n)\big)_{n\geq 0}$ une suite d'espaces métriques. Considérons l'ensemble produit $X = \prod_{n\geq 0} X_n$ des suites $(x_n)_{n\geq 0}$, où $x_n \in X_n$. Pour $x = (x_n)_{n\geq 0}$ et $y = (y_n)_{n\geq 0}$ dans X, on pose $D_\infty(x,y) = \sup_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \min\big(1, d_n(x_n,y_n)\big)$ et*

$$D_1(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{2^n} \min\big(1, d_n(x_n,y_n)\big), \quad D(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}\,.$$

Alors D_∞, D_1 et D sont trois distances topologiquement équivalentes sur X, et la topologie associée à l'une de ces distances coïncide avec la topologie produit sur X.

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 2 du supplément.

On observe, voir proposition 2.3.5, que pour un produit fini, les distances ci-dessus définissent des distances uniformément équivalentes à celles définies dans la proposition 2.4.2. Il est donc naturel, dans le cas d'un produit dénombrable, de dire que $\prod_{n\geq 0} X_n$, muni de l'une des ces distances, est encore l'**espace métrique produit** des espaces métriques $(X_n,\, d_n)$.

Exemple 2.4.1. Soit $\mathcal{S}$ l'espace des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors l'application d définie sur $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ par $d(u,v) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|u_n - v_n|}{1+|u_n - v_n|}$ est une distance sur $\mathcal{S}$, majorée par 2.

Proposition 2.4.4. *Soit $\big((X_n,\, d_n)\big)_{n\geq 0}$ une suite d'espaces métriques. On suppose qu'il existe une suite $(c_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{K}$ telle que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$ et que pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x_n,\, y_n \in X_n$, on ait $d_n(x_n, y_n) \leq |c_n|$. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0}$, $y = (y_n)_{n\geq 0} \in X = \prod\limits_{n\geq 0} X_n$, on pose $D_2(x,y) = \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} d_n(x_n, y_n)^2\Big)^{\frac{1}{2}}$. Alors D_2 est une distance sur X dont la topologie associée coïncide avec la topologie produit sur X.*

Démonstration. On montre, comme dans la proposition 2.4.2, que D_2 est une distance sur $\prod\limits_{n\geq 0} X_n$. Puisque, pour tout $n \geq 0$, la projection canonique $p_n : \big(X, D_2\big) \to (X_n,\, d_n)$ est lipschitzienne, donc continue, alors la topologie associée à la distance D_2 est plus fine que la topologie produit.
Réciproquement, soient $x = (x_n)_{n\geq 0} \in X$, $r > 0$ et $B(x,r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r dans $\big(X,\, D_2\big)$. Comme on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} |c_n|^2 < \dfrac{r^2}{2}$. Soit $U = \bigcap\limits_{n=0}^{N} p_n^{-1}\Big(B_n\big(x_n,\, \frac{r}{\sqrt{2(N+1)}}\big)\Big)$, alors U est un ouvert de X pour la topologie produit et on a $x \in U$. Montrons que l'on a $U \subset B(x,r)$. Soit $y = (y_n)_{n\geq 0} \in U$. Alors pour tout $0 \leq n \leq N$, on a $d_n(x_n, y_n) < \dfrac{r}{\sqrt{2(N+1)}}$, d'où $\sum\limits_{n=0}^{N} d_n(x_n, y_n)^2 < \sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{r^2}{2(N+1)} = \dfrac{r^2}{2}$. On a $(D_2(x,y))^2 = \sum\limits_{n=0}^{N} d_n(x_n, y_n)^2 + \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} d_n(x_n, y_n)^2 < \dfrac{r^2}{2} + \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} |c_n|^2 < r^2$, d'où $D_2(x,y) < r$. Autrement dit, on a $y \in B(x,r)$, donc $U \subset B(x,r)$.
Ainsi, $B(x,r)$ est un voisinage de x pour la topologie produit. Par conséquent, la topologie associée à la distance D_2 est moins fine que la topologie produit, donc les deux topologies coïncident sur X. ■

III. Distance transportée par une application injective

Soient $(Y,\, d')$ un espace métrique, X un ensemble sur lequel aucune distance n'est supposée définie au préalable et $f : X \longrightarrow Y$ une application injective. Alors on peut définir une distance sur X de telle sorte que f devienne une application isométrique. En effet, il suffit de poser pour tout $x, y \in X$, $d(x,y) = d'(f(x), f(y))$. Dans ce cas, on dit que la distance d a été transportée de Y sur X par f.

Exemple 2.4.2. La **droite réelle achevée** $\overline{\mathbb{R}}$: la fonction f définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle ouvert $]-1, +1[$. Notons aussi que f est un homéomorphisme. Soient $J = [-1, +1]$ et $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ l'ensemble qui est la réunion de $\mathbb{R}$ et de deux nouveaux éléments écrits $-\infty$ et $+\infty$, points à l'infini ; on prolonge f en une bijection de $\overline{\mathbb{R}}$ sur J en posant $f(-\infty) = -1$ et $f(+\infty) = +1$. En appliquant le procédé décrit ci-dessus, on peut définir une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$ en posant

$\overline{d}(x,y) = |f(x) - f(y)|$. Notons que cette distance induit la topologie usuelle de $\overline{\mathbb{R}}$, voir exemple 1.1.3. Notons également que pour tout $x \geq 0$, on a $\overline{d}(+\infty, x) = \dfrac{1}{1+|x|}$ et pour tout $x \leq 0$, on a $\overline{d}(-\infty, x) = \dfrac{1}{1+|x|}$. Dans $\overline{\mathbb{R}}$ une boule ouverte de centre $+\infty$ et de rayon $r < 1$ est l'intervalle $\left]\frac{1-r}{r}, +\infty\right]$.

2.5 Espaces topologiques métrisables

Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit **métrisable** s'il existe une distance d sur X pour laquelle $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Si une telle distance d existe, alors pour tout $r > 0$, la distance $d_r = rd$ définie par $d_r(x,y) = rd(x,y)$ vérifie aussi $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{d_r}$. Donc si $(X, \mathcal{T})$ est métrisable, il existe une infinité de distances permettant de définir la topologie $\mathcal{T}$. Tout espace topologique discret est métrisable ; en fait, la distance discrète induit la topologie discrète. Par contre, tout ensemble X muni de la topologie grossière n'est pas métrisable si le cardinal de X est ≥ 2.

Exemple 2.5.1. L'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ est normal, voir exercice 1.16, mais n'est pas métrisable parce qu'il est séparable et il n'admet pas de base dénombrable d'ouverts, voir théorème 2.2.1.

Remarque 2.5.1. Soit X un espace topologique métrisable. Le fait que X soit métrisable donne une infinité de fonctions réelles continues sur l'espace métrique X, à savoir les fonctions $x \longmapsto d(x,a)$ et $x \longmapsto d(x,A)$ où $a \in X$ et $A \subset X$; au contraire si l'on sait seulement que X est un espace topologique, on ne connaît à priori aucune fonction réelle continue sur X, en dehors des fonctions constantes.

Théorème 2.5.1 (Urysohn). *Soit X un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'espace X est métrisable et séparable.

(ii) X est homéomorphe à un sous-espace de l'espace métrique produit $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

(iii) L'espace X est régulier et admet une base dénombrable d'ouverts.

Démonstration. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) résulte de la remarque 1.4.9 et des propositions 2.4.1 et 2.4.3.
L'implication (i) $\Longrightarrow$ (iii) résulte de la proposition 2.2.7 et du théorème 2.2.1.
Preuve de (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit d une distance sur X majorée par 1 et induisant la topologie de X, voir proposition 2.3.5. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dense dans X. Pour tout $x \in X$, soit $\varphi(x) = \big(d(x,x_n)\big)_{n\geq 0}$. Comme l'application $x \longmapsto d(x,x_n)$ est continue de X dans $[0, 1]$, alors φ est une application continue de X dans l'espace métrique produit $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Vérifions que φ est injective. Soient $x, y \in X$ tels que pour tout $n \geq 0$, on ait $d(x,x_n) = d(y,x_n)$. S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x = x_N$, alors on a $0 = d(x,x_N) = d(y,x)$, d'où $x = y$. Si pour tout $n \geq 0$, on a $x \neq x_n$, alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ de $(x_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers x. D'où on a $0 = d(x,x) = \lim\limits_{k\to+\infty} d(x,x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to+\infty} d(y,x_{n_k}) = d(y,x)$, donc $y = x$. Par conséquent, φ est injective. Pour montrer que φ est un homéomorphisme de X sur $\varphi(X)$, il reste à montrer que, voir proposition 1.3.3, pour tout $x \in X$ et pour tout $r > 0$,

$\varphi(B(x,r))$ est un voisinage de $\varphi(x)$ dans $\varphi(X)$. Comme $(x_n)_{n\geq 0}$ est dense dans X, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x, x_N) < \frac{r}{3}$. Soit $U = \{(\alpha_n)_{n\geq 0} \in [0,\,1]^{\mathbb{N}}\ ;\ |d(x, x_N) - \alpha_N| < \frac{r}{3}\}$, alors U est un ouvert de $[0,\,1]^{\mathbb{N}}$ contenant $\varphi(x)$. Soit $y \in X$ tel que $\varphi(y) \in U$, alors on a $|d(x, x_N) - d(y, x_N)| < \frac{r}{3}$, d'où $d(y, x_N) < \frac{2r}{3}$. Par conséquent, on a $d(x,y) \leq d(x, x_N) + d(x_N, y) < r$, d'où $y \in B(x,r)$. Autrement dit, on a $U \cap \varphi(X) \subset \varphi(B(x,r))$. Donc $\varphi(B(x,r))$ est un voisinage de $\varphi(x)$ dans $\varphi(X)$.
Pour une preuve de l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i), voir ([22], p. 215). ■

Proposition 2.5.1. *Soient X un ensemble et $\big((Y_n,\, d_n)\big)_{n\geq 0}$ une suite d'espaces métriques. On suppose que pour tout $n \geq 0$, il existe une application $f_n : X \longrightarrow Y_n$ et que la famille $(f_n)_{n\geq 0}$ est séparante. Alors la topologie initiale sur X associée à la famille $(f_n)_{n\geq 0}$ est métrisable.*

Démonstration. D'après la proposition 2.4.3, l'espace topologique produit $\prod\limits_{n\geq 0} Y_n$ est métrisable. D'après la proposition 1.8.4, l'espace X, muni de la topologie initiale associée à la famille $(f_n)_{n\geq 0}$, est homéomorphe à un sous-ensemble de l'espace $\prod\limits_{n\geq 0} Y_n$, donc X est métrisable. Notons qu'une distance induisant la topologie initiale sur X est définie par : pour tout $x, y \in X$, $d(x,y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f_n(x), f_n(y))}{1 + d_n(f_n(x), f_n(y))}$. ■

Remarque 2.5.2. Si $(X,\, d)$ est un espace métrique et si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans X, alors l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ n'est pas toujours métrisable. En effet, soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$ obtenue en identifiant entre eux tous les éléments de $\mathbb{N}$; autrement dit, $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence dont les classes sont $\mathbb{N}$ et les ensembles $\{x\}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Soit $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathcal{R}$ l'application quotient. Pour toute partie F de $\mathbb{R}$, on a $q^{-1}(q(F)) = F \cup \mathbb{N}$ si $F \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$ et $q^{-1}(q(F)) = F$ si $F \cap \mathbb{N} = \emptyset$, donc si F est fermée dans $\mathbb{R}$, alors $q^{-1}(q(F))$ l'est aussi car $\mathbb{N}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$. Par conséquent, q est une application fermée ; autrement dit, la relation $\mathcal{R}$ est fermée. Notons aussi que d'après l'exercice 1.51 du supplément, l'espace topologique quotient $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ est un espace normal. Vérifions que le point $q(0)$ de $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ n'admet pas un système fondamental de voisinages dénombrable. Notons d'abord que tout ouvert V de $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ contenant $q(0)$ est de la forme $q(U)$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{N}$. Soit $(V_n)_{n\geq 0}$ une suite d'ouverts de $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ distincts de $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ et telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $q(0) \in V_n$. Donc il existe une suite d'ouverts $(U_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{N}$ et pour tout $n \geq 0$, on a $q(U_n) = V_n$ et $U_n \neq \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 0$, soit $x_n \in U_n \setminus \mathbb{N}$ tel que $x_n \in \left]n,\, n + \frac{1}{2}\right[$. Soit $U = \mathbb{R} \setminus \{x_n\ ;\ n \geq 0\}$, alors U est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $q(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ contenant $q(0)$ et pour tout $n \geq 0$, $V_n \not\subset q(U)$. Par conséquent, le point $q(0)$ n'admet pas un système fondamental de voisinages dénombrable. Donc l'espace topologique quotient $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ n'est pas métrisable.

On verra au chapitre 3 qu'il existe pourtant certains résultats positifs concernant cette question, et on y revient aussi sur la question de savoir si un espace topologique donné est métrisable.

2.6 Suites de Cauchy et espaces métriques complets

Définition 2.6.1. Soit $(X,\, d)$ un espace métrique.

1. Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans $(X,\, d)$ est dite **suite de Cauchy** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$, on ait $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.
   Il revient au même de dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq n_0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$.

2. Une famille filtrante croissante $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans $(X,\, d)$ est dite **famille filtrante croissante de Cauchy** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que pour tout $\lambda,\, \mu \in \Lambda$ vérifiant $\lambda_0 \leq \lambda$ et $\lambda_0 \leq \mu$, on ait $d(x_\lambda, x_\mu) < \varepsilon$.

Remarque 2.6.1. Soit $(X,\, d)$ un espace métrique. On a une formulation géométrique de la définition de suite de Cauchy et de famille filtrante croissante de Cauchy.

1. Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans $(X,\, d)$ et si on note par $A_n = \{x_k \ ; \ k \geq n\}$, alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy si et seulement si la suite de nombres réels positifs $(\delta(A_n))_{n\geq 0}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

2. Si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une filtrante croissante dans $(X,\, d)$ et si on note par $A_\lambda = \{x_\mu \ ; \ \lambda \leq \mu\}$, alors $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une filtrante croissante de Cauchy si et seulement si la famille filtrante croissante de nombres réels positifs $(\delta(A_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ tend vers 0.

Proposition 2.6.1. *Soit $(X,\, d)$ un espace métrique.*

1. *Toute suite convergente dans X est de Cauchy.*

2. *Toute suite de Cauchy dans X est bornée.*

3. *Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.*

Démonstration. 1. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente vers x dans X. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc, pour tout $n, m \geq N$, on a $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Par conséquent, $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy.
2. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(X,\, d)$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n, m \geq N$, on ait $d(x_n, x_m) < 1$. Soit :

$$r = \max\left\{1, d(x_0, x_N), d(x_1, x_N), \ldots, d(x_{N-1}, x_N)\right\}.$$

Alors $r \in]0, +\infty[$ et pour tout $n \geq 0$, on a $x_n \in B(x_N, r)$. Donc la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée.
3. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(X,\, d)$ et $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n, m \geq N$, on ait $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. D'après le lemme 1.7.1, pour tout $k \geq 0$, on a $n_k \geq k$. Donc, pour tout $k, p \geq N$, on a $n_k \geq n_N \geq N$ et $n_p \geq n_N \geq N$, d'où $d(x_{n_k}, x_{n_p}) < \varepsilon$. Donc $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ est de Cauchy. ■

Proposition 2.6.2. *Soient $(X,\, d)$ un espace métrique et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans X.*

1. *La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente si et seulement si elle possède une sous-suite convergente. Autrement dit, une suite de Cauchy dans X possédant une valeur d'adhérence est convergente. La valeur d'adhérence est alors unique, c'est la limite de la suite.*

2. *Pour toute suite $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ de nombres réels strictement positifs, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ de $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que $d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \varepsilon_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. 1. D'après la proposition 1.7.2, toute sous-suite d'une suite convergente est convergente. Réciproquement, supposons qu'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ de $(x_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers un élément $a \in X$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$, on ait $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$, et il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, on ait $d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. D'après le lemme 1.7.1, pour tout $k \geq 0$, on a $n_k \geq k$. Soit $p = \max(N, k_0)$, alors $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \geq p$, on a $d(x_n, x_{n_p}) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(x_{n_p}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $d(x_n, a) \leq (x_n, x_{n_p}) + d(x_{n_p}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers a.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, choisissons $\alpha_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq \alpha_k$, on ait $d(x_p, x_q) < \varepsilon_k$. Soit $n_k = \sup\{\alpha_r \ ; \ 0 \leq r \leq k\} + k$, alors $n_k \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \geq 0$, on a $n_{k+1} > n_k \geq \alpha_k$, d'où on a $d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \varepsilon_k$. ■

Proposition 2.6.3. *L'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est de Cauchy.*

Démonstration. Soient (X, d), (Y, d') des espaces métriques, $f : X \longrightarrow Y$ une application uniformément continue et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans (X, d). Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, z \in X$ vérifiant $d(x, z) < \eta$, on ait $d'(f(x), f(z)) < \varepsilon$. Comme $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$, on ait $d(x_n, x_m) < \eta$, d'où pour tout $n, m \geq N$, on a $d'(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$. Par conséquent, la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans (Y, d'). ■

Notons que l'hypothèse d'uniforme continuité n'est pas superflue dans la proposition précédente. En effet, soient $X =]0, +\infty[$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{1}{x}$, alors f est un homéomorphisme de X sur X et si on note $x_n = \frac{1}{n}$, alors $(x_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans X, mais $(f(x_n))_{n\geq 1}$ n'est pas de Cauchy dans X.
Notons également que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ n'est pas convergente dans X, donc une suite de Cauchy n'est pas toujours convergente, d'où la nécessité de considérer la définition suivante :

Définition 2.6.2. Soit (X, d) un espace métrique.

1. On dit que (X, d) est **complet** si toute suite de Cauchy dans (X, d) est convergente.

2. Un sous-ensemble A de (X, d) est dit complet si A muni de la distance induite est un espace métrique complet.

L'importance fondamentale des espaces métriques complets réside dans le fait que, pour démontrer qu'une suite est convergente dans un tel espace, il n'est pas nécessaire de connaître d'avance la valeur de la limite.

Exemple 2.6.1. Un exemple fondamental d'espace métrique complet est l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, voir Appendice C.

Exemple 2.6.2. Soit (X, d) un espace métrique discret, alors (X, d) est complet car on a $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$, donc toute suite de Cauchy dans X est stationnaire, donc convergente.

Il faut prendre garde qu'un espace métrique peut être homéomorphe à un espace métrique complet sans être complet ; par exemple l'intervalle ouvert $]-1, 1[$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$, qui est complet, mais $]-1, 1[$ n'est pas complet pour la métrique induite par celle de $\mathbb{R}$. On peut même observer que l'homéomorphisme $x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ est uniformément continue. Cependant, on a un résultat en sens inverse concernant les applications uniformément continues.

Proposition 2.6.4. *Soient (X, d), (Y, d') deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ un homéomorphisme. Si f est uniformément continue et si Y est complet, alors X est complet.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans (X, d). D'après la proposition précédente, $(f(x_n))_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans (Y, d'), donc elle converge vers un élément $\ell \in Y$. Puisque f^{-1} est continue de Y dans X, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers $f^{-1}(\ell) \in X$. Donc (X, d) est complet. ■

On déduit des propositions 2.6.3 et 2.6.4 le résultat suivant :

Corollaire 2.6.1. *Soient X un ensemble et d, d' des distances uniformément équivalentes sur X. Alors on a :*

1. *Toute suite de Cauchy pour l'une des distances est de Cauchy pour l'autre.*
2. *Les espaces métriques (X, d) et (X, d') sont simultanément complets ou non complets.*

Remarque 2.6.2. 1. Soit $X =]0, +\infty[$ et pour tout $x, y \in X$, soient $d_1(x, y) = |x-y|$ et $d_2(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$. Alors on a :

   (i) d_1 et d_2 sont des distances topologiquement équivalentes, mais elles ne sont pas uniformément équivalentes.

   (ii) d_1 et d_2 n'ont pas les mêmes suites de Cauchy.

2. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, soient $d_1(x, y) = |x - y|$ et $d_2(x, y) = |x^3 - y^3|$. Alors on a :

   (i) d_1 et d_2 sont des distances topologiquement équivalentes, mais elles ne sont pas uniformément équivalentes.

   (ii) d_1 et d_2 ont les mêmes suites de Cauchy

Remarque 2.6.3. Si (X, d) et (Y, d') sont des espaces métriques isométriques, alors (X, d) et (Y, d') sont simultanément complets ou non complets.

Exemple 2.6.3. L'espace métrique $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ est complet car il est isométrique à l'intervalle fermé $[-1, 1]$ qui est complet.

Proposition 2.6.5. *Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique (X, d).*

1. *Si A est complet, alors A est fermé dans X.*
2. *Si A est dense dans X et $A \neq X$, alors A n'est pas complet.*

3. Si (X, d) est complet et si A est fermé dans X, alors A est complet.

Démonstration. 1. Soit $x \in \overline{A}$, alors il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans A convergeant vers x. Par conséquent, $(a_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans A. Or A est complet, donc $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers un élément $a \in A$. Comme la limite d'une suite est unique dans un espace métrique, on en déduit que $x = a \in A$. Par conséquent, on a $A = \overline{A}$, donc A est fermé dans X.
2. Ceci résulte immédiatement de 1.
3. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans A. Alors $(a_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans X qui est complet, donc $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers un élément $x \in X$. Or A est fermé dans X, donc $x \in A$. Par conséquent, A est complet. ■

Proposition 2.6.6. *Soient (X_i, d_i), $1 \leq i \leq p$, une famille finie d'espaces métriques. Alors l'espace métrique produit $X = X_1 \times \cdots \times X_p$ est complet si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, (X_i, d_i) est complet. En particulier, pour tout $p \geq 1$, les espaces métriques $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{C}^p$ sont complets.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 2 du supplément.

Proposition 2.6.7. *Soit $\big((X_n, d_n)\big)_{n\geq 0}$ une suite d'espaces métriques. Alors l'espace métrique produit $X = \prod\limits_{n\geq 0} X_n$ est complet si et seulement si pour tout $n \geq 0$, (X_n, d_n) est complet.*

Démonstration. D'après le corollaire 2.6.1 et la proposition 2.3.5, un espace métrique (Y, d) est complet si et seulement si (Y, d') est complet, où $d' = \min(1, d)$. Donc on peut supposer que pour tout $n \geq 0$, $d_n \leq 1$, et dans ce cas, la distance D_1 sur X est définie par :

$$D_1(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n(x_n, x_y)}{2^n}.$$

Supposons d'abord que (X, D_1) est complet. Soit $a = (a_n)_{n\geq 0} \in X$. Pour tout $p \geq 0$, l'application

$$\begin{array}{ccc} X_p & \longrightarrow & X \\ z_p & \longmapsto & (x_n)_{n\geq 0} \end{array}$$

où $x_p = z_p$ et $x_n = a_n$ si $n \neq p$, est uniformément continue et est un homéomorphisme sur son image qui est fermée dans X, donc complète. D'après les propositions 2.6.4 et 2.6.5, l'espace (X_p, d_p) est alors complet. Réciproquement, supposons que pour tout $n \geq 0$, l'espace (X_n, d_n) est complet. Soit $(\xi_p)_{p\geq 0}$ une suite de Cauchy dans (X, D_1), où $\xi_p = (x_{p,n})_{n\geq 0}$, avec $x_{p,n} \in X_n$. Pour tout $n \geq 0$ et tout $p, q \geq 0$, on a $d_n(x_{p,n}, x_{q,n}) \leq 2^n D(\xi_p, \xi_q)$, donc la suite $(x_{p,n})_{p\geq 0}$ est de Cauchy dans (X_n, d_n). Par conséquent, il existe $x_n \in X_n$ tel que $\lim\limits_{p\to+\infty} d_n(x_{p,n}, x_n) = 0$. Soit $x = (x_n)_{n\geq 0}$, alors $x \in X$ et d'après la proposition 1.7.3, la suite $(\xi_p)_{p\geq 0}$ converge vers x dans l'espace métrique produit X. Pour la commodité du lecteur, donnons une autre preuve directe du fait que la suite $(\xi_p)_{p\geq 0}$ converge vers x dans l'espace métrique produit (X, D_1). Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} d_n(x_{p,n}, x_n) = 0$, donc il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq p_0$ et pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, on ait $d_n(x_{p,n}, x_n) < \frac{\varepsilon}{4}$. Alors pour tout $p \geq p_0$, on a :

$$D_1(\xi_p, x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{d_n(x_{p,n}, x_n)}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{d_n(x_{p,n}, x_n)}{2^n} < \frac{\varepsilon}{4} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,.$$

Par conséquent, la suite $(\xi_p)_{p\geq 0}$ converge vers $x = (x_n)_{n\geq 0}$ dans $(X,\, D_1)$. Donc $(X,\, D_1)$ est complet. ■

Théorème 2.6.1 (Cantor). *Soit $(X,\, d)$ un espace métrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'espace $(X,\, d)$ est complet.

(ii) L'intersection de toute suite décroissante $(F_n)_{n\geq 0}$ de parties fermées non vides de $(X,\, d)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$ contient un point et un seul.

(iii) Toute famille filtrante croissante de Cauchy dans $(X,\, d)$ est convergente.

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 2 du supplément.
On notera que la condition relative au diamètre est essentielle dans le théorème précédent. En effet, il suffit de considérer $F_n = [n, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui est complet, alors $(F_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de fermés non vides dans $\mathbb{R}$ dont l'intersection est vide.

Théorème 2.6.2 (théorème de prolongement). *Soient $(X,\, d)$ et $(Y,\, d')$ des espaces métriques, A une partie dense dans X et $f : A \longrightarrow Y$ une application uniformément continue. Si $(Y,\, d')$ est complet, f se prolonge de manière unique en une application continue $\tilde{f} : X \longrightarrow Y$. De plus, $\tilde{f}$ elle-même est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $x \in X$. Alors il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$. Donc $(a_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans A. Puisque f est uniformément continue, d'après la proposition 2.6.3, $(f(a_n))_{n\geq 0}$ est alors de Cauchy dans Y. Or Y est complet, donc il existe $y \in Y$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = y$. Soit $(b_n)_{n\geq 0}$ une autre suite dans A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = x$. Montrons que la suite $(f(b_n))_{n\geq 0}$ converge aussi vers y. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $a, b \in A$ vérifiant $d(a, b) < \eta$, on ait $d'(f(a), f(b)) < \varepsilon$. Comme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(a_n, b_n) = d(x, x) = 0$, voir remarque 2.2.1, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $d(a_n, b_n) < \eta$, d'où pour tout $n \geq N$, on a $d'(f(a_n), f(b_n)) < \varepsilon$. Or on a $0 \leq d'(f(b_n), y) \leq d'(f(a_n), f(b_n)) + d'(f(a_n), y)$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} d'(f(b_n), y) = 0$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = y = \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)$. On pose $\tilde{f}(x) = y$, alors $\tilde{f}$ est une application bien définie de X dans Y et pour tout $a \in A$, on a $\tilde{f}(a) = f(a)$. Montrons que $\tilde{f}$ est uniformément continue. Utilisons encore une fois de plus le fait que f est uniformément continue. Soient $x, z \in X$ tels que $d(x, z) < \frac{\eta}{2}$. Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites dans A convergeant respectivement vers x et z. D'où on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \tilde{f}(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = \tilde{f}(z)$. Comme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(a_n, b_n) = d(x, z)$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $d(a_n, b_n) < \eta$, d'où pour tout $n \geq N$, on a $d'(f(a_n), f(b_n)) < \varepsilon$. On a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} d'(f(a_n), f(b_n)) = d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(z))$, d'où $d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(z)) \leq \varepsilon < 2\varepsilon$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, z \in X$ vérifiant $d(x, z) < \dfrac{\eta}{2}$, on ait $d'(\tilde{f}(x), \tilde{f}(z)) < 2\varepsilon$. Donc $\tilde{f}$ est uniformément continue. L'unicité de $\tilde{f}$ résulte de la proposition 1.5.5. ■

Remarque 2.6.4. Soient $X = [0,\, 1]$, $A = [0,\, 1[$ et considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{array}$$

Alors A est dense dans X, $\mathbb{R}$ est un espace métrique complet et f est une application continue, mais f ne se prolonge pas par continuité sur X. Donc l'hypothèse f est uniformément continue dans le théorème précédent n'est pas superflue.

Définition 2.6.3. Soient X un ensemble et $f : X \longrightarrow X$ une application. On dit qu'un point $a \in X$ est un **point fixe** de f lorsque l'on a $f(a) = a$.

Théorème 2.6.3 (théorème du point fixe). *Soient $(X,\, d)$ un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application contractante de rapport k. Alors on a :*

1. *L'application f possède un unique point fixe $a \in X$.*
2. *Pour tout $x \in X$, on a $a = \lim\limits_{n \to +\infty} f^n(x)$ et $d\big(a, f^n(x)\big) \leq \dfrac{k^n}{1-k}\, d\big(x, f(x)\big)$, pour tout $n \geq 0$, où $f^0 = id_X$ et $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ l'application f composée avec elle-même n fois.*

Démonstration. Montrons d'abord l'unicité. Soient $a, b \in X$ tels que $f(a) = a$ et $f(b) = b$. Alors on a $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq k\, d(a, b)$, d'où $0 \leq (1-k)\, d(a, b) \leq 0$. Donc on a $(1-k)\, d(a, b) = 0$. Or $1 - k \neq 0$, d'où $d(a, b) = 0$, *i.e.* $a = b$.
Montrons l'existence du point fixe. Soit $x_0 = x \in X$, et pour tout $n \geq 1$, on pose $x_n = f(x_{n-1})$, *i.e.* $x_n = f^n(x_0)$. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n\, d(x_1, x_0)\,. \qquad (P_n)$$

Si $n = 0$, on a $d(x_{n+1}, x_n) = d(x_1, x_0) = k^0\, d(x_1, x_0)$, donc (P_0) est vraie. Supposons que (P_n) est vraie, et montrons qu'alors (P_{n+1}) est vraie. On a :

$$\begin{aligned} d(x_{n+2}, x_{n+1}) &= d\big(f^{n+2}(x_0), f^{n+1}(x_0)\big) \\ &= d\big(f(f^{n+1}(x_0)), f(f^n(x_0))\big) \\ &\leq k\, d\big(f^{n+1}(x_0), f^n(x_0)\big) \\ &= k\, d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq kk^n\, d(x_1, x_0) \;=\; k^{n+1}\, d(x_1, x_0)\,. \end{aligned}$$

Donc (P_{n+1}) est vraie. Par conséquent, pour tout $n \geq 0$, (P_n) est vraie.
On a $d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n)$, d'où

$d(x_{n+p}, x_n) \leq \big(k^{n+p-1} + \cdots + k^n\big)\, d(x_1, x_0)$. Or on a $k^n + \cdots + k^{n+p-1} = \dfrac{k^n - k^{n+p}}{1-k}$, donc $d(x_{n+p}, x_n) \leq \dfrac{k^n(1-k^p)}{1-k}\, d(x_1, x_0) \leq \dfrac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0)$. Comme on a $k \in [0,\, 1[$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0) = 0$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $p \geq 0$, on ait $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$. Autrement dit, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans $(X,\, d)$ qui est complet, donc il existe $a \in X$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$. Comme on a $0 \leq d(f(a), x_n) \leq k\, d(a, x_{n-1})$, $\lim\limits_{n \to +\infty} d(f(a), x_n) = d(f(a), a)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} d(a, x_{n-1}) = d(a, a) = 0$, alors $d(f(a), a) = 0$, *i.e.* $f(a) = a$. Autrement dit, a est un point fixe de f. Comme on a $d\big(f^{n+p}(x_0), f^n(x_0)\big) \leq \dfrac{k^n}{1-k}\, d(x_0, f(x_0))$, pour tout $p, n \in \mathbb{N}$, et puisque on a aussi $a = \lim\limits_{p \to +\infty} f^{n+p}(x_0)$, alors $d\big(a, f^n(x_0)\big) \leq \dfrac{k^n}{1-k}\, d(x_0, f(x_0))$. ■

Remarque 2.6.5. 1. Si $k \geq 1$, alors le théorème précédent n'est plus vrai. En effet, soit $X = \mathbb{N}$, muni de la distance euclidienne, alors X est complet. Si $k \in \mathbb{N}^*$ et $f : X \longrightarrow X$ est définie par $f(n) = kn + 1$, on a $d(f(n), f(m)) = |f(n) - f(m)| = k\,|n - m| = k\, d(n, m)$, mais f n'admet aucun point fixe.

2. Si $(X,\, d)$ n'est pas complet, le théorème précédent n'est plus vrai. En effet, si $X =]0, 1]$, muni de la distance euclidienne, alors X n'est pas complet, et si $f : X \longrightarrow X$ est définie par $f(x) = \frac{x}{2}$, alors f est contractante, mais f n'admet aucun point fixe.

3. Si $(X,\, d)$ est un espace métrique et $f : X \longrightarrow X$ est contractante, alors pour tout $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, on a $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Mais le réciproque est en général fausse. En effet, il suffit de considérer $X = [0, +\infty[$ (complet) et $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Alors pour tout $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, on a $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, mais f n'est pas contractante, car f n'admet aucun point fixe.

Corollaire 2.6.2. *Soient $(X,\, d)$ un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p soit contractante. Alors on a :*

1. *L'application f possède un unique point fixe $a \in X$.*
2. *Pour tout $x \in X$, on a $a = \lim\limits_{n \to +\infty} f^n(x)$.*

Démonstration. 1. D'après le théorème précédent, il existe un unique point $a \in X$ tel que $f^p(a) = a$, d'où on a $f(a) = f(f^p(a)) = f^p(f(a))$. Donc $f(a)$ est aussi un point fixe de f^p. Par conséquent, on a $f(a) = a$. Donc a est un point fixe de f. Soit $b \in X$ tel que $f(b) = b$, alors on a $f^p(b) = b$, d'où $a = b$.
2. Soient $x_0 = x \in X$, et pour tout $n \geq 1$, on pose $x_n = f(x_{n-1})$, *i.e.* $x_n = f^n(x_0)$. Soit $r \in \{0, \ldots, p-1\}$, d'après le théorème précédent, la suite définie par $y_0 = f^r(x_0)$ et $y_n = f^p(y_{n-1})$ converge vers a. Autrement dit, la suite $(x_{np+r})_{n \geq 0}$ converge vers a. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $r \in \{0, \ldots, p-1\}$, on ait $d(x_{np+r}, a) < \varepsilon$. Soit $n_0 = Np$, alors $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq n_0$. En faisant la division euclidienne de m par p, on obtient $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, \ldots, p-1\}$ tels que $n \geq N$ et $m = np + r$, d'où on a $d(x_m, a) < \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe

$n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq n_0$, on ait $d(x_m, a) < \varepsilon$. Autrement dit, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers a. ■

Remarque 2.6.6. Dans le corollaire précédent, f n'est pas en général continue. Par exemple, si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = 1$ si $x \in]0, 1[$ et $f(x) = 0$ si $x \notin]0, 1[$, alors f est discontinue, $f \circ f = 0$, donc $f \circ f$ est contractante et l'unique point fixe de f est zéro.

Définition 2.6.4. Soient X un ensemble et $(Y,\, d)$ un espace métrique. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est dite **bornée** si $f(X)$ est un sous-ensemble borné de Y, *i.e.* il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $a, b \in X$, on ait $d(f(a), f(b)) \leq \lambda$.

Notations. Soient X un ensemble et $(Y,\, d)$ un espace métrique.

1. On note $B(X,\, Y)$ l'ensemble des applications bornées définies sur X et à valeurs dans Y.

2. On suppose de plus que X est un espace topologique. On note :

   (i) $C(X,\, Y)$ l'ensemble des applications continues de X dans Y.

   (ii) $C_b(X,\, Y)$ l'ensemble des applications continues bornées de X dans Y.

   (iii) $C(X) = C(X,\, \mathbb{K})$ et $C_b(X) = C_b(X,\, \mathbb{K})$.

Proposition 2.6.8. *Soient X un ensemble et $(Y,\, d)$ un espace métrique.*

1. *Pour $f, g \in B(X,\, Y)$, on pose $d_\infty(f, g) = \sup\limits_{x\in X} d(f(x), g(x))$. Alors d_∞ est une distance sur $B(X,\, Y)$, appelée **distance de la convergence uniforme**.*

2. *Si $(Y,\, d)$ est complet, alors $B(X,\, Y)$ est complet pour la distance d_∞.*

3. *On suppose maintenant X un espace topologique. Alors on a :*

   (i) $C_b(X,\, Y)$ est fermé dans $B(X,\, Y)$.

   (ii) Si $(Y,\, d)$ est complet, alors $\big(C_b(X,\, Y),\, d_\infty\big)$ est complet.

4. *L'espace métrique $\big(C([0,\, 1]),\, d_\infty\big)$ est complet.*

Démonstration. 1. Soit $a \in X$. Pour tout $x \in X$, on a :

$$\begin{aligned} d(f(x), g(x)) &\leq d(f(x), f(a)) + d(f(a), g(a)) + d(g(a), g(x)) \\ &\leq \delta(f(X)) + d(f(a), g(a)) + \delta(g(X)) < +\infty. \end{aligned}$$

Donc $d_\infty(f, g)$ est bien défini. Soient $f, g, h \in B(X,\, Y)$. Il est clair que $d_\infty(f, g) = 0$ si et seulement si $f = g$. Pour tout $x \in X$, on a $d(f(x), g(x)) = d(g(x), f(x))$, d'où $d_\infty(f, g) = d_\infty(g, f)$. Pour tout $x \in X$, on a :

$$d(f(x), h(x)) \leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), h(x)) \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h)\,.$$

Par conséquent, on a $d_\infty(f, h) \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h)$. Donc d_∞ est bien une distance sur $B(X,\, Y)$.

2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\big(B(X,\,Y),\,d_\infty\big)$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n \geq N$ et $m \geq N$, on ait $d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$. Donc on a :

$$\text{Pour tous } n \geq N \text{ et } m \geq N, \text{ et pour tout } x \in X, \text{ on a } d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon\,. \qquad (*)$$

Par conséquent, pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $(Y,\,d)$. Donc la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est convergente vers un élément de Y que l'on note $f(x)$. Ainsi, on définit une application $f : X \longrightarrow Y$ telle que pour tout $x \in X$, on ait $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. Il s'agit maintenant de montrer que f est bornée et que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans $\big(B(X,\,Y),\,d_\infty\big)$. Comme on a $d(f_N(x), f(x)) = \lim\limits_{m\to+\infty} d(f_N(x), f_m(x))$, alors, d'après l'équation $(*)$, pour tout $x \in X$, on a $d(f_N(x), f(x)) \leq \varepsilon$. Or f_N est bornée, donc il existe $y \in Y$ et $r > 0$ tels que pour tout $x \in X$, on ait $f_N(x) \in B'(y,r)$. Par conséquent, pour tout $x \in X$, on a $f(x) \in B'(y, r+\varepsilon)$. Donc f est bornée, *i.e.* $f \in B(X,\,Y)$. Encore une fois de plus, on utilise l'équation $(*)$; pour tout $n \geq N$, on a $d(f_n(x), f(x)) = \lim\limits_{m\to+\infty} d(f_n(x), f_m(x))$, d'où pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in X$, on a $d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$, donc $d_\infty(f_n, f) \leq \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $d_\infty(f_n, f) \leq \varepsilon$. Autrement dit, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans $\big(B(X,\,Y),\,d_\infty\big)$. Donc $\big(B(X,\,Y),\,d_\infty\big)$ est complet.
3(i). Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $C_b(X,\,Y)$ et $f \in B(X,\,Y)$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$. Il s'agit de montrer qu'alors $f \in C_b(X,\,Y)$, *i.e.* f est continue. Soient $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in X$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in X$, on ait $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Puisque f_N est continue en x_0, alors il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V_{x_0}$, on ait $d(f_N(x), f_N(x_0)) < \varepsilon$. Donc, pour tout $x \in V_{x_0}$, on a $d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f(x_0)) < 3\varepsilon$. Par conséquent, f est continue en x_0, donc f est continue. Donc $C_b(X,\,Y)$ est fermé dans $\big(B(X,\,Y),\,d_\infty\big)$.
3(ii). Ceci résulte de ce qui précède et de la proposition 2.6.5.
4. Puisque toute fonction continue sur $[0,\,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est bornée, alors on a $C([0,\,1]) = C_b([0,\,1])$. Il résulte de 3(ii) que $\big(C([0,\,1]),\,d_\infty\big)$ est complet. ∎

2.7 Complétion des espaces métriques

Si un espace métrique $(X,\,d)$ n'est pas complet, on peut toujours construire un espace métrique complet $(\widehat{X},\,\hat{d}\,)$ de manière que X soit isométrique à un sous-ensemble dense de $\widehat{X}$, et un tel espace $(\widehat{X},\,\hat{d}\,)$ est unique à isométrie près, *i.e.* si $(Y,\,d')$ est un autre espace métrique complet tel que X soit isométrique à un sous-ensemble dense de Y, alors il existe une isométrie de $\widehat{X}$ sur Y dont la restriction à X est l'application identité. Un tel espace $(\widehat{X}, \hat{d}\,)$ est appelé une **complétion** de $(X,\,d)$ et $\widehat{X}$ est appelé un **complété** de X. Habituellement pour construire un complété de X, on utilise les suites de Cauchy dans X, comme dans la construction de $\mathbb{R}$ à partir du corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. On va donner dans ce paragraphe une autre construction plus élégante de $\widehat{X}$. Soit $C_b(X,\,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues bornées de X dans $\mathbb{R}$. Pour $f, g \in C_b(X,\,\mathbb{R})$, on pose $d_\infty(f,g) = \sup\limits_{x\in X} |f(x) - g(x)|$. D'après la proposition 2.6.8, $\big(C_b(X,\,\mathbb{R}),\,d_\infty\big)$ est un espace métrique complet. Soit $a \in X$, et pour tout $x, y \in X$, on pose $\phi_x(y) = d(x,y) - d(y,a)$. Il est clair que ϕ_x est continue sur X et que pour tout $y \in X$, on a $|\phi_x(y)| \leq d(x,a)$.

Donc on a $\phi_x \in C_b(X, \mathbb{R})$. L'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & X & \longrightarrow & C_b(X, \mathbb{R}) \\ & x & \longmapsto & \phi_x \end{array}$$

est isométrique. En effet, on a :

$$d_\infty(\phi_x, \phi_{x'}) = \sup_{y\in X} |\phi_x(y) - \phi_{x'}(y)| = \sup_{y\in X} |d(x, y) - d(x', y)| = d(x, x')\,.$$

On pose $\widehat{X} = \overline{\Phi(X)}$, l'adhérence de $\Phi(X)$ dans $\big(C_b(X, \mathbb{R}), d_\infty\big)$. Alors $(\widehat{X}, d_\infty)$ est un espace métrique complet et $\Phi : X \longrightarrow \widehat{X}$ est une application isométrique telle que $\Phi(X)$ soit dense dans $\widehat{X}$. Donc on peut identifier X à $\Phi(X)$ et considérer X comme un sous-ensemble dense de $\widehat{X}$. On résume cette construction par le théorème suivant :

Théorème 2.7.1. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors on a :*

1. *Il existe un espace métrique complet $(\widehat{X}, \hat{d})$ et il existe une application isométrique $i : X \longrightarrow \widehat{X}$ telle que $i(X)$ soit dense dans $\widehat{X}$, et ainsi, on peut identifier X à $i(X)$, et considérer X comme un sous-ensemble dense de $\widehat{X}$.*

2. *Si (Y, d') est un espace métrique complet et s'il existe une application isométrique $j : X \longrightarrow Y$ telle que $j(X)$ soit dense dans Y, alors il existe[†] une unique application continue $\varphi : \widehat{X} \longrightarrow Y$ telle que le diagramme suivant soit commutatif.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \\ & \widehat{X} \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

De plus φ est une isométrie de $\widehat{X}$ sur Y. Autrement dit, $(\widehat{X}, \hat{d})$ et (Y, d') sont isométriques.

Remarque 2.7.1. Soient (X, d), (Y, d') deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application uniformément continue. Alors, par le théorème de prolongement, il existe une unique application $\hat{f} : \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y}$ uniformément continue telle que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "i"] \\ \widehat{X} \arrow[r, "\hat{f}"] & \widehat{Y} \end{tikzcd}$$

En particulier, si d_1 et d_2 sont deux distances uniformément équivalentes sur un ensemble X, alors il existe une unique application bijective $\varphi : (\widehat{X}, \hat{d_1}) \longrightarrow (\widehat{X}, \hat{d_2})$ dont la restriction à X est l'identité, et telle que φ et φ^{-1} sont uniformément continues. Autrement dit, deux distances uniformément équivalentes engendrent deux complétés uniformément équivalents.

[†] Voir théorème 2.6.2.

Remarque 2.7.2. Deux distances topologiquement équivalentes sur un même ensemble n'engendrent pas toujours le même complété. En effet, si $X =]-1,\, 1[$ et si d est la distance usuelle sur X, alors on a $(\widehat{X},\, \hat{d}) = ([-1,\, 1],\, d)$. D'autre part, X est homéomorphe à $\mathbb{R}$ via l'application $f\,:\, x \longmapsto \dfrac{x}{1-|x|}$, et si on considère la distance d' sur X définie par $d'(x, y) = d(f(x), f(y))$, alors d et d' sont topologiquement équivalentes et f devient une isométrie de $(X,\, d')$ sur $(\mathbb{R},\, d)$ qui est complet, donc on a $(\widehat{X},\, \hat{d}') = (X,\, d') = (\mathbb{R},\, d)$. Mais les deux espaces $([-1,\, 1],\, d)$ et $(\mathbb{R},\, d)$ ne sont pas homéomorphes.

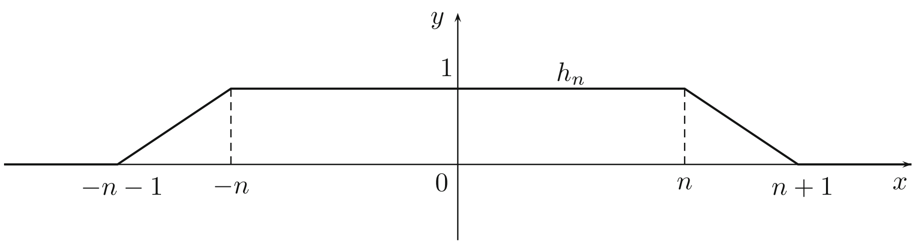
Exemple 2.7.1. Soient $(Y,\, d)$ est un espace métrique complet et X un sous-ensemble de Y. Soit $\overline{X}$ l'adhérence de X dans $(Y,\, d)$. Alors $(\,\overline{X},\, d)$ est le complété de $(X,\, d)$.

Exemple 2.7.2. On note $C_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et tendant vers 0 à l'infini, *i.e.* $f \in C_0(\mathbb{R})$ si $f\,:\,\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \notin [-A,\, A]$, on ait $|f(x)| < \varepsilon$. On note $C_c(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques continues et à support « compact » dans $\mathbb{R}$, *i.e.* $f \in C_c(\mathbb{R})$ si $f\,:\,\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue et s'il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \notin [-A,\, A]$, on ait $f(x) = 0$. On a $C_c(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R},\, \mathbb{K})$, et on munit $C_b(\mathbb{R},\, \mathbb{K})$ de la distance de la convergence uniforme d_∞. Alors on a :

1. $C_0(\mathbb{R})$ est fermé dans $C_b(\mathbb{R},\, \mathbb{K})$, donc $\big(C_0(\mathbb{R}),\, d_\infty\big)$ est complet.

2. $C_c(\mathbb{R})$ est dense dans $\big(C_0(\mathbb{R}),\, d_\infty\big)$, donc $\big(C_0(\mathbb{R}),\, d_\infty\big)$ est le complété de $\big(C_c(\mathbb{R}),\, d_\infty\big)$.

En effet, il est clair que l'on a $C_0(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R},\, \mathbb{K})$. Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $C_0(\mathbb{R})$ et $f \in C_b(\mathbb{R},\, \mathbb{K})$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$. Il s'agit de montrer qu'alors $f \in C_0(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in X$, on ait $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, d'où pour tout $x \in X$, on a $|f(x)| < \varepsilon + |f_N(x)|$. Comme on a $f_N \in C_0(\mathbb{R})$, alors il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \notin [-A,\, A]$, on ait $|f_N(x)| < \varepsilon$. Donc, pour tout $x \notin [-A,\, A]$, on a $|f(x)| < 2\varepsilon$. Par conséquent, on a $f \in C_0(\mathbb{R})$. Donc $C_0(\mathbb{R})$ est fermé dans $C_b(\mathbb{R},\, \mathbb{K})$. On déduit des propositions 2.6.5 et 2.6.8 que $\big(C_0(\mathbb{R}),\, d_\infty\big)$ est complet.
2. Soit $f \in C_0(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $h_n \in C_c(\mathbb{R})$ dont le graphe est ci-dessous :



Soit $f_n = h_n f$, alors $f_n \in C_c(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \notin [-N, N]$, on ait $|f(x)| < \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$, d'où $d_\infty(f_n, f) \leq 2\varepsilon$. Par conséquent, $C_c(\mathbb{R})$ est dense dans $(C_0(\mathbb{R}),\, d_\infty)$, donc $(C_0(\mathbb{R}),\, d_\infty)$ est le complété de $(C_c(\mathbb{R}),\, d_\infty)$.

2.8 Espaces de Baire

Proposition 2.8.1. *Soit X un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) Pour toute famille dénombrable $\big(F_n\big)_{n\geq 0}$ de fermés de X telle que $X = \underset{n\geq 0}{\cup} F_n$, la réunion des intérieurs $\underset{n\geq 0}{\cup} \overset{\circ}{F_n}$ est dense dans X.

(ii) La réunion de toute famille dénombrable de fermés de X d'intérieurs vides est d'intérieur vide.

(iii) L'intersection de toute famille dénombrable d'ouvertes de X et denses dans X est dense dans X.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ une suite de fermés de X d'intérieurs vides. Montrons que $Y = \underset{n\geq 0}{\cup} F_n$ est d'intérieur vide. Si $\overset{\circ}{Y} \neq \emptyset$, alors $F = X \setminus \overset{\circ}{Y}$ est un fermé dans X tel que $F \neq X$ et on a $X = F \cup \underset{n\geq 0}{\cup} F_n$. Par hypothèse, la réunion $\overset{\circ}{F} \cup \underset{n\geq 0}{\cup} \overset{\circ}{F_n}$ est dense dans X. Or, pour tout $n \geq 0$, on a $\overset{\circ}{F_n} = \emptyset$, on en déduit que $\overset{\circ}{F}$ est dense dans X, donc F est un fermé dense dans X, d'où $F = X$ ce qui est impossible. Donc on a $\overset{\circ}{Y} = \emptyset$.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite d'ouverts de X et denses dans X. Soit $U = \underset{n\geq 0}{\cap} U_n$, et pour tout $n \geq 0$, soit $F_n = X \setminus U_n$. Alors pour tout $n \geq 0$, F_n est un fermé dans X et on a $\overset{\circ}{F_n} = X \setminus \overline{U_n} = \emptyset$, voir proposition 1.2.2. Donc $X \setminus U = \underset{n\geq 0}{\cup} X \setminus U_n = \underset{n\geq 0}{\cup} F_n$ est d'intérieur vide, d'où on a $X \setminus \overline{U} = \emptyset$. Donc U est dense dans X.
Montrons l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ une suite de fermés dans X telle que $X = \underset{n\geq 0}{\cup} F_n$. Pour tout $n \geq 0$, soit $K_n = F_n \setminus \overset{\circ}{F_n}$, alors K_n est un fermé de X tel que $\overset{\circ}{K_n} = \emptyset$. Soit $U_n = X \setminus K_n$, alors U_n est un ouvert dense dans X. Par conséquent, $\underset{n\geq 0}{\cap} U_n$ est dense dans X et on a $\underset{n\geq 0}{\cap} U_n = X \setminus \underset{n\geq 0}{\cup} K_n$. On a $F_n = K_n \cup \overset{\circ}{F_n}$, donc $\underset{n\geq 0}{\cup} \overset{\circ}{F_n}$ contient le complémentaire de $\underset{n\geq 0}{\cup} K_n$, on en déduit que $\underset{n\geq 0}{\cup} \overset{\circ}{F_n}$ est dense dans X. ■

Définition 2.8.1. Un espace topologique X est dit **espace de Baire** si X vérifie l'une des propriétés de la proposition précédente.

Exemple 2.8.1. Tout espace topologique discret est un espace de Baire.

Exemple 2.8.2. L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$ n'est pas un espace de Baire.

Proposition 2.8.2. *Tout ouvert d'un espace de Baire est un espace de Baire.*

Démonstration. Soient X un espace de Baire et U un ouvert de X. Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite d'ouverts denses dans U. Alors, pour tout $n \geq 0$, U_n est un ouvert de X et on a $\overline{U_n} \cap U = U$, voir exercice 1.24. Soit $F = \bigcap_{n\geq 0} \overline{U_n}$, alors F est un fermé de X et on a $U \subset F$. Soit $V = X \setminus F$, alors V est un ouvert de X. On pose $V_n = U_n \cup V$, alors V_n est un ouvert de X et on a $\overline{V_n} = \overline{U_n} \cup \overline{V} = X$. Puisque X est un espace de Baire, alors $\bigcap_{n\geq 0} V_n = \big(\bigcap_{n\geq 0} U_n\big) \cup V$ est dense dans X. D'où on a $\big(\overline{\bigcap_{n\geq 0} U_n}\big) \cup \overline{V} = X$. Par conséquent, on a $U = X \cap U = \big(\overline{\bigcap_{n\geq 0} U_n} \cap U\big) \cup \big(\overline{V} \cap U\big)$. Or on a $\overline{V} \cap U = \emptyset$, d'où $U = \overline{\bigcap_{n\geq 0} U_n} \cap U$. Autrement dit, $\bigcap_{n\geq 0} U_n$ est dense dans U. Donc U est un espace de Baire. ■

Théorème 2.8.1 (Baire). *Soit (X, d) un espace métrique complet. Alors X est un espace de Baire.*

Démonstration. Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite d'ouverts de X et denses dans X. Pour montrer que $\bigcap_{n\geq 0} U_n$ est dense dans X, d'après la proposition 1.2.4, il suffit de montrer que pour tout ouvert non vide V de X, $V \cap \bigcap_{n\geq 0} U_n \neq \emptyset$. Comme U_0 est dense dans X, alors $V \cap U_0 \neq \emptyset$, et soit $x_0 \in V \cap U_0$. Comme $V \cap U_0$ est un ouvert de X, il existe $r_0 > 0$ tel que $r_0 \leq 1$ et $B(x_0, 2r_0) \subset V \cap U_0$. On construit, par récurrence sur n, une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans X et une suite $(r_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels strictement positifs tels que $r_n \leq 2^{-n}$ et $B(x_n, 2r_n) \subset U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$, pour tout $n \geq 1$. En effet, on a déjà construit x_0 et r_0 et supposons x_n et r_n construits ; comme U_{n+1} est dense dans X, il existe $x_{n+1} \in U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$. Comme $U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$ est ouvert, il existe $0 < r_{n+1} \leq 2^{-n-1}$ tel que $B(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$. Soit $B_n = B'(x_n, r_n)$, on a $B_{n+1} \subset B(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \subset B_n$. Comme l'espace (X, d) est complet et les B_n forment une suite décroissante de fermés non vides dont les diamètres tendent vers 0, d'après le théorème de Cantor, on a $\bigcap_{n\geq 0} B_n \neq \emptyset$. Or $B_0 \subset V$ et, pour tout $n \geq 0$, on a $B_n \subset U_n$, donc $\bigcap_{n\geq 0} B_n \subset V \cap \bigcap_{n\geq 0} U_n$. Par conséquent, on a $V \cap \bigcap_{n\geq 0} U_n \neq \emptyset$. Donc $\bigcap_{n\geq 0} U_n$ est dense dans X. ■

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [0,\ 1]$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers un point $f(x) \in \mathbb{R}$. Il existe des exemples qui montrent que f n'est pas toujours continue sur $[0,\ 1]$. La question maintenant est de savoir s'il existe une telle suite $(f_n)_{n\geq 0}$ telle que f soit discontinue partout sur $[0,\ 1]$ ou bien de savoir s'il y a un moyen pour contrôler la discontinuité de f. Le théorème suivant répond à cette question.

Théorème 2.8.2. *Soient X un espace de Baire, (Y, d) un espace métrique, f une application de X dans Y et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications continues de X dans Y telle que pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$ dans Y. Soit C l'ensemble des points de X en lesquels f est continue. Alors C est dense dans X.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 2 du supplément.

2.9 Écarts

Pour tout $t \in [0,\ +\infty]$, on convient que $t \leq +\infty$ et que $t + (+\infty) = (+\infty) + t = +\infty$.

Définition 2.9.1. Un **écart** sur un ensemble X est une application :

$$\begin{array}{rccc} e: & X \times X & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ & (x, y) & \longmapsto & e(x, y) \end{array}$$

possédant, pour tous $x, y, z \in X$, les propriétés suivantes :

1. $e(x, x) = 0$;
2. $e(x, y) = e(y, x)$;
3. $e(x, z) \leq e(x, y) + e(y, z)$.

La seule différence avec la notion de distance est donc que e peut prendre la valeur $+\infty$, et que l'on peut avoir $e(x, y) = 0$ alors que x et y sont deux points distincts de X.

Définition 2.9.2. Soit e un écart sur un ensemble X. On dit que l'écart e est **fini** si pour tout $x, y \in X$, on a $e(x, y) \neq +\infty$. On dit aussi que l'écart e est **séparé** si pour tout $x, y \in X$, $e(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$.

Exemple 2.9.1. Soit X un ensemble.

1. Une distance sur X est un écart fini et séparé.
2. Soient (Y, d) un espace métrique et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Si pour tout $x, y \in X$, on pose $e(x, y) = d(f(x), f(y))$, alors e est un écart fini sur X et e est séparé si f est injective.
3. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ est une application, alors $e_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$ est un écart fini sur X.

Proposition 2.9.1. *Soit X un ensemble.*

1. *Si $(e_i)_{i\in I}$ est une famille d'écarts sur X et $e = \sup\limits_{i\in I} e_i$, alors e est un écart sur X.*
2. *Soit d une distance sur X. Alors il existe une famille A d'applications de X dans $\mathbb{R}$ telle que $d = \sup\limits_{f\in A} e_f$.*

Démonstration. 1. Ceci est clair.
2. Soit $A = \big\{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ |f(u) - f(v)| \leq d(u, v) \ \text{ pour tout } \ u, v \in X\big\}$. Alors on a $\sup\limits_{f\in A} e_f \leq d$. Réciproquement, pour tout $x \in X$, soit $f_x(u) = d(u, x)$, alors $f_x \in A$ et on a $e_{f_x}(x, y) = d(x, y)$. Par conséquent, on a $\big(\sup\limits_{f\in A} e_f\big)(x, y) \geq e_{f_x}(x, y) = d(x, y)$, d'où on a $\sup\limits_{f\in A} e_f = d$. ■

Soit e un écart sur un ensemble X ; pour tous $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle encore boule ouverte de centre x et de rayon r l'ensemble $B(x, r) = \{y \in X \ ; \ e(x, y) < r\}$. Comme dans les cas des espaces métriques, on peut associer une topologie à n'importe quel écart.

Proposition 2.9.2. *Soit e un écart sur un ensemble X. Il existe une unique topologie sur X pour laquelle les voisinages de $x \in X$ sont les ensembles contenant une boule ouverte centrée en x. Les ouverts de cette topologie sont les réunions des boules ouvertes.*

Exemple 2.9.2. Soit X un ensemble.

1. Pour tout $x, y \in X$, on pose $e(x, y) = 0$, alors e est un écart sur X, et la topologie associée à cet écart est la topologie grossière sur X.

2. Pour tout $x, y \in X$, on pose $e(x, y) = 0$ si $x = y$ et $e(x, y) = +\infty$ si $x \neq y$, alors e est un écart sur X, et la topologie associée à cet écart est la topologie discrète sur X.

Proposition 2.9.3. *Soit e un écart sur un ensemble X.*

1. *La topologie associée à l'écart e est séparée si et seulement si l'écart e est séparé.*

2. *Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans X converge vers un point $x \in X$ si et seulement si $e(x_n, x)$ tend vers 0 dans l'espace topologique $\overline{\mathbb{R}}$.*

Proposition 2.9.4. *Soit e un écart séparé sur un ensemble X. Pour tout $x, y \in X$, on pose $d(x, y) = \min\{e(x, y), 1\}$. Alors on a :*

1. *L'application d est une distance sur X.*

2. *La topologie associée à la distance d coïncide avec la topologie associée à l'écart e.*

Exemple 2.9.3. Soient X un ensemble et (Y, d') un espace métrique. On note Y^X l'ensemble des applications définies sur X et à valeurs dans Y. Pour $f, g \in Y^X$, on pose $e(f, g) = \sup\limits_{x\in X} d'(f(x), g(x)) \in [0, +\infty]$. Alors e est un écart séparé sur l'ensemble Y^X et $d = \min(e, 1)$ est une distance sur Y^X. Notons que la restriction de la distance d à l'ensemble $B(X, Y)$ des applications bornées définies sur X et à valeurs dans Y est uniformément équivalente à la distance de la convergence uniforme d_∞ définie sur $B(X, Y)$ par : pour $f, g \in B(X, Y)$, on a $d_\infty(f, g) = \sup\limits_{x\in X} d'(f(x), g(x))$. Par conséquent, on appelle aussi d la **distance de la convergence uniforme** sur Y^X.

Proposition 2.9.5. *Soit e un écart sur un ensemble X. Considérons la relation $\mathcal{R}$ sur X telle que $x \,\mathcal{R}\, y \iff e(x, y) = 0$. Alors on a :*

1. *La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur X.*

2. *Il existe un écart séparé $\overline{e}$ sur l'ensemble quotient $X/\mathcal{R}$ tel que pour tout $x, y \in X$, on ait $\overline{e}(q(x), q(y)) = e(x, y)$, où $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ est l'application quotient.*

2.10 Exercices

Exercice 2.1. Soient (X, d) un espace métrique, $x \in X$ et $r > 0$. Par définition de la topologie de X, la boule ouverte $B(x, r)$ est un ouvert de X car pour tout $y \in B(x, r)$, il existe $\rho > 0$, $\rho = r - d(x, y)$, tel que $B(y, \rho) \subset B(x, r)$.

1. Vérifier que que le boule fermée $B'(x, r)$ est un fermé de X.

2. Montrer les inclusions $B(x, r) \subset \overset{\circ}{\overbrace{B'(x, r)}}$ et $\overline{B(x, r)} \subset B'(x, r)$.

3. Au moyen de contre–exemples, montrer que les inclusions précédentes peuvent être strictes.

Solution. 1. Pour montrer que $B'(x,r)$ est fermé dans X, on montre que son complémentaire $X \setminus B'(x,r)$ est ouvert dans X. Soit $y \in X \setminus B'(x,r)$, *i.e.* $d(x,y) > r$. Soit $\rho = d(x,y) - r$, alors $\rho > 0$. Montrons que l'on a $B(y,\rho) \subset X \setminus B'(x,r)$. Soit $z \in B(y,\rho)$, comme on a $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, alors $r < d(x,y) - d(z,y) \leq d(x,z)$, d'où $z \in X \setminus B'(x,r)$. Donc on a $B(y,\rho) \subset X \setminus B'(x,r)$. Par conséquent, $X \setminus B'(x,r)$ est un ouvert de X.
Une autre méthode pour montrer que $B'(x,r)$ est fermé dans X. On considère l'application de X dans $\mathbb{R}$ définie par $f(y) = d(x,y)$. D'après la proposition 2.1.1, f est continue. Or on a $B'(x,r) = f^{-1}([0,\, r])$, donc $B'(x,r)$ est fermé dans X.
2. On a $B(x,r) \subset B'(x,r)$ et $B(x,r)$ est ouvert dans X et $B'(x,r)$ est fermé dans X, alors on a, voir proposition 1.2.1, $B(x,r) \subset \overbrace{B'(x,r)}^{\circ}$ et $\overline{B(x,r)} \subset B'(x,r)$.
3. Si d est la distance discrète sur X, on a $B(x,1) = \{x\}$ et $B'(x,1) = X$, d'où $\overbrace{B'(x,1)}^{\circ} = X$ et $\overline{B(x,1)} = \{x\}$.

Exercice 2.2. Soient $(X,\, d)$ un espace métrique et $a \in X$. Pour tous x et y dans X, on pose :

$$d_a(x,y) = \begin{cases} d(a,x) + d(a,y) & \text{si} \quad x \neq y\,, \\ 0 & \text{si} \quad x = y\,. \end{cases}$$

1. Montrer que d_a est une distance sur X.
2. Montrer que pour tout $r > 0$, on a $B_{d_a}(a,r) = B_d(a,r)$. Autrement dit, la boule ouverte de centre a et de rayon r pour la distance d_a est égale à la boule ouverte de centre a et de rayon r pour la distance d.
3. Soit $x \in X$ tel que $x \neq a$. Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que $B_{d_a}(x,r) = \{x\}$.
4. Soit A une partie de X.
   (i) Montrer que si $a \notin A$, alors A est un ouvert de X pour la distance d_a.
   (ii) On suppose $a \in A$. Montrer que A est un ouvert de X pour d_a si et seulement si A est un voisinage de a pour la distance d.
5. Montrer que si d est la distance discrète sur X, alors d et d_a sont équivalentes.
6. À l'aide d'un contre-exemple, montrer qu'en général, d et d_a ne sont même pas topologiquement équivalentes.

Solution. 1. Il est clair que pour tous $x, y \in X$, on a $d_a(x,y) \geq 0$, $d_a(x,y) = d_a(y,x)$ et que $d_a(x,y) = 0 \iff x = y$. Vérifions l'inégalité triangulaire, *i.e.* pour tous $x, y, z \in X$, on a $d_a(x,z) \leq d_a(x,y) + d_a(y,z)$. Si $y = x$ ou z, l'inégalité triangulaire est triviale. On suppose $y \notin \{x,z\}$ et $x \neq z$. Alors on a :

$$d_a(x,z) = d(a,x) + d(a,z) \leq d(a,x) + d(a,y) + d(a,y) + d(a,z) = d_a(x,y) + d_a(y,z)\,.$$

Par conséquent, d_a est bien une distance sur X.
2. Pour tout $x \in X$, on a $d_a(a,x) = d(a,a) + d(a,x) = d(a,x)$, d'où $B_{d_a}(a,r) = B_d(a,r)$.
3. Soit $x \in X$ tel que $x \neq a$. Alors $r = d(a,x) > 0$ et on a $B_{d_a}(x,r) = \{x\}$ car pour tout $y \neq x$, on a $d_a(x,y) = d(a,x) + d(a,y) \geq r$.
4. Soit A une partie de X.
(i) Si $a \notin A$, d'après 3, pour tout $x \in A$, $\{x\}$ est un ouvert de X pour d_a. Or on a $A = \underset{x\in A}{\cup}\{x\}$, donc A est un ouvert de X pour d_a.
(ii) On suppose $a \in A$. Si A est un ouvert de X pour d_a, alors il existe $r > 0$ tel que $B_{d_a}(a,r) \subset A$, d'où on a $B_d(a,r) \subset A$. Par conséquent A est un voisinage de a pour d. Réciproquement, supposons que A est un voisinage de a pour d, alors il existe $r > 0$ tel que $B_d(a,r) \subset A$, d'où on a $B_{d_a}(a,r) \subset A$. Or $A \setminus \{a\}$ est un ouvert de X pour d_a et on a $A = B_{d_a}(a,r) \cup \big(A \setminus \{a\}\big)$, on en déduit que A est un ouvert de X pour d_a.
5. Si d est la distance discrète sur X, alors on a $d \leq d_a \leq 2d$, donc d et d_a sont équivalentes.
6. Si $X = \mathbb{R}$ et d est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$, alors d et d_a ne sont pas topologiquement équivalentes car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$ pour d.

Exercice 2.3. Soient $(X,\, d)$, $(Y,\, d')$ des espaces métriques, $a \in X$ et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On définit la distance d_a sur X comme dans l'exercice précédent. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) L'application f est continue de $(X,\, d_a)$ dans $(Y,\, d')$.

(ii) L'application f est continue en a de $(X,\, d_a)$ dans $(Y,\, d')$.

(iii) L'application f est continue en a de $(X,\, d)$ dans $(Y,\, d')$.

Solution. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est évidente. L'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) résulte de la proposition 2.2.3 et du fait que pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans X, on a $d_a(a,x_n) = d(a,x_n)$ pour tout $n \geq 0$.
Montrons l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i). Soit V un ouvert de Y. Si $a \notin f^{-1}(V)$, alors $f^{-1}(V)$ est un ouvert de $(X,\, d_a)$. Supposons que $a \in f^{-1}(V)$, comme f est continue en a de $(X,\, d)$ dans $(Y,\, d')$, alors $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a pour la distance d. D'après l'exercice précédent, $f^{-1}(V)$ est alors ouvert dans $(X,\, d_a)$. Par conséquent, f est continue de $(X,\, d_a)$ dans $(Y,\, d')$.

Exercice 2.4. Soient $(X,\, d)$ et $(Y,\, d')$ deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Pour tout $a, b \in X$, on pose $d_f(a,b) = d(a,b) + d'(f(a), f(b))$.

1. Montrer que d_f est une distance sur X et que f est une application lipschitzienne de $(X,\, d_f)$ dans $(Y,\, d')$.

2. Montrer que d_f est topologiquement équivalente (*resp.* uniformément équivalente, *resp.* équivalente) à d si et seulement si f est continue (*resp.* uniformément continue, *resp.* lipschitzienne) de $(X,\, d)$ dans $(Y,\, d')$.

Solution. 1. Il est clair que d_f est une distance sur X. Pour tout $a, b \in X$, on a $d'(f(a), f(b)) \leq d_f(a,b)$. Donc f est lipschitzienne de $(X,\, d_f)$ dans $(Y,\, d')$.
2. Pour tous $a, b \in X$, on a $d(a,b) \leq d_f(a,b)$, donc l'application identique de $(X,\, d_f)$

dans $(X,\, d)$ est lipschitzienne. Par conséquent, d_f est topologiquement équivalente (*resp.* uniformément équivalente, *resp.* équivalente) à d si et seulement si l'application identique de $(X,\, d)$ dans $(X,\, d_f)$ est continue (*resp.* uniformément équivalente, *resp.* lipschitzienne). Or il est clair que l'application identique de $(X,\, d)$ dans $(X,\, d_f)$ est continue (*resp.* uniformément équivalente, *resp.* lipschitzienne) si et seulement si l'application f est continue (*resp.* uniformément continue, *resp.* lipschitzienne) de $(X,\, d)$ dans $(Y,\, d')$. D'où le résultat.

Exercice 2.5. Soient $(E,\, d)$ un espace métrique, $U \subset E$ un ouvert distinct de E et $F = E \setminus U$. Pour tous $x, y \in U$, on pose $d_U(x,y) = d(x,y) + \left|\frac{1}{d(x,F)} - \frac{1}{d(y,F)}\right|$.

1. Montrer que d_U est une distance sur U, topologiquement équivalente à la restriction de d à U.
2. Montrer que si $(E,\, d)$ est complet, alors $(U,\, d_U)$ est complet.
3. En déduire que tout ouvert d'un espace métrique complet est homéomorphe à un espace métrique complet.

Solution. 1. Il est clair que pour tous $x, y \in U$, on a $d_U(x,y) \geq 0$, $d_U(x,y) = d_U(y,x)$ et que $d_U(x,y) = 0 \iff x = y$. Il reste à montrer l'inégalité triangulaire. Soit $x, y, z \in U$, on a :

$$\begin{aligned} d_U(x,z) &= d(x,z) + \left|\frac{1}{d(x,F)} - \frac{1}{d(z,F)}\right| \\ &= d(x,z) + \left|\frac{1}{d(x,F)} - \frac{1}{d(y,F)} + \frac{1}{d(y,F)} - \frac{1}{d(z,F)}\right| \\ &\leq d(x,y) + d(y,z) + \left|\frac{1}{d(x,F)} - \frac{1}{d(y,F)}\right| + \left|\frac{1}{d(y,F)} - \frac{1}{d(z,F)}\right| \\ &= d_U(x,y) + d_U(y,z)\,. \end{aligned}$$

Donc d_U est bien une distance sur U.
Pour tous $x, y \in U$, on a $d(x,y) \leq d_U(x,y)$, donc l'application identique de $(U,\, d_U)$ dans $(U,\, d)$ est continue. Réciproquement, soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans U qui converge vers $x \in U$ pour la distance d, *i.e.* $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$. Puisque l'application $z \longmapsto \dfrac{1}{d(x,F)}$ est continue de $(U,\, d)$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_U(x_n, x) = 0$. Donc l'application identique de $(U,\, d)$ dans $(U,\, d_U)$ est continue. Par conséquent, d_U est topologiquement équivalente à la restriction de d à U.
2. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(U,\, d_U)$. Comme on a $d(x,y) \leq d_U(x,y)$ pour tous $x, y \in U$, on en déduit que $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $(X,\, d)$. Donc il existe $x \in X$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$. Montrons que $x \in U$. Comme $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy pour d_U, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\left|\dfrac{1}{d(x_n,F)} - \dfrac{1}{d(x_N,F)}\right| \leq d_U(x_n, x_N) < \varepsilon$. D'où pour tout $n \geq N$, on a $\left|\dfrac{1}{d(x_n,F)}\right| \leq \varepsilon + \dfrac{1}{d(x_N,F)}$. On a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, F) = d(x,F)$. Si

$x \in F$, alors $d(x,F) = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{d(x_n,F)} = +\infty$, ce qui est impossible car la suite $\displaystyle\left(\frac{1}{d(x_n,F)}\right)_{n\geq 0}$ est bornée. Par conséquent, on a $x \in U$. Pour tout $n \geq N$, on a : $d_U(x_n,x) = d(x_n,x) + \displaystyle\left|\frac{1}{d(x_n,F)} - \frac{1}{d(x,F)}\right|$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} d_U(x_n,x) = 0$. Autrement dit, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x pour d_U, donc $(U,\, d_U)$ est complet.
3. D'après ce qui précède, $(U,\, d)$ est homéomorphe à $(U,\, d_U)$ qui est complet.

Exercice 2.6. Soit $(X,\, d)$ un espace métrique. On munit l'espace produit $X \times X$ de la distance D_∞, *i.e.* pour tous (x,y), $(z,t) \in X \times X$, on a $D_\infty\big((x,y),(z,t)\big) = \max\big\{d(x,z), d(y,t)\big\}$. Montrer que l'application $(x,y) \longmapsto d(x,y)$ est lipschitzienne de $(X \times X,\, D_\infty)$ dans $\mathbb{R}$.
Solution. On a :

$$\begin{aligned}
|d(x,y) - d(z,t)| &= |d(x,y) - d(y,z) + d(y,z) - d(z,t)| \\
&\leq |d(x,y) - d(y,z)| + |d(y,z) - d(z,t)| \\
&\leq d(x,z) + d(y,t) \;\leq\; 2\, D_\infty\big((x,y),(z,t)\big)\,.
\end{aligned}$$

Exercice 2.7. (Isométries de $\mathbb{R}$) †. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que f est une fonction isométrique si et seulement s'il existe une constante $a \in \mathbb{R}$ telle que f soit l'une ou l'autre des fonctions $x \longmapsto a + x$ ou $x \longmapsto a - x$.
Solution. Si $f(x) = a + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ou $f(x) = a - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors on a $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, donc f est une fonction isométrique.
Réciproquement, supposons que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|f(x) - f(y)| = |x - y|$. Soit $a = f(0)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $g(x) = f(x) - a$. Alors g est une fonction continue injective et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|g(x)| = |x|$. S'il existe $x > 0$ et $y > 0$ tels que $g(x)$ et $g(y)$ soient de signes différents, alors $0 \in g([x,\, y])$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0 = g(0)$, ce qui est impossible car g est injective. Donc on a deux cas possibles :
Premier cas : pour tout $x > 0$, on a $g(x) > 0$. Alors pour tout $x > 0$, on a $g(x) = x$. Soit $x < 0$, si $g(x) > 0$, alors on a $g(x) = -x = g(-x)$, ce qui est impossible car g est injective. Donc pour tout $x < 0$, on a $g(x) < 0$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = x$, *i.e.* $f(x) = a + x$.
Deuxième cas : pour tout $x > 0$, on a $g(x) < 0$. Alors pour tout $x > 0$, on a $g(x) = -x$. Soit $x < 0$, si $g(x) < 0$, alors on a $g(x) = x = g(-x)$, ce qui est impossible car g est injective. Donc pour tout $x < 0$, on a $g(x) > 0$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = -x$, *i.e.* $f(x) = a - x$.

Exercice 2.8. Déterminer les rotations de centre $O = (0,0)$ et d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$ qui sont des isométries pour chacune des distances d_1, d_2 et d_∞ sur $\mathbb{R}^2$.
Solution. Une rotation f de centre O et d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$ est de la forme :

$$\begin{array}{rccc} f\ : & \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & e^{i\theta} z \end{array}$$

† On généralisera cet exercice aux isométries sur les « espaces normés réels », voir exercice 6.78 du supplément.

Autrement dit, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$. On a $d_1\big(f(x, y), f(a, b)\big) = |(x-a)\cos(\theta) - (y-b)\sin(\theta)| + |(x-a)\sin(\theta) + (y-b)\cos(\theta)|$, donc f est une isométrie pour la distance d_1 si et seulement si pour tous $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$|(x-a)\cos(\theta) - (y-b)\sin(\theta)| + |(x-a)\sin(\theta) + (y-b)\cos(\theta)| = |x-a| + |y-b|\,. \quad (2.1)$$

Soit $A = (1, 0)$, alors on a $d_1(O, A) = 1$ et $d_1(f(O), f(A)) = |\cos(\theta)| + |\sin(\theta)|$. Donc, si f est une isométrie pour la distance d_1, alors $|\cos(\theta)| + |\sin(\theta)| = 1$, d'où $2\sin(\theta)\cos(\theta) = 0$, donc $\theta = \dfrac{k\pi}{2}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, supposons que $\theta = \dfrac{k\pi}{2}$, avec $k \in \mathbb{Z}$, alors on distingue deux cas :
Premier cas : $k = 2n$, avec $n \in \mathbb{Z}$, d'où on a $|\cos(\theta)| = 1$ et $\sin(\theta) = 0$.
Deuxième cas : $k = 2n + 1$, avec $n \in \mathbb{Z}$, d'où on a $|\sin(\theta)| = 1$ et $\cos(\theta) = 0$.
On déduit de l'équation (2.1) que f est une isométrie pour la distance d_1.
Conclusion : f est une isométrie pour la distance d_1 si et seulement si $\theta = \dfrac{k\pi}{2}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
De même, f est une isométrie pour la distance d_∞ si et seulement si $\theta = \dfrac{k\pi}{2}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Regardons le cas pour d_2. Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$d_2(f(z), f(z')) = |f(z) - f(z')| = |e^{i\theta}z - e^{i\theta}z'| = |z - z'| = d_2(z, z')\,.$$

Donc, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, f est une isométrie pour la distance d_2.

Exercice 2.9. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(ii) Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(x) = cx$.

Solution. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) est triviale. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Vérifions d'abord par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(nx) = nf(x)$. On $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, d'où $f(0) = 0$. Supposons que l'on a $f(nx) = nf(x)$. Alors on a :

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)\,.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(nx) = nf(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$, d'où $f(-x) = -f(x)$. Comme on a $f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(nx) = nf(x)$. Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, alors on a $f\big(\frac{p}{q}x\big) = pf\big(\frac{1}{q}x\big)$ et $f(x) = f\big(q\big(\frac{1}{q}x\big)\big) = qf\big(\frac{1}{q}x\big)$, d'où $f\big(\frac{1}{q}x\big) = \frac{1}{q}f(x)$. Par conséquent, pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a $f\big(\frac{p}{q}x\big) = \frac{p}{q}f(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors il existe une suite $(q_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{Q}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = x$. Comme f est continue, alors on a $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(q_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n f(1) = xf(1)$. Soit $c = f(1)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = cx$.

Exercice 2.10. Soit φ un automorphisme du corps $\mathbb{C}$, *i.e.* φ est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ respectant l'addition, la multiplication et on a $\varphi(1) = 1$. Montrer que si φ est continue, alors φ laisse invariant tout réel. Déterminer tous les automorphismes continues du corps $\mathbb{C}$.

Solution. Puisque l'on a $\varphi(1) = 1$ et que φ respecte l'addition, alors en faisant le même raisonnement que dans l'exercice précédent, on obtient $\varphi(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Comme φ est continue et $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors on a $\varphi(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où on a $\varphi(x + iy) = \varphi(x) + \varphi(i)\varphi(y) = x + \varphi(i)y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. On a aussi $i^2 = -1$, donc $\varphi(i)^2 = \varphi(-1) = -1$, d'où on a $\varphi(i) = \pm\, i$. Donc il y a deux automorphismes continues de $\mathbb{C}$; à savoir $\varphi(z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $\varphi(z) = \bar{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 2.11. Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $\big((x_n, y_n)\big)_{n\geq 0}$ une suite de $(X \times Y, D_\infty)$.

1. Montrer que si (a, b) est valeur d'adhérence de la suite $\big((x_n, y_n)\big)_{n\geq 0}$, alors a est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ et b est valeur d'adhérence de la suite $(y_n)_{n\geq 0}$. Montrer que la réciproque est en général fausse.

2. Montrer que si la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers a et si b est valeur d'adhérence de la suite $(y_n)_{n\geq 0}$, alors (a, b) est valeur d'adhérence de la suite $\big((x_n, y_n)\big)_{n\geq 0}$.

Solution. 1. Si (a, b) est valeur d'adhérence de la suite $\big((x_n, y_n)\big)_{n\geq 0}$, alors il existe une sous-suite $\big((x_{n_k}, y_{n_k})\big)_{k\geq 0}$ telle que $(a, b) = \lim\limits_{k\to+\infty}(x_{n_k}, y_{n_k})$, d'où on a $a = \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}$ et $b = \lim\limits_{k\to+\infty} y_{n_k}$. Par conséquent, a est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ et b est valeur d'adhérence de la suite $(y_n)_{n\geq 0}$.
Si $X = Y = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle et si $x_{2n} = \frac{1}{n+1}$, $x_{2n+1} = n$, $y_{2n} = n$, $y_{2n+1} = \frac{1}{n+1}$, alors 0 est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ et 0 est valeur d'adhérence de la suite $(y_n)_{n\geq 0}$, mais $(0, 0)$ n'est pas valeur d'adhérence de la suite $\big((x_n, y_n)\big)_{n\geq 0}$.
2. Soit $(y_{n_k})_{k\geq 0}$ une sous-suite de $(y_n)_{n\geq 0}$ telle que $b = \lim\limits_{k\to+\infty} y_{n_k}$. On a $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, d'où $a = \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}$. Par conséquent, on a $(a, b) = \lim\limits_{k\to+\infty}(x_{n_k}, y_{n_k})$, donc (a, b) est valeur d'adhérence de la suite $\big((x_n, y_n)\big)_{n\geq 0}$.

Exercice 2.12. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans un espace métrique (X, d). Pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit $a_p = \frac{p(p+1)}{2}$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $y_n = x_{n-a_p}$ si $a_p \leq n < a_{p+1}$. Autrement dit, la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est définie ainsi :

n	$0 = \mathbf{a_0}$	$1 = \mathbf{a_1}$	2	$3 = \mathbf{a_2}$	4	5	$6 = \mathbf{a_3}$	7	8	9	$10 = \mathbf{a_4}$	$\cdots$
y_n	x_0	x_0	x_1	x_0	x_1	x_2	x_0	x_1	x_2	x_3	x_0	$\cdots$

Donc chaque terme de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est répété une infinité de fois dans la suite $(y_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, x_N est une valeur d'adhérence de la suite $(y_n)_{n\geq 0}$.

2. En déduire que si l'ensemble $\{x_n\ ;\ n \geq 0\}$ est fermé dans (X, d), alors $\{x_n\ ;\ n \geq 0\}$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(y_n)_{n\geq 0}$.

3. On suppose $X = \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 0$, on pose $x_n = n$ et $y_n = n - a_p$ si $a_p \leq n < a_{p+1}$. En déduire que $\mathbb{N}$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(y_n)_{n\geq 0}$.

Solution. 1. Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \geq N$, on a $y_{a_k+N} = x_N$. En effet, comme on a $a_k \leq a_k+N \leq a_k+k < a_k+k+1 = a_{k+1}$, alors $y_{a_k+N} = x_{a_k+N-a_k} = x_N$. Or $(y_{a_k+N})_{k\geq 0}$ est une sous-suite de la suite $(y_n)_{n\geq 0}$, donc x_N est bien une valeur d'adhérence de la suite $(y_n)_{n\geq 0}$.
2. Comme on a $\{y_n \ ; \ n \geq 0\} = \{x_n \ ; \ n \geq 0\}$, si l'ensemble $\{x_n \ ; \ n \geq 0\}$ est fermé dans (X, d), alors toute valeur d'adhérence de la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est dans l'ensemble $\{x_n \ ; \ n \geq 0\}$. On déduit de 1 que $\{x_n \ ; \ n \geq 0\}$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(y_n)_{n\geq 0}$.
3. Puisque $\mathbb{N}$ est fermé dans $\mathbb{R}$, ceci résulte de 2.

Exercice 2.13. Donner des exemples de suites de réels ayant 0, ou 1, ou p valeurs d'adhérence.
Solution. Si $x_n = n$, alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ n'admet aucune valeur d'adhérence. Toute suite convergente admet une unique valeur d'adhérence. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on fait la division euclidienne de n par p, on obtient un unique couple $(q_n, r_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $n = q_n p + r_n$, avec $0 \leq r_n < p$. On pose $x_n = r_n$, alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ admet seulement p valeurs d'adhérence, à savoir, $0, 1, 2, \dots, p-1$.

Exercice 2.14. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$.
Solution. Soit $y_n = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$. Comme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, alors les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ ont les même valeurs d'adhérence. Déterminons les valeurs d'adhérence de la suite $(y_n)_{n\geq 0}$. On fait la division euclidienne de n par 6, on obtient $n = q_n 6 + r_n$, avec $(q_n, r_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $0 \leq r_n < 6$. Alors on a $\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = \sin\left(q_n\pi + \frac{r_n\pi}{6}\right) = (-1)^{q_n} \sin\left(\frac{r_n\pi}{6}\right)$. Comme on a $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, alors on a $\left\{y_n \ ; \ n \geq 0\right\} = \left\{0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1, 1\right\} = V$. Or V est un ensemble fermé de $\mathbb{R}$, donc toute valeur d'adhérence de la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est dans V. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $y_{2k} = 0, y_{2k+1} = \frac{1}{2}$, $y_{2k+2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_{2k+3} = 1$, $y_{2(k+1)+1} = -\frac{1}{2}$, $y_{2(k+1)+2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_{2(k+1)+3} = -1$, on en déduit que V est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(y_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 2.15. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$ est un intervalle, peut être vide, fermé de $\mathbb{R}$.
Solution. Soit I l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$. D'après la proposition 1.7.1, I est un fermé de $\mathbb{R}$. Supposons que $I \neq \emptyset$. Si I est réduit à un seul élément, alors I est un intervalle. Supposons que $\mathrm{card}(I) \geq 2$. Soient $\ell_1, \ell_2 \in I$ tels que $\ell_1 < \ell_2$. Soit $\ell \in]\ell_1, \ell_2[$. Montrons qu'alors ℓ est aussi une valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$. Si $\ell \notin I$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, on ait $|x_n - \ell| > \varepsilon$. On peut aussi supposer $\ell_1 < \ell - \varepsilon < \ell + \varepsilon < \ell_2$. Notons que $|x_n - \ell| > \varepsilon$ si et seulement si $x_n < \ell - \varepsilon$ ou $x_n > \ell + \varepsilon$. Comme on a $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} - x_n = 0$, alors il existe $N' \geq N$ tel que pour tout $n \geq N'$, on ait $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. On distingue deux cas :
Premier cas : $x_{N'} < \ell - \varepsilon$, alors pour tout $n \geq N'$, on a $x_n < \ell - \varepsilon$. Par conséquent, $\ell_2 \notin I$, ce qui est impossible.
Deuxième cas : $x_{N'} > \ell + \varepsilon$, alors pour tout $n \geq N'$, on a $x_n > \ell + \varepsilon$. Par conséquent, $\ell_1 \notin I$, ce qui est impossible.

Donc on a bien $\ell \in I$. Par conséquent, I est bien un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.
Notons que si $x_n = \ln(n)$, alors on a $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} - x_n = 0$, mais la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ n'admet aucune valeur d'adhérence.

Exercice 2.16. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si A est majorée, alors $\sup(A) \in \overline{A}$.
2. Montrer que si A est minorée, alors $\inf(A) \in \overline{A}$.

Solution. 1. Puisque A est majorée, alors $\sup(A)$ existe dans $\mathbb{R}$, et pour tout $n \geq 1$, il existe $a_n \in A$ tel que $\sup(A) - \frac{1}{n} < a_n \leq \sup(A)$. D'où on a $\sup(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Par conséquent, on a $\sup(A) \in \overline{A}$.
2. De même, puisque A est minorée, alors $\inf(A)$ existe dans $\mathbb{R}$, et pour tout $n \geq 1$, il existe $b_n \in A$ tel que $\inf(A) \leq b_n < \inf(A) - \frac{1}{n}$. D'où on a $\inf(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. Par conséquent, on a $\inf(A) \in \overline{A}$.

Exercice 2.17. Soient $(X,\, d)$ un espace métrique et $(x_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double dans X. On suppose que pour tout $m \geq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{m,n} = x_m \in X$ et que $\lim\limits_{m\to+\infty} x_m = x \in X$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(p_m)_{m\geq 0}$ de $\mathbb{N}$ telle que $\lim\limits_{m\to+\infty} x_{m,p_m} = x$.
Solution. Puisque l'on a $\lim\limits_{m\to+\infty} x_m = x$, alors il existe une sous-suite $(m_k)_{k\geq 0}$ de $\mathbb{N}$ telle que pour tout $k \geq 0$ et pour tout $m \geq m_k$, on ait $d(x_m, x) < \frac{1}{2^{k+1}}$. Comme pour tout $m \geq 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{m,n} = x_m$, alors il existe une sous-suite $(n_k)_{k\geq 0}$ de $\mathbb{N}$ telle que $n_0 \geq m_0$, $n_k + m_{k+1} - m_k < n_{k+1}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $m_k \leq m \leq m_{k+1}$ et pour tout $n \geq n_k$, on ait $d(x_{m,n}, x_m) < \frac{1}{2^{k+1}}$, pour tout $k \geq 0$. On pose $p_0 = 0, \ldots, p_{m_0-1} = m_0 - 1$ et pour tout $k \geq 0$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $m_k \leq m < m_{k+1}$, on pose $p_m = n_k + m - m_k$. Alors $(p_m)_{m\geq 0}$ est une sous-suite de $\mathbb{N}$ et pour tout $k \geq 0$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $m_k \leq m < m_{k+1}$, on a $d(x_{m,n}, x) < \frac{1}{2^k}$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, on ait $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Alors pour tout $m \geq m_{k_0}$, il existe $k \geq k_0$ tel que $m_k \leq m < m_{k+1}$, d'où on a $d(x_{m,n}, x) < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{m\to+\infty} x_{m,p_m} = x$.

Exercice 2.18. Distance ultramétrique. Soient X un ensemble et $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application satisfaisant, pour tous $x, y, z \in X$, les conditions suivantes :

(i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$;

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$;

(iii) $d(x,z) \leq \max\big(d(x,y), d(y,z)\big)$ (**inégalité ultramétrique**).

1. Vérifier que d est une distance sur X.
   Un ensemble X muni d'une distance vérifiant les conditions ci-dessus est appelé un **espace ultramétrique** ; on dit aussi que d est une **distance ultramétrique** sur X.
2. Montrer que si $d(x,y) \neq d(y,z)$, alors on a $d(x,z) = \max\big(d(x,y), d(y,z)\big)$. En particulier, dans un espace ultramétrique tout triangle est isocèle.

3. Soient $x \in X$ et $r > 0$. Montrer que pour tout $y \in B(x,r)$, on a $B(y,r) = B(x,r)$ et que pour tout $z \in B'(x,r)$, on a $B'(z,r) = B'(x,r)$. Autrement dit, dans un espace ultramétrique, tout point d'une boule est le centre de cette boule.

4. Soient $x \in X$ et $r > 0$. Montrer que les ensembles $B(x,r)$ et $B'(x,r)$ sont à la fois ouverts et fermés dans $(X,\, d)$.

5. Montrer que si deux boules dans X ont un point commun, l'une d'elles est contenue dans l'autre.

6. Montrer que la distance de deux boules ouvertes distinctes, de rayon r, contenues dans une boule fermée de rayon r, est égale à r.

Solution. 1. Pour montrer que d est une distance, il reste à montrer que d vérifie l'inégalité triangulaire. Pour tous $x, y, z \in X$, on a $d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,z)$ et $d(y,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, d'où $\max\big(d(x,y), d(y,z)\big) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Par conséquent, on a $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Donc d est bien une distance sur X.
2. Supposons $d(x,y) < d(y,z)$, alors on a $d(x,z) \leq \max\big(d(x,y), d(y,z)\big) = d(y,z)$. On a aussi $d(y,z) \leq \max\big(d(x,y), d(x,z)\big)$. Si $d(x,y) \geq d(x,z)$, alors on a $d(y,z) \leq d(x,y)$, ce qui est impossible, donc on a $d(x,y) < d(x,z)$, d'où $d(y,z) \leq d(x,z)$. Par conséquent, on a $d(x,z) = d(y,z) = \max\big(d(x,y), d(y,z)\big)$. Si $d(y,z) < d(x,y)$, on fait le même raisonnement et on montre alors que l'on a $d(x,z) = d(x,y) = \max\big(d(x,y), d(y,z)\big)$.
3. Soient $y \in B(x,r)$ et $a \in B(y,r)$. On a $d(a,x) \leq \max\big(d(a,y), d(y,x)\big) < r$, d'où $a \in B(x,r)$. Par conséquent, on a $B(y,r) \subset B(x,r)$. Puisque l'on a $d(x,y) < r$, *i.e.* $x \in B(y,r)$, alors on a $B(x,r) \subset B(y,r)$, donc $B(y,r) = B(x,r)$. On fait exactement le même raisonnement pour montrer que pour tout $z \in B'(x,r)$, on a $B'(z,r) = B'(x,r)$.
4. Soient $x \in X$ et $r > 0$. On sait déjà que $B(x,r)$ est un ouvert de X et que $B'(x,r)$ est fermé dans X. Il reste à montrer que $B(x,r)$ est fermé dans X et que $B'(x,r)$ est ouvert dans X. Pour tout $z \in B'(x,r)$, on a $z \in B(z,r) \subset B'(z,r) = B'(x,r)$, donc $B'(x,r)$ est un ouvert de X. Montrons que $X \setminus B(x,r)$ est un ouvert de X. Soit $z \in X \setminus B(x,r)$, *i.e.* $d(x,z) \geq r$. Si $B(z,r) \cap B(x,r) \neq \emptyset$, alors il existe $a \in B(z,r) \cap B(x,r)$, d'où on a $B(z,r) = B(a,r) = B(x,r)$ ce qui implique $z \in B(x,r)$, *i.e.* $d(x,z) < r$, ce qui est impossible. Donc on a $B(z,r) \cap B(x,r) = \emptyset$, *i.e.* $B(z,r) \subset X \setminus B(x,r)$. Par conséquent, $X \setminus B(x,r)$ est un ouvert de X, donc $B(x,r)$ est un fermé de X.
5. Si on a $z \in B(x,r) \cap B(y,r)$, alors on a $B(x,r) = B(z,r) = B(y,r)$. Si on a $z \in B(x,r) \cap B'(y,r)$, alors on a $B(x,r) = B(z,r) \subset B'(z,r) = B'(y,r)$. Si on a $z \in B'(x,r) \cap B'(y,r)$, alors on a $B'(x,r) = B'(z,r) = B'(y,r)$.
6. Soient $x, y, z \in X$ tels que $B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset$, $B(x,r) \subset B'(z,r)$ et $B(y,r) \subset B'(z,r)$. Soient $a \in B(x,r)$ et $b \in B(y,r)$, alors on a $d(a,b) \leq \max\big(d(a,z), d(z,b)\big) \leq r$. Si $d(a,b) < r$, alors on a $B(x,r) = B(a,r) = B(b,r) = B(y,r)$, ce qui est impossible. Donc on a $d(a,b) \geq r$, d'où $d(a,b) = r$. Par conséquent, la distance de $B(x,r)$ à $B(y,r)$ est égale à r.

Exercice 2.19. Soient X un ensemble arbitraire et E l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de X. Pour deux éléments quelconques distincts $x = (x_n)_{n \geq 1}$ et $y = (y_n)_{n \geq 1}$ de E, soit $k(x,y)$ le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $x_n \neq y_n$. Soit :

$$d(x,y) = \frac{1}{k(x,y)} \text{ si } x \neq y \text{ et } d(x,x) = 0\,.$$

Montrer que d est une distance ultramétrique sur E et que l'espace métrique $(E,\, d)$ est complet.

Solution. Il est clair que pour tous $x, y \in E$, on a $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = d(y,x)$, et que $d(x,y) = 0 \iff x = y$. Il reste à montrer que d vérifie l'inégalité ultramétrique. Soient $x = (x_n)_{n\geq 1}, y = (y_n)_{n\geq 1}, z = (z_n)_{n\geq 1} \in X$. Il s'agit de montrer l'inégalité :

$$d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z))\,.$$

On peut supposer $x \neq y \neq z$. Alors l'inégalité est vérifiée si et seulement si $k(x,z) \geq \min\big(k(x,y),$
$k(y,z)\big)$. Soit $N = \min\big(k(x,y), k(y,z)\big) \in \mathbb{N}$, on peut supposer $N > 1$. Alors pour tout $1 \leq n < N$, on a $x_n = y_n = z_n$. Par conséquent, on a $k(x,z) \geq N$, d'où le résultat. Donc d est bien une distance ultramétrique sur E.

Montrons que $(E,\, d)$ est complet. Soit $(\xi_p)_{p\geq 1}$ une suite de Cauchy dans E, où $\xi_p = (x_{p,n})_{n\geq 1}$, avec $x_{p,n} \in X$. Soit $n \geq 1$, alors il existe $p_n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p, q \geq p_n$, on ait $d(\xi_p, \xi_q) < \frac{1}{n}$, d'où $n < k(\xi_p, \xi_q)$, si $\xi_p \neq \xi_q$. Par conséquent, on a $x_{p,n} = x_{q,n}$ pour tout $p, q \geq p_n$. Autrement dit, pour n fixé, la suite $(x_{p,n})_{p\geq 1}$ est stationnaire à partir d'un certain rang. Pour tout $n \geq 1$, soient $\alpha_n = \inf\big\{p \geq 1\ ;\ x_{p,n} = x_{q,n} \text{ pour tout } q \geq p\big\}$ et $x_n = x_{\alpha_n, n}$, alors $\xi = (x_n)_{n\geq 1} \in E$. Il s'agit maintenant de montrer que la suite $(\xi_p)_{p\geq 1}$ converge vers ξ dans $(E,\, d)$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \geq 1$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Il existe aussi $p_N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p, q \geq p_N$, on ait $d(\xi_p, \xi_q) < \frac{1}{N}$, d'où $N < k(\xi_p, \xi_q)$, si $\xi_p \neq \xi_q$. Par conséquent, pour tout $1 \leq n \leq N$ et pour tout $p, q \geq p_N$, on a $x_{p,n} = x_{q,n}$. Donc, pour tout $1 \leq n \leq N$ et pour tout $p \geq p_N$, on a $x_{p,n} = x_{\alpha_n,n} = x_n$, d'où pour tout $p \geq p_N$, on a $N < k(\xi_p, \xi)$, si $\xi_p \neq \xi$, donc $d(\xi_p, \xi) < \frac{1}{N} < \varepsilon$. Par conséquent, la suite $(\xi_p)_{p\geq 1}$ converge vers ξ dans $(E,\, d)$, donc l'espace métrique $(E,\, d)$ est complet.

Exercice 2.20. Soient $(X,\, d)$ un espace métrique et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans X.

1. Montrer si $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$. Donner un exemple montrant que la réciproque n'est pas toujours vraie.

2. Montrer que $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy si et seulement si pour toute sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ de $(x_n)_{n\geq 0}$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) = 0$.

3. Montrer que si la série $\sum\limits_{n\geq 0} d(x_n, x_{n+1})$ est convergente, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy.

4. Montrer que l'espace $(X,\, d)$ est complet si et seulement si toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de X vérifiant $d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est convergente.

Solution. 1. Comme $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p \geq N$ et $q \geq N$, on ait $d(x_p, x_q) < \varepsilon$. D'où pour tout $n \geq N$, on a $d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

Si $X = \mathbb{R}$ et si d est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ et si $x_n = \ln(n)$, alors on a $d(x_n, x_{n+1}) = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(1 + \frac{1}{n})$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$. Mais la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ n'est pas de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

2. Supposons que $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy. Si $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ est une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$, d'après la proposition 2.6.1, $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ est alors de Cauchy. On déduit de 1 que l'on a

$\lim\limits_{k\to+\infty} d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) = 0.$
Réciproquement, supposons que l'on a $\lim\limits_{k\to+\infty} d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) = 0$, pour toute sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ de $(x_n)_{n\geq 0}$. Si $(x_n)_{n\geq 0}$ n'est pas de Cauchy, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $p > k$ et $q > k$ tels que $d(x_p, x_q) \geq 2\varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire, on a $2\varepsilon \leq d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_k) + d(x_k, x_q)$, donc $d(x_p, x_k) \geq \varepsilon$ ou $d(x_k, x_q) \geq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $p > k$ tel que $d(x_p, x_k) \geq \varepsilon$. Soit $n_0 = \min\{p > 0 \ ; \ d(x_p, x_0) \geq \varepsilon\}$ et pour tout $k \geq 1$, soit $n_k = \min\{p > n_{k-1} \ ; \ d(x_p, x_{n_{k-1}}) \geq \varepsilon\}$. Alors $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ est une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $d(x_k, x_{k+1}) \geq \varepsilon$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $(x_n)_{n\geq 0}$ est bien de Cauchy.
3. Puisque la série $\sum\limits_{n\geq 0} d(x_n, x_{n+1})$ est convergente, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$. Donc pour tous $p \geq N$ et $q \geq N$, on a $d(x_p, x_q) \leq \sum\limits_{n=p}^{q-1} d(x_n, x_{n+1}) \leq \sum\limits_{n=N}^{+\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$. Donc la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy.
4. Supposons d'abord $(X,\, d)$ complet. Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans X telle que $d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} d(x_n, x_{n+1})$ est convergente. On déduit de 3 que $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy, donc $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente.
Réciproquement, supposons que toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de X vérifiant $d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est convergente. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans X. D'après la proposition 2.6.2, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ de $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < 2^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, la suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ est alors convergente. Encore une fois, d'après la proposition 2.6.2, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est alors convergente. Donc $(X,\, d)$ est complet.

Exercice 2.21. Soit $(X,\, d)$ un espace métrique non complet.

1. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans X qui n'est pas convergente et telle que, pour tout $n \geq 0$, on ait $d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$.
2. Montrer que la suite de boules fermées $\big(B'\big(x_n, \frac{2}{2^n}\big)\big)_{n\geq 0}$ est décroissante et que son intersection est vide.

Solution. 1. Ceci résulte de l'exercice précédent, propriété 4.
2. Soit $y \in B'\big(x_{n+1}, \frac{2}{2^{n+1}}\big)$, alors on a $d(y, x_n) \leq d(y, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^n}$, donc $y \in B'\big(x_n, \frac{2}{2^n}\big)$. Par conséquent, la suite $\big(B'\big(x_n, \frac{2}{2^n}\big)\big)_{n\geq 0}$ est décroissante. Supposons que $\bigcap\limits_{n\geq 0} B'\big(x_n, \frac{2}{2^n}\big) \neq \emptyset$. Alors il existe $x \in X$ tel que $x \in B'\big(x_n, \frac{2}{2^n}\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où on a $0 \leq d(x, x_n) \leq \frac{2}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x, ce qui est impossible. Par conséquent, on a $\bigcap\limits_{n\geq 0} B'\big(x_n, \frac{2}{2^n}\big) = \emptyset$.

Exercice 2.22. Soient $(X,\, d)$ un espace ultramétrique et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans X. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

Solution. Si (x_n) est de Cauchy dans X, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$, voir exercice

2.20. Réciproquement, supposons que l'on a $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$. Il résulte de l'inégalité ultramétrique que pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $q > p$, on ait $d(x_p, x_q) \le \max_{p\le k\le q-1} d(x_k, x_{k+1})$. Or pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \ge N$, on ait $d(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$. Donc pour tous $p, q \ge N$, on a $d(x_p, x_q) < \varepsilon$. Par conséquent, la suite $(x_n)_{n\ge0}$ est de Cauchy.

Exercice 2.23. Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On suppose que l'image par f de toute suite de Cauchy de (X, d) est une suite de Cauchy de (Y, d'). Montrer qu'alors f est continue.
Solution. Soient $a \in X$ et $(x_n)_{n\ge0}$ une suite dans X telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$. Soit $z_n \in X$ tel que $z_{2n} = x_n$ et $z_{2n+1} = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après la proposition 1.7.2, la suite $(z_n)_{n\ge0}$ converge vers a. Donc $(z_n)_{n\ge0}$ est de Cauchy dans X, d'où $(f(z_n))_{n\ge0}$ est de Cauchy dans Y. Comme $(f(z_{2n+1}))_{n\ge0}$ est une sous-suite convergente vers $f(a)$, même constante, de $(f(z_n))_{n\ge0}$, d'après la proposition 2.6.2, la suite $(f(z_n))_{n\ge0}$ converge vers $f(a)$. Or $(f(x_n))_{n\ge0}$ est une sous-suite de $(f(z_n))_{n\ge0}$, donc $(f(x_n))_{n\ge0}$ converge vers $f(a)$. Par conséquent, f est continue en a, voir proposition 2.2.3. Donc f est continue.

Exercice 2.24. Soient (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n\ge0}$ une suite de X et $A = \{x_n\ ;\ n \ge 0\}$.

1. Montrer que si $(x_n)_{n\ge0}$ n'admet aucune sous-suite convergente, alors A est infini et fermé dans X et A muni de la topologie induite par X est discret.

2. Montrer que si $(x_n)_{n\ge0}$ est de Cauchy non convergente, alors A est infini et fermé dans X et A muni de la topologie induite par X est discret.

Solution. 1. D'après la proposition 2.2.3, $(x_n)_{n\ge0}$ n'admet aucune valeur d'adhérence. D'après la remarque 1.7.4, l'adhérence $\overline{A}$ est la réunion de A et de l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\ge0}$. Par conséquent, on a $\overline{A} = A$, donc A est fermé dans X. Si A est fini, alors il existe $x \in X$ et une partie infinie D de $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in D$, on ait $x_n = x$. Soit $\varphi(0)$ le plus petit élément de D, et par récurrence, $\varphi(n+1)$ le plus petit élément de D strictement plus grand que $\varphi(n)$. Alors $(x_{\varphi(n)})_{n\ge0}$ est une sous-suite de $(x_n)_{n\ge0}$ qui converge vers x, ce qui contredit l'hypothèse. Donc A est infini. Soit $N \ge 0$. Alors l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}\ ;\ x_n = x_N\}$ est fini, donc il existe $p > N$ tel que pour tout $n \ge p$, on ait $x_n \ne x_N$. Comme la suite $(x_n)_{n\ge p}$ n'admet aucune sous-suite convergente, il résulte de ce qui précède que l'ensemble $\{x_n\ ;\ n \ge p\}$ est fermé dans (X, d). Comme l'ensemble $\{x_n\ ;\ 0 \le n < N\} \setminus \{x_N\}$ est aussi fermé dans (X, d), alors $A \setminus \{x_N\}$ est aussi fermé dans (X, d). Donc $\{x_N\}$ est ouvert dans A. Par conséquent, A muni de la topologie induite par X est discret.
2. Puisque $(x_n)_{n\ge0}$ est de Cauchy non convergente, d'après la proposition 2.6.2, la suite $(x_n)_{n\ge0}$ n'admet aucune sous-suite convergente. On déduit de 1 que A est infini et fermé dans X et A muni de la topologie induite par X est discret.

Exercice 2.25. Soient (X, d) un espace métrique et A un sous-ensemble de X. On suppose qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que quels que soient les éléments a et b distincts de A, on ait $d(a, b) \ge \alpha$.

1. Montrer que (A, d) est un espace complet. En déduire que A est fermé dans X.

2. Donner un exemple concret d'une telle situation.

Solution. 1. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans A. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geq N$, on ait $d(a_n, a_m) < \alpha$. Par conséquent, pour tout $n \geq N$, on a $a_n = a_N$. Donc la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers $a_N \in A$. Donc $(A,\, d)$ est complet. Le fait que A est fermé dans X résulte de la proposition 2.6.5.
2. Il suffit de prendre $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Z}$ ou $A = \mathbb{N}$ et $\alpha = 1$.

Exercice 2.26. Soient $(X,\, d)$, $(Y,\, d')$ des espaces métriques, avec X complet et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue telle qu'il existe $\alpha > 0$ avec $\alpha\, d(a, b) \leq d'(f(a), f(b))$ pour tous $a, b \in X$. Montrer que f est une application fermée.
Solution. Puisqu'une partie A de X est fermée dans X si et seulement si A est complète pour la distance induite par d, alors pour montrer que f est une application fermée, il suffit de montrer que $f(X)$ est une partie fermée de Y. Soit $(f(x_n))_{n\geq 0}$ une suite dans $f(X)$ qui converge vers un élément $y \in Y$. Alors $(f(x_n))_{n\geq 0}$ est de Cauchy. Or pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on a $d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{\alpha}\, d'(f(x_n), f(x_m))$, donc $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans X. Par conséquent, $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers un élément $x \in X$. Puisque f est continue, alors $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$, d'où on a $y = f(x) \in f(X)$. Donc $f(X)$ est fermé dans Y.

Exercice 2.27. Soient I un ensemble non vide et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de parties complètes d'un espace métrique $(X,\, d)$. Montrer que l'intersection $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est complète.
Solution. Ce résultat est une conséquence immédiate de la proposition 2.6.5. En effet, pour tout $i \in I$, F_i est une partie fermée de X. Soit $i_0 \in I$, alors on a $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \subset F_{i_0}$. Or une intersection des fermés est un fermé, donc $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un fermé de F_{i_0} qui est complet, donc $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est une partie complète de X.

Exercice 2.28. Soient $(X,\, d)$, $(Y,\, d')$ des espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application isométrique.

1. Montrer que l'image par f de toute partie complète de X est fermée dans Y.
2. Montrer que si de plus $(X,\, d)$ est complet, alors f est une application fermée.
3. Donner un exemple montrant que f n'est pas une application fermée si $(X,\, d)$ n'est pas complet.

Solution. 1. Soit A partie complète de X. Puisque f est une application isométrique, alors $f(A)$ est une partie complète de Y. D'après la proposition 2.6.5, $f(A)$ est alors fermé dans Y.
2. On suppose de plus que $(X,\, d)$ est complet. Soit A une partie fermée de X. D'après la proposition 2.6.5, A est une partie complète de X. Il résulte de 1 que $f(A)$ est une partie fermée de Y. Donc f est une application fermée.
3. Si $X = \mathbb{Q}$ et $Y = \mathbb{R}$ et si $f = \imath$ est l'injection canonique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, alors f est une application isométrique, mais f n'est pas une application fermée.

Exercice 2.29. Pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$d(n, m) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = m\,, \\ 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} & \text{si} \quad n \neq m\,. \end{cases}$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{N}^*$ et que $(\mathbb{N}^*, d)$ est complet.
2. Soit $f(n) = n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $d(f(n), f(m)) < d(n, m)$ si $n \neq m$ mais que f n'est pas contractante.

Solution. 1. Il est clair que pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a $d(n, m) \geq 0$, $d(n, m) = d(m, n)$ et que $d(n, m) = 0 \iff n = m$. Il reste à montrer l'inégalité triangulaire. Soient n, p et m trois éléments distincts de $\mathbb{N}^*$, on a $d(n, m) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{m} = d(n, p) + d(p, m)$. Donc d est bien une distance sur $\mathbb{N}^*$. Pour tous éléments distincts n et m dans $\mathbb{N}^*$, on a $d(n, m) \geq 1$. Il résulte alors de l'exercice 2.25 que $(\mathbb{N}^*, d)$ est complet.
2. Si $n \neq m$, on a $d(f(n), f(m)) = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = d(n, m)$. Comme f n'admet pas de point fixe, il résulte du théorème de point fixe que f n'est pas contractante. Une autre manière de montrer que f n'est pas contractante. Si f est contractante, il existe $k \in [0, 1[$ tel que pour tout $n \geq 1$, on ait $d(f(n), f(n+1)) \leq k\, d(n, n+1)$, d'où $1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \leq k\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right]$, et donc on a $\frac{n+1}{n+2} \leq k$ pour tout $n \geq 1$. On en déduit $1 \leq k$, ce qui est impossible. Donc f n'est pas contractante.

Exercice 2.30. Soit c_0 l'ensemble des suites numériques tendant vers 0 à l'infini. Pour tous $x = (x_n)_{n\geq 0}\,, y = (y_n)_{n\geq 0} \in c_0$, on pose $d_\infty(x, y) = \sup\limits_{n\geq 0} |x_n - y_n|$.

1. Montrer que $(c_0,\, d_\infty)$ est un espace métrique complet.
2. Soit c_c l'ensemble des suites numériques nulles à partir d'un certain rang. Montrer que $(c_0,\, d_\infty)$ est le complété de $(c_c,\, d_\infty)$.

Solution. 1. Rappelons d'abord qu'une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et qu'une suite numérique tendant vers 0 à l'infini est bornée, donc on peut considérer que l'on a $c_0 \subset B(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. D'après la proposition 2.6.8, $B(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ muni de la distance de la convergence uniforme d_∞ est complet, donc pour montrer que (c_0, d_∞) est complet, il suffit de montrer que c_0 est fermé dans $B(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, voir proposition 2.6.5. Soit $(\xi_p)_{p\geq 0}$ une suite dans c_0, où $\xi_p = (x_{p,n})_{n\geq 0}$ avec $x_{p,n} \in \mathbb{K}$, et on suppose que $(\xi_p)_{p\geq 0}$ converge vers un élément $\xi = (x_n)_{n\geq 0}$ de $B(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq p_0$, on ait $\sup\limits_{n\geq 0} |x_{p,n} - x_n| = d_\infty(\xi_p, \xi) < \varepsilon$, d'où pour tout $n \geq 0$, on a $|x_n| < \varepsilon + |x_{p_0,n}|$. Or la suite numérique $\xi_{p_0} = (x_{p_0,n})_{n\geq 0}$ tend vers 0 à l'infini, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|x_{p_0,n}| < \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $n \geq N$, on a $|x_n| < 2\varepsilon$. Donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, d'où $\xi = (x_n)_{n\geq 0} \in c_0$. Donc c_0 est fermé dans $B(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.
2. Il s'agit de montrer que c_c est dense dans c_0. Soient $\xi = (x_n)_{n\geq 0} \in c_0$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|x_n| < \varepsilon$. Soit $\eta = (y_n)_{n\geq 0}$, avec $y_n = x_n$ si $0 \leq n \leq N$ et $y_n = 0$ si $n > N$, alors $\eta \in c_c$ et on a $d_\infty(\xi, \eta) = \sup\limits_{n>N} |x_n| \leq \varepsilon$. Par conséquent, c_c est dense dans c_0 pour la distance d_∞.

Exercice 2.31. Soit $E = C^\infty\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tous $f,\, g \in E$, on pose :

$$d(f, g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_\infty\big(f^{(n)}, g^{(n)}\big)}{1 + d_\infty\big(f^{(n)}, g^{(n)}\big)}\,.$$

Montrer que $(E,\, d)$ est un espace métrique complet.

Solution. Le fait que d est une distance résulte de la proposition 2.3.5. Soit $(f_k)_{k\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(E,\, d)$. Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Alors il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p \geq k_0$ et $q \geq k_0$, on ait $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_\infty\big(f_p^{(n)}, f_q^{(n)}\big)}{1 + d_\infty\big(f_p^{(n)}, f_q^{(n)}\big)} = d(f_p, f_q) < \frac{1}{2^N}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

Donc, pour tous $p \geq k_0$ et $q \geq k_0$, on a $\displaystyle\frac{1}{2^N} \frac{d_\infty\big(f_p^{(N)}, f_q^{(N)}\big)}{1 + d_\infty\big(f_p^{(N)}, f_q^{(N)}\big)} < \frac{1}{2^N}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, d'où on a $d_\infty\big(f_p^{(N)}, f_q^{(N)}\big) < \varepsilon$ car $s \longmapsto \dfrac{s}{1+s}$ est strictement croissante de $[0,\, +\infty[$ dans $[0,\, +\infty[$. Donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la suite $\big(f_k^{(N)}\big)_{k\geq 0}$ est de Cauchy dans $\big(C\big([0,\, 1],\, \mathbb{R}\big),\, d_\infty\big)$ qui est complet, voir proposition 2.6.8, donc il existe $g_N \in C\big([0,\, 1],\, \mathbb{R}\big)$ tel que : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} d_\infty(f_k^{(N)}, g_N) = 0$. Pour tout $k, N \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0,\, 1]$, on a : $f_k^{(N)}(t) = \displaystyle\int_0^t f_k^{(N+1)}(s)ds$, d'où :

$$\Big|\int_0^t f_k^{(N+1)}(s)ds - \int_0^t g_{N+1}(s)ds\Big| \leq \int_0^t \Big|f_k^{(N+1)}(s) - g_{N+1}(s)\Big|\, ds \leq d_\infty\big(f_k^{(N+1)}, g_{N+1}\big).$$

Par conséquent, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0,\, 1]$, on a $g_N(t) = \displaystyle\int_0^t g_{N+1}(s)ds$, donc g_N est dérivable sur $[0,\, 1]$ et on a $g'_N = g_{N+1}$. Donc, il existe $g \in E$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on ait $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} d_\infty\big(f_k^{(N)}, g^{(N)}\big) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq p_0$ et $q \geq p_0$, on ait :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_\infty\big(f_p^{(n)}, f_q^{(n)}\big)}{1 + d_\infty\big(f_p^{(n)}, f_q^{(n)}\big)} = d(f_p, f_q) < \varepsilon\,.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, alors on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{d_\infty\big(f_p^{(n)}, f_q^{(n)}\big)}{1 + d_\infty\big(f_p^{(n)}, f_q^{(n)}\big)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_\infty\big(f_p^{(n)}, f_q^{(n)}\big)}{1 + d_\infty\big(f_p^{(n)}, f_q^{(n)}\big)} < \varepsilon$. Or on a $\displaystyle\lim_{q\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{d_\infty\big(f_p^{(n)}, f_q^{(n)}\big)}{1 + d_\infty\big(f_p^{(n)}, f_q^{(n)}\big)} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{d_\infty\big(f_p^{(n)}, g^{(n)}\big)}{1 + d_\infty\big(f_p^{(n)}, g^{(n)}\big)}$, donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{d_\infty\big(f_p^{(n)}, g^{(n)}\big)}{1 + d_\infty\big(f_p^{(n)}, g^{(n)}\big)} \leq \varepsilon$. D'où on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_\infty\big(f_p^{(n)}, g^{(n)}\big)}{1 + d_\infty\big(f_p^{(n)}, g^{(n)}\big)} \leq \varepsilon$, pour tout $p \geq p_0$. Par conséquent, la suite $(f_k)_{k\geq 0}$ converge vers g dans $(E,\, d)$. Donc $(E,\, d)$ est complet.

Exercice 2.32. Soit $E = C\big([0,\, 1],\, \mathbb{R}\big)$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,\, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la distance d définie par $d(f, g) = \displaystyle\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$ pour tous $f, g \in E$.

1. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite dans E définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2}\,, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad \frac{1}{n^2} \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

   Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $(E,\, d)$.

2. Montrer que $(E,\, d)$ n'est pas complet.

Solution. 1. Pour tous $m \geq n \geq 1$, on a $\frac{1}{m^2} \leq \frac{1}{n^2}$ et

$$f_m(x) - f_n(x) = \begin{cases} m-n & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{m^2}\,, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} - n & \text{si} \quad \frac{1}{m^2} \leq x \leq \frac{1}{n^2}\,, \\ 0 & \text{si} \quad \frac{1}{n^2} \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

Donc on a $d(f_m, f_n) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{m^2}} (m-n)\,dx + \int_{\frac{1}{m^2}}^{\frac{1}{n^2}} \big(\tfrac{1}{\sqrt{x}} - n\big)\,dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^{1} 0\,dx = (m-n)\frac{1}{m^2} + \frac{2}{n} - \frac{1}{n} - \frac{2}{m} + \frac{n}{m^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n}$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Alors pour tous $m \geq n \geq N$, on a $d(f_m, f_n) \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$. Donc $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $(E,\, d)$.
2. Si $(E,\, d)$ était complet, il existerait $f : [0,\, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f_n, f) = 0$. Soit $t \in]0,\, 1]$, alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\frac{1}{n^2} < t$. On a aussi $\displaystyle\int_t^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq d(f_n, f)$. Or pour tout $n \geq N$, on a $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[t,\, 1]$, d'où $\displaystyle\int_t^1 \big|\tfrac{1}{\sqrt{x}} - f(x)\big|\,dx \leq d(f_n, f)$. Par conséquent, on a $\displaystyle\int_t^1 \big|\tfrac{1}{\sqrt{x}} - f(x)\big|\,dx = 0$, donc $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[t,\, 1]$. D'où on a $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour tout $x \in]0,\, 1]$, on en déduit que f n'est pas bornée sur $[0,\, 1]$, ce qui est impossible car f est continue. Donc $(E,\, d)$ n'est pas complet.

Exercice 2.33. Soient X un espace de Baire non vide et $\mathcal{F}$ une famille d'applications continues de X dans $\mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in X$, il existe une constante $K_x > 0$ telle que pour tout $f \in \mathcal{F}$, on ait $|f(x)| \leq K_x$. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ et qu'il existe un ouvert non vide U dans X tels que pour tout $x \in U$ et pour tout $f \in \mathcal{F}$, on ait $|f(x)| \leq K$.
Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $F_n = \big\{x \in X\ ;\ |f(x)| \leq n \text{ pour tout } f \in \mathcal{F}\big\}$. Alors F_n est fermé dans X et on a $\bigcup\limits_{n\geq 1} F_n = X$. Comme X est un espace de Baire, alors il existe $n \geq 1$ tel que $\overset{\circ}{F_n} \neq \emptyset$, voir proposition 2.8.1. Soit $U = \overset{\circ}{F_n}$, alors U est un ouvert non vide de X et pour tout $f \in \mathcal{F}$, on a $|f(x)| \leq n$.

Pour plus d'exercices, voir le supplément associé à ce livre.

Chapitre 3

ESPACES COMPACTS

La notion de compacité est à la base de plusieurs théorèmes très fins d'analyse, et chaque fois que l'on rencontre un espace compact, on devrait être content.

3.1 Espaces compacts

Définition 3.1.1. Soit X un espace topologique.

1. Un **recouvrement** de X est une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X telle que $X = \underset{i\in I}{\cup} A_i$. Si de plus I est un ensemble fini, on dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement fini de X.

2. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X. Si $J \subset I$ tel que $X = \underset{j\in J}{\cup} A_j$, on dit que $(A_j)_{j\in J}$ est un **sous-recouvrement** de $(A_i)_{i\in I}$. Si de plus, J est fini, on dit alors que $(A_j)_{j\in J}$ est un **sous-recouvrement fini** de $(A_i)_{i\in I}$.

3. Un **recouvrement ouvert** de X est une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de X telle que $X = \underset{i\in I}{\cup} U_i$.

Définition 3.1.2. Soit X un espace topologique séparé. On dit que X est **compact** † si de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit, pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de X telle que $X = \underset{i\in I}{\cup} U_i$, il existe un sous-ensemble fini J de I tel que $X = \underset{i\in J}{\cup} U_i$.

Proposition 3.1.1. *Soit X un espace topologique séparé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) X est compact.

(ii) De toute famille de fermés de X dont l'intersection est vide, on peut extraire une sous-famille finie dont l'intersection est vide.

†Souvent dans les textes mathématiques en langue anglaise, les espaces compacts ne sont pas supposés séparés.

(iii) *Toute famille de fermés de X dont toute sous-famille finie est d'intersection non vide, est elle-même d'intersection non vide.*

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de X telle que $\underset{i\in I}{\cap} F_i = \emptyset$. Pour tout $i \in I$, soit $U_i = X \setminus F_i$, alors $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X. Comme X est compact, alors il existe un sous-ensemble fini J de I tel que $X = \underset{i\in J}{\cup} U_i$, d'où on a $\underset{i\in J}{\cap} F_i = \emptyset$.
Pour montrer l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i), on fait exactement le même raisonnement que précédemment. L'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) est triviale. ∎

Définition 3.1.3. Soient X un espace topologique et A une partie de X.

1. On dit que A est **compacte** si A, munie de la topologie induite par celle de X, est un espace compact.

2. On dit que A est **relativement compacte** si $\overline{A}$ est compact.

Remarque 3.1.1. Soient X un espace topologique et A une partie de X. Puisque les ouverts de A sont de la forme $A \cap U$, avec U ouvert de X, alors A est compacte si et seulement si A est séparé et pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de X telle que $A \subset \underset{i\in I}{\cup} U_i$, il existe un sous-ensemble fini J de I tel que $A \subset \underset{i\in J}{\cup} U_i$.

Remarque 3.1.2. Soient X un espace topologique et A, Y deux parties de X telles que $A \subset Y$. Alors A est compacte dans X si et seulement si A est compacte dans Y munie de la topologie induite par celle de X.

Exemple 3.1.1.

1. Soient X un espace topologique séparé et $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ une partie finie de X. Alors A est compacte. En effet, soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X telle que $A \subset \underset{i\in I}{\cup} U_i$. Pour tout $n \in \{1, \dots, p\}$, il existe $i_n \in I$ tel que $a_n \in U_{i_n}$. Donc on a $A \subset \overset{p}{\underset{n=1}{\cup}} U_{i_n}$. Par conséquent, A est compacte.

2. Soit X un espace topologique discret. Alors X est compact si et seulement si X est fini. En effet, si X est fini, il résulte de ce qui précède que X est compact. Réciproquement, supposons que X est compact. Pour tout $x \in X$, soit $U_x = \{x\}$, alors $(U_x)_{x\in X}$ est un recouvrement ouvert de X, donc il existe $x_1, \dots, x_p \in X$ tels que $X = \overset{p}{\underset{n=1}{\cup}} U_{x_n} = \{x_1, \dots, x_p\}$. Par conséquent, X est fini.

3. Soient X un espace topologique séparé et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente dans X vers la limite $x \in X$, alors l'ensemble $A = \{x\} \cup \{x_n\ ;\ n \geq 0\}$ est compact. En effet, soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X telle que $A \subset \underset{i\in I}{\cup} U_i$. Alors il existe $i_\alpha \in I$ tel que $x \in U_{i_\alpha}$. Comme $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, on ait $x_n \in U_{i_\alpha}$. Comme pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, il existe $i_n \in I$ tel que $x_n \in U_{i_n}$. Alors on a $A \subset U_{i_\alpha} \cup \overset{N}{\underset{n=0}{\cup}} U_{i_n}$. Par conséquent, A est compact.

4. Tout espace topologique homéomorphe à un espace compact est compact.

Exemple 3.1.2. L'espace $\mathbb{R}$ muni de la topologie euclidienne n'est pas compact. En effet, pour $n \geq 0$, soit $U_n =]-\infty, n[$, alors $(U_n)_{n\geq 0}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$, et on ne peut pas en extraire un sous-recouvrement fini.

Théorème 3.1.1. *Soient X un espace topologique séparé et A une partie de X.*

1. *Si A est compacte, alors A est fermée dans X.*
2. *Si X est compact et A est fermée dans X, alors A est compacte.*
3. *Si X est métrisable et A est compacte, alors A est bornée.*

Démonstration. 1. Pour montrer que A est fermée dans X, on montre que son complémentaire $X \setminus A$ est ouvert dans X. Soit $x \in X \setminus A$. Puisque X est séparé, pour tout $a \in A$, il existe deux ouverts V_a et $U_{a,x}$ dans X tels que $a \in V_a$, $x \in U_{a,x}$ et $V_a \cap U_{a,x} = \emptyset$. Alors $(V_a)_{a\in A}$ est une famille d'ouverts de X telle que $A \subset \bigcup\limits_{a\in A} V_a$. Comme A est compacte, alors il existe un sous-ensemble fini $\{a_1, \dots, a_n\}$ de A tel que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{a_i}$. Soit $U_x = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{a_i,x}$, alors U_x est un ouvert de X contenant x tel que $U_x \cap \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{a_i}\Big) = \emptyset$, d'où on a $x \in U_x \subset X \setminus A$. Donc $X \setminus A$ est un ouvert de X.
2. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X telle que $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$. Soit $U = X \setminus A$, alors U est un ouvert de X et on a $X = U \cup \bigcup\limits_{i\in I} U_i$. Or X est compact, donc il existe un sous-ensemble fini J de I tel que $X = U \cup \bigcup\limits_{i\in J} U_i$, d'où on a $A \subset \bigcup\limits_{i\in J} U_i$. Donc A est compacte.
3. Soit d une distance sur X induisant sa topologie. Comme on a $A \subset \bigcup\limits_{a\in A} B(a, 1)$ et A est compacte, alors il existe un sous-ensemble fini $\{a_1, \dots, a_n\}$ de A tel que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(a_i, 1)$. Soit $\alpha = \max\limits_{1\leq i\leq n} d(a_1, a_i)$, alors on a $A \subset B(a_1, \alpha + 1)$. Donc A est bornée. ■

Corollaire 3.1.1. *Soit X un espace topologique séparé.*

1. *Si K est une partie compacte de X et F est une partie fermée de X, alors $K \cap F$ est une partie compacte de X.*
2. *Si $F_1, \dots, F_n$ sont des parties fermées de X. Alors la réunion $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ est compacte si et seulement si pour tout i, F_i est compacte.*
3. *Si $(K_i)_{i\in I}$ est une famille de parties compactes de X. Alors l'intersection $\bigcap\limits_{i\in I} K_i$ est compacte.*

Théorème 3.1.2 (Heine). *Tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ est compact.*

Démonstration. Soit $[a, b]$, avec $a \leq b$, un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{R}$ est séparé, alors $[a, b]$ est séparé. Si $a = b$, alors $[a, b] = \{a\}$ est un ensemble fini, donc c'est un espace compact, voir exemple 3.1.1. On suppose donc $a < b$, et soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $[a, b] \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$. Soit E l'ensemble des points x de $[a, b]$ tels qu'il existe une partie finie J de I vérifiant $[a, x] \subset \bigcup\limits_{i\in J} U_i$. L'ensemble E est non vide car $a \in E$, et majoré par b, donc E admet une borne supérieure c. De plus on a $c \in [a, b]$. On va montrer que $c \in E$ et que $c = b$. Soit $i_c \in I$ tel que $c \in U_{i_c}$. Puisque U_{i_c} est un ouvert de $\mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]c-\varepsilon,\, c+\varepsilon[\subset U_{i_c}$. Comme c est la borne supérieure de E, alors il existe $x \in E$ tel que $c-\varepsilon < x \leq c$, d'où on a $[x,\, c] \subset U_{i_c}$. Soit J une partie finie de I telle que $[a,\, x] \subset \bigcup\limits_{i\in J} U_i$. Soit $J' = J \cup \{i_c\}$, alors J' est une partie finie de I et on a $[a,\, c] = [a,\, x] \cup [x,\, c] \subset \bigcup\limits_{i\in J'} U_i$. On a donc $c \in E$. Il reste à montrer que $c = b$. Supposons $c < b$. Alors il existe $d \in]c,\, c+\varepsilon[\cap]c,\, b[$, d'où on a $d \in [a,\, b]$ et $[c,\, d] \subset U_{i_c}$. Donc on a $[a,\, d] \subset \bigcup\limits_{i\in J'} U_i$. Par conséquent, on a $d \in E$, ce qui est impossible car $d > c$. Donc on a bien $c = b$, d'où $b \in E$. ■

Corollaire 3.1.2. *Les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées et bornées.*

Remarque 3.1.3. Puisque la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à $[-1,\, 1]$, alors $\overline{\mathbb{R}}$ est compact.

Proposition 3.1.2. *Soient X un espace topologique séparé et A, B deux parties compactes de X telles que $A \cap B = \emptyset$. Alors il existe deux ouverts U et V dans X tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.*

Démonstration. Soit $b \in B$. Comme X est séparé, pour tout $a \in A$, il existe $U_{a,b}$ et $V_{a,b}$ deux ouverts de X tels que $a \in U_{a,b}$, $b \in V_{a,b}$ et $U_{a,b} \cap V_{a,b} = \emptyset$. Comme A est compact et comme on a $A \subset \bigcup\limits_{a\in A} U_{a,b}$, alors il existe un sous-ensemble fini $\{a_1, \dots, a_n\}$ de A tel que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{a_i,b}$. Soient $U_b = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{a_i,b}$ et $V_b = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{a_i,b}$, alors U_b et V_b sont deux ouverts de X tels que $A \subset U_b$, $b \in V_b$ et $U_b \cap V_b = \emptyset$. Comme B est aussi compact et on a $B \subset \bigcup\limits_{b\in B} V_b$, alors il existe un sous-ensemble fini $\{b_1, \dots, b_p\}$ de B tel que $B \subset \bigcup\limits_{j=1}^{p} V_{b_j}$. Soient $U = \bigcap\limits_{j=1}^{p} U_{b_j}$ et $V = \bigcup\limits_{j=1}^{p} V_{b_j}$, alors U et V sont deux ouverts de X tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$. ■

Corollaire 3.1.3. *Soit X un espace compact. Alors X est un espace normal.*

Ce corollaire résulte de la proposition précédente et du théorème 3.1.1.

Proposition 3.1.3. *Soient X un espace topologique séparé, F une partie fermée de X et K une partie compacte de X telles que $K \cap F = \emptyset$.*

1. *Si X est régulier, alors il existe deux ouverts U et V dans X tels que $K \subset U$, $F \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.*

2. *Si X est complètement régulier, alors il existe une fonction continue $f : X \longrightarrow [0,\, 1]$ telle que pour tout $x \in K$, on ait $f(x) = 1$ et pour tout $y \in F$, on ait $f(y) = 0$.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 3 du supplément.

Proposition 3.1.4 (Wallace). *Soient X, Y deux espaces topologiques, A une partie compacte de X, B une partie compacte de Y et W un ouvert de l'espace topologique produit $X \times Y$ tel que $A \times B \subset W$. Alors il existe un ouvert U de X et un ouvert V de Y tels que $A \times B \subset U \times V \subset W$.*

Démonstration. Soit $b \in B$. Pour tout $a \in A$, il existe un ouvert $U_{a,b}$ de X contenant a et un ouvert $V_{a,b}$ de Y contenant b tels que $U_{a,b} \times V_{a,b} \subset W$. Comme A est compact et comme on a $A \subset \bigcup_{a\in A} U_{a,b}$, alors il existe un sous-ensemble fini $\{a_1, \dots, a_n\}$ de A tel que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i,b}$. On pose $U_b = \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i,b}$ et $V_b = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i,b}$, alors U_b est un ouvert de X et V_b est un ouvert de Y tels que $A \subset U_b$, $b \in V_b$ et $U_b \times V_b \subset W$. Comme B est aussi compact et on a $B \subset \bigcup_{b\in B} V_b$, alors il existe un sous-ensemble fini $\{b_1, \dots, b_p\}$ de B tel que $B \subset \bigcup_{j=1}^{p} V_{b_j}$ et $A \subset U_{b_j}$ pour tout j. Soient $U = \bigcap_{j=1}^{p} U_{b_j}$ et $V = \bigcup_{j=1}^{p} V_{b_j}$, alors U est un ouvert de X et V est un ouvert de Y tels que $A \times B \subset U \times V \subset W$. ■

Proposition 3.1.5 (théorème de Bolzano-Weierstrass). *Soit X un espace compact. Alors on a :*

1. *Pour toute suite décroissante $(F_n)_{n\geq 0}$ de parties fermées non vides de X, on a $\bigcap_{n\geq 0} F_n \neq \emptyset$.*
2. *Toute suite dans X a au moins une valeur d'adhérence.*
3. *Une suite dans X est convergente si, et seulement si, elle a une unique valeur d'adhérence, qui est alors sa limite.*
4. *Toute partie infinie A de X possède au moins un point d'accumulation.*

Démonstration. 1. Supposons $\bigcap_{n\geq 0} F_n = \emptyset$, d'après la proposition 3.1.1, il existe une partie finie J de $\mathbb{N}$ tel que $\bigcap_{n\in J} F_n = \emptyset$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $J \subset \{0, \dots, N\}$, alors on a $\bigcap_{n=0}^{N} F_n \subset \bigcap_{n\in J} F_n = \emptyset$, ce qui est impossible car $\bigcap_{n=0}^{N} F_n = F_N \neq \emptyset$. Donc on a bien $\bigcap_{n\geq 0} F_n \neq \emptyset$.
2. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans X. Pour tout $n \geq 0$, soit $F_n = \overline{\{x_p \; ; \; p \geq n\}}$. Alors $(F_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de parties fermées non vides de X. D'après 1, on a $\bigcap_{n\geq 0} F_n \neq \emptyset$. Par ailleurs, d'après la proposition 1.7.1, l'intersection $\bigcap_{n\geq 0} F_n$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. Par conséquent, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ possède au moins une valeur d'adhérence.
3. On a vu, proposition 1.7.2, que toute suite convergente dans un espace topologique séparé admet une unique valeur d'adhérence, qui est alors sa limite.
Réciproquement, soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans X qui admet une unique valeur d'adhérence ℓ. Autrement dit, on a $\bigcap_{n\geq 0} F_n = \{\ell\}$, où $F_n = \overline{\{x_p \; ; \; p \geq n\}}$, pour tout $n \geq 0$. Il s'agit de montrer que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ. Soient U un ouvert de X contenant ℓ et $F = X \setminus U$. Alors on a $\emptyset = \{\ell\} \cap F = \bigcap_{n\geq 0} F_n \cap F$. Comme $(F_n \cap F)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de fermés de X, on déduit de 1 qu'il existe $n \geq 0$ tel que $F_n \cap F = \emptyset$, d'où on a $\{x_p \; ; \; p \geq n\} \subset F_n \subset U$. Par conséquent, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.
4. Soit A une partie infinie de X. Supposons que A ne possède aucun point d'accumulation. Alors pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V_x de x dans X tel que $A \cap V_x \subset \{x\}$. La famille $(V_x)_{x\in X}$ étant un recouvrement ouvert de X et comme X est compact, alors il existe $x_1, \dots, x_n \in X$ tels que $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$, d'où on a $A = A \cap X =$

$\bigcup_{i=1}^{n} A \cap V_{x_i} \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$, ce qui est impossible car A est infinie. Donc A possède au moins un point d'accumulation. ■

Remarque 3.1.4. Pour $n \geq 1$, on pose $a_{2n} = \frac{1}{2n}$ et $a_{2n+1} = 2n + 1$. Alors la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ admet 0 comme unique valeur d'adhérence, mais $(a_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

Remarque 3.1.5. Si $X = \mathbb{N}$ et $Y = \{0, 1\}$ muni de la topologie grossière, alors toute partie non vide de $X \times Y$ possède un point d'accumulation. Si on pose $U_n = \{n\} \times Y$, alors $(U_n)_{n\geq 0}$ est un recouvrement ouvert de $X \times Y$, et on ne peut pas en extraire un sous-recouvrement fini. Donc $X \times Y$ n'est pas compact. L'espace $X \times Y$ n'est même pas séparé.

Définition 3.1.4. Un espace métrique (X, d) est dit **précompact** † si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de X par des boules de rayon ε.

Remarque 3.1.6. Il est clair que tout espace métrique compact est précompact. En effet, soient (X, d) un espace métrique compact et $\varepsilon > 0$. Comme $\big(B(x, \varepsilon)\big)_{x\in X}$ est un recouvrement ouvert de X, alors il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que $X = \bigcup_{p=1}^{n} B(x_p, \varepsilon)$. Par conséquent, (X, d) est un espace précompact.

On vérifie sans difficulté la proposition suivante :

Proposition 3.1.6. *Soient (X, d) un espace métrique et A un sous-ensemble de X. On a :*

1. *L'espace métrique (X, d) est précompact si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de X par des parties de diamètre inférieur ou égal à ε.*
2. *Si (X, d) est précompact, alors A est précompact.*
3. *Si A est précompact, alors $\overline{A}$ est précompact.*

Proposition 3.1.7. *Soit (X, d) un espace métrique précompact. Alors X est séparable. En particulier, tout espace métrique compact est séparable.*

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, il existe un sous-ensemble fini D_n de X tel que $X = \bigcup_{x\in D_n} B\big(x, \frac{1}{n}\big)$. Soit $D = \bigcup_{n\geq 1} D_n$, alors D est au plus dénombrable. Vérifions que D est dense dans X. Soient $y \in X$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $n \geq 1$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Comme on a $X = \bigcup_{x\in D_n} B\big(x, \frac{1}{n}\big)$, il existe $x \in D_n \subset D$ tel que $y \in B\big(x, \frac{1}{n}\big)$, d'où $d(y, x) < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Donc D est dense dans X. Par conséquent, (X, d) est séparable. Comme tout espace métrique compact est précompact, voir remarque 3.1.6, alors tout espace métrique compact est séparable. ■

Lemme 3.1.1 (Lebesgue). *Soient (X, d) un espace métrique tel que toute suite dans X possède une sous-suite convergente. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Alors il existe un réel $r > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon r soit contenue dans au moins un des U_i. Autrement dit, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe $i \in I$ pour lequel $B(x, r) \subset U_i$.*

---

†Les espaces métriques précompacts sont dits **totally bounded** dans les textes mathématiques en langue anglaise.

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons que pour tout $r > 0$, il existe $x \in X$ tel que $B(x,r)$ ne soit contenu dans aucun U_i. Alors, pour tout $n \geq 0$, il existe $x_n \in X$ tel que $B\big(x_n, \frac{1}{2^n}\big)$ ne soit contenu dans aucun U_i. Par hypothèse, il existe une sous-suite convergente $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ de $(x_n)_{n\geq 0}$. Soit $a \in X$ tel que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = a$. Soit $i \in I$ tel que $a \in U_i$. Comme U_i est un ouvert de X, alors il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U_i$. Puisque la suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ converge vers a, alors il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, on ait $x_{n_k} \in B\big(a, \frac{r}{2}\big)$. Comme on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{2^{n_k}} = 0$, alors il existe $k \geq k_0$ tel que $\frac{1}{2^{n_k}} < \frac{r}{2}$. Alors, pour tout $y \in B\big(x_{n_k}, \frac{1}{2^{n_k}}\big)$, on a $d(a,y) \leq d(a,x_{n_k}) + d(x_{n_k},y) < \frac{r}{2} + \frac{1}{2^{n_k}} < r$, d'où $y \in B(a,r)$. Donc on a $B\big(x_{n_k}, \frac{1}{2^{n_k}}\big) \subset B(a,r)$, d'où $B\big(x_{n_k}, \frac{1}{2^{n_k}}\big) \subset U_i$, ce qui est impossible. Par conséquent, il existe bien un réel $r > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon r soit contenue dans au moins un des U_i. ∎

Le nombre $r > 0$ apparu dans le lemme précédent est appelé **un nombre de Lebesgue** du recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$.

Théorème 3.1.3. *Soit $(X,\, d)$ un espace métrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'espace topologique X est compact.

(ii) L'espace métrique $(X,\, d)$ est précompact et complet.

(iii) Toute partie infinie de X possède au moins un point d'accumulation.

(iv) Toute suite de X possède une sous-suite convergente.

(v) Pour toute suite décroissante $(F_n)_{n\geq 0}$ de parties fermées non vides de X, on a $\bigcap\limits_{n\geq 0} F_n \neq \emptyset$.

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 3 du supplément.

Corollaire 3.1.4. *Soient $(X,\, d)$ un espace métrique et A une partie de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) A est relativement compacte.

(ii) Il existe une partie compacte de X contenant A.

(iii) Toute suite dans A possède une sous-suite convergente dans X.

Démonstration. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est triviale. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) résulte immédiatement du théorème précédent. Montrons l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\overline{A}$. Pour tout $n \geq 0$, il existe $a_n \in A$ tel que $d(a_n, x_n) < \frac{1}{n+1}$. Par hypothèse, il existe une sous-suite convergente $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ de $(a_n)_{n\geq 0}$. Soit $\ell = \lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k}$. Pour tout $k \geq 0$, on a $0 \leq d(\ell, x_{n_k}) \leq d(\ell, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, x_{n_k}) < d(\ell, a_{n_k}) + \frac{1}{n_k+1}$ et on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{n_k+1} = 0$, donc $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ converge aussi vers ℓ. Il résulte du théorème précédent que $\overline{A}$ est compact. ∎

On déduit de la proposition 3.1.6 et du théorème 3.1.3 la remarque suivante :

Remarque 3.1.7. Soient $(X,\, d)$ un espace métrique et A une partie de X.

1. Si A est relativement compacte, alors A est précompacte.

2. Si $(X,\, d)$ est complet et si A est précompacte, alors A est relativement compacte.

Théorème 3.1.4. *Soit $(X,\, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'espace X est compact.*

2. *Toute famille filtrante croissante possède une valeur d'adhérence. Autrement dit, pour toute famille filtrante croissante $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans X, il existe une famille filtrante croissante plus fine que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et convergente dans X.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir ([17], p. 136).

3.2 Applications continues et espaces compacts

Théorème 3.2.1. *Soient X et Y deux espaces topologiques, avec Y séparé, et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. On a :*

1. *L'image par f de toute partie compacte de X est une partie compacte de Y.*

2. *Si X est compact, alors f est une application fermée.*

3. *Si X est compact et si f est bijective, alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. 1. Soit K une partie compacte de X. Puisque Y est séparé, alors $f(K)$ est séparé. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de Y telle que $f(K) \subset \underset{i\in I}{\cup} U_i$, alors on a :

$$K \subset f^{-1}\big(f(K)\big) \subset f^{-1}\big(\underset{i\in I}{\cup} U_i\big) = \underset{i\in I}{\cup} f^{-1}(U_i)\,.$$

Comme f est continue, alors pour tout $i \in I$, $f^{-1}(U_i)$ est un ouvert de X. Or K est une partie compacte de X, donc il existe une partie finie J de I telle que $K \subset \underset{i\in J}{\cup} f^{-1}(U_i)$. D'où on a $f(K) \subset f\big(\underset{i\in J}{\cup} f^{-1}(U_i)\big) = \underset{i\in J}{\cup} f\big(f^{-1}(U_i)\big) \subset \underset{i\in J}{\cup} U_i$. Par conséquent, $f(K)$ est une partie compacte de Y.
2. Supposons de plus que X est compact. Soit F une partie fermée de X, d'après le théorème 3.1.1, F est une partie compacte de X, donc $f(F)$ est une partie compacte de Y. En utilisant une fois de plus le théorème 3.1.1, on déduit que $f(F)$ est une fermée de Y. Par conséquent, f est une application fermée.
3. Ceci résulte de 2, voir également le théorème 1.3.2. ■

Corollaire 3.2.1. *Soient X un espace compact, Y un espace topologique séparé et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue, alors pour toute partie A de X, on a $\overline{f(A)} = f(\,\overline{A}\,)$.*

Démonstration. Ceci résulte du théorème précédent et du corollaire 1.3.1. ■

Corollaire 3.2.2. *Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur un ensemble X et supposons que $\mathcal{T}_2$ est plus fine que $\mathcal{T}_1$. Si $(X,\, \mathcal{T}_2)$ est compact et $(X,\, \mathcal{T}_1)$ est séparé, alors on a $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.*

Remarque 3.2.1. Soit (X, d) un espace métrique compact. Si d' est une distance topologiquement équivalente à d, alors (X, d') est aussi compact.

Remarque 3.2.2. Si f est une application continue injective d'un espace compact X dans un espace topologique séparé Y, alors f est un homéomorphisme de X sur son image $f(X)$.

Exemple 3.2.1. Considérons sur $\mathbb{R}$, muni de la topologie euclidienne, la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par $x\,\mathcal{R}\,y \iff x - y \in \mathbb{Z}$. On note $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ l'espace topologique quotient. On munit l'ensemble $\mathbb{S} = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}$ de la topologie induite par $\mathbb{C}$, et on considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S} \\ & t & \longmapsto & e^{2\pi i t} \end{array}$$

Il résulte des propriétés de la fonction exponentielle que f est continue et surjective et que pour tout $t, s \in \mathbb{R}$, on a $t\,\mathcal{R}\,s \iff f(t) = f(s)$. Donc on a $\mathcal{R} = \mathcal{R}_f$. Par conséquent, il existe une application continue et bijective $\widetilde{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{S}$ telle que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & \mathbb{S} \\ & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Où q est l'application quotient, voir également la remarque 1.4.14. Puisque $\mathbb{S}$ est un espace séparé et $\widetilde{f}$ est continue et injective (même bijective), alors l'espace $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est séparé. Notez qu'il y a d'autres manières pour montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est séparé ; par exemple en utilisant le fait que l'application $(x, y) \longmapsto x - y$ est continue de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0, 1[$ tels que $x = n + r$, d'où on a $q(x) = q(r)$. Donc on a $q\big([0, 1]\big) = q(\mathbb{R}) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Or $[0, 1]$ est un espace compact et q est continue, donc $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un espace compact. Il résulte du théorème précédent que $\widetilde{f}$ est un homéomorphisme et donc on identifie $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ à $\mathbb{S}$.

Théorème 3.2.2. *Soient X un espace compact et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornée et atteint sur X ses bornes inférieure et supérieure. Autrement dit, il existe $a, b \in X$ tels que $f(a) = \inf\limits_{x \in X} f(x)$ et $f(b) = \sup\limits_{x \in X} f(x)$.*

Démonstration. D'après le théorème précédent, $f(X)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$, donc $f(X)$ est fermée et bornée dans $\mathbb{R}$, voir théorème 3.1.1. Par l'exercice 2.16 , on sait qu'il existe alors $\alpha, \beta \in f(X)$ tels que $\alpha = \inf\limits_{x \in X} f(x)$ et $\beta = \sup\limits_{x \in X} f(x)$. Comme $\alpha, \beta \in f(X)$, alors il existe $a, b \in X$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. D'où le résultat. ■

Théorème 3.2.3. *Soient (X, d), (Y, d') deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Si X est compact, alors f est uniformément continue.*

Démonstration. On donne deux démonstrations différentes de ce théorème.
Première démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $y \in Y$, soit $U_y = f^{-1}\big(B(y, \frac{\varepsilon}{2})\big)$. Comme f est continue, alors U_y est un ouvert de X. Or on a :

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\Big(\bigcup_{y \in Y} B(y, \tfrac{\varepsilon}{2})\Big) = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}\big(B(y, \tfrac{\varepsilon}{2})\big) = \bigcup_{y \in Y} U_y\,.$$

Donc $(U_y)_{y\in Y}$ est un recouvrement ouvert de X. D'après la proposition 3.1.5 et le lemme 3.1.1, il existe $r > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon r dans X soit contenue dans au moins un des U_y. Soient $x, z \in X$ tels que $d(x, z) < r$, *i.e.* $z \in B(x, r)$, alors il existe $y \in Y$ tel que $x, z \in U_y$, d'où on a $d'(f(x), f(z)) \le d'(f(x), y) + d'(y, f(z)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tous $x, z \in X$ vérifiant $d(x, z) < r$, on ait $d'(f(x), f(z)) < \varepsilon$. Autrement dit, f est uniformément continue.
Deuxième démonstration. Supposons que f n'est pas uniformément continue. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \ge 1$, il existe $x_n, z_n \in X$ vérifiant $d(x_n, z_n) < \frac{1}{n}$ et $d'(f(x_n), f(z_n)) \ge \varepsilon$. D'après le théorème 3.1.3, la suite $(x_n)_{n\ge 1}$ admet une sous-suite convergente $(x_{n_k})_{k\ge 1}$. Soit $\ell = \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}$. Puisque pour tout $k \ge 1$, on a $d(x_{n_k}, z_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{n_k} = 0$, on en déduit que $(z_{n_k})_{k\ge 1}$ converge aussi vers ℓ. Comme f est continue, alors on a $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to+\infty} f(z_{n_k}) = f(\ell)$, d'où $\lim\limits_{k\to+\infty} d(f(x_{n_k}), f(z_{n_k})) = 0$, ce qui est impossible car pour tout $k \ge 1$, on a $d'(f(x_{n_k}), f(z_{n_k})) \ge \varepsilon$. Donc f est bien uniformément continue. ■

Remarque 3.2.3. Le théorème précédent n'est pas vrai si X n'est pas compact. Il suffit de prendre $X = Y = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$.

Remarque 3.2.4. Soit (X, d) un espace métrique compact. Alors toute distance sur X topologiquement équivalente à d lui est uniformément équivalente.

Théorème 3.2.4 (Kuratowski). *Soit X un espace topologique séparé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'espace X est compact.

(ii) Pour tout espace topologique Y, la projection canonique $\pi : X \times Y \longrightarrow Y$ est une application fermée.

(iii) Pour tout espace topologique normal Y, la projection canonique $\pi : X \times Y \longrightarrow Y$ est une application fermée.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit F un fermé dans $X \times Y$. Montrons que $Y \setminus \pi(F)$ est un ouvert de Y. Soit $y \in Y \setminus \pi(F)$, alors $\big(X \times \{y\}\big) \cap F = \emptyset$. Comme X est compact et $\{y\}$ est une partie compacte de Y, d'après la proposition 3.1.4, il existe un ouvert V de Y contenant y tel que $X \times \{y\} \subset X \times V$ et $\big(X \times V\big) \cap F = \emptyset$, d'où on a $y \in V \subset Y \setminus \pi(F)$. Donc $Y \setminus \pi(F)$ est un ouvert de Y.
Pour la preuve des implications (ii) $\Longrightarrow$ (iii) et (iii) $\Longrightarrow$ (i), voir ([13], p. 126). ■

3.3 Produits d'espaces compacts

Théorème 3.3.1. *Soient X et Y deux espaces topologiques non vides. Alors l'espace topologique produit $X \times Y$ est compact si et seulement si X et Y sont compacts.*

Démonstration. Notons d'abord que d'après la proposition 1.5.3, $X \times Y$ est séparé si et seulement si X et Y sont séparés. Supposons d'abord que $X \times Y$ est compact. Puisque les projections canoniques $X \times Y \longrightarrow X$ et $X \times Y \longrightarrow Y$ sont continues, on déduit du théorème 3.2.1 que X et Y sont compacts.

Réciproquement, supposons que X et Y sont compacts. Soit $\big(W_i\big)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $X\times Y$. Soit $x \in X$. Pour tout $y \in Y$, il existe $i_{(x,y)} \in I$ tel que $(x, y) \in W_{i_{(x,y)}}$. Il existe alors un ouvert $U_{(x,y)}$ de X contenant x et un ouvert $V_{(x,y)}$ de Y contenant y tels que $(x, y) \in U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \subset W_{i_{(x,y)}}$. Comme Y est compact et $\big(V_{(x,y)}\big)_{y\in Y}$ est un recouvrement ouvert de Y, alors il existe une partie finie B_x de Y telle que $Y = \bigcup\limits_{y\in B_x} V_{(x,y)}$. Soit $U_x = \bigcap\limits_{y\in B_x} U_{(x,y)}$, alors U_x est un ouvert de X contenant x et on a $\bigcup\limits_{y\in B_x}\big(U_x\times V_{(x,y)}\big) \subset \bigcup\limits_{y\in B_x} W_{i_{(x,y)}}$. Comme X est compact et $\big(U_x\big)_{x\in X}$ est un recouvrement ouvert de X, alors il existe une partie finie A de X telle que $X = \bigcup\limits_{x\in A} U_x$. Par conséquent, on a $X\times Y \subset \bigcup\limits_{x\in A}\bigcup\limits_{y\in B_x}\big(U_x \times V_{(x,y)}\big) \subset \bigcup\limits_{x\in A}\bigcup\limits_{y\in B_x} W_{i_{(x,y)}}$. Soit $D = \big\{(x, y) \in X\times Y \ ;\ x \in A \text{ et } y \in B_x\big\}$, alors D est un ensemble fini et $\big(W_{i_{(x,y)}}\big)_{(x,y)\in D}$ est un sous-recouvrement fini de $\big(W_i\big)_{i\in I}$. Donc $X \times Y$ est un espace compact. ■

Remarque 3.3.1. Si (X, d) et (Y, d') sont des espaces métriques compacts, en utilisant le théorème 3.1.3, on montre facilement que l'espace métrique produit $X\times Y$ est compact. En effet, soit $\big((x_n, y_n)\big)_{n\geq 0}$ une suite dans l'espace métrique produit $X \times Y$. Comme (X, d) est compact, il existe une application strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $(x_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ converge dans X. De même, comme (Y, d') est compact et $(y_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ est une suite dans Y, il existe une application strictement croissante $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $(y_{\phi\circ\psi(n)})_{n\geq 0}$ converge dans Y. Par conséquent, $\big((x_{\phi\circ\psi(n)}, y_{\phi\circ\psi(n)})\big)_{n\geq 0}$ est une sous-suite convergente de $\big((x_n, y_n)\big)_{n\geq 0}$. Donc $X \times Y$ est compact.

Corollaire 3.3.1. *Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'espaces topologiques non vides. Alors l'espace topologique produit $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ est compact si et seulement si pour tout i, X_i est compact.*

Corollaire 3.3.2. *Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées et bornées.*

Démonstration. D'après le théorème 3.1.1 toute partie compacte de $\mathbb{R}^n$ est fermée et bornée. Réciproquement, soit A une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe des $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ tels que $A \subset \prod\limits_{i=1}^{n} [a_i,\, b_i]$. D'après le théorème 3.1.2 et le corollaire précédent, l'espace topologique produit $\prod\limits_{i=1}^{n} [a_i,\, b_i]$ est compact. Comme A est fermée dans $\prod\limits_{i=1}^{n} [a_i,\, b_i]$, on déduit du théorème 3.1.1 que A est une partie compacte. ■

Corollaire 3.3.3. *Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *A est précompacte.*

(ii) *A est relativement compacte.*

(iii) *A est bornée.*

(iv) *Toute suite dans A possède une sous-suite convergente dans $\mathbb{R}^n$.*

Théorème 3.3.2. *Soit $\big((X_n,\, d_n)\big)_{n\geq 0}$ une suite d'espaces métriques. Alors l'espace métrique produit $X = \prod\limits_{n\geq 0} X_n$ est compact si et seulement si pour tout $n \geq 0$, $(X_n,\, d_n)$ est compact.*

Démonstration. Supposons d'abord que l'espace métrique produit $X = \prod_{n\geq 0} X_n$ est compact. Puisque les projections canoniques de X dans X_n sont continues, on déduit du théorème 3.2.1 que les espaces $(X_n,\, d_n)$ sont compacts.
Réciproquement, supposons que pour tout $n \geq 0$, $(X_n,\, d_n)$ est compact. D'après la remarque 3.2.1 et la proposition 2.3.5, on peut supposer que pour tout $n \geq 0$, $d_n \leq 1$ et que la distance sur $X = \prod_{n\geq 0} X_n$ est définie par $D_1\big((x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n)$, voir également la proposition 2.4.3. On donne deux démonstrations du fait que $(X,\, D_1)$ est compact.
Première démonstration. Puisque pour tout $n \geq 0$, $(X_n,\, d_n)$ est complet, d'après la proposition 2.6.7, $(X,\, D_1)$ est complet. D'après le théorème 3.1.3, il reste à montrer que $(X,\, D_1)$ est précompact. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$, $(X_n,\, d_n)$ est compact, alors il existe une partie finie A_n de X_n tel que $X_n = \bigcup_{x\in A_n} B\big(x, \frac{\varepsilon}{4}\big)$. Pour tout $n \geq N+1$, soit A_n un sous-ensemble de X_n réduit à seul élément. On pose $A = \prod_{n\geq 0} A_n$, alors A est sous-ensemble fini de X et on a $X = \bigcup_{z\in A} B(z, \varepsilon)$. Donc $(X,\, D_1)$ est précompact. Par conséquent, $(X,\, D_1)$ est compact.
Deuxième démonstration †. On va montrer que toute suite dans (X, D_1) possède une sous-suite convergente. Soit $(\xi_p)_{p\geq 0}$ une suite dans $X = \prod_{n\geq 0} X_n$, où pour tout $p \geq 0$, on a $\xi_p = (x_{p,n})_{n\geq 0}$ avec $x_{p,n} \in X_n$. Notez que pour n fixé dans $\mathbb{N}$, $(x_{p,n})_{p\geq 0}$ est une suite dans l'espace métrique compact $(X_n,\, d_n)$. On va construire par récurrence sur n, un élément $\ell = (\ell_n)_{n\geq 0} \in X = \prod_{n\geq 0} X_n$ et pour tout $n \geq 0$, une application $\varphi_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

1. $\lim_{p\to+\infty} x_{\varphi_n(p),n} = \ell_n$ pour tout $n \geq 0$.
2. $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ \psi_{n+1}$, où ψ_{n+1} est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, pour tout $n \geq 0$.

Pour $n = 0$, la suite $(x_{p,0})_{p\geq 0}$ est une suite dans l'espace métrique compact $(X_0,\, d_0)$, donc il existe $\ell_0 \in X_0$ et une application $\varphi_0 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\lim_{p\to+\infty} x_{\varphi_0(p),0} = \ell_0$.
Pour $n = 1$, considérons la suite $(x_{\varphi_0(p),1})_{p\geq 0}$ dans l'espace métrique compact $(X_1,\, d_1)$, alors il existe $\ell_1 \in X_1$ et une application $\psi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\lim_{p\to+\infty} x_{\varphi_0\circ\psi_1(p),1} = \ell_1$. Soit $\varphi_1 = \varphi_0 \circ \psi_1$, alors $\varphi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante telle que $\lim_{p\to+\infty} x_{\varphi_1(p),1} = \ell_1$.
Supposons construit $\ell_0 \in X_0, \ldots, \ell_n \in X_n$ et des applications $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissantes telles que pour tout $0 \leq k \leq n$, on ait $\lim_{p\to+\infty} x_{\varphi_k(p),k} = \ell_k$ et $\varphi_k = \varphi_{k-1} \circ \psi_k$, où $\psi_k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante pour tout $1 \leq k \leq n$. Considérons maintenant la suite $(x_{\varphi_n(p),n+1})_{p\geq 0}$ dans l'espace métrique compact $(X_{n+1},\, d_{n+1})$, alors il existe $\ell_{n+1} \in X_{n+1}$ et une application $\psi_{n+1} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement

† La méthode utilisée dans cette démonstration est appelée le **procédé d'extraction diagonale**.

croissante telle que $\lim_{p\to+\infty} x_{\varphi_n\circ\psi_{n+1}(p),n+1} = \ell_{n+1}$. Soit $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ \psi_{n+1}$, alors φ_{n+1} : $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante telle que $\lim_{p\to+\infty} x_{\varphi_{n+1}(p),n+1} = \ell_{n+1}$.
Posons $\ell = (\ell_n)_{n\geq 0}$ et montrons que $(\xi_{\varphi_p(p)})_{p\geq 0}$ est une sous-suite de $(\xi_p)_{p\geq 0}$ convergente vers ℓ. On a $\varphi_{p+1}(p+1) = \varphi_p \circ \psi_{p+1}(p+1) = \varphi_p(\psi_{p+1}(p+1)) \geq \varphi_p(p+1) > \varphi_p(p)$, donc l'application $p \mapsto \varphi_p(p)$ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Pour tout $p \geq 0$, on a $\xi_{\varphi_p(p)} = (x_{\varphi_p(p),n})_{n\geq 0}$. D'après la proposition 1.7.3, la suite $(\xi_{\varphi_p(p)})_{p\geq 0}$ converge vers ℓ si et seulement si pour tout $n \geq 0$, la suite $(x_{\varphi_p(p),n})_{p\geq 0}$ converge vers ℓ_n dans $(X_n,\, d_n)$. Soit n fixé dans $\mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par construction la suite $(x_{\varphi_n(p),n})_{p\geq 0}$ converge vers ℓ_n dans $(X_n,\, d_n)$. Alors il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq p_0$, on ait $d_n(x_{\varphi_n(p),n}, \ell_n) < \varepsilon$. Soit $q = \max(p_0, n)$, pour tout $p \geq q$, on a $\varphi_p = \varphi_n \circ \psi_{n,p}$, où $\psi_{n,p}$ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Donc, pour tout $p \geq q$, on a $\varphi_p(p) = \varphi_n(\psi_{n,p}(p))$, avec $\psi_{n,p}(p) \geq p \geq p_0$, d'où $d_n(x_{\varphi_p(p),n}, \ell_n) < \varepsilon$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq q$, on ait $d_n(x_{\varphi_p(p),n}, \ell_n) < \varepsilon$. Autrement dit, la suite $(x_{\varphi_p(p),n})_{p\geq 0}$ converge vers ℓ_n dans $(X_n,\, d_n)$. Par conséquent, la sous-suite $(\xi_{\varphi_p(p)})_{p\geq 0}$ converge vers ℓ dans $(X,\, D_1)$. Donc $(X,\, D_1)$ est un espace compact. ■

Théorème 3.3.3 (Tychonoff). *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques non vides. Alors l'espace topologique produit $\prod_{i\in I} X_i$ est compact si et seulement si pour tout $i \in I$, X_i est compact.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir ([5], I, p. 63) ou ([17], p.143) ou ([31], p. 290).

Théorème 3.3.4. *Soit X un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) X est un espace complètement régulier.

(ii) X est homéomorphe à un sous-espace de $[0,\, 1]^J$, pour certain ensemble J.

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 3 du supplément.

Théorème 3.3.5 (d'Alembert). *Toute fonction polynômiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de degré $n \geq 1$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 3 du supplément.

Corollaire 3.3.4. *Toute fonction polynômiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de degré $n \geq 1$ est surjective.*

Démonstration. Soit P une fonction polynômiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de degré $n \geq 1$. Soit $w \in \mathbb{C}$. Alors $P - w$ est une fonction polynômiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de degré $n \geq 1$. D'après le théorème précédent, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) - w = 0$, d'où $P(z) = w$. Donc P est une application surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. ■

3.4 Espaces localement compacts

Définition 3.4.1. Soit X un espace topologique séparé.

1. On dit que X est **localement compact** si tout point de X admet un voisinage compact.

2. On dit que X est **dénombrable à l'infini** ou **σ-compact** s'il est réunion dénombrable d'ensembles compacts.

Exemple 3.4.1. 1. Tout espace compact X est localement compact, car X est un voisinage compact de chacun de ses points.

2. L'espace topologique $\mathbb{R}$ est localement compact. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le segment $[x-2,\, x+1]$ est un voisinage compact de x. Plus généralement, les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont localement compacts, voir corollaire 3.3.2.

3. Tout espace topologique discret X est localement compact. En effet, pour tout $x \in X$, le singleton $\{x\}$ est un voisinage compact de x. En particulier, $\mathbb{Z}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$ est localement compact.

4. Tout espace topologique homéomorphe à un espace localement compact est localement compact.

Lemme 3.4.1. *Soient X un espace topologique séparé et D une partie dense dans X. Soient $a \in D$ et V un voisinage compact de a dans D. Alors V est un voisinage compact de a dans X.*

Démonstration. Soit U un ouvert de X contenant a tel que $U \cap D \subset V$. Comme V est fermé dans X, alors on a $\overline{U \cap D} \subset V$. Puisque D est dense dans X, d'après l'exercice 1.26, on a $\overline{U} = \overline{U \cap D}$, d'où $\overline{U} \subset V$. Par conséquent, V est un voisinage compact de a dans X. ∎

Exemple 3.4.2. L'espace métrique $\mathbb{Q}$ est séparable et dénombrable à l'infini, mais il n'est pas localement compact. En effet, comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, alors $\mathbb{Q}$ est séparable et dénombrable à l'infini. Soit $x \in \mathbb{Q}$. Si x possède un voisinage compact K dans $\mathbb{Q}$, d'après le lemme précédent, alors K est un voisinage compact de x dans $\mathbb{R}$, donc il existe $r > 0$ tel que $[x-r,\, x+r] \subset K \subset \mathbb{Q}$, ce qui est impossible. Par conséquent, $\mathbb{Q}$ n'est pas localement compact.

Proposition 3.4.1. *Soient X un espace localement compact, Y un espace topologique séparé et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue, surjective et ouverte. Alors on a :*

1. *L'espace Y est localement compact.*

2. *Pour toute partie compacte K de Y, il existe un compact K' de X tel que $f(K') = K$.*

Démonstration. 1. Soit $y \in Y$, alors il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Soit V un voisinage ouvert de x dans X tel que $\overline{V}$ soit compact. Comme f est ouverte, alors $f(V)$ est un voisinage ouvert de y dans Y. Comme f est continue, alors $f(\overline{V})$ est compact dans Y. Donc $f(\overline{V})$ est un voisinage compact de y. Par conséquent, Y est localement compact.
2. Soit K une partie compacte de Y. Alors $K_1 = f^{-1}(K)$ est fermé dans X car f est continue et K est fermée dans Y. Pour tout $x \in K_1$, il existe un ouvert U_x de X contenant x tel que $\overline{U_x}$ soit compact. Alors $\big(f(U_x)\big)_{x\in K_1}$ est une famille d'ouverts de Y telle que $K \subset \bigcup\limits_{x\in K_1} f(U_x)$. Puisque K est compacte, il existe un sous-ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_n\}$

de K_1 tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} f(U_{x_i}) = f\big(\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}\big)$. Or on a $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_{x_i}}$, voir exercice 1.4, donc $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}}$ est un compact de X. On pose $K' = K_1 \cap \overline{\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}}$, alors K' est un compact de X et on a $f(K') = K$. ■

Proposition 3.4.2. *Soit $(X_i)_{1\le i\le n}$ une suite finie d'espaces topologiques. Alors l'espace topologique produit $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ est localement compact si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, X_i est localement compact.*

Démonstration. Notons d'abord que d'après la proposition 1.5.3, l'espace topologique produit $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ est séparé si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, X_i est séparé.
Supposons d'abord que l'espace topologique produit $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ est localement compact. Puisque les projections canoniques de X sur les X_i sont continues, surjectives et ouvertes, voir proposition 1.4.7, on déduit que les X_i sont localement compacts.
Réciproquement, supposons que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, X_i est localement compact. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soit V_i un voisinage compact de x_i dans X_i. Alors $V = \prod_{i=1}^{n} V_i$ est un voisinage compact de x dans X. Donc X est localement compact. ■

On verra, exercice 3.32, que le produit infini d'espaces localement compacts n'est pas en général localement compact.

Remarque 3.4.1. L'intersection de deux sous-espaces localement compacts d'un espace topologique séparé est localement compacte. En effet, soient A et B des parties localement compactes d'un espace topologique séparé X. Soient $x \in A \cap B$ et V, W des voisinages de x dans X tels que les voisinages $V \cap A$ de x dans A et $W \cap B$ de x dans B soient compacts. Alors $V \cap W \cap A \cap B$ est un voisinage compact de x dans $A \cap B$.
Par contre, on verra, exercice 3.31, que la réunion de deux parties localement compactes de $\mathbb{R}$ n'est pas toujours localement compacte.

Théorème 3.4.1. *Soit X un espace topologique séparé. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) X est un espace localement compact.

(ii) Pour tout $x \in X$ et tout voisinage U_x de x dans X, il existe un ouvert V dans X tel que $\overline{V}$ soit compact et $x \in V \subset \overline{V} \subset U_x$. Autrement dit, tout point de X admet un système fondamental de voisinages compacts.

(iii) Pour tout compact K de X et tout ouvert U dans X tel que $K \subset U$, il existe un ouvert V dans X tel que $\overline{V}$ soit compact et $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

(iv) X admet une base d'ouverts formée d'ensembles relativement compacts.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient $x \in X$ et U_x un voisinage ouvert de x dans X. Soit K_x un voisinage compact de x dans X. Soit U'_x un ouvert de X tel que $x \in U'_x \subset K_x$ et soit $W_x = U'_x \cap U_x$, alors W_x est un ouvert de X tel que

$x \in W_x \subset K_x \cap U_x$. Soit $A = K_x \setminus W_x$, alors A est un compact. D'après la proposition 3.1.2, il existe deux ouverts U et V dans X tels que $x \in V \subset W_x$, $A \subset U$ et $U \cap V = \emptyset$. D'où on a $\overline{V} \cap U = \emptyset$ et $\overline{V} \subset K_x$. Par conséquent, on a $x \in V \subset \overline{V} \subset W_x \subset U_x$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soient K un compact de X et U un ouvert de X tels que $K \subset U$. Par hypothèse, pour tout $x \in K$, il existe un ouvert V_x dans X tel que $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U$ et $\overline{V_x}$ soit compact. Comme K est compact, il existe $x_1, \dots, x_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{x_i} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{V_{x_i}} \subset U$. Soit $V = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}$, alors V est un ouvert de X tel que $\overline{V}$ soit compact et $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.
Les implications (iii) $\Longrightarrow$ (iv) et (iv) $\Longrightarrow$ (i) sont triviales. ■

Corollaire 3.4.1. *Soient X un espace localement compact, K une partie compacte de X et F une partie fermé de X telles que $K \cap F = \emptyset$. Alors il existe deux ouverts U et V dans X tels que $K \subset U$, $F \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$. En particulier, X est un espace régulier.*

Démonstration. Soit $W = X \setminus F$, alors W est un ouvert de X tel que $K \subset W$. D'après le théorème précédent, il existe un ouvert U dans X tel que $K \subset U \subset \overline{U} \subset W$. Soit $V = X \setminus \overline{U}$, alors V est un ouvert de X tel que $F \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$. ■

On verra, corollaire 3.6.1, que tout espace localement compact est complètement régulier.

Corollaire 3.4.2. *Soient X un espace localement compact, K une partie compacte de X et $U_1, \dots, U_n$ des ouverts de X tels que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$. Alors il existe des compacts $K_1, \dots, K_n$ tels que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on ait $K_i \subset U_i$ et $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overset{\circ}{K_i}$.*

Démonstration. Pour tout $x \in K$, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ et un ouvert V_x dans X tels que $\overline{V_x}$ soit compact et $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_i$. Puisque K est compact, il existe $x_1, \dots, x_p \in K$ tels que $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{p} V_{x_j}$. Soient $I_i = \big\{j \in \{1, \dots, p\} \ ; \ \overline{V_{x_j}} \subset U_i\big\}$ et $K_i = \bigcup\limits_{j \in I_i} \overline{V_{x_j}}$. Alors les K_i sont des compacts et on a $K_i \subset U_i$. Comme on a $\bigcup\limits_{j \in I_i} V_{x_j} \subset \overset{\circ}{K_i}$, on en déduit que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overset{\circ}{K_i}$. ■

Proposition 3.4.3. *Soient X un espace topologique séparé et Y un sous-ensemble de X localement compact pour la topologie induite par celle de X. Alors on a :*

1. *Si Y est dense dans X, alors Y est ouvert dans X.*

2. *Il existe un ouvert U de X et un fermé F de X tels que $Y = U \cap F$.*

Démonstration. 1. Soit $y \in Y$. Puisque Y est localement compact, y possède un voisinage compact K dans Y. D'après le lemme 3.4.1, K est aussi un voisinage compact de y dans X, donc Y est un voisinage de y dans X. Par conséquent, Y est voisinage de chacun de ses points dans X, donc Y est un ouvert de X.
2. Comme Y est dense dans $\overline{Y}$, il résulte de ce qui précède que Y est ouvert dans $\overline{Y}$. D'après l'exercice 1.28, il existe alors un ouvert U de X et un fermé F de X tels que $Y = U \cap F$. ■

Corollaire 3.4.3. *Soit Y un sous-ensemble d'un espace localement compact X. Alors Y est localement compact pour la topologie induite par celle de X si et seulement s'il existe un ouvert U de X et un fermé F de X tels que $Y = U \cap F$. En particulier, on a :*

1. *Tout ouvert d'un espace localement compact est localement compact.*
2. *Tout fermé d'un espace localement compact est localement compact.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, si Y est localement compact pour la topologie induite par celle de X, alors il existe un ouvert U de X et un fermé F de X tels que $Y = U \cap F$.
Réciproquement, supposons qu'il existe un ouvert U de X et un fermé F de X tels que $Y = U \cap F$. Soit $x \in Y$. Puisque U est un voisinage de x dans X, d'après le théorème 3.4.1, il existe un ouvert V dans X tel que $\overline{V}$ soit compact et $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Alors on a $\overline{V} \cap Y = \overline{V} \cap U \cap F = \overline{V} \cap F$, donc $\overline{V} \cap Y$ est un voisinage compact de x dans Y. Par conséquent, Y est un espace localement compact. ■

Théorème 3.4.2. *Soit X un espace localement compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *X est un espace de Lindelöf.*

(ii) *X est dénombrable à l'infini.*

(iii) *Il existe une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts dans X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{U_n}$ soit compact, $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$ et $X = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} U_n$.*

(iv) *Il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts de X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ et $X = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} K_n$. Une telle suite de compacts $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée* ***suite exhaustive de compacts*** *de X.*

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Pour tout $x \in X$, il existe un ouvert U_x de X contenant x tel que $\overline{U_x}$ soit compact. On a $X = \bigcup\limits_{x\in X} U_x$, et comme X est un espace de Lindelöf, il existe une partie au plus dénombrable D de X tel que $X = \bigcup\limits_{x\in D} U_x$, d'où on a $X = \bigcup\limits_{x\in D} \overline{U_x}$. Donc X dénombrable à l'infini.

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Par hypothèse, on a $X = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} K_n$, où pour tout $n \geq 0$, K_n est un compact de X. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Pour tout $n \geq 0$, il existe une partie finie I_n de I telle que $K_n \subset \bigcup\limits_{i\in I_n} U_i$. Soit $J = \bigcup\limits_{n\geq 0} I_n$, alors J est une partie au plus dénombrable de I et on a $X = \bigcup\limits_{i\in J} U_i$. Donc X est un espace de Lindelöf.

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Supposons donc $X = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} K_n$, où K_n est un compact de X. On va construire par récurrence sur n une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts dans X telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $K_n \subset U_n$, $\overline{U_n}$ soit compact et $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$. En effet, on applique le théorème 3.4.1 à K_0 et X, on obtient un ouvert U_0 dans X tel que $\overline{U_0}$ soit compact et $K_0 \subset U_0$. Soit $K_1' = K_1 \cup \overline{U_0}$, alors K_1' est compact et on applique de nouveau le théorème 3.4.1 à K_1' et X, on obtient un ouvert U_1 dans X tel que $\overline{U_1}$ soit compact et $K_1' \subset U_1$. Donc on a $K_1 \subset U_1$ et $\overline{U_0} \subset U_1$. Supposons que l'on a construit $U_0, \dots, U_n$, on applique le théorème 3.4.1 à $K_{n+1}' = K_{n+1} \cup \overline{U_n}$ et X, on obtient un ouvert U_{n+1} dans X tel que $\overline{U_{n+1}}$ soit

compact et $K'_{n+1} \subset U_{n+1}$. Donc on a $K_{n+1} \subset U_{n+1}$ et $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$. Finalement, on a $X = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} U_n$ car pour tout $n \geq 0$, on a $K_n \subset U_n$ et $X = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} K_n$.
Les implications (iii) $\Longrightarrow$ (iv) et (iv) $\Longrightarrow$ (ii) sont triviales. ■

Corollaire 3.4.4. *Soit X un espace localement compact possédant une base dénombrable d'ouverts. Alors X est dénombrable à l'infini.*

Démonstration. Ceci résulte du théorème précédent et du théorème 1.9.5. ■

Proposition 3.4.4. *Soit $(X,\, d)$ un espace métrique localement compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) X est dénombrable à l'infini.

(ii) X est séparable.

Démonstration. On a déjà vu, proposition 3.1.7, que tout espace métrique compact est séparable, donc tout espace métrique dénombrable à l'infini est séparable, ainsi on a l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii).
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Cette implication résulte du théorème 2.2.1 et du corollaire précédent.
Donnons une preuve directe de cette implication. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dense dans X et $A = \big\{(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \ ; \ B'\big(x_n, \frac{1}{p}\big) \ \text{ soit compact}\big\}$, alors A est dénombrable. Montrons que l'on a $X = \bigcup\limits_{(n,p)\in A} B'\big(x_n, \frac{1}{p}\big)$. Soient $x \in X$ et $r > 0$ tels que $B'(x,r)$ soit compact. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $0 < \frac{1}{p} < \frac{r}{2}$ et $d(x_n, x) < \frac{1}{p}$. Alors on a $x \in B'\big(x_n, \frac{1}{p}\big) \subset B\big(x, \frac{2}{p}\big) \subset B'(x,r)$. Donc $B'\big(x_n, \frac{1}{p}\big)$ est compact, d'où on a $X = \bigcup\limits_{(n,p)\in A} B'\big(x_n, \frac{1}{p}\big)$. Ainsi X est dénombrable à l'infini. ■

Théorème 3.4.3. *Soit X un espace localement compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) X possède une base dénombrable d'ouverts.

(ii) X possède une base dénombrable d'ouverts formée d'ensembles relativement compacts.

(iii) X est métrisable et dénombrable à l'infini.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une base dénombrable d'ouverts de X. Soit $x \in X$, d'après le théorème 3.4.1, x possède une base de voisinages $\mathcal{V}_x$ formée d'ensembles compacts dans X. Pour tout $V \in \mathcal{V}_x$, il existe $n \geq 0$ tel que $x \in U_n \subset V$, d'où $x \in U_n \subset \overline{U_n} \subset V$, donc $\overline{U_n}$ est compact. Soit $\mathcal{B} = \big\{U_n \ ; \ \overline{U_n} \text{ soit compact}\big\}$, on déduit de ce qui précède et de la proposition 1.1.3 que $\mathcal{B}$ est une base dénombrable d'ouverts de X formée d'ensembles relativement compacts.
L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) est triviale. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (iii) résulte des corollaire 3.4.1, théorème 2.5.1 et proposition 3.4.4. L'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i) résulte des proposition 3.4.4 et théorème 2.2.1. ■

Corollaire 3.4.5. *Soit X un espace compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'espace X possède une base dénombrable d'ouverts.

(ii) L'espace X est métrisable.

On verra, remarque 3.5.3, qu'un espace compact séparable n'est pas forcément métrisable.

Proposition 3.4.5. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace compact et $((Y_n, d_n))_{n\geq 0}$ une suite d'espaces métriques. On suppose que pour tout $n \geq 0$, il existe une application continue $f_n : X \longrightarrow Y_n$, et que la famille $(f_n)_{n\geq 0}$ est séparante. Alors l'espace compact $(X, \mathcal{T})$ est métrisable.*

Démonstration. Soit $\mathcal{T}_i$ la topologie initiale sur X associée à la famille $(f_n)_{n\geq 0}$. D'après la proposition 2.5.1, l'espace $(X, \mathcal{T}_i)$ est métrisable. Comme pour tout $n \geq 0$, f_n est continue, alors on a $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}$. D'après le corollaire 3.2.2, on a alors $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}$. Donc $(X, \mathcal{T})$ est métrisable. ∎

Remarque 3.4.2. Soit I un ensemble infini non dénombrable et soit $X = [0, 1]^I$ l'espace topologique produit. Alors X est un espace compact. Pour tout $i \in I$, soit p_i la projection canonique de X dans $[0, 1]$. Alors $(p_i)_{i\in I}$ est une famille infinie non dénombrable et séparante d'applications continues de X dans $[0, 1]$. Mais on verra, exemple 3.6.1, que X n'est pas métrisable.

Proposition 3.4.6. *Soit (X, d) un espace métrique. Si X est localement compact, alors il existe une distance ρ sur X topologiquement équivalente à d et telle que (X, ρ) soit complet. La réciproque est en général fausse.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir ([12], p. 294).

Théorème 3.4.4 (Baire). *Soit X un espace localement compact. Alors X est un espace de Baire. Autrement dit, si $(U_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'ouverts denses dans X, alors l'intersection $\bigcap\limits_{n\geq 0} U_n$ est dense dans X.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 3 du supplément.

3.5 Compactification

Une **compactification** d'un espace topologique X est la donnée d'un couple $(\widehat{X}, f)$ constitué d'un espace compact $\widehat{X}$ et d'un homéomorphisme f de X sur un sous-ensemble dense de $\widehat{X}$. On identifie fréquemment l'espace X avec $f(X) \subset \widehat{X}$, et on dit simplement que $\widehat{X}$ est un **compactifié** de X. Si X est déjà compact, l'espace $\widehat{X}$ est homéomorphe à X, et dans ce cas, il ne sert à rien de parler de compactifié de X.
Un espace topologique X n'a pas toujours de compactifié ; seulement les espaces complètement réguliers peuvent avoir des compactifiés, puisque tout sous-espace d'un espace compact est complètement régulier. D'autre part, si $\widehat{X}$ est un compactifié de X, tout espace homéomorphe à $\widehat{X}$ est encore un compactifié de X. Enfin, deux compactifiés peuvent ne pas être homéomorphes. Dans ce paragraphe, on considère deux compactifications, la première est appliquée seulement aux espaces localement compacts, et la deuxième est appliquée aux espaces complètement réguliers.

Compactification d'Alexandroff.

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace localement compact. Ajoutons à X un nouveau point, noté w ou ∞ et appelé **point à l'infini**, et considérons l'ensemble $X_\infty = X \cup \{\infty\}$. On dit souvent que ∞ est le point à l'infini de X_∞, et que X_∞ résulte de X par adjonction d'un point à l'infini. Soit $\mathcal{T}_\infty$ l'ensemble des parties de X_∞ défini par : une partie U de X_∞ appartient à $\mathcal{T}_\infty$ si U appartient à $\mathcal{T}$, ou bien si U est le complémentaire dans X_∞ d'un compact de $(X, \mathcal{T})$. On vérifiera que $\mathcal{T}_\infty$ est une topologie sur X_∞, le détail est facile et laissé au soin du lecteur. Vérifions que X_∞ est un espace compact.
Il est clair que l'espace X_∞, muni de la topologie $\mathcal{T}_\infty$, est séparé [†]. En effet, deux points de X peuvent évidemment être séparés par des éléments de $\mathcal{T}$, puisque X est séparé ; d'autre part, soit x un point de X et soit K un voisinage compact de x dans X ; l'intérieur $\overset{\circ}{K}$ de K dans X et le complémentaire de K dans X_∞ sont des éléments de $\mathcal{T}_\infty$ qui séparent x et ∞. Vérifions que de tout recouvrement ouvert de X_∞, on peut extraire un sous-recouvrement fini. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X_∞, il existe un $i_0 \in I$ tel que $\infty \in U_{i_0}$. Or $X_\infty \setminus U_{i_0}$ est un compact de X et $\big(U_i \cap X\big)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ est un recouvrement ouvert de $X_\infty \setminus U_{i_0}$, donc il existe un sous-ensemble fini J de I tel que $X_\infty \setminus U_{i_0} \subset \bigcup\limits_{i\in J} U_i$, d'où on a $X_\infty \subset U_{i_0} \cup \big(\bigcup\limits_{i\in J} U_i\big)$. Par conséquent, $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ est un espace compact.
Notons que si X est déjà compact, alors ∞ est un point isolé de X_∞, et dans ce cas, il n'y a *aucune utilité* d'introduire l'espace compact X_∞. Par contre, si X est localement compact, non compact, alors ∞ appartient à l'adhérence de X dans X_∞, et par conséquent X est dense dans X_∞.

Définition 3.5.1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace localement compact. L'espace compact $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ est appelé le **compactifié d'Alexandroff** [‡] de $(X, \mathcal{T})$.

Théorème 3.5.1 (Alexandroff). *Soit X un espace localement compact. Alors il existe un espace compact X_∞ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *X est un sous-espace de X_∞.*
2. *$X_\infty \setminus X$ est réduit à un point $\{\infty\}$.*
3. *X est dense dans $X_\infty \iff X$ n'est pas compact $\iff \infty$ n'est pas un point isolé dans X_∞.*
4. *Soient Y un espace compact et $g : X \longrightarrow Y$ un homéomorphisme de X sur $g(X)$ tel que $Y \setminus g(X)$ soit réduit à un point $\{w'\}$. Alors l'application $h : X_\infty \longrightarrow Y$ définie par :*
$$h(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \in X\,, \\ w' & si \quad x = \infty\,, \end{cases}$$
est un homéomorphisme. En particulier, X_∞ est homéomorphe à Y. Autrement dit, l'espace X_∞ est unique à un homéomorphisme près.

[†] On peut construire l'espace X_∞ pour n'importe espace topologique X, mais dans ce cas, X_∞ n'est pas toujours séparé. En fait, X_∞ est séparé si et seulement si X est localement compact.

[‡] Si X est compact, X n'est pas dense dans X_∞, mais on continue à utiliser le terme compactifié d'Alexandroff pour désigner l'espace compact X_∞.

5. *Le compactifié d'Alexandroff d'un espace localement compact non compact est une compactification « minimale ». Autrement dit, si X est un espace localement compact non compact et si $(Z,\, f)$ est une compactification de X, alors il existe une application continue surjective φ de Z sur X_∞ telle que pour tout $x \in X$, on ait $\varphi \circ f(x) = x$, i.e. le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & X_\infty \\ & Z \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. On a déjà montré les propriétés 1, 2 et 3.
4. Il est clair que h est une application bijective. Puisque X est un ouvert de X_∞ et g est continue, alors h est continue en tout point x de X. Il reste à montrer la continuité de h en ∞. Soit V un voisinage ouvert de w' dans Y, alors $K = Y \setminus V$ est un compact de $Y \setminus \{w'\} = g(X)$. Or g est un homéomorphisme de X sur $g(X)$, donc $X_\infty \setminus h^{-1}(V) = h^{-1}(K) = g^{-1}(K)$ est un compact de X. Donc $h^{-1}(V)$ est un ouvert de X_∞ contenant ∞, d'où h est continue en ∞. On déduit du théorème 3.2.1 que h est un homéomorphisme.
5. On suppose X localement compact non compact. Pour tout $x \in X$, on pose $\varphi(f(x)) = x$ et pour tout $z \in Z \setminus f(X)$, on pose $\varphi(z) = \infty$. Alors φ est une application surjective de Z dans X_∞. Soit U un ouvert de X_∞. Si $\infty \notin U$, alors U est un ouvert de X et on a $\varphi^{-1}(U) = f(U)$. Comme f est un homéomorphisme de X sur $f(X)$, et comme $f(X)$ est un ouvert de Z, car $f(X)$ est localement compact et est dense dans Z, voir proposition 3.4.3, alors $f(U)$ est un ouvert de Z. Si $\infty \in U$, alors $K = X_\infty \setminus U$ est un compact de X, d'où $f(K)$ est un compact de Z et on a $\varphi^{-1}(U) = Z \setminus f(K)$, donc $\varphi^{-1}(U)$ est un ouvert de Z. Par conséquent, φ est continue. ■

Corollaire 3.5.1. *Un espace topologique est localement compact si et seulement s'il est homéomorphe à un ouvert d'un espace compact.*

Démonstration. On a vu, corollaire 3.4.3, que tout ouvert d'un espace localement compact est localement compact, donc tout espace topologique homéomorphe à un ouvert d'un espace compact est localement compact.
Réciproquement, si X est un espace localement compact, alors X est ouvert dans son compactifié d'Alexandroff X_∞. ■

Exemple 3.5.1. Si $X =]0,\, 1]$, le compactifié d'Alexandroff de X est l'espace compact $[0,\, 1]$.

Exemple 3.5.2. Si $X = \mathbb{R}$, alors le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}$ est la sphère

$$\mathbb{S} = \big\{ z \in \mathbb{C} \,;\ |z| = 1 \big\}\,.$$

En effet, $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $]-1,\, 1[$ via l'application suivante :

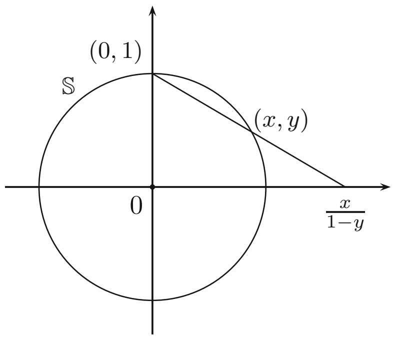
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,\, 1[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$$

Puis, considérons l'application

$$g: \begin{array}{ccc}]-1,\,1[& \longrightarrow & \mathbb{S} \\ t & \longmapsto & e^{it\pi} \end{array}$$

alors g est un homéomorphisme de $]-1,\,1[$ sur $\mathbb{S}\setminus\big\{(-1,0)\big\}$. Donc $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}\setminus\big\{(-1,0)\big\}$. On en déduit que $\mathbb{S}$ est le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}$.
Une autre méthode pour voir que $\mathbb{S}$ est le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}$. On considère la **projection stéréographique** suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}\setminus\big\{(0,1)\big\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x}{1-y} \end{array}$$



C'est un homéomorphisme dont l'application réciproque est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}\setminus\big\{(0,1)\big\} \\ x & \longmapsto & \Big(\dfrac{2x}{x^2+1}, \dfrac{x^2-1}{x^2+1}\Big) \end{array}$$

Donc $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}\setminus\big\{(-1,0)\big\}$. On en déduit que $\mathbb{S}$ est le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}$.

Exemple 3.5.3. Plus généralement, le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}^n$ est la sphère

$$\mathbb{S}^n = \big\{(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}\ ;\ x_1^2+\cdots+x_n^2+x_{n+1}^2 = 1\big\}.$$

En effet, soit $N=(0,\dots,0,1)\in\mathbb{S}^n$, et considérons la **projection stéréographique** suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n\setminus\{N\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) & \longmapsto & \Big(\dfrac{x_1}{1-x_{n+1}},\dots,\dfrac{x_n}{1-x_{n+1}}\Big) \end{array}$$

C'est un homéomorphisme dont l'application réciproque est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{S}^n\setminus\{N\} \\ y & \longmapsto & \Big(\dfrac{2y_1}{y_1^2+\cdots+y_n^2+1},\dots,\dfrac{2y_n}{y_1^2+\cdots+y_n^2+1},\dfrac{y_1^2+\cdots+y_n^2-1}{y_1^2+\cdots+y_n^2+1}\Big) \end{array}$$

Par conséquent, $\mathbb{S}^n$ est le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 3.5.1. Soient X un espace localement compact et F une partie fermée de X. Alors le sous-ensemble $F\cup\{\infty\}$ est fermé dans X_∞. En effet, soit $U=X\setminus F$, alors U est un ouvert de X. Comme X est ouvert dans X_∞, alors U est un ouvert de X_∞. Comme on a $F\cup\{\infty\}=X_\infty\setminus U$, alors $F\cup\{\infty\}$ est fermé dans X_∞. Notons aussi que le compactifié d'Alexandroff de F s'identifie à $F\cup\{\infty\}$.

Compactification de Stone-Čech.

D'un certain point de vue, la compactification d'Alexandroff n'est pas satisfaisante, parce que si X est un espace localement compact dense dans un espace compact $\widehat{X}$, et si f est une application continue bornée sur X et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on aimerait étendre f en une application continue sur $\widehat{X}$, mais la compactification d'Alexandroff ne réalise pas cet objectif ; en effet, si $X =]0,\, 1]$, et $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, le compactifié d'Alexandroff de X est $[0, 1]$, et on ne peut pas étendre f en une application continue sur $[0,\, 1]$. D'où la nécessité d'introduire d'autres types de compactification.

On a vu au théorème 3.3.4 que si X est un espace complètement régulier et si $C_X = C(X,\, [0,\, 1])$ est l'ensemble des applications continues de X dans $[0,\, 1]$, alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \rho_X : & X & \longrightarrow & [0,\, 1]^{C_X} \\ & x & \longmapsto & (f(x))_{f\in C_X} \end{array}$$

est un homéomorphisme de X sur $\rho_X(X)$. On pose $\beta(X) = \overline{\rho_X(X)}$, l'adhérence de $\rho_X(X)$ dans $[0,\, 1]^{C_X}$, c'est un espace compact, et X est dense dans $\beta(X)$. Soit ρ l'application de X dans $\beta(X)$ induit par ρ_X. Alors le couple $(\beta(X),\, \rho)$ est appelé la **compactification de Stone-Čech** de X.
Notons que si X est un espace compact, alors $\rho_X(X)$ est compact et donc $\beta(X) = \rho_X(X)$ et ρ est un homéomorphisme de X sur $\beta(X)$. Par conséquent, on peut identifier X à $\beta(X)$.

Théorème 3.5.2 (M. Stone, E. Čech). *Soit X un espace complètement régulier. Alors il existe une compactification $(\beta(X),\, \rho)$ de X telle que :*

1. *Pour tout espace compact Y et toute application continue $h : X \longrightarrow Y$, il existe une (unique) application continue $\beta(h) : \beta(X) \longrightarrow Y$ telle que le diagramme ci-contre soit commutatif.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\rho"'] & & Y \\ & \beta(X) \arrow[ur, "\beta(h)"'] & \end{tikzcd}$$

2. *Pour toute application continue et bornée $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe une (unique) application continue $\beta(h) : \beta(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ prolongeant h, i.e. le diagramme ci-contre est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\rho"'] & & \mathbb{R} \\ & \beta(X) \arrow[ur, "\beta(h)"'] & \end{tikzcd}$$

3. *Si $(\widehat{X},\, h)$ est une compactification de X vérifiant la propriété 1 ou la propriété 2, alors $\widehat{X}$ est homéomorphe à $\beta(X)$. De façon plus précise, il existe un homéomorphisme $g : \beta(X) \longrightarrow \widehat{X}$ tel que le diagramme ci-contre soit commutatif.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\rho"'] & X \arrow[d, "h"] \\ \beta(X) \arrow[r, "g"] & \widehat{X} \end{tikzcd}$$

4. *La compactification $(\beta(X),\, \rho)$ est une compactification « maximale » de X. Autrement dit, si $(\widehat{X},\, h)$ est une compactification de X, il existe une (unique) application continue surjective $g : \beta(X) \longrightarrow \widehat{X}$ tel que le diagramme ci-contre soit commutatif.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\rho"'] & X \arrow[d, "h"] \\ \beta(X) \arrow[r, "g"] & \widehat{X} \end{tikzcd}$$

5. *Pour tout espace complètement régulier Z et toute application continue $h : X \longrightarrow Z$, il existe une (unique) application continue $\beta(h) : \beta(X) \longrightarrow \beta(Z)$ telle que le diagramme ci-contre soit commutatif.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\rho"'] & Z \arrow[d, "\rho"] \\ \beta(X) \arrow[r, "\beta(h)"] & \beta(Z) \end{tikzcd}$$

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 3 du supplément.

Corollaire 3.5.2. *Soit X un espace complètement régulier.*

1. *Si Y est un sous-ensemble de X tel que toute fonction continue et bornée de Y dans $\mathbb{R}$ se prolonge en une application continue bornée de X dans $\mathbb{R}$, alors on a $\beta(Y) = \overline{Y}^{\beta(X)}$, l'adhérence de Y dans $\beta(X)$.*

2. *Si Y est un sous-ensemble de $\beta(X)$ tel que $X \subset Y \subset \beta(X)$, alors on a $\beta(Y) = \beta(X)$.*

Proposition 3.5.1. *Soit X un espace complètement régulier. Alors on a :*

1. *Si A et B sont des parties de X telles qu'il existe une application continue $f : X \longrightarrow [0,\, 1]$ vérifiant $f_{|A} = 0$ et $f_{|B} = 1$, alors les adhérences de A et B dans $\beta(X)$ sont disjoints.*

2. *Si A est une partie à la fois ouverte et fermée dans X, alors son adhérence dans $\beta(X)$ est à la fois ouverte et fermée dans $\beta(X)$.*

Démonstration. 1. D'après le théorème 3.5.2, il existe une application continue $g : \beta(X) \longrightarrow [0,\, 1]$ prolongeant f. Alors $g^{-1}(\{0\})$ et $g^{-1}(\{1\})$ sont fermés disjoints dans $\beta(X)$ et contiennent respectivement A et B. Par conséquent, on a $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, où $\overline{A}$ (*resp.* $\overline{B}$) désigne l'adhérence de A (*resp.* B) dans $\beta(X)$.
2. Soit $B = X \setminus A$, alors B est à la fois ouvert et fermé dans X. Pour tout $a \in A$, on pose $f(a) = 0$, et pour tout $b \in B$, on pose $f(b) = 1$, alors f est une application continue de X dans $[0,\, 1]$ vérifiant $f_{|A} = 0$ et $f_{|B} = 1$. Soit $\overline{A}$ (*resp.* $\overline{B}$) l'adhérence de A (*resp.* B) dans $\beta(X)$, d'après 1, on a $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. Or on a $X \subset \overline{A} \cup \overline{B} \subset \beta(X)$, d'où $\beta(X) = \overline{A} \cup \overline{B}$. Par conséquent, $\overline{A}$ est à la fois ouvert et fermé dans $\beta(X)$. ■

Remarque 3.5.2. Soit X un espace complètement régulier. On déduit de la proposition 3.4.3 et du corollaire 3.4.3 que X est localement compact si et seulement si X est ouvert dans $\beta(X)$.

Remarque 3.5.3. Un espace compact séparable n'est pas forcément métrisable. En effet, soit $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie $\mathcal{T}_l$, voir exercice 1.16. Alors X est un espace complètement régulier, séparable et non métrisable parce qu'il n'admet pas de base dénombrable d'ouverts, voir théorème 2.2.1. Alors $\beta(X)$ est un espace compact séparable non métrisable. Un autre exemple ; $\beta(\mathbb{N})$ est un espace compact séparable non métrisable, voir exercice 4.45 du supplément.

3.6 Espaces $C(X)$, $C_0(X)$, $C_c(X)$

Soient X un espace compact et $(Y,\, d)$ un espace métrique. D'après les théorèmes 3.1.1 et 3.2.1, toute application continue de X dans Y est bornée. Donc l'ensemble $C(X,\, Y)$ des applications continues de X dans Y est un sous-ensemble de $B(X,\, Y)$, l'ensemble des applications bornées de X dans Y. Rappelons que $B(X,\, Y)$ est muni de la distance de la convergence uniforme d_∞ définie par $d_\infty(f,g) = \sup\limits_{x\in X} d(f(x),g(x))$. D'après la proposition 2.6.8, l'ensemble $C(X,\, Y)$ muni de la distance d_∞ est fermé dans $(B(X,\, Y),\, d_\infty)$, donc $(C(X,\, Y),\, d_\infty)$ est un espace métrique complet.

Proposition 3.6.1. *Soient $(X,\, \mathcal{T})$ un espace compact et $C(X)$ l'ensemble des applications continues de X dans $\mathbb{K}$ muni de la distance de la convergence uniforme d_∞. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'espace $(X,\, \mathcal{T})$ est métrisable.

(ii) L'espace métrique $(C(X,\, \mathbb{R}),\, d_\infty)$ est séparable.

(iii) L'espace métrique $(C(X),\, d_\infty)$ est séparable.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit d une distance sur X dont la topologie associée est $\mathcal{T}$. Pour tout $n \geq 1$, il existe $x_{n,1}, \ldots, x_{n,k_n} \in X$ tels que $X = \bigcup\limits_{j=1}^{k_n} B\big(x_{n,j},\, \frac{1}{n}\big)$. Pour tout $x \in X$ et pour tout $j \in \{1, \ldots, k_n\}$, on pose :

$$\phi_{n,j}(x) = \frac{d\big(x, X \setminus B\big(x_{n,j},\, \frac{1}{n}\big)\big)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k_n} d\big(x, X \setminus B\big(x_{n,i},\, \frac{1}{n}\big)\big)}\,.$$

Alors on a les propriétés suivantes :

1. $\phi_{n,j}$ est une application continue sur X.
2. Pour tout $x \in X$, on a $0 \leq \phi_{n,j}(x) \leq 1$.
3. On a $\phi_{n,j}(x) = 0$, si $x \notin B\big(x_{n,j},\, \frac{1}{n}\big)$.
4. Pour tout $x \in X$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{k_n} \phi_{n,j}(x) = 1$.

Pour tout $n \geq 1$, soit $A_n = \Big\{ \displaystyle\sum_{j=1}^{k_n} \lambda_j \phi_{n,j}\ ;\ \lambda_j \in \mathbb{Q} \Big\}$ et soit $A = \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$, alors A est un sous-ensemble dénombrable de $C(X,\, \mathbb{R})$. Montrons que A est dense dans $(C(X,\, \mathbb{R}),\, d_\infty)$. Soient $f \in C(X,\, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue, il existe $n \geq 1$ tel que pour tout $x, y \in X$ vérifiant $d(x,y) < \frac{1}{n}$, on ait $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Soit $g = \displaystyle\sum_{j=1}^{k_n} f(x_{n,j})\phi_{n,j} \in C(X,\, \mathbb{R})$. Pour tout $x \in X$, on a :

$$f(x) - g(x) = f(x)\sum_{j=1}^{k_n} \phi_{n,j}(x) - \sum_{j=1}^{k_n} f(x_{n,j})\phi_{n,j}(x) = \sum_{j=1}^{k_n}(f(x) - f(x_{n,j}))\phi_{n,j}(x)\,,$$

d'où $|f(x) - g(x)| \leq \sum_{j=1}^{k_n} |f(x) - f(x_{n,j})|\phi_{n,j}(x)$. Si $x \in B\big(x_{n,j}, \frac{1}{n}\big)$, on a : $|f(x) - f(x_{n,j})| < \varepsilon$. Si $x \notin B\big(x_{n,j}, \frac{1}{n}\big)$, on a $\phi_{n,j}(x) = 0$. Donc, pour tout $x \in X$, on a $|f(x) - f(x_{n,j})|\phi_{n,j}(x) \leq \varepsilon\phi_{n,j}(x)$, d'où $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$. On en déduit que l'on a $d_\infty(f, g) \leq \varepsilon$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $j \in \{1, \ldots, k_n\}$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ tel que $|\lambda_i - f(x_{n,j})| < \dfrac{\varepsilon}{k_n}$. Soit $h = \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_i\phi_{n,j} \in A$, alors on a $d_\infty(g, h) \leq \varepsilon$, d'où $d_\infty(f, h) \leq 2\varepsilon$. Donc A est dense dans $(C(X, \mathbb{R}), d_\infty)$. Par conséquent, $(C(X, \mathbb{R}), d_\infty)$ est séparable.
L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est triviale.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite dense dans $(C(X), d_\infty)$. Pour tous $x, y \in X$, on pose :

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{1 + |f_n(x) - f_n(y)|}\,.$$

Montrons que d est une distance sur X. Il est clair que $d(x, y) = d(y, x)$ et que $d(x, y) \geq 0$. L'inégalité triangulaire résulte de la proposition 2.3.5. Il reste à vérifier que $d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$. Si on a $d(x, y) = 0$, alors pour tout $n \geq 1$, on a $f_n(x) = f_n(y)$. Comme $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite dense dans $(C(X), d_\infty)$, alors pour tout $f \in C(X)$, on a $f(x) = f(y)$. Il résulte du théorème 1.9.2 et du corollaire 3.1.3 que l'on a $x = y$. Donc d est bien une distance sur X. Pour finir la preuve, on montre que l'application identique $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, d)$ est un homéomorphisme. D'après le théorème 3.2.1, il suffit de montrer que id_X est continue. Soient $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$. Puisque $f_1, \ldots, f_N$ sont continues en x_0, alors il existe des voisinages $V_1, \ldots, V_N$ de x_0 dans X tels que pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$ et pour tout $x \in V_n$, on ait $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$. Soit $V = \bigcap_{n=1}^{N} V_n$, alors V est un voisinage de x_0 dans X et pour tout $x \in V$, on a $d(x, x_0) \leq \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{2^n}|f_n(x) - f_n(x_0)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{2^n} + \varepsilon < 2\varepsilon$.
Donc l'application id_X est continue en x_0, ce qui achève la preuve. ■

Exemple 3.6.1. Soient I un ensemble infini non dénombrable et $X = [0, 1]^I$ l'espace topologique produit. Alors X est compact non métrisable. En effet, la compacité de X résulte du théorème 3.3.3. Pour montrer que X n'est pas métrisable, on utilise la proposition précédente en montrant que $C(X)$ muni de la distance d_∞ n'est pas séparable. Pour tout $i \in I$, soit p_i la projection canonique de X dans $[0, 1]$, donc p_i est un élément de $C(X)$. Pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$, on a $d_\infty(p_i, p_j) = 1$ car pour tout $x = (x_i)_{i\in I} \in X$, on a $|p_i(x) - p_j(x)| = |x_i - x_j| \leq 1$ et si $y = (y_i)_{i\in I} \in X$, avec $y_i = 1$ et $y_k = 0$ si $k \neq i$, on a $|p_i(y) - p_j(y)| = |y_i| = 1$. Alors $\big(B\big(p_i, \frac{1}{2}\big)\big)_{i\in I}$ est une famille infinie non dénombrable d'ouverts non vides deux à deux disjoints de $(C(X), d_\infty)$. Il résulte de la proposition 1.2.5 que $(C(X), d_\infty)$ n'est pas séparable.

Proposition 3.6.2. *Soient (X, d) un espace métrique compact et $C(X)$ l'ensemble des applications continues de X dans $\mathbb{K}$ muni de la distance de la convergence uniforme d_∞. Soient $f \in C(X)$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe une fonction lipschitzienne g sur X telle que*

$d_\infty(f, g) \le \varepsilon$. Autrement dit, l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur X est dense dans $(C(X), d_\infty)$.

Démonstration. On peut supposer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Comme f est uniformément continue, voir théorème 3.2.3, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in X$ vérifiant $d(x, y) < \eta$, on ait $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Soient $M = \max_{x\in X} |f(x)|$ et $k > 0$ tels que $\frac{2}{k}M < \eta$. Pour tout $x \in X$, on pose $g(x) = \inf_{y\in X} \big\{f(y) + kd(x, y)\big\}$. Comme l'application $x \longmapsto f(y) + kd(x, y)$ est k-lipschitzienne, d'après le lemme 2.3.1, g est k-lipschitzienne. De plus, pour tout $x \in X$, on a $g(x) \le f(x)$. Soient $x, y \in X$ tels que $d(x, y) > \frac{2}{k}M$, alors on a $g(x) \le f(x) - f(y) + f(y) \le 2M + f(y) < f(y) + kd(x, y)$. Comme l'application $y \longmapsto f(y)+kd(x, y)$ est continue et X est compact, on en déduit que pour tout $x \in X$, on a $g(x) = \inf \big\{f(y)+kd(x, y) \ ; \ y \in B'\big(x, \frac{2}{k}M\big)\big\}$, d'où $\inf \big\{f(y) \ ; \ y \in B'\big(x, \frac{2}{k}M\big)\big\} \le g(x)$. Soit $x \in X$. Comme $B'\big(x, \frac{2}{k}M\big)$ est compact, il existe $y_0 \in B'\big(x, \frac{2}{k}M\big)$ tel que $f(y_0) = \inf \big\{f(y) \ ; \ y \in B'\big(x, \frac{2}{k}M\big)\big\}$, d'où on a $f(y_0) \le g(x)$. Donc on a $0 \le f(x) - g(x) \le f(x) - f(y_0) < \varepsilon$ car $d(x, y_0) \le \frac{2}{k}M < \eta$. Par conséquent, on a $d_\infty(f, g) \le \varepsilon$. ■

Définition 3.6.1. Soient X un espace topologique et f une fonction définie sur X et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle **support** de f et on note $\mathrm{Supp}(f)$ l'adhérence de l'ensemble $X \setminus f^{-1}(\{0\})$. Autrement dit, on a $\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in X \ ; \ f(x) \neq 0\}}$.

Remarquons qu'un point x de X n'est pas dans $\mathrm{Supp}\,(f)$ si et seulement s'il existe un voisinage V de x dans X tel que pour tout $y \in V$, on ait $f(y) = 0$.

Exemple 3.6.2. Soit (X, d) un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$. On pose :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{d(a,x)}{r} & \text{si} \quad x \in B(a, r)\,, \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \in X \setminus B(a, r)\,. \end{cases}$$

Alors f est une fonction continue de X dans $[0,\,1]$ et on a $\mathrm{Supp}(f) \subset B'(a, r)$. En effet, comme $f_{|_{B(a,r)}}$ est continue et $B(a, r)$ est un ouvert de X, alors f est continue en tout point de $B(a, r)$. De même, $f_{|_{X\setminus B'(a,r)}}$ est continue et $X \setminus B'(a, r)$ est un ouvert de X, donc f est continue en tout point de $X \setminus B'(a, r)$. Soit $x \in X$ tel que $d(x, a) = r$. Montrons que f est continue en x. Soit $(x_n)_{n\ge 0}$ une suite dans X convergeant vers x. Alors on a $\lim_{n\to+\infty} d(a, x_n) = d(a, x) = r$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge N$, on ait $\left|1 - \frac{d(a,x_n)}{r}\right| < \varepsilon$. Soit $n \ge N$. Si $x_n \in B(a, r)$, alors on a $f(x_n) = 1 - \frac{d(a,x_n)}{r}$, d'où $|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n)| = \left|1 - \frac{d(a,x_n)}{r}\right| < \varepsilon$. Si $x \in X \setminus B(a, r)$, alors on a $f(x_n) = 0 = f(x)$. Donc la suite $(f(x_n))_{n\ge 0}$ converge vers $f(x)$. Donc f est continue en x. Par conséquent, f est une application continue. Il est clair que f est à valeurs dans $[0,\,1]$ et que l'on a $\mathrm{Supp}(f) \subset B'(a, r)$.

Définition 3.6.2. Soient X un espace localement compact et $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ une application.

1. On dit que f **tend vers** 0 **à l'infini** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de X tel que pour tout $x \in X \setminus K$, on ait $|f(x)| < \varepsilon$.

2. On dit que f **est à support compact** s'il existe un compact K de X tel que pour tout $x \in X \setminus K$, on ait $f(x) = 0$. Ceci revient à dire que $\mathrm{Supp}\,(f)$ est compact.

Notations. Soit X un espace localement compact.

1. On note $C_0(X)$ l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{K}$ continues et tendant vers 0 à l'infini.

2. On note $C_c(X)$ l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{K}$ continues et à support compact.

Remarque 3.6.1. Soient X un espace localement compact et $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ son compactifié d'Alexandroff.

1. Pour tout $f \in C_0(X)$, soit :

$$f_\infty(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in X\,, \\ 0 & \text{si} \quad x = \infty\,. \end{cases}$$

Alors $f_\infty \in C(X_\infty)$. Réciproquement, si $g \in C(X_\infty)$ telle que $g(\infty) = 0$, alors $g_{|X} \in C_0(X)$.

2. Soit $f \in C_0(X)$, alors f est bornée. Autrement dit, on a $C_0(X) \subset C_b(X)$. En effet, il existe un compact K de X tel que pour tout $x \in X \setminus K$, on ait $|f(x)| < 1$. Comme la fonction $x \longmapsto |f(x)|$ est continue sur K, d'après le théorème 3.2.2, il existe $\alpha \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq \alpha$, pour tout $x \in K$. Par conséquent, pour tout $x \in X$, on a $|f(x)| \leq \max(1, \alpha)$. Donc f est bornée.

Théorème 3.6.1 (Urysohn). *Soient X un espace localement compact, K un compact de X et U un ouvert de X contenant K. Alors il existe $f \in C_c(X)$ telle que :*

1. *Pour tout $x \in X$, on ait $0 \leq f(x) \leq 1$.*

2. *Pour tout $x \in K$, on ait $f(x) = 1$.*

3. *On ait Supp$(f) \subset U$. En particulier, on a $f(x) = 0$ pour tout $x \in X \setminus U$.*

Démonstration. D'après le théorème 3.4.1, il existe deux ouverts U_1 et U_2 dans X tels que $\overline{U_1}$ et $\overline{U_2}$ soient compacts et $K \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset U_2 \subset \overline{U_2} \subset U$. Comme $\overline{U_2}$ est un espace compact, alors $\overline{U_2}$ est un espace normal, voir corollaire 3.1.3. D'après le théorème 1.9.2, il existe une fonction continue $g : \overline{U_2} \longrightarrow [0,\, 1]$ telle que pour tout $x \in K$, on ait $g(x) = 1$, et pour tout $y \in \overline{U_2} \setminus U_1$, on ait $g(y) = 0$. Soit $f : X \longrightarrow [0,\, 1]$ telle que $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in \overline{U_2}$ et $f(z) = 0$ pour tout $z \in X \setminus \overline{U_2}$. Comme $f_{|\overline{U_2}}$ et $f_{|X \setminus U_1}$ sont continues et $f_{|\overline{U_2}} = f_{|X \setminus U_1}$ sur $\overline{U_2} \cap (X \setminus U_1)$, alors f est continue sur X, voir proposition 1.4.5. Notons enfin que l'on a Supp$(f) \subset \overline{U_2} \subset U$. ■

Remarque 3.6.2. Lorsque X est métrisable dans le théorème précédent, la démonstration est bien plus facile. En effet, d'après le théorème 3.4.1, il existe un ouvert V dans X tel que $\overline{V}$ soit compact et $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Pour tout $x \in X$, il suffit de poser :

$$f(x) = \frac{d(x, X \setminus V)}{d(x, K) + d(x, X \setminus V)}\,.$$

Corollaire 3.6.1. *Si X est un espace localement compact, alors X est un espace complètement régulier.*

Un espace localement compact n'est pas forcément un espace normal, voir exercice 3.57 du supplément.

Proposition 3.6.3. *Soit X un espace localement compact. Si K est un compact de X et $U_1, \ldots, U_n$ sont des ouverts de X tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, alors il existe des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C_c(X)$ telles que :*

1. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $x \in X$, on ait $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$.*
2. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on ait Supp $(\varphi_i) \subset U_i$.*
3. *Pour tout $x \in K$, on ait $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) > 0$.*

Démonstration. D'après le corollaire 3.4.2, il existe des compacts $K_1, \ldots, K_n$ de X tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on ait $K_i \subset U_i$ et $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overset{\circ}{K}_i$, d'où $K = \bigcup_{i=1}^{n} K \cap K_i$. D'après le théorème précédent, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe une fonction continue φ_i de X dans $[0,\, 1]$ telle que pour tout $x \in K \cap K_i$, on ait $\varphi_i(x) = 1$, Supp $(\varphi_i) \subset U_i$ et Supp (φ_i) soit compact. Alors pour tout $x \in K$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) > 0$. ■

Lorsque X est métrisable dans la proposition précédente, la démonstration est bien plus facile et on a un résultat meilleur.

Proposition 3.6.4. *Soit (X, d) un espace métrique localement compact. Si K est un compact de X et $U_1, \ldots, U_n$ sont des ouverts de X tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, alors il existe des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C_c(X)$ telles que :*

1. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $x \in X$, on ait $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$.*
2. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on ait Supp $(\varphi_i) \subset U_i$.*
3. *Pour tout $x \in K$, on ait $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = 1$.*
4. *Pour tout $x \in X$, on ait $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \leq 1$.*

Démonstration. Soient $K_1, \ldots, K_n$ des compacts comme dans le corollaire 3.4.2. Pour tout $x \in X$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il suffit de poser :

$$\varphi_i(x) = \frac{d\big(x, X \setminus \overset{\circ}{K}_i\,\big)}{d(x, K) + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} d\big(x, X \setminus \overset{\circ}{K}_j\,\big)}\,.$$

En particulier, on a Supp $(\varphi_i) \subset K_i \subset U_i$. ■

Théorème 3.6.2 (Tietze). *Soient X un espace localement compact, K un compact de X et U un ouvert de X contenant K. Alors pour tout $f \in C(K)$, il existe $g \in C_c(X)$ telle que $g_{|_K} = f$, Supp(g) $\subset U$ et $\sup\limits_{x\in X} |g(x)| = \sup\limits_{x\in K} |f(x)|$. Autrement dit, pour toute fonction continue $f : K \longrightarrow \mathbb{K}$, il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ prolongeant f telle que Supp(g) soit compact, Supp(g) $\subset U$ et $\sup\limits_{x\in X} |g(x)| = \sup\limits_{x\in K} |f(x)|$.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 3 du supplément.

Proposition 3.6.5. *Soit X un espace localement compact. Alors on a :*

1. *$C_0(X)$ est fermé dans $(C_b(X), d_\infty)$. Donc $(C_0(X), d_\infty)$ est un espace métrique complet.*
2. *$C_c(X)$ est dense dans $(C_0(X), d_\infty)$.*

Démonstration. 1. Notons d'abord que l'on a l'inclusion $C_0(X) \subset C_b(X)$, voir remarque 3.6.1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $C_0(X)$ convergeant vers un élément $f \in C_b(X)$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $d_\infty(f_N, f) < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $f_N \in C_0(X)$, alors il existe un compact K de X tel que pour tout $x \in X \setminus K$, on ait $|f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. D'où, pour tout $x \in X \setminus K$, on a $|f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc on a $f \in C_0(X)$. Par conséquent, $C_0(X)$ est fermé dans $(C_b(X), d_\infty)$. D'après la proposition 2.6.8, $(C_b(X), d_\infty)$ est complet, d'où $(C_0(X), d_\infty)$ est complet, voir proposition 2.6.5.
2. Soient $f \in C_0(X)$ et $\varepsilon > 0$. Soit K un compact dans X tel que pour tout $x \in X \setminus K$, on ait $|f(x)| < \varepsilon$. On applique le théorème d'Urysohn à K et $U = X$, on obtient $\phi \in C_c(X)$ tel que $0 \leq \phi \leq 1$ et $\phi = 1$ sur K. Alors $f\phi \in C_c(X)$ et pour tout $x \in X$, on a $|f(x) - f(x)\phi(x)| < \varepsilon$, d'où $d_\infty(f, f\phi) \leq \varepsilon$. Donc $C_c(X)$ est dense dans $(C_0(X), d_\infty)$. ■

Proposition 3.6.6. *Soit X un espace localement compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) X est métrisable et séparable.

(ii) L'espace métrique $(C_0(X), d_\infty)$ est séparable.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de X, voir théorèmes 3.4.2 et 2.2.1. Soit :

$$C_{K_n}(X) = \big\{f \in C_c(X)\ ;\ \mathrm{Supp}\,(f) \subset K_n\big\}.$$

Alors on a $C_c(X) = \bigcup\limits_{n\geq 0} C_{K_n}(X)$. Or l'application $f \longmapsto f_{|_{K_n}}$ de $C_{K_n}(X)$ dans $C(K_n)$ est une isométrie, donc on peut identifier $C_{K_n}(X)$ à un sous-espace de $C(K_n)$. On déduit de la proposition 3.6.1 que $C_{K_n}(X)$ est séparable. Par conséquent, $C_0(X)$ est séparable.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de X. D'après la remarque 3.6.1, on a $C_0(X) = \big\{f \in C(X_\infty)\ ;\ f(\infty) = 0\big\}$. Puisque $(C_0(X), d_\infty)$ est séparable, on en déduit que $(C(X_\infty), d_\infty)$ est séparable. Il résulte alors de la proposition 3.6.1 que X_∞ est métrisable. D'après la proposition 3.1.7, X_∞ est aussi séparable. Or on a $X \subset X_\infty$, donc X est métrisable et séparable. ■

Remarque 3.6.3. On verra, exercices 6.37 et 6.39, les deux résultats suivants :

1. Soit (X, d) un espace métrique. Alors (X, d) est compact si et seulement si $(C_b(X), d_\infty)$ est séparable.

2. Soit (X, d) un espace métrique localement compact. Alors X est séparable si et seulement si $C_0(X)$ contient une fonction à valeurs strictement positives.

3.7 Applications propres

Définition 3.7.1. Soient X, Y des espaces topologiques, avec X séparé et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que f est **propre**[†] si f est continue et fermée et si pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\})$ est une partie compacte de X.

Remarque 3.7.1. Soient X un espace compact, Y un espace topologique séparé et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Alors f est une application propre.

Proposition 3.7.1. *Soient X, Y des espaces topologiques, avec X séparé et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue injective. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) f est propre.

(ii) f est fermée.

(iii) $f(X)$ est fermé dans Y et f est un homéomorphisme de X sur $f(X)$.

Démonstration. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte de la définition.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Puisque f est fermée, alors $f(X)$ est fermé dans Y et f est une application fermée de X dans $f(X)$. Comme f est continue, bijective et fermée de X dans $f(X)$, alors f est un homéomorphisme de X sur $f(X)$.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). Soit A une partie fermée de X. Comme f est un homéomorphisme de X sur $f(X)$, alors $f(A)$ est fermé dans $f(X)$. Or $f(X)$ est fermé dans Y, donc $f(A)$ est fermé dans Y. Par conséquent, f est une application fermée. Soit $y \in Y$. Si $y \notin f(X)$, alors $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$, donc c'est une partie compacte de X. Supposons $y \in f(X)$. Comme f est un homéomorphisme de X sur $f(X)$ et $\{y\}$ est une partie compacte de $f(X)$, alors $f^{-1}(\{y\})$ est une partie compacte de X. Donc f est une application propre. ■

Remarque 3.7.2. Soient Y un espace topologique séparé et A une partie de Y. Il résulte de la proposition précédente que l'injection canonique $\imath : A \hookrightarrow Y$ est une application propre si et seulement si A est fermé dans Y.

Lemme 3.7.1. *Soient X, Y des espaces topologiques, avec X séparé et $f : X \longrightarrow Y$ une application propre. Pour toute partie fermée A de X et pour toute partie B de Y, les restrictions $f_{|_A} : A \longrightarrow Y$ et $f_B : f^{-1}(B) \longrightarrow B$ sont des applications propres.*

Démonstration. Les applications $f_{|_A}$ et f_B sont continues. Si D est une partie fermée de A, alors D est une partie fermée de X. Or on a $f_{|_A}(D) = f(D)$, donc $f_{|_A}$ est une application fermée. Si $y \in Y$, on a $f_{|_A}^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\{y\}) \cap A$. Or $f^{-1}(\{y\})$ est une partie compacte de X et A est fermée dans X, donc $f_{|_A}^{-1}(\{y\})$ est une partie compacte de A. Par conséquent, $f_{|_A}$ est une application propre. Soit F une partie de X, on a

[†]La terminologie utilisée en anglais pour désigner une application propre est *perfect.*

$f_B\big(F \cap f^{-1}(B)\big) = f(F) \cap B$, donc si F est fermée dans X, alors $f_B\big(F \cap f^{-1}(B)\big)$ est une partie fermée de B. Par conséquent, f_B est une application fermée. Si $y \in B$, $f_B^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\{y\})$, donc $f_B^{-1}(\{y\})$ est une partie compacte de $f^{-1}(B)$. Donc f_B est bien une application propre. ■

Théorème 3.7.1. *Soient X, Y des espaces topologiques, avec X séparé et $f : X \longrightarrow Y$ une application propre. On a :*

1. *L'espace $f(X)$ est séparé.*
2. *Si X est régulier, alors $f(X)$ est aussi régulier.*
3. *Si X est normal, alors $f(X)$ est aussi normal.*
4. *Si X possède une base dénombrable d'ouverts, alors $f(X)$ possède aussi une base dénombrable d'ouverts.*
5. *Si X est métrisable, alors $f(X)$ est aussi métrisable.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 3 du supplément.

Théorème 3.7.2. *Soient X, Y des espaces topologiques, avec X séparé et $f : X \longrightarrow Y$ une application propre. Alors pour toute partie compacte K de Y, l'ensemble $f^{-1}(K)$ est compact dans X.*

Démonstration. Soit K une partie compacte K de Y. Comme la restriction $f_K : f^{-1}(K) \longrightarrow K$ est propre, alors on peut supposer Y compact et il s'agit de montrer que X est compact. Puisque f est une application fermée, alors $f(X)$ est une partie fermée de Y, d'où $f(X)$ est compacte. Donc on peut supposer f surjective. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de X telle que pour tout sous-ensemble fini J de I, on ait $\bigcap\limits_{i\in J} F_i \neq \emptyset$. Il s'agit de montrer qu'alors $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$, voir proposition 3.1.1. Comme f est fermée, alors $(f(F_i))_{i\in I}$ est une famille de fermés dans Y. Soit J un sous-ensemble fini de I. Comme on a $\emptyset \neq f\big(\bigcap\limits_{i\in J} F_i\big) \subset \bigcap\limits_{i\in J} f(F_i)$ et comme Y est compact, alors on a $\bigcap\limits_{i\in I} f(F_i) \neq \emptyset$. Soit $y \in \bigcap\limits_{i\in I} f(F_i)$. Par hypothèse, $f^{-1}(\{y\})$ est une partie compacte de X. Supposons $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \emptyset$, et pour tout $i \in I$, soit $U_i = X \setminus F_i$, alors $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X, donc il existe un sous-ensemble fini J de I tel que $f^{-1}(\{y\}) \subset \bigcup\limits_{i\in J} U_i$. D'où on a $y \in \bigcup\limits_{i\in J} f(U_i) = \bigcup\limits_{i\in J} Y \setminus f(F_i)$, car on a supposé f surjective. Donc on a $y \in Y \setminus \bigcap\limits_{i\in J} f(F_i)$. Autrement dit, $y \notin \bigcap\limits_{i\in J} f(F_i)$, ce qui est impossible. Donc on a bien $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$. Par conséquent, X est compact. ■

Corollaire 3.7.1. *Soient X, Y et Z des espaces topologiques, avec X et Y séparés. Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ des applications propres. Alors $g \circ f$ est une application propre de X dans Z.*

Remarque 3.7.3. Si X est un espace topologique séparé non compact et si Y est un espace compact, on déduit du théorème précédent qu'il n'y a pas d'application propre de X dans Y.

Théorème 3.7.3. *Soient X, Y des espaces topologiques, avec X séparé et $f : X \longrightarrow Y$ une application propre. Alors on a :*

1. *X est compact si et seulement si $f(X)$ est compact.*
2. *X est localement compact si et seulement si $f(X)$ est localement compact.*

Démonstration. Puisque la restriction $f_{f(X)} : X \longrightarrow f(X)$ est propre, on peut supposer que f est surjective, *i.e.* $f(X) = Y$. Il résulte du théorème 3.7.1 que Y est un espace séparé.
1. Si X est compact, alors Y est compact car f est continue.
Réciproquement, si Y est compact, alors X est compact par le théorème précédent.
2. Supposons X localement compact. Soit $y \in Y$, alors $f^{-1}(\{y\})$ est une partie compacte de X. D'après le théorème 3.4.1, il existe un ouvert U de X tel que $\overline{U}$ soit compact et $f^{-1}(\{y\}) \subset U$. Comme f est fermée, d'après la proposition 1.3.6, il existe un voisinage V de y dans Y tel que $f^{-1}(V) \subset U$, d'où $V \subset f(U) \subset f\big(\overline{U}\big)$, avec $f\big(\overline{U}\big)$ compact. On en déduit que Y est localement compact.
Réciproquement, supposons Y localement compact. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de Y telle que $Y = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ et pour tout $i \in I$, $\overline{U_i}$ soit compact. Alors, pour tout $i \in I$, $f^{-1}(U_i)$ est un ouvert de X et on a $X = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(U_i)$. D'après le théorème précédent, pour tout $i \in I$, $f^{-1}\big(\overline{U_i}\big)$ est compact. Donc, pour tout $i \in I$, $\overline{f^{-1}(U_i)}$ est compact. Par conséquent, X est localement compact. ■

Définition 3.7.2. Soit Y un espace topologique séparé. On dit que Y est **engendré par les compacts** si pour toute partie F de Y, F est fermée dans Y si et seulement si pour toute partie compacte K de Y, $F \cap K$ est fermé dans Y.

Lemme 3.7.2. *Soit Y un espace topologique séparé.*

1. *Si Y est localement compact ou vérifie le premier axiome de dénombrabilité, alors Y est engendré par les compacts.*
2. *Supposons que Y est engendré par les compacts. Soient Z un espace topologique et $f : Y \longrightarrow Z$ une application. Alors f est continue si et seulement si pour tout compact K de Y, $f_{|_K}$ est continue.*

Pour une preuve du lemme précédent, voir chapitre 3 du supplément.

Théorème 3.7.4. *Soient X un espace topologique séparé et Y un espace localement compact ou un espace topologique séparé vérifiant le premier axiome de dénombrabilité*[†]*. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'application f est propre.

(ii) Pour toute partie compacte K de Y, la restriction $f_K : f^{-1}(K) \longrightarrow K$ est propre.

(iii) Pour toute partie compacte K de Y, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de X.

[†]Ce théorème est encore valable si on suppose seulement que Y est un espace topologique séparé engendré par les compacts.

Démonstration. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte du lemme 3.7.1. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) résulte du théorème 3.7.2.
Montrons l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i). Vérifions d'abord que $f(X)$ est fermé dans Y. Soit K une partie compacte de Y telle que $f(X) \cap K \neq \emptyset$. Alors $K' = f^{-1}(K)$ est une partie compacte de X, et $f_{|_{K'}} : K' \longrightarrow Y$ est une application fermée, voir théorème 3.2.1. Or on a $f_{|_{K'}}(K') = f(X) \cap K$, donc $f(X) \cap K$ est fermé dans Y. Il résulte du lemme précédent que $f(X)$ est fermé dans Y. Soit F un fermé de X, alors $g = f_{|_F} : F \longrightarrow Y$ est une application continue et pour partie compacte K de Y, on a $g^{-1}(K) = f^{-1}(K) \cap F$, donc $g^{-1}(K)$ est une partie compacte de F. Il résulte de ce qui précède que $f(F) = f_{|_F}(F)$ est fermé dans Y. Donc f est bien une application fermée. Puisque pour tout $y \in Y$, $\{y\}$ est une partie compacte de Y, alors pour tout $y \in Y$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est compact dans X. Par conséquent, f est une application propre. ■

Proposition 3.7.2. *Soient X, Y des espaces localement compacts et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. On note respectivement $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ et $\widetilde{Y} = Y \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de X et Y. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'application f admet un prolongement continue $\widetilde{f} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ tel que $\widetilde{f}(\infty) = \infty$.

(ii) L'application f est propre.

(iii) Le graphe G_f de f est fermé dans $\widetilde{X} \times Y$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Comme $\widetilde{f}$ est continue et comme $\widetilde{X}$ est compact et $\widetilde{Y}$ est séparé, alors $\widetilde{f}$ est propre. Donc la restriction $f = \widetilde{f}_Y : X \longrightarrow Y$ est propre, voir lemme 3.7.1.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Puisque f est continue et X est ouvert dans $\widetilde{X}$, il reste à montrer la continuité de $\widetilde{f}$ en ∞. Soit V_∞ un voisinage de ∞ dans $\widetilde{Y}$. Alors il existe un compact K de Y tel que $\widetilde{Y} \setminus K \subset V_\infty$, d'où on a $\widetilde{X} \setminus f^{-1}(K) = \widetilde{f}^{-1}\big(\widetilde{Y} \setminus K\big) \subset \widetilde{f}^{-1}(V_\infty)$. Comme f est une application propre, alors $f^{-1}(K)$ est un compact de X. Donc $\widetilde{X} \setminus f^{-1}(K)$ est un ouvert de $\widetilde{X}$ contenant ∞, d'où $\widetilde{f}^{-1}(V_\infty)$ est un voisinage de ∞ dans $\widetilde{X}$. Par conséquent, $\widetilde{f}$ est continue en ∞.
Preuve de (i) $\Longrightarrow$ (iii). Puisque $\widetilde{f}$ est continue, alors $G_{\widetilde{f}}$, le graphe de $\widetilde{f}$ est fermé dans $\widetilde{X} \times \widetilde{Y}$, voir exercice 1.32, d'où $G_{\widetilde{f}} \cap (\widetilde{X} \times Y)$ est fermé dans $\widetilde{X} \times Y$. Comme on a $G_{\widetilde{f}} = G_f \cup \{(\infty, \infty)\}$, alors $G_{\widetilde{f}} \cap (\widetilde{X} \times Y) = G_f$. Par conséquent, G_f est fermé dans $\widetilde{X} \times Y$.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Montrons d'abord que f est fermée. L'application $x \longmapsto (x, f(x))$ est fermée de X dans G_f, voir exercice 1.32, et comme G_f est fermé dans $\widetilde{X} \times Y$, alors $x \longmapsto (x, f(x))$ est une application fermée de X dans $\widetilde{X} \times Y$. D'après le théorème 3.2.4, la projection canonique de $\widetilde{X} \times Y$ dans Y est fermée, et comme la composée de deux applications fermées est une application fermée, on en déduit que f est une application fermée de X dans Y. Soit $y \in Y$, alors $\widetilde{X} \times \{y\}$ est fermé dans $\widetilde{X} \times Y$. Or on a $G_f \cap \big(\widetilde{X} \times \{y\}\big) = f^{-1}(\{y\}) \times \{y\}$, donc $f^{-1}(\{y\}) \times \{y\}$ est fermé dans $\widetilde{X} \times Y$. Par conséquent, $f^{-1}(\{y\})$ est fermé dans $\widetilde{X}$, donc $f^{-1}(\{y\})$ est compact dans $\widetilde{X}$, d'où $f^{-1}(\{y\})$ est compact dans X. Par conséquent, f est une application propre. ■

Proposition 3.7.3. *On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ de la topologie usuelle et soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue telle que pour toute partie B de $\mathbb{R}^n$, on ait l'implication : $f(B)$ est borné dans $\mathbb{R}^m \Longrightarrow B$ est borné dans $\mathbb{R}^n$. Alors f est une application propre. En particulier, f est une application fermée.*

Démonstration. Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^m$. Comme f est continue, alors $K' = f^{-1}(K)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$ et on a $f(K') \subset K$. Donc $f(K')$ est borné dans $\mathbb{R}^m$. Par conséquent, K' est borné et fermé dans $\mathbb{R}^n$. D'après le corollaire 3.3.2, K' est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. On déduit du théorème 3.7.4 que f est une application propre. Donc f est une application fermée.
Une autre manière de montrer que f est une application fermée. Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. Soit $y \in \overline{f(F)}$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans F telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = y$. Donc la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ est bornée dans $\mathbb{R}^m$, d'où la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$. D'après le corollaire 3.3.3, il existe une sous-suite convergente $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ de $(x_n)_{n\geq 0}$. Comme F est fermé, alors $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n_k} \in F$, d'où $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{n_k}) = y$. Donc on a $y \in f(F)$, d'où $\overline{f(F)} = f(F)$. Par conséquent, f est une application fermée. ■

Proposition 3.7.4. *Soient X un espace compact et Y un espace topologique séparé, alors la projection canonique $p : X \times Y \longrightarrow Y$ est une application propre.*

Démonstration. La projection canonique p est continue. Comme X est compact, d'après le théorème 3.2.4, p est une application fermée. Soit $y \in Y$, on a $p^{-1}(\{y\}) = X \times \{y\}$, donc $p^{-1}(\{y\})$ est une partie compacte de $X \times Y$. Par conséquent, p est une application propre. ■

Théorème 3.7.5. *Soient X, Y des espaces topologiques, avec X séparé et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'application f est propre.

(ii) Pour tout espace topologique Z, l'application $f \times id_Z : (x,z) \longmapsto (f(x), z)$ de $X \times Z$ dans $Y \times Z$ est fermée.

(iii) Pour tout espace topologique séparé Z, l'application $f \times id_Z : (x,z) \longmapsto (f(x), z)$ de $X \times Z$ dans $Y \times Z$ est propre.

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 3 du supplément.

Proposition 3.7.5. *Soient X, Y des espaces topologiques séparés, Z_1, Z_2 des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Z_1$, $g : Y \longrightarrow Z_2$ des applications propres. Alors l'application suivante est propre.*

$$\begin{array}{rccc} f \times g : & X \times Y & \longrightarrow & Z_1 \times Z_2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (f(x), g(y)) \end{array}$$

Démonstration. Pour montrer que $f \times g$ est propre, d'après le théorème précédent, il suffit de montrer que pour tout espace topologique Z, l'application

$$\begin{array}{rccc} f \times g \times \mathrm{id}_Z : & X \times Y \times Z & \longrightarrow & Z_1 \times Z_2 \times Z \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (f(x), g(y), z) \end{array}$$

est fermée. Comme on a $f \times g \times \mathrm{id}_Z = \big(\mathrm{id}_{Z_1} \times g \times \mathrm{id}_Z\big) \circ \big(f \times \mathrm{id}_Y \times \mathrm{id}_Z\big)$ et $\mathrm{id}_{Z_1} \times g \times \mathrm{id}_Z$, $f \times \mathrm{id}_Y \times \mathrm{id}_Z$ sont des applications fermées car f et g sont propres, on en déduit que $f \times g \times \mathrm{id}_Z$ est fermée. Donc $f \times g$ est bien une application propre. ■

Corollaire 3.7.2. *Soient X un espace topologique séparé, Z_1, Z_2 des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Z_1$, $g : X \longrightarrow Z_2$ des applications propres. Alors l'application suivante est propre.*

$$\begin{array}{rccc} h: & X & \longrightarrow & Z_1 \times Z_2 \\ & x & \longmapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$$

Démonstration. D'après la proposition 3.7.1, l'application

$$\begin{array}{rccc} T: & X & \longrightarrow & X \times X \\ & x & \longmapsto & (x, x) \end{array}$$

est propre car elle est clairement fermée. Comme on a $h = (f \times g) \circ T$, on déduit de la proposition précédente et du corollaire 3.7.1 que h est propre. ■

3.8 Espaces quotients des espaces localement compacts

Théorème 3.8.1. *Soient X un espace compact, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans X, $G(\mathcal{R})$ son graphe dans $X \times X$ et $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ est séparé.

(ii) Le graphe $G(\mathcal{R})$ est fermé dans $X \times X$.

(iii) La relation $\mathcal{R}$ est fermée.

(iv) L'application quotient q est propre.

En outre, lorsque ces propriétés sont vérifiées, alors l'espace $X/\mathcal{R}$ est compact.

Démonstration. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte de la proposition 1.5.6.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $p_2 : (x, y) \longmapsto y$ la deuxième projection canonique de $X \times X$ sur X. Soit F une partie fermée de X, alors $(F \times X) \cap G(\mathcal{R})$ est fermé dans $X \times X$, donc $(F \times X) \cap G(\mathcal{R})$ est une partie compacte de $X \times X$. Comme on a $q^{-1}(q(F)) = \{y \in X \ ;\ \text{il existe } x \in F \text{ avec } x\mathcal{R}y\} = p_2\big((F \times X) \cap G(\mathcal{R})\big)$ et p_2 est continue, alors $q^{-1}(q(F))$ est une partie fermée de X. Par conséquent, q est une application fermée. Autrement dit, la relation $\mathcal{R}$ est fermée.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (iv). L'application q est continue, et dire que $\mathcal{R}$ est fermée cela signifie que q est une application fermée. Soit $x \in X$, d'où $q^{-1}(\{q(x)\})$ est fermé dans X qui est compact, donc $q^{-1}(\{q(x)\})$ est une partie compacte de X. Par conséquent, q est une application propre.
L'implication (iv) $\Longrightarrow$ (i) résulte du théorème 3.7.1.
Lorsque ces propriétés sont vérifiées, il résulte du théorème 3.2.1 que $X/\mathcal{R}$ est compact. ■

Proposition 3.8.1. *Soient X un espace compact, Y un espace topologique séparé et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue surjective, alors la relation d'équivalence $\mathcal{R}_f$ dans X est fermée et l'application canonique $\widetilde{f} : X/\mathcal{R}_f \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme. En particulier, l'espace quotient $X/\mathcal{R}_f$ est compact.*

Démonstration. Ceci résulte du corollaire 1.4.1 et du théorème 3.2.1. ■

Théorème 3.8.2. *Si (X, d) est un espace métrique compact et si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence fermée dans X, alors l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ est compact et métrisable.*

Démonstration. Ceci résulte des théorème 3.8.1 et 3.7.1. ■

Théorème 3.8.3. *Soient X un espace localement compact, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans X, $G(\mathcal{R})$ son graphe dans $X \times X$ et $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient. Soient $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de X et $\mathcal{R}_\infty$ la relation d'équivalence dans $\widetilde{X}$ dont le graphe est $G(\mathcal{R}) \cup \{(\infty, \infty)\}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'application quotient q est propre.

(ii) Le saturé pour $\mathcal{R}$ de toute partie compacte de X est un ensemble compact.

(iii) La relation $\mathcal{R}_\infty$ est fermée.

(iv) La restriction à $G(\mathcal{R})$ de l'application $(x, y) \longmapsto y$ de $X \times X$ dans X est propre.

(v) La relation $\mathcal{R}$ est fermée et les classes suivant $\mathcal{R}$ sont compactes.

En outre, lorsque ces propriétés sont vérifiées, alors l'espace $X/\mathcal{R}$ est localement compact.

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 3 du supplément.

3.9 Exercices

Exercice 3.1. Soit $I =]0, 1[$ de $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in I$, on considère $U_x = \left]\frac{x}{2}, x\right[$. Montrer que $\left(U_x\right)_{x\in I}$ est un recouvrement ouvert de I qui n'admet aucun sous-recouvrement ouvert fini. En déduire que I n'est pas compact.
Solution. Pour tout $z \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, on a $z \in U_1$. Soit $z \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, alors $x = \frac{4}{3}z \in I$ et on a $z \in U_x$. Donc on a $I = \bigcup\limits_{x\in I} U_x$. Autrement dit, $\left(U_x\right)_{x\in I}$ est un recouvrement ouvert de I. Soit $\{x_1, \dots, x_n\}$ un sous-ensemble fini de I. Soit $\alpha = \inf\limits_{1\leq i\leq n} \frac{x_i}{2}$, alors $\alpha \in I$ et on a $]0, \alpha[\cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i} = \emptyset$. Donc $\left(U_x\right)_{x\in I}$ n'admet aucun sous-recouvrement ouvert fini de I. Par conséquent, I n'est pas compact.

Exercice 3.2. Soient X un espace compact et U un ouvert de X.

1. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de parties fermées de X telle que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \subset U$. Montrer qu'il existe un sous-ensemble fini J de I tel que $\bigcap\limits_{i\in J} F_i \subset U$.

2. En déduire que si $(K_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de parties fermées de X telle que $\bigcap\limits_{n\geq 0} K_n \subset U$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K_{n_0} \subset U$.

Solution. 1. Pour tout $i \in I$, soit $U_i = X \setminus F_i$, alors U_i est un ouvert de X et on a $X \setminus U \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Donc les ouverts U_i et U forment un recouvrement ouvert de X. Comme X est un espace compact, il existe alors un sous-ensemble fini J de I tel que $X = U \cup \bigcup_{i\in J} U_i$, d'où on a $\emptyset = \big(X \setminus U\big) \cap \bigcap_{i\in J} F_i$. Par conséquent, on a $\bigcap_{i\in J} F_i \subset U$.
2. D'après 1, il existe un sous-ensemble fini J de $\mathbb{N}$ tel que $\bigcap_{n\in J} K_n \subset U$. Soit $n_0 = \max(J)$, alors $n_0 \in \mathbb{N}$ et on a $K_{n_0} = \bigcap_{n\in J} K_n$, d'où $K_{n_0} \subset U$.

Exercice 3.3. Soient X un espace topologique séparé et $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X. Montrer que X est compact si et seulement si de tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X par des éléments de $\mathcal{B}$, on peut extraire un sous-recouvrement fini.
Solution. Si X est compact, il résulte immédiatement de la définition que de tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X par des éléments de $\mathcal{B}$, on peut extraire un sous-recouvrement fini.
Réciproquement, soit $(V_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de X. Comme $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X, pour tout $j \in J$, il existe un ensemble I_j tel que $V_j = \bigcup_{i\in I_j} U_{j,i}$, où $U_{j,i}$ est un élément de $\mathcal{B}$. Soit $D = \{(j,i)\ ;\ j \in J \text{ et } i \in I_j\}$, alors $(U_{j,i})_{(j,i)\in D}$ est un recouvrement ouvert de X par des éléments de $\mathcal{B}$. Par hypothèse, il existe un sous-ensemble fini E de D tel que $X = \bigcup_{(j,i)\in E} U_{j,i}$. Soit $J' = \big\{j \in J\ ;\ \text{il existe } i \in I_j \text{ avec } (j,i) \in E\big\}$, alors J' est un sous-ensemble fini de J et on a $X = \bigcup_{j\in J'} V_j$. Donc X est un espace compact.

Exercice 3.4. Soit $E = C([0,\, 2\pi], \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,\, 2\pi]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, muni de la distance de la convergence uniforme d_∞. On considère la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ dans E définie par $f_n(x) = e^{inx}$, pour tout $x \in [0,\, 2\pi]$. Calculer $d_\infty(f_n, f_p)$. En déduire que $B'(0,1)$, la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 dans E, n'est pas compacte.
Solution. Pour tout $f, g \in E$, on a $d_\infty(f,g) = \sup_{0\leq x\leq 2\pi} |f(x) - g(x)|$. Pour tout $n \geq 0$, on a $d_\infty(0, f_n) = 1$, donc $f_n \in B'(0,1)$. Pour $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq p$, par exemple $p > n$, on a $d_\infty(f_n, f_p) = \sup_{0\leq x\leq 2\pi} |e^{inx} - e^{ipx}| = \sup_{0\leq x\leq 2\pi} |1 - e^{i(p-n)x}| \leq 2$, et si $x = \frac{\pi}{p-n}$, on a $|1 - e^{i(p-n)x}| = 2$, donc $d_\infty(f_n, f_p) = 2$. Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ n'admet aucune sous-suite convergente. On déduit du théorème 3.1.3 que $B'(0,1)$ n'est pas compacte.

Exercice 3.5. Soit $E = C([0,\, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur $[0,\, 1]$, muni de la distance de la convergence uniforme d_∞. Soit f un élément fixé de E. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} T: & [0,\, 1] & \longrightarrow & E \\ & t & \longmapsto & f_t \end{array}$$

où $f_t(x) = f(tx)$, pour tout $x \in [0,\, 1]$, est continue. En déduire que l'ensemble $\big\{f_t\ ;\ t \in [0,\, 1]\big\}$ est un compact de $(E,\, d_\infty)$.
Solution. Pour tous $t, s \in [0,\, 1]$, on a :

$$d_\infty(f_t, f_s) = \sup_{0\leq x\leq 1} |f_t(x) - f_s(x)| = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(tx) - f(sx)|\,.$$

Comme $[0,\, 1]$ est un compact et f est continue sur $[0,\, 1]$, alors f est uniformément continue sur [0, 1], donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $\alpha, \beta \in [0, 1]$ vérifiant $|\alpha - \beta| < \eta$, on ait $|f(\alpha) - f(\beta)| < \varepsilon$. Alors pour tous $t, s \in [0, 1]$ tels que $|t - s| < \eta$ et pour tout $x \in [0, 1]$, on a $|tx - sx| \leq |t - s| < \eta$, d'où $|f(tx) - f(sx)| < \varepsilon$. Donc on a $d_\infty(f_t, f_s) \leq \varepsilon$. Par conséquent, l'application T est continue de [0, 1] dans (E, d_∞), donc l'ensemble $T([0, 1]) = \{f_t \; ; \; t \in [0, 1]\}$ est un compact de (E, d_∞).

Exercice 3.6. Soient (X, d) un espace métrique compact et $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'ouverts de X telle que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i = X$. On suppose que pour tout i, $U_i \neq X$. Pour tout $x \in X$, on pose $f(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} d(x, X \setminus U_i)$.

1. Vérifier que f est continue et que pour tout $x \in X$, on a $f(x) > 0$.
2. Soit $r = \inf\limits_{x\in X} f(x)$. Montrer que $r > 0$ et que pour tout $x \in X$, il existe i tel que $B(x, r) \subset U_i$.

Solution. 1. Pour tout i, l'application $x \longmapsto d(x, X\setminus U_i)$ est continue, donc f est continue. Comme on a $\bigcap\limits_{i=1}^{n} X \setminus U_i = \emptyset$, alors pour tout $x \in X$, il existe i tel que $x \notin X \setminus U_i$. Or $X \setminus U_i$ est fermé dans X, donc $d(x, X \setminus U_i) > 0$, d'où on a $f(x) > 0$.
2. Comme f est continue et X est compact, alors il existe $x_0 \in X$ tel que $r = \inf\limits_{x\in X} f(x) = f(x_0) > 0$. Soit $x \in X$. Soit $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $d(x, X \setminus U_{i_0}) = \max\limits_{1\leq i\leq n} d(x, X \setminus U_i)$, alors on a $r \leq f(x) \leq d(x, X \setminus U_{i_0})$. D'où on a $B(x, r) \subset U_{i_0}$.

Exercice 3.7. Soient (X, d) un espace métrique compact et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de X telle que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \emptyset$. Montrer qu'il existe un $r > 0$ tel que toute partie de X qui rencontre tous les F_i ait un diamètre au moins égal à r.
Solution. Pour tout $i \in I$, soit $U_i = X \setminus F_i$, alors $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X. D'après la proposition 3.1.5 et le lemme 3.1.1, il existe $r > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon r soit contenue dans au moins un des U_i. Soit A une partie non vide de X telle que $\delta(A) < r$. Soit $a \in A$, alors on a $A \subset B(a, r)$ et il existe $i \in I$ tel que $B(a, r) \subset U_i$, d'où $A \subset U_i = X \setminus F_i$. Donc on a $A \cap F_i = \emptyset$. Par conséquent, toute partie de X qui rencontre tous les F_i a un diamètre au moins égal à r.

Exercice 3.8. Soient K un compact de l'espace métrique (X, d) et $r > 0$.

1. Montrer que $F = \bigcup\limits_{x\in K} B'(x, r)$ est fermé dans (X, d).
2. Montrer que $U = \bigcap\limits_{x\in K} B(x, r)$ est ouvert dans (X, d).

Solution. 1. Soient $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite dans F et $y \in X$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$. Pour tout $n \geq 0$, il existe $a_n \in K$ tel que $d(a_n, y_n) \leq r$. Puisque K est compact, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ admet une sous-suite convergente $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ vers un élément $a \in K$, d'où on a $\lim\limits_{k\to+\infty} d(a_{n_k}, y_{n_k}) = d(a, y)$. Par conséquent, on a $d(a, y) \leq r$, d'où $y \in B'(a, r) \subset F$. Donc F est fermé dans (X, d).
2. Montrons que $X \setminus U = \bigcup\limits_{x\in K} X \setminus B(x, r)$ est fermé dans (X, d). Soient $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite

dans $X \setminus U$ et $y \in X$ tels que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = y$. Pour tout $n \geq 0$, il existe $x_n \in K$ tel que $d(x_n, y_n) \geq r$. Puisque K est compact, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ admet une sous-suite convergente $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ vers un élément $x \in K$, d'où on a $\lim\limits_{k \to +\infty} d(x_{n_k}, y_{n_k}) = d(x, y)$. Par conséquent, on a $d(x, y) \geq r$, d'où $y \in X \setminus B(x, r) \subset X \setminus U$. Donc $X \setminus U$ est fermé dans (X, d).

Exercice 3.9. Soit (X, d) un espace métrique tel que pour tout $x \in X$, la boule fermée $B'(x, 1)$ soit compacte. Soient $\lambda \in [0, 1[$ et K une partie compacte de X. Montrer que $K' = \{x \in X \ ; \ d(x, K) \leq \lambda\}$ est une partie compacte de X.
Solution. Puisque l'application $x \longmapsto d(x, K)$ est continue de X dans $\mathbb{R}$, alors K' est fermé dans X. Soit $\alpha \in]\lambda, 1[$. Pour tout $y \in K'$, il existe $x \in K$ tel que $d(y, x) < \alpha$. D'où on a $K' \subset \bigcup\limits_{x \in K} B(x, \alpha)$. Comme K est un compact, il existe un sous-ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de K tel que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, 1 - \alpha)$. Soit $y \in K'$, il existe $x \in K$ tel que $d(y, x) < \alpha$ et il existe $x_i \in K$ tel que $d(x, x_i) < 1 - \alpha$, d'où on a $d(y, x_i) < 1$. Par conséquent, on a $K' \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B'(x_i, 1)$. Or $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B'(x_i, 1)$ est un compact, donc K' est une partie compacte de X.

Exercice 3.10. Soient K une partie compacte non vide d'un espace métrique (X, d) et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans X telle que la suite de réelle $(d(x_n, K))_{n\geq 0}$ tende vers 0. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$ convergeant vers un point de K.
Solution. Pour tout $n \geq 0$, il existe $a_n \in K$ tel que $d(x_n, a_n) < d(x_n, K) + \frac{1}{n+1}$. Comme K est compacte, il existe une sous-suite convergente $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ de $(a_n)_{n\geq 0}$. Soit $a = \lim\limits_{k \to +\infty} a_{n_k}$, alors $a \in K$ et pour tout $k \geq 0$, on a $0 \leq d(x_{n_k}, a) \leq d(x_{n_k}, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, a) < d(x_{n_k}, K) + \frac{1}{n_k+1} + d(a_{n_k}, a)$. Donc on a $\lim\limits_{k \to +\infty} d(x_{n_k}, a) = 0$, *i.e.* la sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ converge vers a.

Exercice 3.11. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie compacte de X.

1. Montrer que pour tout x de X, il existe a dans A tel que $d(x, a) = d(x, A)$.

2. Montrer que si B est une partie compacte de X, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $d(a, b) = d(A, B)$.

3. Montrer que si B est une partie fermée de X telle que $A \cap B = \emptyset$, alors : $d(A, B) > 0$ [†].

4. Donner un exemple de deux parties fermées disjointes de distance nulle.

Solution. 1. Soit $x \in X$, l'application $a \longmapsto d(x, a)$ est continue du compact A dans $\mathbb{R}$, donc il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) = \inf\limits_{\alpha \in A} d(x, \alpha)$. Par définition, on a $\inf\limits_{\alpha \in A} d(x, \alpha) = d(x, A)$, d'où $d(x, a) = d(x, A)$.
2. L'application $(a, b) \longmapsto d(a, b)$ est continue du compact $A \times B$ dans $\mathbb{R}$, donc il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $d(a, b) = \inf\limits_{(\alpha,\beta) \in A \times B} d(\alpha, \beta)$. Par définition, on a $\inf\limits_{(\alpha,\beta) \in A \times B} d(\alpha, \beta) = d(A, B)$, d'où $d(a, b) = d(A, B)$.

[†] Dans ce cas, la distance $d(A, B)$ n'est pas toujours atteinte, voir exercice 6.45.

3. L'application $a \longmapsto d(a, B)$ est continue du compact A dans $\mathbb{R}$, donc il existe $a \in A$ tel que $d(a, B) = \inf\limits_{\alpha \in A} d(\alpha, B)$. Par définition, on a $\inf\limits_{\alpha \in A} d(\alpha, B) = d(A, B)$, d'où $d(A, B) = d(a, B) > 0$ car $a \notin B$ et B est fermée dans X.
4. Soient $X = \mathbb{R}^2$ muni de la distance usuelle d_2, $A = \{(x, 0)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right)\ ;\ x \in \mathbb{R}^*\right\}$. Alors A et B sont deux parties fermées de X telles que $A \cap B = \emptyset$, mais on a $0 \leq d(A, B) \leq d_2\big((n, 0), \left(n, \frac{1}{n}\right)\big) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$. D'où on a $d(A, B) = 0$.

Exercice 3.12. Soient A une partie non vide d'un espace métrique $(X,\, d)$ et $\varepsilon > 0$. On pose, $U(A, \varepsilon) = \{x \in X\ ;\ d(x, A) < \varepsilon\}$.

1. Montrer que l'on a $U(A, \varepsilon) = \bigcup\limits_{a \in A} B(a, \varepsilon)$.

2. Montrer que si A est compact et si U est un ouvert de X tels que $A \subset U$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $U(A, \varepsilon) \subset U$.

3. Montrer que le résultat dans 2 n'est pas en général vrai si A est fermé non compact.

Solution. 1. Soit $x \in \bigcup\limits_{a \in A} B(a, \varepsilon)$, alors il existe $a \in A$ tel que $x \in B(a, \varepsilon)$, d'où $d(x, a) < \varepsilon$. Donc on a $d(x, A) \leq d(x, a) < \varepsilon$. Par conséquent, on a $x \in U(A, \varepsilon)$, d'où $\bigcup\limits_{a \in A} B(a, \varepsilon) \subset U(A, \varepsilon)$.
Réciproquement, soit $x \in U(A, \varepsilon)$, alors on a $d(x, A) < \varepsilon$. Comme on a $d(x, A) = \inf\limits_{a \in A} d(x, a)$, alors il existe $b \in A$ tel que $d(x, b) < \varepsilon$. D'où on a $x \in B(b, \varepsilon) \subset \bigcup\limits_{a \in A} B(a, \varepsilon)$.
Par conséquent, on a $U(A, \varepsilon) \subset \bigcup\limits_{a \in A} B(a, \varepsilon)$. D'où on a l'égalité $U(A, \varepsilon) = \bigcup\limits_{a \in A} B(a, \varepsilon)$.
2. Soit $F = X \setminus U$, alors F est un fermé de X tel que $A \cap F = \emptyset$, et on peut supposer $F \neq \emptyset$, sinon le résultat est trivial. D'après l'exercice précédent, on a $\varepsilon = d(F, A) > 0$. Soit $x \in U(A, \varepsilon)$. Si $x \in F$, alors on a $d(x, A) \geq d(F, A) = \varepsilon$, ce qui est impossible. Donc $x \notin F$, d'où $x \in X \setminus F = U$. Par conséquent, on a $U(A, \varepsilon) \subset U$.
3. Soient $X = \mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ xy = 1 \text{ et } x > 0\}$ et $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x > 0 \text{ et } y > 0\}$. Alors A est fermé non compact de $\mathbb{R}^2$, U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $A \subset U$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a $U(A, \varepsilon) \not\subset U$.

Exercice 3.13. Soient $(X,\, d)$ un espace métrique compact et W un ouvert de $X \times X$ contenant la diagonale $\Delta = \{(x, x)\ ;\ x \in X\}$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in X \times X$ vérifiant $d(x, y) < r$, on ait $(x, y) \in W$.
Solution. Une distance définissant la topologie produit sur $X \times X$ est donnée par :

$$d_\infty\big((x, y), (x', y')\big) = \max\big(d(x, x'), d(y, y')\big)\,.$$

Puisque la diagonale Δ est une partie compacte de $X \times X$, d'après l'exercice précédent, il existe $r > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in X \times X$ vérifiant $d_\infty\big((x, y), \Delta\big) < r$, on ait $(x, y) \in W$. Soit $(x, y) \in X \times X$ tel que $d(x, y) < r$, alors on a $d_\infty\big((x, y), (x, x)\big) = d(x, y)$, d'où $d_\infty\big((x, y), \Delta\big) \leq d_\infty\big((x, y), (x, x)\big) < r$. Par conséquent, on a $(x, y) \in W$.

Exercice 3.14. Soit $(X,\, d)$ un espace métrique compact et $(K_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de fermés non vides de X. On pose $K = \bigcap\limits_{n \geq 0} K_n$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \delta(K_n) = \delta(K)$, où δ désigne le diamètre.

Solution. D'après la proposition 3.1.5, $K \neq \emptyset$. Pour tout $n \geq 0$, on a $K \subset K_{n+1} \subset K_n$, d'où $\delta(K) \leq \delta(K_{n+1}) \leq \delta(K_n)$. Donc la suite $(\delta(K_n))_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée par $\delta(K)$. Par conséquent, la suite $(\delta(K_n))_{n\geq 0}$ converge et on a $\delta(K) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \delta(K_n)$. Si l'on a $\delta(K) < \lim\limits_{n\to+\infty} \delta(K_n)$, alors il existe α tel que $\delta(K) < \alpha < \lim\limits_{n\to+\infty} \delta(K_n)$. D'où on a $\delta(K) < \alpha < \delta(K_n)$ pour tout $n \geq 0$. On en déduit que pour tout $n \geq 0$, il existe $x_n, y_n \in K_n$ tels que $\alpha < d(x_n, y_n)$. Puisque X est compact, il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ et $(y_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ convergent respectivement vers $x, y \in X$. Soit $p \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq p$, on a $\varphi(n) \geq \varphi(p) \geq p$, d'où $x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)} \in K_{\varphi(n)} \subset K_p$. Donc on a $x, y \in K_p$. Ceci étant vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$, d'où $x, y \in K$. Or on a $d(x, y) = \lim\limits_{n\to+\infty} (x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \geq \alpha$, d'où $\delta(K) < \alpha \leq d(x, y)$, ce qui est impossible. Donc on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(K_n) = \delta(K)$.
Un autre méthode pour montrer que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(K_n) = \delta(K)$. Pour tout $(x, y) \in X \times X$, soit $f(x, y) = d(x, y)$, alors f est continue sur $X \times X$ et on a $\sup\limits_{(x,y)\in K\times K} f(x, y) = \delta(K)$. Soit $\varepsilon > 0$, alors $f^{-1}\big([0,\, \delta(K) + \varepsilon[\big)$ est un ouvert de $X \times X$ contenant $K \times K$. D'après la proposition 3.1.4, il existe un ouvert U de X contenant K tel que $K \times K \subset U \times U \subset f^{-1}\big([0,\, \delta(K) + \varepsilon[\big)$. D'où pour tout $(x, y) \in U \times U$, on a $f(x, y) \leq \delta(K) + \varepsilon$. Donc on a $\delta(U) \leq \delta(K) + \varepsilon$. D'après l'exercice 3.2, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $K_n \subset U$, d'où $\delta(K_n) \leq \delta(U)$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(K_n) \leq \delta(U) \leq \delta(K) + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(K_n) \leq \delta(K)$. Donc on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(K_n) = \delta(K)$.

Exercice 3.15. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{R}$ qui n'admet aucune valeur d'adhérence.

1. Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est minorée, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$.
2. Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est majorée, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ tend vers $-\infty$.

Solution. 1. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq 0$, on ait $M \leq x_n$. Supposons que $(x_n)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers $+\infty$. Alors il existe $A > 0$ tel que pour tout $k \geq 0$, il existe $n \geq k$ tel que $x_n \leq A$. On construit, par récurrence, une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ de $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout $k \geq 0$, on ait $x_{n_k} \leq A$. En effet, soit $n_0 = \inf\big\{n \geq 0 \;;\; x_n \leq A\big\}$. Soit $k \geq 1$ et supposons n_{k-1} construit, on pose alors $n_k = \inf\big\{n > n_{k-1} \;;\; x_n \leq A\big\}$. Alors $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ est une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout $k \geq 0$, on ait $M \leq x_{n_k} \leq A$. Puisque l'intervalle $[M,\, A]$ est compact, il résulte de la proposition 3.1.5 que $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ possède une valeur d'adhérence. On déduit de la proposition 1.7.2 que $(x_n)_{n\geq 0}$ possède une valeur d'adhérence, ce qui est impossible. Donc $(x_n)_{n\geq 0}$ tend bien vers $+\infty$.
2. Pour tout $n \geq 0$, on pose $y_n = -x_n$, alors $(y_n)_{n\geq 0}$ est une suite minorée dans $\mathbb{R}$ et n'admet aucune valeur d'adhérence. On déduit de 1 que $(y_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$, donc $(x_n)_{n\geq 0}$ tend vers $-\infty$.

Exercice 3.16. On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance euclidienne d_2. Soit $\lambda > 0$ et posons $K = \bigcup\limits_{n\geq 1} B'_n$, où $B'_n = B'\big(\big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\big),\, \frac{\lambda}{n}\big)$ est la boule fermée de centre $\big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\big)$ et de rayon $\frac{\lambda}{n}$ dans $\mathbb{R}^2$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que K soit compact.
Solution. Supposons d'abord que K est compact. Pour tout $n \geq 1$, on a $\big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\big) \in K$ et on a $(0, 0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\big)$, d'où $(0, 0) \in K$. Donc il existe $n \geq 1$ tel que $(0, 0) \in B'_n$.

Autrement dit, il existe $n \geq 1$ tel que $d_2\big((\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), (0,0)\big) \leq \frac{\lambda}{n}$, d'où $\frac{\sqrt{2}}{n} \leq \frac{\lambda}{n}$. Donc on a $\lambda \geq \sqrt{2}$.
Réciproquement, supposons $\lambda \geq \sqrt{2}$. Montrons que pour tout $n \geq 1$, on a $B_{n+1} \subset B_n$. Soit $(x, y) \in B_{n+1}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} d_2\big((x,y), (\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n})\big) &\leq d_2\big((x,y), (\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n+1})\big) + d_2\big((\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n+1}), (\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n})\big) \\ &\leq \tfrac{\lambda}{n+1} + \tfrac{\sqrt{2}}{n(n+1)} \\ &\leq \tfrac{\lambda}{n+1} + \tfrac{\lambda}{n(n+1)} = \tfrac{\lambda}{n}. \end{aligned}$$

Donc on a $(x, y) \in B_n$, d'où $B_{n+1} \subset B_n$. Par conséquent, on a $K = B'((1, 1), \lambda)$, donc K est compact. En conclusion, K est compact si et seulement si $\lambda \geq \sqrt{2}$.

Exercice 3.17. Soient X un espace compact, Y un espace topologique séparé et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Montrer que si $(F_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de fermés de X, alors on a $f\big(\bigcap_{n\geq 0} F_n\big) = \bigcap_{n\geq 0} f(F_n)$.

Solution. Il est clair que l'on a $f\big(\bigcap_{n\geq 0} F_n\big) \subset \bigcap_{n\geq 0} f(F_n)$.
Réciproquement, soit $y \in \bigcap_{n\geq 0} f(F_n)$, alors pour tout $n \geq 0$, il existe $x_n \in F_n$ tel que $f(x_n) = y$. Puisque X est compact, d'après la proposition 3.1.5, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ possède une valeur d'adhérence x dans X. D'après la proposition 1.7.1, on a $x \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{x_p \ ; \ p \geq n\}}$. Comme pour tout $n \geq 0$, F_n est fermé dans X et on a $\{x_p \ ; \ p \geq n\} \subset F_n$, alors on a $x \in \bigcap_{n\geq 0} F_n$. Il s'agit maintenant de montrer que l'on a $f(x) = y$. Soit V un voisinage de $f(x)$ dans Y. Comme f est continue en x, il existe un voisinage U de x dans X tel que $f(U) \subset V$. Comme pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $x_n \in U$, d'où il existe $n \geq 0$ tel que $f(x_n) \in V$. Donc on a $y \in V$. Par conséquent, pour tout voisinage V de $f(x)$ dans Y, on a $y \in V$, donc $y = f(x)$ car Y est séparé. Donc on a $y \in f\big(\bigcap_{n\geq 0} F_n\big)$, d'où $f\big(\bigcap_{n\geq 0} F_n\big) = \bigcap_{n\geq 0} f(F_n)$.

Exercice 3.18. Soient X un espace compact non vide et $f : X \longrightarrow X$ une application continue. Montrer qu'il existe un compact non vide K de X tel que $f(K) = K$.

Solution. Pour tout $n \geq 1$, on pose $K_n = f^n(X)$, où $f^n = f \circ f \circ f \cdots \circ f$, l'application f composée avec elle-même n fois. Alors K_n est un compact non vide de X et on a $K_{n+1} = f^{n+1}(X) = f^n(f(X)) \subset f^n(X) = K_n$. Donc $(K_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de compacts non vides dans X, d'où $K = \bigcap_{n\geq 0} K_n$ est un compact non vide de X. D'après l'exercice précédent, on a $f(K) = f\big(\bigcap_{n\geq 0} K_n\big) = \bigcap_{n\geq 0} f(K_n) = \bigcap_{n\geq 0} K_{n+1} = K$.

Exercice 3.19. Soient (X, d), (Y, d') des espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

1. Montrer que f est continue si et seulement si $f_{|_K}$ est continue pour tout compact K de X.

2. On suppose que f est injective et que l'image par f de toute partie compacte de X soit une partie compacte de Y. Montrer qu'alors f est continue.

3. Donner un contre-exemple montrant que le résultat dans 2 n'est plus vrai si f n'est pas injective.

Solution. 1. Ceci résulte du lemme 3.7.2, mais donnons une preuve directe. Si f est continue, alors la restriction de f à toute partie A de X est continue, voir proposition 1.4.3.
Réciproquement, supposons que pour tout compact K de X, $f_{|_K}$ est continue sur K. Soient $x \in X$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans X telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Alors l'ensemble $K = \{x\} \cup \{x_n \ ; \ n \geq 0\}$ est un compact de X, voir exemple 3.1.1. Comme $f_{|_K}$ est continue en x, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$. Par conséquent, f est continue en x, donc f est continue sur X.
2. Soit K une partie compacte de X. Alors $f(K)$ est une partie compacte de Y. Soit $g : K \longrightarrow f(K)$ définie par $g(x) = f(x)$, pour tout $x \in K$. Alors g est une application bijective. Soit F un fermé de K, alors F est un compact, donc $g(F) = f(F)$ est un compact, d'où $g(F)$ est une partie fermée de $f(K)$. Par conséquent, l'application g^{-1} est continue. On déduit du théorème 3.2.1 que g est continue, d'où $f_{|_K}$ est continue. Il résulte de 1 que f est continue.
3. Soit $X = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \ ; \ n \geq 0 = 1\right\}$, alors X est un espace métrique compact. Soit $f : X \longrightarrow X$ définie par $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ pour tout $n \geq 1$. Alors pour tout compact K de X, $f(K)$ est un compact de X, f n'est pas injective et elle n'est pas continue en 0.

Exercice 3.20. Soient X un espace topologique, K une partie compacte de X, Y un espace topologique séparé et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. On suppose que la restriction de f à K est injective et que pour tout $x \in K$, il existe un voisinage ouvert V_x de x dans X tel que la restriction de f à V_x soit injective.

1. Posons $D = \{(x, z) \in X \times X \ ; \ f(x) \neq f(z)\} \cup \{(x, x) \ ; \ x \in X\}$. Montrer que si A est un sous-ensemble de X, alors la restriction de f à A est injective si et seulement si $A \times A \subset D$.

2. Montrer qu'il existe un ouvert W de $X \times X$ tel que $K \times K \subset W \subset D$.

3. Montrer qu'il existe un ouvert U de X tel que $K \subset U$ et la restriction de f à U soit injective.

Solution. 1. Soit A un sous-ensemble de X. Il est clair que si $A \times A \subset D$, alors la restriction de f à A est injective.
Réciproquement, supposons que la restriction de f à A soit injective. Pour tout $x \in A$, on a $(x, x) \in D$. Soient $x, z \in A$ tels que $x \neq z$, alors on a $f(x) \neq f(z)$, d'où $(x, z) \in D$. Par conséquent, on a $A \times A \subset D$.
2. Soit $x \in K$. Par hypothèse, il existe un voisinage ouvert V_x de x dans X tel que la restriction de f à V_x soit injective. Il résulte alors de 1 que l'on a $(x, x) \in V_x \times V_x \subset D$. Soient $x, z \in K$ tels que $x \neq z$, alors on a $f(x) \neq f(z)$. Comme Y est séparé, il existe deux ouverts disjoints U_x et U_z dans Y tels que $f(x) \in U_x$ et $f(z) \in U_z$. Comme f est continue, alors il existe deux ouverts V_x et V_z dans X tels que $x \in V_x$, $z \in V_z$, $f(V_x) \subset U_x$ et $f(V_z) \subset U_z$. Par conséquent, pour tout $a \in V_x$ et pour tout $b \in V_z$, on a $f(a) \neq f(b)$, d'où on a $(x, z) \in V_x \times V_z \subset D$. Par conséquent, il existe un ouvert W de $X \times X$ tel que $K \times K \subset W \subset D$.

3. Comme K est compact, d'après la proposition 3.1.4, il existe un ouvert U de X tel que $K \times K \subset U \times U \subset D$. Par conséquent, U contient K et la restriction de f à U est injective.

Exercice 3.21. Soient X un espace compact et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application **localement majorée**, *i.e.* pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V_x de x dans X tel que la restriction de f à V_x soit majoré. Montrer que f est majorée sur X.
Solution. Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans X et il existe $M_x \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $y \in U_x$, on ait $f(y) \leq M_x$. Or $(U_x)_{x \in X}$ est un recouvrement ouvert de X, donc il existe un sous-ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\}$ de X tel que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Soit $M = \max\limits_{1 \leq i \leq n} M_{x_i}$, alors $M \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in X$, on a $f(x) \leq M$. Donc f est majorée.

Exercice 3.22. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Montrer que l'on a :

1. Si Y est séparé et si f est continue, alors $G(f)$, le graphe de f, est fermé dans $X \times Y$.

2. Si Y est compact et si $G(f)$ est fermé, alors f est continue.

Solution. 1. On a déjà montré ce résultat, voir exercice 1.32.
2. Soit p la projection canonique de $X \times Y$ sur X. Alors p est continue et d'après le théorème 3.2.4, p est aussi une application fermée. Soit π la restriction de p à $G(f)$. Alors π est continue, et comme $G(f)$ est fermé dans $X \times Y$, alors π est aussi une application fermée. Puisque π est une application bijective de $G(f)$ sur X, alors π est un homéomorphisme, donc l'application inverse $\pi^{-1} : X \longrightarrow G(f)$, définie par $\pi^{-1}(x) = (x, f(x))$ pour tout $x \in X$, est continue. Soit q la projection canonique de $X \times Y$ sur Y, alors q est continue et on a $f = q \circ \pi^{-1}$, donc f est continue.

Le résultat montré dans l'exercice précédent est plus facile à montrer dans le cadre des espaces métriques, et la démonstration mérite d'être vue. Donc on va montrer ce résultat ci-dessous quand X et Y sont des espaces métriques.

Exercice 3.23. Soient (X, d), (Y, d') des espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Montrer que l'on a :

1. Si f est continue, alors $G(f)$, le graphe de f, est fermé dans $X \times Y$.

2. Si Y est compact et si $G(f)$ est fermé, alors f est continue.

Solution. 1. Soient $(x, y) \in X \times Y$ et $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite dans X tels que $(x, y) = \lim\limits_{n \to +\infty} (x_n, f(x_n))$ dans l'espace topologique produit $X \times Y$, d'où on a $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ dans X et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = y$. Comme f est continue, alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x)$, d'où $y = f(x)$, *i.e.* $(x, y) \in G(f)$. Par conséquent, $G(f)$ est fermé dans $X \times Y$.
2. Soient $x \in X$ et $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite dans X tels que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$. Pour montrer que l'on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x)$, il suffit de montrer que $f(x)$ est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$, voir proposition 3.1.5. Soit y une valeur d'adhérence de la suite

$(f(x_n))_{n\geq 0}$, alors il existe une application strictement croissante $k \longmapsto n_k$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la sous-suite $(f(x_{n_k}))_{k\geq 0}$ converge vers y. Or la suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ converge aussi vers x, d'où on a $(x, y) = \lim\limits_{k\to+\infty}(x_{n_k}, f(x_{n_k}))$. Comme $G(f)$ est fermé dans $X \times Y$, alors on a $(x, y) \in G(f)$, d'où $y = f(x)$. Donc $f(x)$ est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$. Donc f est continue en x, d'où la continuité de f.

Exercice 3.24. Soit f une application d'un espace métrique compact $(X,\, d)$ dans un espace métrique $(Y,\, d')$. Montrer que f est uniformément continue X si et seulement si f transforme toute suite de Cauchy de $(X,\, d)$ en une suite de Cauchy de $(Y,\, d')$
Solution. On a montré, proposition 2.6.3, que l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est de Cauchy.
Réciproquement, supposons que $(X,\, d)$ est compact et que f transforme toute suite de Cauchy de $(X,\, d)$ en une suite de Cauchy de $(Y,\, d')$. D'après l'exercice 2.23, l'application f est alors continue. Si f n'est pas uniformément continue, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x, z \in X$ vérifiant $d(x, z) < \eta$, mais on a $d(f(x), f(z)) \geq \varepsilon$. En prenant $\eta = \frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve $x_n, z_n \in X$ tels que $d(x_n, z_n) < \frac{1}{n}$ et $d(f(x_n), f(z_n)) \geq \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$. Puisque X est compact, il existe une application strictement croissante $k \longmapsto n_k$ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que les sous-suites $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ et $(y_{n_k})_{k\geq 1}$ convergent dans X. Comme pour tout $k \geq 1$, on a $d(x_n, z_n) < \frac{1}{n_k}$ et on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{n_k} = 0$, on en déduit que l'on a $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{k\to+\infty} y_{n_k}$, d'où on a $\lim\limits_{k\to+\infty} d'(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) = 0$, ce qui est impossible. Donc f est bien uniformément continue.

Exercice 3.25. Soient $(X,\, d)$ un espace métrique compact et $f\ : X \longrightarrow X$ une application continue telle que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in X$. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $d(x, f(x)) \geq k$ pour tout $x \in X$.
Solution. Pour tout $x \in X$, soit $g(x) = d(x, f(x))$, alors g est une application continue de X dans $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in X$, on a $g(x) > 0$. Comme X est compact, il existe $x_0 \in X$ tel que $\inf\limits_{x\in X} g(x) = g(x_0)$. Soit $k = g(x_0)$, alors $k > 0$ et pour tout $x \in X$, on a $d(x, f(x)) \geq k$.

Exercice 3.26. Soient $(X,\, d)$ un espace métrique compact non vide et $f : X \longrightarrow X$ une application telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$.

1. A l'aide d'un exemple, montrer que f n'est pas nécessairement contractante.

2. Montrer que f admet un unique point fixe a.

3. Soit K une partie fermée non vide X telle que $f(K) \subset K$. Montrer que l'on a $a \in K$.

4. Montrer que pour tout $x \in X$, la suite $\big(f^n(x)\big)_{n\geq 0}$ converge vers a, où $f^n = f \circ f \circ f \cdots \circ f$, l'application f composée avec elle-même n fois.

Solution. 1. Soit $X = \{0\} \cup \big\{\frac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\big\}$ muni de la distance induite par $\mathbb{R}$. Alors X est compact. Soit $f : X \longrightarrow X$ définie par $f(0) = 0$ et $f\big(\frac{1}{n}\big) = \frac{1}{n+1}$. On a $d\big(f(0), f\big(\frac{1}{n}\big)\big) = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = d\big(0, \frac{1}{n}\big)$. Si $n \neq m$, par exemple, $n > m$, on a $d\big(f\big(\frac{1}{n}\big), f\big(\frac{1}{m}\big)\big) = \frac{n-m}{(n+1)(m+1)} < \frac{n-m}{n\,m} = d\big(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\big)$. Donc, pour tout $x, y \in X$, on a $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Soit $k \geq 0$ tel

que $d\big(f(0), f\big(\frac{1}{n}\big)\big) \leq k\, d\big(0, \frac{1}{n}\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a $\frac{n}{n+1} \leq k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où $k \geq 1$. Donc f n'est pas contractante.
2. Pour tout $x \in X$, soit $g(x) = d(x, f(x))$, alors g est une application continue de X dans $\mathbb{R}$. Comme X est compact, il existe $a \in X$ tel que $\inf\limits_{x \in X} g(x) = g(a)$. Si $f(a) \neq a$, alors on a $d(f(a), f(f(a))) < d(a, f(a)) \leq d(f(a), f(f(a)))$, ce qui est impossible, donc on a bien $f(a) = a$, *i.e.* a est un point fixe de f. Soit b un point fixe de f. Si $b \neq a$, alors on a $d(a, b) = d(f(a), f(b)) < d(a, b)$, ce qui est impossible, donc on a bien $b = a$. Par conséquent, a est l'unique point fixe de f.
3. Soit K une partie fermée non vide X telle que $f(K) \subset K$. Alors K est compact et l'application $h : K \longrightarrow K$ définie par $h(x) = f(x)$, pour tout $x \in K$, vérifie $d(h(x), h(y)) < d(x, y)$ pour tous $x, y \in K$ tels que $x \neq y$. D'après 2, il existe $b \in K$ tel que $h(b) = b$, donc b est aussi un point fixe de f, d'où on a $a = b \in K$.
4. Soit $x \in X$. Soit K l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\big(f^n(x)\big)_{n \geq 0}$. D'après la proposition 1.7.1, on a $K = \bigcap\limits_{n \geq 0} \overline{\{f^p(x)\ ;\ p \geq n\}}$. Alors K est une partie fermée non vide de X telle que $f(K) \subset K$. D'après 3, on a $a \in K$. Donc a est une valeur d'adhérence de $\big(f^n(x)\big)_{n \geq 0}$. Autrement dit, il existe une application strictement croissante $k \longmapsto n_k$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la sous-suite $\big(f^{n_k}(x)\big)_{k \geq 0}$ converge vers a. S'il existe $n \geq 0$ tel que $f^n(x) = a$, alors pour tout $m \geq n$, on a $f^m(x) = a$, et donc la suite converge vers a. Supposons que pour tout $n \geq 0$, $f^n(x) \neq a$, alors pour tout $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n > p$, on a $0 < d\big(f^n(x), a\big) < d\big(f^p(x), a\big)$. Donc la suite de réels $\big(d(f^n(x), a)\big)_{n \geq 0}$ est convergente car elle est décroissante et minorée. Puisque on a $\lim\limits_{k \to +\infty} d\big(f^{n_k}(x), a\big) = 0$, alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} d\big(f^n(x), a\big) = 0$. Par conséquent, la suite $\big(f^n(x)\big)_{n \geq 0}$ converge vers a.

Exercice 3.27. On munit $\mathbb{R}^n$ de la distance euclidienne. Soit $B = B'(0, 1)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$ et soit f une application 1-lipschitzienne de B dans B. Montrer que f admet un point fixe. Ce point fixe est-il unique ?
Solution. Soit $(r_n)_{n \geq 0}$ une suite dans $]0, 1[$ convergente vers 1. Pour tout $n \geq 0$, soit $f_n(x) = r_n f(x)$, alors f_n est une application r_n-lipschitzienne de B dans B. Comme B est complet, d'après le théorème du point fixe, il existe $x_n \in B$ tel que $r_n f(x_n) = x_n$. Comme B est compact, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ admet une sous-suite convergente $(x_{n_k})_{k \geq 0}$. Soit $x = \lim\limits_{k \to +\infty} x_{n_k}$, alors $x \in B$ et on a $f(x) = x$, donc x est un point fixe pour f.
Le point fixe n'est pas toujours unique car si $f(x) = x$ pour tout $x \in B$, alors f est 1-lipschitzienne de B dans B et tout point de B est un point fixe pour f.

Exercice 3.28. Soient $(X,\, d)$ un espace métrique compact non vide et $f : X \longrightarrow X$ une application telle que pour tous $x, y \in X$, on ait $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$. Soient x et y des points de X.

1. Montrer qu'il existe un application strictement croissante $k \longmapsto n_k$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que les suites $\big(f^{n_k}(x)\big)_{k \geq 0}$ et $\big(f^{n_k}(y)\big)_{k \geq 0}$ convergent dans $(X,\, d)$.

2. Posons $\varphi(k) = n_{k+1} - n_k$. Montrer que la suite $\big(f^{\varphi(k)}(x)\big)_{k \geq 0}$ converge vers x et que la suite $\big(f^{\varphi(k)}(y)\big)_{k \geq 0}$ converge vers y.

3. En déduire que f est une isométrie de X sur X.

Solution. 1. Puisque $\big(f^n(x)\big)_{n\geq 0}$ est une suite dans l'espace métrique compact $(X,\, d)$, alors il existe une application strictement croissante $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que la sous-suite $\big(f^{\alpha(n)}(x)\big)_{n\geq 0}$ converge dans X. De même, comme $(X,\, d)$ est compact et $\big(f^{\alpha(n)}(y)\big)_{n\geq 0}$ est une suite dans X, il existe une application strictement croissante $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que la sous-suite $\big(f^{\beta(\alpha(n))}(y)\big)_{n\geq 0}$ converge dans X. Pour tout $k \geq 0$, on pose $n_k = \beta(\alpha(k))$, alors $k \longmapsto n_k$ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et les suites $\big(f^{n_k}(x)\big)_{k\geq 0}$ et $\big(f^{n_k}(y)\big)_{k\geq 0}$ convergent dans $(X,\, d)$.
2. Pour tout $k \geq 0$, soit $\varphi(k) = n_{k+1} - n_k$. Alors on a :

$$0 \leq d\big(x, f^{\varphi(k)}(x)\big) \leq d\big(f^{n_k}(x), f^{\varphi(k)}\big(f^{n_k}(x)\big)\big) = d\big(f^{n_k}(x), f^{n_{k+1}}(x)\big)\,.$$

Or on a $\lim\limits_{k\to+\infty} d\big(f^{n_k}(x), f^{n_{k+1}}(x)\big) = 0$, d'où $\lim\limits_{k\to+\infty} d\big(x, f^{\varphi(k)}(x)\big) = 0$. Autrement dit, la suite $\big(f^{\varphi(k)}(x)\big)_{k\geq 0}$ converge vers x. De même, la suite $\big(f^{\varphi(k)}(y)\big)_{k\geq 0}$ converge vers y.
3. Pour tout $k \geq 1$, on a $\varphi(k) \geq k \geq 1$, d'où :

$$d(x,y) \leq d(f(x), f(y)) \leq d\big(f^{\varphi(k)}(x), f^{\varphi(k)}(y)\big)\,.$$

Or on a $d(x,y) = \lim\limits_{k\to+\infty} d\big(f^{\varphi(k)}(x), f^{\varphi(k)}(y)\big)$, donc $d(x,y) \leq d(f(x), f(y)) \leq d(x,y)$, d'où on a $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$. Par conséquent, f est une application isométrique. Il reste à vérifier que f est surjective. Comme la suite $\big(f^{\varphi(k)}(y)\big)_{k\geq 0}$ est dans $f(X)$ et $f(X)$ est fermé dans X car f est continue, alors $y \in f(X)$. Donc f est surjective. D'où f est une isométrie de X sur X.

Exercice 3.29. Soient X, Y des espaces métriques. Montrer que la projection canonique $\pi : X \times Y \longrightarrow Y$ est fermée si et seulement si X est compact ou Y est discret.
Solution. D'après le théorème 3.2.4, si X est compact, alors la projection canonique $\pi : X \times Y \longrightarrow Y$ est fermée. Si Y est discret, alors toute partie de Y est fermée, et par conséquent, π est une application fermée.
Réciproquement, supposons que la projection canonique $\pi : X \times Y \longrightarrow Y$ est fermée. Si X n'est pas compact et si Y n'est pas discret, alors il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans X qui n'admet aucune sous-suite convergente, et il existe une partie B de Y tel que $\overline{B} \neq B$, d'où il existe une suite $(b_n)_{n\geq 0}$ dans B qui converge vers un élément $b \in \overline{B} \setminus B$. Puisque la suite $((x_n, b_n))_{n\geq 0}$ de l'espace métrique produit $X \times Y$ n'admet aucune sous-suite convergente, alors l'ensemble $F = \{(x_n, b_n)\ ;\ n \geq 0\}$ est fermé dans $X \times Y$, voir exercice 2.24. Comme π est fermée, alors $\pi(F) = \{b_n\ ;\ n \geq 0\}$ est fermé dans Y. Donc on a $b \in \pi(F) \subset B$, ce qui est impossible. Par conséquent, X est compact ou Y est discret.

Exercice 3.30. Soit Y l'espace topologique décrit dans l'exercice 1.13. Montrer que la projection canonique $\pi : \mathbb{N} \times Y \longrightarrow Y$ est fermée. Cet exercice montre que le résultat de l'exercice précédent n'est plus vrai dans le cadre non métrique.
Solution. Rappelons que Y est un ensemble infini et on se donne un point $y_0 \in Y$ et l'ensemble des fermés de la topologie de Y est :

$$\mathcal{F} = \big\{A \subset Y\ ;\ y_0 \in A\big\} \cup \big\{A \subset Y\ ;\ A \text{ est au plus dénombrable}\big\}\,.$$

Soit F un fermé de $\mathbb{N} \times Y$. Si $y_0 \in \pi(F)$, alors $\pi(F)$ est fermé dans Y. Si $y_0 \notin \pi(F)$, alors $\big(\mathbb{N} \times \{y_0\}\big) \cap F = \emptyset$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une partie au plus dénombrable A_n

de Y tel que $\big(\{n\} \times \big(Y \setminus A_n\big)\big) \cap F = \emptyset$. Soit $A = \underset{n \geq 0}{\cup} A_n$, alors A est une partie au plus dénombrable de Y et on a $\big(\mathbb{N} \times \big(Y \setminus A\big)\big) \cap F = \emptyset$, d'où $\big(Y \setminus A\big) \cap \pi(F) = \emptyset$, donc on a $\pi(F) \subset A$. Par conséquent, $\pi(F)$ est au plus dénombrable, donc $\pi(F)$ est fermé dans Y. Ainsi, π est une application fermée.

Exercice 3.31. On munit $\mathbb{R}$ de la topologie usuelle et soit $X = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1. Montrer que X n'est pas localement compact.

2. Montrer que $X \setminus \{0\}$ est localement compact. En déduire qu'une réunion de deux parties localement compactes de $\mathbb{R}$ n'est pas toujours localement compacte.

3. Montrer qu'une intersection dénombrable de parties localement compactes de $\mathbb{R}$ n'est pas toujours localement compacte.

Solution. 1. Notons d'abord que X est dense dans $\mathbb{R}$, voir exercice 1.3. Si X était localement compact, alors X serait ouvert dans $\mathbb{R}$, voir proposition 3.4.3, ce qui est impossible, car pour tout $r > 0$, $]r, r[\not\subset X$. Donc X n'est pas localement compact.
2. On a $X \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus K$, où $K = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc $X \setminus \{0\}$ est ouvert dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, $X \setminus \{0\}$ est localement compact, voir corollaire 3.4.3. On a $X = \big(X \setminus \{0\}\big) \cup \{0\}$ et $X \setminus \{0\}$ et $\{0\}$ sont localement compacts, mais X n'est pas localement compact.
3. On a $X = \underset{n \geq 1}{\cap} \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{n}\right\}$, et pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{n}\right\}$ est localement compact, mais X n'est pas localement compact.

Exercice 3.32. Montrer que l'espace topologique produit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas localement compact.
Solution. Soit $x = (x_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si x possède un voisinage compact K, alors il existe $N \geq 0$ et $r_0 > 0, \ldots, r_N > 0$ tels que $F = \prod\limits_{n=0}^{N} [x_n - r_n,\, x_n + r_n] \prod\limits_{n=N+1}^{\infty} \mathbb{R} \subset K$. Comme F est fermé, alors F est compact, ce qui est impossible. Donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas localement compact.

Exercice 3.33. Soient X un espace topologique séparé et K une partie compacte de X. Montrer que l'espace topologique quotient X/K est séparé.
Solution. Rappelons que la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans X est définie par : $x \mathcal{R} y$ si $x = y$ ou si $x \in K$ et $y \in K$. Soit $q : X \longrightarrow X/K$ l'application quotient. Soient $x, y \in X$ tels que $q(x) \neq q(y)$. On distingue deux cas :
Premier cas : $x, y \in X \setminus K$. Comme X est séparé et $X \setminus K$ est un ouvert de X, alors il existe deux ouverts disjoints U et V de X contenant respectivement x et y et tels que $U \cap K = \emptyset$ et $V \cap K = \emptyset$. Donc U et V sont des ouverts disjoints saturés pour $\mathcal{R}$. Par conséquent, $q(U)$ et $q(V)$ sont des ouverts disjoints de X/K contenant respectivement $q(x)$ et $q(y)$.
Deuxième cas : $x \in K$ et $y \in X \setminus K$. Comme X est séparé et K est compact, alors il existe deux ouverts disjoints U et V de X tels que $K \subset U$ et $y \in V$, voir proposition 3.1.2. Donc U et V sont des ouverts disjoints saturés pour $\mathcal{R}$. Par conséquent, $q(U)$ et $q(V)$ sont des ouverts disjoints de X/K contenant respectivement $q(x)$ et $q(y)$. Par conséquent, X/K

est séparé.

Exercice 3.34. Soient X un espace compact et U un ouvert de X tel que $F = X \setminus U$ ne soit pas vide. Montrer que le compactifié d'Alexandroff de U s'identifie à l'espace topologique quotient X/F.
Solution. Soit $q : X \longrightarrow X/F$ l'application quotient. D'après l'exercice précédent, l'espace X/F est séparé, donc X/F est compact. On a $X/F = q(U) \cup \{q(x)\}$, où x est un point de F, et la restriction $q_{q(U)} : U \longrightarrow q(U)$ est un homéomorphisme, donc le compactifié d'Alexandroff de U s'identifie à l'espace topologique quotient X/F.

Exercice 3.35. Soit $(X,\, d)$ un espace métrique tel que d possède la propriété suivante : Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $\overline{B(x, \varepsilon)}$ soit compact. Montrer que $(X,\, d)$ est localement compact et complet.
Solution. Comme pour tout $x \in X$, $\overline{B(x, \varepsilon)}$ est un voisinage compact de x, alors $(X,\, d)$ est localement compact. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(X,\, d)$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $d(x_N, x_n) < \varepsilon$. D'où on a $x_n \in B(x_N, \varepsilon) \subset \overline{B(x_N, \varepsilon)}$ pour tout $n \geq N$. Comme $\overline{B(x_N, \varepsilon)}$ est compact, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ admet une sous-suite convergente, donc $(x_n)_{n\geq 0}$ converge par la proposition 2.6.2. Par conséquent, $(X,\, d)$ est complet.

Exercice 3.36. Donner un exemple d'un espace métrique localement compact $(X,\, d)$ vérifiant :
Pour tout $x \in X$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B(x, \varepsilon)}$ soit compact, alors que $(X,\, d)$ n'est pas complet.
Solution. Il suffit de prendre $X = \left\{\frac{1}{n}\ ;\ n \geq 1\right\}$ muni de la distance induite par $\mathbb{R}$.

Exercice 3.37. Soient $(X,\, d)$, $(Y,\, d')$ des espaces métriques, K une partie compacte de X et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On suppose que f est continue en tout point de K. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous $x \in K$ et $z \in X$ vérifiant $d(x, z) < \eta$, on ait $d'(f(x), f(z)) < \varepsilon$.
Solution. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en tout point de K, alors pour tout $x \in K$, il existe $\eta_x > 0$ tel que pour tout $z \in X$ vérifiant $d(x, z) < \eta_x$, on ait $d'(f(x), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Or K est compact et on a $K \subset \bigcup\limits_{x\in K} B\left(x, \frac{\eta_x}{2}\right)$, donc il existe un sous-ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\}$ de K tel que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{\eta_{x_i}}{2}\right)$. Soit $\eta = \inf\limits_{1\leq i\leq n} \frac{\eta_{x_i}}{2}$, alors $\eta > 0$. Soient $x \in K$ et $z \in X$ tels que $d(x, z) < \eta$. Alors il existe x_i tel que $d(x, x_i) < \frac{\eta_{x_i}}{2}$ et $d'(f(x), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$. On a aussi $d(z, x_i) \leq d(z, x) + d(x, x_i) < \eta + \frac{\eta_{x_i}}{2} < \eta_{x_i}$, d'où $d'(f(z), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, on a $d'(f(x), f(z)) < \varepsilon$.

Pour plus d'exercices, voir le supplément associé à ce livre.

Chapitre 4

ESPACES CONNEXES

La notion de connexité nous permet de mieux comprendre le rôle que jouent dans $\mathbb{R}$ les intervalles et de généraliser le théorème de la valeur intermédiaire. Cette notion peut être aussi très utile pour démontrer que deux espaces topologiques ne sont pas homéomorphes. De plus, certains espaces topologiques peuvent être considérés comme d'un seul tenant, par exemple une sphère, une boule, dans un espace $\mathbb{R}^n$, alors que d'autres sont composés de plusieurs « morceaux » distincts, par exemple l'espace formé par la réunion de deux sphères sans point commun, ou le complémentaire d'une sphère dans $\mathbb{R}^n$. Il s'agit, dans ce chapitre, de préciser cette idée intuitive. Notons enfin que la notion de connexité est à la base de la théorie de l'homotopie, partie importante de la topologie algébrique.

4.1 Espaces connexes

Définition 4.1.1. On dit qu'un espace topologique X est **connexe** s'il n'est pas réunion de deux ensembles ouverts non vides disjoints. Autrement dit, pour tous ouverts disjoints U et V de X tels que $X = U \cup V$, alors on ait $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.

Proposition 4.1.1. *Soit X un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'espace X est connexe.

(ii) L'espace X n'est pas réunion de deux ensembles fermés non vides disjoints.

(iii) Il n'existe pas dans X d'autres parties qui soient à la fois ouvertes et fermées que X et $\emptyset$.

(iv) Toute application continue de X dans l'espace discret $\mathbb{Z}$ est constante.

(v) Toute application continue de X dans l'espace discret $\{0, 1\}$ est constante.

Démonstration. L'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) s'obtient par passage aux complémentaires. *Preuve de* (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit A une partie non vide de X et supposons que A est à la fois ouverte et fermée dans X. Soit $B = X \setminus A$, alors B est fermé dans X tel que $X = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$. Donc on a $B = \emptyset$, d'où $A = X$.

Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (iv). Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ une application continue. Soit $x_0 \in X$, alors $\{f(x_0)\}$ est une partie à la fois ouverte et fermée dans $\mathbb{Z}$. Comme f est continue, alors $f^{-1}\big(\{f(x_0)\}\big)$ est une partie non vide à la fois ouverte et fermée dans X, donc on a $X = f^{-1}\big(\{f(x_0)\}\big)$, d'où $f(x) = f(x_0)$ pour tout $x \in X$. Autrement dit, f est constante.
Preuve de (iv) $\Longrightarrow$ (v). Soit $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Or l'injection $\imath : \{0, 1\} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ est continue. Donc $\imath \circ f$ est constante. Par conséquent, f est constante.
Preuve de (iv) $\Longrightarrow$ (i). Si X n'était pas connexe, alors il existerait deux ouverts non vides et disjoints U et V dans X tels que $X = U \cup V$. Pour tout $x \in U$, on pose $f(x) = 0$ et pour tout $x \in V$, on pose $f(x) = 1$, alors f est une application continue non constante de X dans l'espace discret $\{0, 1\}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc X est bien connexe. ■

Remarque 4.1.1. Si X est un espace connexe et si A et B sont deux ensembles non vides et ouverts (*resp.* fermés) tels que $X = A \cup B$, alors $A \cap B \neq \emptyset$.

Définition 4.1.2. On dit qu'un espace topologique X est **discontinu** s'il n'est pas connexe. Autrement dit, s'il existe deux ouverts disjoints et non vides U et V dans X tels que $X = U \cup V$.

Définition 4.1.3. On dit qu'une partie A d'un espace topologique X est un ensemble **connexe**, si A muni de la topologie induite est un espace connexe.

Exemple 4.1.1. 1. Tout espace muni de la topologie grossière est connexe.

2. Dans un espace topologique, l'ensemble vide et tout ensemble réduit à un point sont connexes.

3. Dans un espace topologique séparé, tout ensemble fini comprenant plus d'un point, et plus généralement tout ensemble non réduit à un point et possédant au moins un point isolé est non connexe.

Proposition 4.1.2. *Soient X un espace topologique et A une partie connexe de X.*

1. *Si U et V sont des ouverts (resp. fermés) disjoints de X tels que $X = U \cup V$, alors ou bien $A \subset U$ ou bien $A \subset V$.*

2. *Si U est une partie à la fois ouverte et fermée de X et si $A \cap U \neq \emptyset$, alors on a $A \subset U$.*

Démonstration. 1. On a $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$ et $A \cap U$, $A \cap V$ sont des ouverts (*resp.* fermés) disjoints de A. Comme A est connexe, alors ou bien $A \cap U = \emptyset$ ou bien $A \cap V = \emptyset$. Si $A \cap U = \emptyset$, alors on a $A \subset V$, et si $A \cap V = \emptyset$, alors on a $A \subset U$.
2. Soit $V = X \setminus U$, alors V est un ouvert de X. Donc U et V sont des ouverts disjoints de X tels que $X = U \cup V$. Comme on a $A \cap U \neq \emptyset$, il résulte de 1 que l'on a $A \subset U$. ■

Proposition 4.1.3. *Soient A et B deux parties d'un espace topologique X. Si A est connexe et si on a $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.*

Démonstration. Soient U et V deux ouverts disjoints de B tels que $B = U \cup V$. Soient U' et V' deux ouverts de X tels que $U = B \cap U'$ et $V = B \cap V'$. Comme A est connexe, d'après la proposition précédente, ou bien on a $A \subset U$ ou bien $A \subset V$. Si on a $A \subset U$, alors $A \cap V = \emptyset$, d'où $A \cap V' = A \cap B \cap V' = A \cap V = \emptyset$. Par conséquent, on a $\overline{A} \cap V' = \emptyset$, donc $V = B \cap V' = B \cap \overline{A} \cap V' = \emptyset$. Si on a $A \subset V$, on fait le même raisonnement et on montre qu'alors $U = \emptyset$. Donc B est connexe. ■

Corollaire 4.1.1. *Soit X un espace topologique. Alors on a :*

1. *L'adhérence de toute partie connexe de X est connexe.*
2. *S'il existe une partie connexe et dense dans X, alors X est connexe*[†].

Proposition 4.1.4. *Soit A une partie d'un espace topologique X. Si B est une partie connexe de X telle que $B \cap A \neq \emptyset$ et $B \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$, alors $B \cap Fr(A) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Supposons le contraire, *i.e.* $B \cap \mathrm{Fr}(A) = \emptyset$. Rappelons que $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Donc on a $B = B \cap \big(X \setminus \overline{A}\big) \cup \big(B \cap \overset{\circ}{A}\big)$ et $B \cap \big(X \setminus \overline{A}\big)$, $B \cap \overset{\circ}{A}$ sont des ouverts disjoints de B. Comme B est connexe, alors ou bien $B \cap \overset{\circ}{A} = \emptyset$ ou bien $B \cap \big(X \setminus \overline{A}\big) = \emptyset$. Si $B \cap \overset{\circ}{A} = \emptyset$, alors on a $B \subset X \setminus \overline{A}$, ce qui est impossible car $B \cap A \neq \emptyset$. Si $B \cap \big(X \setminus \overline{A}\big) = \emptyset$, alors on a $B \subset \overset{\circ}{A}$, ce qui est impossible car $B \cap \big(X \setminus A\big) \neq \emptyset$. Par conséquent, on a bien $B \cap \mathrm{Fr}(A) \neq \emptyset$. ■

Corollaire 4.1.2. *Soient X un espace topologique connexe et A une partie de X telle que $A \neq \emptyset$ et $A \neq X$. Alors on a $Fr(A) \neq \emptyset$.*

Théorème 4.1.1. *Soit X un espace topologique.*

1. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de X. Si pour tout $i, j \in I$, avec $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, alors $\underset{i \in I}{\cup} A_i$ est connexe. En particulier, si on a $\underset{i \in I}{\cap} A_i \neq \emptyset$, alors $\underset{i \in I}{\cup} A_i$ est connexe.*
2. *Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une famille de parties connexes de X telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$, alors $\underset{n \geq 0}{\cup} A_n$ est connexe.*

Démonstration. 1. Soit $f : \underset{i \in I}{\cup} A_i \longrightarrow \{0, 1\}$ une application continue, où $\{0, 1\}$ est muni de la topologie discrète. Soient $x, y \in \underset{i \in I}{\cup} A_i$, alors il existe $i, j \in I$ tels que $x \in A_i$ et $y \in A_j$. Comme les restrictions $f_{|_{A_i}}$ et $f_{|_{A_j}}$ sont continues et A_i et A_j sont connexes, alors $f_{|_{A_i}}$ et $f_{|_{A_j}}$ sont constantes, voir proposition 4.1.1. Puisque $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, alors il existe $z \in A_i \cap A_j$, d'où on a $f(x) = f(z) = f(y)$. Donc f est constante. Par conséquent, $\underset{i \in I}{\cup} A_i$ est connexe.
2. Soit $f : \underset{n \geq 0}{\cup} A_n \longrightarrow \{0, 1\}$ une application continue, où $\{0, 1\}$ est muni de la topologie discrète. Comme pour tout $n \geq 0$, A_n est connexe, alors pour tout $n \geq 0$, $f_{|_{A_n}}$ est constante. Soient $x, y \in \underset{n \geq 0}{\cup} A_n$, alors il existe $n, m \geq 0$ tels que $x \in A_n$ et $y \in A_m$. On peut supposer que $m \geq n$. Pour tout $i \in \{n, \ldots, m-1\}$, soit $x_i \in A_i \cap A_{i+1}$. Alors on a $f(x) = f(x_n) = f(x_{n+1}) = \cdots = f(x_{m-1}) = f(y)$. Donc f est constante. Par conséquent, $\underset{n \geq 0}{\cup} A_n$ est connexe. ■

[†] Voir également remarque 4.1.2.

Corollaire 4.1.3. *Soient X un espace topologique et $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de X. S'il existe $\alpha \in I$ tel que $B_\alpha \cap B_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$, alors $\bigcup_{i\in I} B_i$ est connexe.*

Démonstration. Pour tout $i \in I$, soit $A_i = B_\alpha \cup B_i$, alors A_i est une partie connexe de X et on a $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Or on a $\bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I} A_i$, donc $\bigcup_{i\in I} B_i$ est connexe. ■

Théorème 4.1.2. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Si X est connexe, alors $f(X)$ est connexe.*

Démonstration. Soit B une partie non vide ouverte et fermée dans $f(X)$. Comme f est continue de X dans $f(X)$, alors $f^{-1}(B)$ est une partie non vide ouverte et fermée dans X. Or X est connexe, donc on a $f^{-1}(B) = X$, d'où $B = f(X)$. Il résulte de la proposition 4.1.1 que $f(X)$ est connexe. ■

Corollaire 4.1.4. *Si X et Y sont des espaces topologiques homéomorphes, alors X est connexe si et seulement si Y est connexe.*

L'image réciproque d'un ensemble connexe par une application continue n'est pas nécessairement connexe, comme le montre l'exemple d'une application d'un espace discret dans un espace réduit à un point. D'où l'intérêt du théorème suivant.

Théorème 4.1.3. *Soient X un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans X. On note $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient.*

1. *Si X est connexe, alors l'espace quotient $X/\mathcal{R}$ est connexe.*
2. *Si l'espace quotient $X/\mathcal{R}$ est connexe et si chaque classe d'équivalence suivant $\mathcal{R}$ est connexe, alors X est connexe.*
3. *Supposons que chaque classe d'équivalence suivant $\mathcal{R}$ est connexe. Soit D une partie connexe et fermée (resp. ouverte) de $X/\mathcal{R}$, alors $q^{-1}(D)$ est une partie connexe de X.*

Démonstration. 1. Ceci résulte du théorème précédent.
2. Soit A une partie non vide et à la fois ouverte et fermée dans X. Comme pour tout $x \in X$, $q^{-1}\big(\{q(x)\}\big)$ est une partie connexe de X, il résulte de la proposition 4.1.2 que pour tout $a \in A$, on a $q^{-1}\big(\{q(a)\}\big) \subset A$. Donc on a $A = q^{-1}(q(A))$. Par conséquent, $q(A)$ est une partie non vide et à la fois ouverte et fermée dans $X/\mathcal{R}$. Or $X/\mathcal{R}$ est connexe, donc on a $q(A) = X/\mathcal{R}$, d'où $A = X$. Il résulte de la proposition 4.1.1 que X est connexe.
3. Soit $A = q^{-1}(D)$, alors A est une partie saturée pour $\mathcal{R}$ et fermée (*resp.* ouverte) de X et on a $q(A) = D$. D'après le corollaire 1.4.3, $A/\mathcal{R}_A$ est homéomorphe à $q(A) = D$, donc $A/\mathcal{R}_A$ est connexe. Or, pour tout $a \in A$, la classe d'équivalence de a suivant $\mathcal{R}_A$ est égal à la classe d'équivalence de a suivant $\mathcal{R}$, donc connexe. Il résulte de 2 que A est connexe. ■

Théorème 4.1.4. *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques non vides. Alors l'espace topologique produit $X = \prod_{i\in I} X_i$ est connexe si et seulement si pour tout $i \in I$, X_i est connexe.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 4 du supplément.

Définition 4.1.4. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que f est **localement constante** si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x dans X tel que la restriction de f à V soit constante sur V.

Toute application constante est localement constante. Mais la réciproque est en général fausse ; il suffit de prendre $X = U \cup V$ la réunion de deux ouverts U et V non vides et disjoints, et poser pour tout $x \in U$, $f(x) = 0$ et pour tout $x \in V$, $f(x) = 1$. Alors f est localement constante, mais non constante de X dans $\mathbb{R}$.
Notons aussi que toute application localement constante est continue, voir proposition 1.4.4.

Proposition 4.1.5. *Soit X un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'espace X est connexe.

(ii) Pour tout espace topologique séparé Y, toute application localement constante de X dans Y est constante.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient Y un espace topologique séparé et $f : X \longrightarrow Y$ une application localement constante. Soit $x_0 \in X$. Alors $f^{-1}\big(\{f(x_0)\}\big)$ est une partie fermée non vide de X. Soit $x \in f^{-1}\big(\{f(x_0)\}\big)$, d'où $f(x) = f(x_0)$. Comme f est localement constante, il existe un ouvert U de X contenant x tel que pour tout $z \in U$, on ait $f(z) = f(x) = f(x_0)$. Donc on a $U \subset f^{-1}\big(\{f(x_0)\}\big)$. Par conséquent, $f^{-1}\big(\{f(x_0)\}\big)$ est aussi une partie ouverte de X. Comme X est connexe, on en déduit que $X = f^{-1}\big(\{f(x_0)\}\big)$. Autrement dit, pour tout $x \in X$, on a $f(x) = f(x_0)$. Donc f est constante.
L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) résulte du fait que toute application continue de X dans $\{0, 1\}$ est localement constante, et de la proposition 4.1.1. ■

Théorème 4.1.5. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) A est connexe.

(ii) A est un intervalle.

En particulier, l'espace $\mathbb{R}$ est connexe.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Si A n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$, il existe $x, z \in A$ et $y \in \mathbb{R} \setminus A$ tels que $x < y < z$. Soient $U =]-\infty, y[$ et $V =]y, +\infty[$, alors on a $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$ et $A \cap U$, $A \cap V$ sont deux ouverts non vides disjoints de A, donc A n'est pas connexe, ce qui est impossible. Par conséquent, A est bien un intervalle de $\mathbb{R}$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Si A est vide ou si A est réduit à un point, alors A est connexe. Supposons que A est non vide et non réduit à un point. Si A n'est pas connexe, il existe deux ouverts U et V dans $\mathbb{R}$ tels que $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$, avec $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$ et $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$. Soient $x \in A \cap U$ et $y \in A \cap V$. Quitte à intervertir les rôles de U et V, on peut supposer $x < y$. On a $[x, y] \subset A$ et $[x, y] = ([x, y] \cap U) \cup ([x, y] \cap V)$, avec $([x, y] \cap U) \cap ([x, y] \cap V) = \emptyset$. Soit $B = [x, y] \cap U$, alors B est une partie non vide et majorée par y dans $\mathbb{R}$, donc $x_0 = \sup(B)$ existe dans $\mathbb{R}$ et on a $x_0 \in \overline{B} \subset [x, y]$. On distingue deux cas :

Premier cas : $x_0 \in [x,\, y] \cap V$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon[\subset V$ car V est un ouvert de $\mathbb{R}$, et il existe $z \in B$ tel que $x_0 - \varepsilon < z \leq x_0$, d'où $z \in B \cap V$, ce qui est impossible.
Deuxième cas : $x_0 \in B$. Si $x_0 = y$, alors $x_0 \in [x,\, y] \cap V$, ce qui est impossible. Donc on a $x_0 < y$. Comme U est un ouvert de $\mathbb{R}$, il existe $\eta > 0$ tel que $]x_0 - \eta,\, x_0 + \eta[\subset U$ et $x_0 + \eta < y$. Donc on a $]x_0,\, x_0 + \eta[\subset B$, d'où il existe $z \in B$ tel que $x_0 < z$, ce qui est impossible.
Donc, dans les deux cas, on arrive à une contradiction. Par conséquent, A est bien connexe. ■

Corollaire 4.1.5. *Pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ munis de la topologie usuelle sont connexes.*

Démonstration. Ceci résulte du théorème précédent et du théorème 4.1.4. ■

Exemple 4.1.2. On déduit du corollaire 4.1.1 que le compactifié d'Alexandroff d'un espace localement compact non compact et connexe est connexe. En particulier, les sphères euclidiennes $\mathbb{S}^n$ sont connexes, pour $n \geq 1$.

Exemple 4.1.3. Soit $X = [0,\, 1[\cup]1,\, 2]$, alors X est un localement compact non compact et non connexe, mais le compactifié d'Alexandroff de X est $[0,\, 2]$, donc c'est un espace connexe.

Corollaire 4.1.6 (théorème de la valeur intermédiaire). *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors on a :*

1. *$f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Autrement dit, pour tous $\alpha, \beta \in f(I)$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \leq y \leq \beta$, il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$.*

2. *Si $I = [a,\, b]$ est un intervalle fermé borné, alors $f(I) = [c,\, d]$ est aussi un intervalle fermé et borné.*

Démonstration. 1. Ceci résulte du théorème précédent et du théorème 4.1.2.
2. Si $I = [a,\, b]$, alors I est compact et connexe. On déduit de 1, du théorème 3.2.1 et du corollaire 3.3.2 que l'on a $f(I) = [c,\, d]$. ■

Remarque 4.1.2. 1. Un ensemble dense dans un espace connexe peut ne pas être connexe. Il suffit de considérer $\mathbb{Q}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est un espace connexe, mais l'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe.

2. Le complémentaire d'un ensemble dense peut être connexe. Il suffit de considérer l'ensemble $\mathbb{Q}^2$ qui est dense dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ est connexe, voir exercice 4.9.

Proposition 4.1.6. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'application f est ouverte.

(ii) L'application f est injective.

(iii) L'application f est strictement monotone.

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 4 du supplément.
Dans la preuve de l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii), l'intervalle I n'a pas besoin d'être ouvert.

Corollaire 4.1.7. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Soit $J = f(I)$. Alors f est un homéomorphisme de I sur J si et seulement si f est continue et strictement monotone.*

Pour une preuve du corollaire précédent, voir chapitre 4 du supplément.

Définition 4.1.5. Soient $(X,\, d)$ un espace métrique, $x, y \in X$ et $\varepsilon > 0$. On appelle ε–**chaîne** joignant x et y une suite finie $(a_0, \dots, a_n)$ de X telle que $a_0 = x$, $a_n = y$ et $d(a_{i-1}, a_i) \leq \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On note $x \underset{\varepsilon}{\sim} y$ s'il existe une ε–chaîne joignant x et y.

Lemme 4.1.1. *Soient $(X,\, d)$ un espace métrique et $\varepsilon > 0$. La relation $\underset{\varepsilon}{\sim}$ définie dans X est une relation d'équivalence, et les classes d'équivalence pour cette relation sont ouvertes et fermées dans X.*

Démonstration. Il est clair que $\underset{\varepsilon}{\sim}$ est une relation d'équivalence dans X. Soient $a \in X$ et $A_\varepsilon = \{x \in X \;;\; a \underset{\varepsilon}{\sim} x\}$ la classe d'équivalence de a. Soit $x \in A_\varepsilon$, pour tout $y \in B'(x, \varepsilon)$, on a $d(x, y) \leq \varepsilon$. Donc on a $a \underset{\varepsilon}{\sim} y$. Par conséquent, on a $B'(x, \varepsilon) \subset A_\varepsilon$, donc A_ε est ouvert dans X. Soit $z \in \overline{A_\varepsilon}$, alors il existe $x \in A_\varepsilon$ tel que $d(x, z) \leq \varepsilon$. Comme on a $a \underset{\varepsilon}{\sim} x$, alors on a $a \underset{\varepsilon}{\sim} z$, donc $z \in A_\varepsilon$. Par conséquent, A_ε est aussi fermé dans X. ■

Définition 4.1.6. Soit $(X,\, d)$ un espace métrique. On dit que $(X,\, d)$ est **bien enchaîné** si pour tout $\varepsilon > 0$, X possède une unique classe d'équivalence pour $\underset{\varepsilon}{\sim}$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tous $x, y \in X$, il existe une suite finie $(a_0, \dots, a_n)$ de X telle que $a_0 = x$, $a_n = y$ et $d(a_{i-1}, a_i) \leq \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Le théorème ci-dessous donne un critère de connexité en termes de la distance d.

Théorème 4.1.6. *Soit $(X,\, d)$ un espace métrique.*

1. *Si $(X,\, d)$ est connexe, alors $(X,\, d)$ est bien enchaîné.*
2. *Si $(X,\, d)$ est compact, alors $(X,\, d)$ est connexe si et seulement si $(X,\, d)$ est bien enchaîné.*

Démonstration. 1. Soient $\varepsilon > 0$, $a \in X$ et $A_\varepsilon = \{x \in X \;;\; a \underset{\varepsilon}{\sim} x\}$ la classe d'équivalence de a. D'après le lemme précédent, A_ε est une partie non vide ouverte et fermée dans X. Comme X est connexe, alors on a $A_\varepsilon = X$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc X est bien enchaîné.
2. Il reste à montrer que si $(X,\, d)$ est compact et bien enchaîné, alors X est connexe. Soit $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Alors f est uniformément continue, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tous $x, y \in X$ vérifiant $d(x, y) \leq \varepsilon$, on ait $|f(x) - f(y)| < 1$, et par suite $f(x) = f(y)$. Soient $x, y \in X$. Comme X est bien enchaîné, il existe une suite finie $(a_0, \dots, a_n)$ de X telle que $a_0 = x$, $a_n = y$ et $d(a_{i-1}, a_i) \leq \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. D'où on a $f(a_{i-1}) = f(a_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Par conséquent, on a $f(x) = f(y)$. Donc f est constante. Il résulte de la proposition 4.1.1 que X est connexe. ■

Remarque 4.1.3. L'espace métrique $\mathbb{Q}$ est bien enchaîné, mais $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe.

4.2 Composantes connexes d'un espace topologique

On va maintenant étudier la structure des espaces topologiques qui ne sont pas connexes, en précisant la notion vague de « morceau » d'un tel espace. On définit sur un espace topologique X la relation de connexité suivante : pour $x, y \in X$, $x \mathcal{R} y$ si et seulement s'il existe un ensemble connexe A de X tel que $\{x, y\} \subset A$. Il est clair que $\mathcal{R}$ est réflexive et symétrique. Pour montrer la transitivité de $\mathcal{R}$, on utilise le théorème 4.1.1. Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans X.

Définition 4.2.1. Une classe d'équivalence de l'espace topologique X par rapport à la relation d'équivalence ci-dessus est appelée **une composante connexe** de X. On appelle composante connexe d'un point x de X, la composante connexe de X qui le contient, et on note celle-là par C_x.

Notez que l'espace topologique X est alors la réunion de ses composantes connexes qui sont deux à deux disjoints.

Théorème 4.2.1. *Soit X un espace topologique. On a les propriétés suivantes :*

1. *La composante connexe d'un point x de X est la réunion des ensembles connexes de X contenant x. C'est aussi la plus grande, pour l'inclusion, partie connexe de X contenant x.*
2. *Les composantes connexes de X sont connexes et fermées dans X.*
3. *Si X possède un nombre fini de composantes connexes, alors chacune de ces composantes est ouverte dans X.*
4. *Si U est un ensemble à la fois ouvert et fermé dans X, alors pour tout $x \in U$, on a $C_x \subset U$.*
5. *Tout ensemble connexe de X est contenu dans une composante connexe. Autrement dit, si A est un ensemble connexe de X et si C est une composante connexe de X tels que $A \cap C \neq \emptyset$, alors on a $A \subset C$. En particulier, pour tout $x \in A$, on a $A \subset C_x$.*
6. *Tout ensemble connexe non vide qui est à la fois ouvert et fermé dans X, est une composante connexe.*
7. *Si $X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$ tel que pour tout $i \in I$, X_i est connexe et ouvert non vide dans X, et tels que les X_i sont deux à deux disjoints, alors les X_i sont les composantes connexes de X.*

Démonstration. 1. Soient $x \in X$ et D_x la réunion des ensembles connexes de X contenant x. D'après le théorème 4.1.1, D_x est une partie connexe de X contenant x. Donc, pour tout $y \in D_x$, on a $x \mathcal{R} y$, d'où $y \in C_x$. Par conséquent, on a $D_x \subset C_x$.
Réciproquement, soit $y \in C_x$, il existe un ensemble connexe A de X tel que $\{x, y\} \subset A$, d'où on a $y \in A \subset D_x$. Par conséquent, on a $C_x \subset D_x$, donc $D_x = C_x$.
Puisque C_x est connexe et c'est la réunion des ensembles connexes de X contenant x, alors C_x est la plus grande, pour l'inclusion, partie connexe de X contenant x.
2. Soit $x \in X$. D'après le corollaire 4.1.1, $\overline{C_x}$ est une partie connexe de X contenant x,

donc on a $\overline{C_x} \subset C_x$. Par conséquent, C_x est fermé dans X.
3. Si $(C_{x_i})_{1\leq i\leq n}$ sont les composantes connexes de X, alors pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, C_{x_k} est le complémentaire du fermé $\underset{i\neq k}{\cup} C_{x_i}$, donc C_{x_k} est ouvert dans X.
4. Pour tout $x \in U$, on a $C_x \cap U \neq \emptyset$. Il résulte de la proposition 4.1.2 que l'on a $C_x \subset U$.
5. Soient A un ensemble connexe de X et C une composante connexe de X tels que $A \cap C \neq \emptyset$. Soit $x \in A \cap C$. D'après le théorème 4.1.1, $A \cup C$ est un connexe de X contenant x, donc on a $A \cup C \subset C_x = C$, d'où $A \subset C$.
6. Soit U un ensemble connexe non vide de X et on suppose que U est à la fois ouvert et fermé dans X. Soit $x \in U$, d'après 4, on a $C_x \subset U$. D'après 5, on a $U \subset C_x$. Donc on a $U = C_x$. Autrement dit, U est une composante connexe.
7. Puisque les X_i sont deux à deux disjoints, alors pour tout $j \in I$, X_j est le complémentaire de l'ouvert $\underset{i\neq j}{\cup} X_i$, donc pour tout $j \in I$, X_j est aussi fermé dans X. Il résulte de 6, que les X_i sont les composantes connexes de X. ■

Remarque 4.2.1. Les composantes connexes d'un espace topologique ne sont pas en général des ouverts. En effet, considérons l'espace $\mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$. Soit A un sous-ensemble non vide et non réduit à un point de $\mathbb{Q}$. Soient $x, z \in \mathbb{Q}$ tels que $x < z$ et soit $y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tel que $x < y < z$. Alors on a $A = \big(]-\infty,\, y[\cap A\big) \cup \big(]y,\, +\infty[\cap A\big)$ et $]-\infty,\, y[\cap A$, $]y,\, +\infty[\cap A$ sont des ouverts non vides et disjoints de A. Donc si A est non vide et non réduit à un point de $\mathbb{Q}$, alors A n'est pas connexe. Donc chaque composante connexe de $\mathbb{Q}$ est réduit à un point de $\mathbb{Q}$. Par conséquent, les composante connexes de $\mathbb{Q}$ sont des fermés, mais ne sont pas des ouverts dans $\mathbb{Q}$.

Définition 4.2.2. On dit qu'un espace topologique X est **totalement discontinu** si la composante connexe de tout point de X est réduit à ce point. Autrement dit, pour tout $x \in X$, on a $C_x = \{x\}$.

Un espace discret est totalement discontinu, mais il faut prendre garde de ne pas confondre ces deux notions. On a vu, remarque précédente, que l'espace métrique $\mathbb{Q}$ est totalement discontinu, mais $\mathbb{Q}$ n'est pas discret.

Proposition 4.2.1. *Soit X un espace compact. Pour tout $x \in X$, la composante connexe de x est l'intersection des voisinages de x à la fois ouverts et fermés dans X.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 4 du supplément.

Proposition 4.2.2. *Soient X un espace topologique et $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence dans X dont les classes d'équivalence sont les composantes connexes de X.*

1. *L'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ est totalement discontinu.*

2. *Si X est compact, alors l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ est compact.*

Démonstration. 1. Soit $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient. Notons d'abord que chaque classe d'équivalence suivant $\mathcal{R}$ est connexe. Soit D une composante connexe de $X/\mathcal{R}$. Alors D est connexe et fermé dans $X/\mathcal{R}$. D'après le théorème 4.1.3, $q^{-1}(D)$ est une partie connexe de X. Soit $y \in D$, alors $q^{-1}\big(\{y\}\big)$ est une composante connexe de X et on a $q^{-1}\big(\{y\}\big) \subset q^{-1}(D)$, d'où on a $q^{-1}\big(\{y\}\big) = q^{-1}(D)$. Par conséquent, on a $D = q(q^{-1}(D)) = q\big(q^{-1}\big(\{y\}\big)\big) = \{y\}$. Donc $X/\mathcal{R}$ est totalement discontinu.
2. Pour montrer que l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ est compact, il suffit de montrer

que $X/\mathcal{R}$ est séparé. Soient $a, b \in X/\mathcal{R}$ tels que $a \neq b$. Soient $x, z \in X$ tels que $q(x) = a$ et $q(z) = b$. Alors $q^{-1}(\{a\}) = C_x$ est la composante connexe de x et $q^{-1}(\{b\}) = C_z$ est la composante connexe de z et on a $C_x \cap C_z = \emptyset$. Comme C_x et C_z sont compacts, d'après la proposition 3.1.2, il existe deux ouverts disjoints U et V dans X tels que $C_x \subset U$ et $C_z \subset V$. D'après la proposition précédente et l'exercice 3.2, il existe deux parties A et B à la fois ouvertes et fermées dans X telles que $C_x \subset A \subset U$ et $C_z \subset B \subset V$. D'après le théorème 4.2.1, pour tout $\alpha \in A$, on a $q^{-1}(\{\alpha\}) \subset A$ et pour tout $\beta \in B$, on a $q^{-1}(\{\beta\}) \subset B$, donc on a $q^{-1}(q(A)) = A$ et $q^{-1}(q(B)) = B$. Par conséquent, $q(A)$ et $q(B)$ sont des ouverts disjoints de $X/\mathcal{R}$ contenant respectivement a et b. Donc $X/\mathcal{R}$ est séparé. ■

Remarque 4.2.2. Soit X un espace topologique. On déduit des propositions 1.1.1 et 1.1.3 que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Tout point de X possède un système fondamental de voisinages formé d'ensembles à la fois ouverts et fermés.

(ii) X admet une base d'ouverts formée d'ensembles fermés.

Définition 4.2.3. Un espace topologique séparé vérifiant l'une des propriétés ci-dessus est appelé espace **éparpillé** .

Théorème 4.2.2. *Soit X un espace topologique. Alors on a :*

1. *Si X est éparpillé, alors X est totalement discontinu.*

2. *Si X est localement compact et totalement discontinu, alors X est éparpillé.*

Démonstration. 1. Supposons X éparpillé. Soient $x \in X$ et C_x la composante connexe de x. Soit $y \in X$ tel que $y \neq x$. Comme $X \setminus \{y\}$ est un ouvert de X contenant x, alors il existe une partie U à la fois ouverte et fermée dans X contenant x telle que $U \subset X \setminus \{y\}$. D'après le théorème 4.2.1, on a $C_x \subset U$, d'où $y \notin C_x$. Par conséquent, on a $C_x = \{x\}$. Donc X est totalement discontinu.
2. Soient $x \in X$ et W un voisinage de x dans X. D'après le théorème 3.4.1, il existe un ouvert V de X tel que $x \in V \subset \overline{V} \subset W$ et $\overline{V}$ soit compact. Comme toute partie fermée (*resp.* ouverte) d'un espace totalement discontinu est un espace totalement discontinu, alors le compact $\overline{V}$ est totalement discontinu. D'après la proposition 4.2.1 et l'exercice 3.2, il existe une partie A à la fois ouverte et fermée dans $\overline{V}$ telle que $x \in A \subset V \subset \overline{V}$. Comme $\overline{V}$ est fermé dans X, alors A est fermé dans X. Soit U un ouvert de X tel que $A = U \cap \overline{V}$, alors on a $A = A \cap V = U \cap \overline{V} \cap V = U \cap V$, donc A est aussi ouvert dans X. On vient de montrer qu'il existe une partie A à la fois ouverte et fermée dans X telle que $x \in A \subset W$. Donc X est un espace éparpillé. ■

Pour un exemple d'un espace métrisable totalement discontinu non éparpillé, voir ([3], IX, p. 119).

Proposition 4.2.3. *Soit X un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) Pour tout ensemble ouvert U de X, $\overline{U}$ est ouvert dans X.

(ii) Pour tout ensemble fermé F de X, $\mathring{F}$ est fermé dans X.

(iii) Pour tous ouverts U et V de X tels que $U \cap V = \emptyset$, on ait $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

Démonstration. L'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) s'obtient par passage aux complémentaires, et de la proposition 1.2.2.
Preuve de (i) $\Longrightarrow$ (iii). Soient U et V deux ouverts de X tels que $U \cap V = \emptyset$. D'où on a $U \subset X \setminus V$ et $X \setminus V$ est fermé dans X. Donc on a $\overline{U} \subset X \setminus V$, d'où $\overline{U} \cap V = \emptyset$. Comme $X \setminus \overline{U}$ est fermé dans X et on a $V \subset X \setminus \overline{U}$, alors $\overline{V} \subset X \setminus \overline{U}$. Donc on a $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). Soit U un ouvert de X. Soit $F = X \setminus U$, d'après la proposition 1.2.2, on a $\mathring{F} = X \setminus \overline{U}$. Soit $V = \mathring{F}$, alors V est un ouvert de X et on a $U \cap V = \emptyset$, d'où $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. D'après la proposition 1.2.2, on a $\overline{V} = X \setminus \mathring{\overline{U}}$, donc $X \setminus \mathring{\overline{U}} \subset X \setminus \overline{U}$. Par conséquent, on a $\overline{U} \subset \mathring{\overline{U}}$. Autrement dit, $\overline{U}$ est ouvert dans X. ■

Définition 4.2.4. Un espace topologique séparé vérifiant l'une des propriétés ci-dessus est appelé **extrêmement discontinu**.

Il est clair que tout espace discret est extrêmement discontinu et que tout espace extrêmement discontinu est totalement discontinu. En effet, soient X un espace extrêmement discontinu et $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. Comme X est séparé, il existe deux ouverts disjoints U et V dans X tels que $x \in U$ et $y \in V$. Alors $\overline{U}$ est ouvert et fermé dans X contenant x. Si C_x est la composante connexe de x, d'après le théorème 4.2.1, on a $C_x \subset \overline{U}$. Or on a $y \notin \overline{U}$, donc $y \notin C_x$, d'où $C_x = \{x\}$. Par conséquent, X est totalement discontinu. Notons aussi que d'après le théorème 4.2.2, tout espace localement compact extrêmement discontinu est éparpillé.
On a vu, remarque 4.2.1, que l'espace $\mathbb{Q}$ est totalement discontinu. En fait, l'espace $\mathbb{Q}$ est même éparpillé et n'est pas extrêmement discontinu, voir exercice 4.41 du supplément. Notons aussi que $\beta(\mathbb{N})$, la compactification de Stone-Čech de $\mathbb{N}$, est un espace compact séparable extrêmement discontinu non discret, voir exercice 4.45 du supplément.

4.3 Espaces localement connexes

Définition 4.3.1. On dit qu'un espace topologique X est **localement connexe** si tout point de X possède un système fondamental de voisinages connexes.

Comme l'indique son nom, le fait pour un espace d'être localement connexe, est une propriété locale, alors que le fait d'être connexe est une propriété globale. Ces deux propriétés n'ont donc aucun rapport l'une avec l'autre[†]. Notons enfin, que tout espace topologique discret est localement connexe.

Exemple 4.3.1. Pour tout $n \geq 1$, l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle est localement connexe.

Exemple 4.3.2. Considérons dans $\mathbb{R}^2$, l'espace $X = \{(x, 0) \ ; \ x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 1) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$. Alors X est localement connexe, mais il n'est pas connexe.

[†]Ce n'est pas la même chose pour la compacité : tout espace compact est localement compact (la réciproque n'étant pas vraie), alors qu'un espace connexe n'est pas nécessairement localement connexe.

Exemple 4.3.3. Considérons dans $\mathbb{R}^2$, l'espace $X = \{(x,0)\ ;\ x \in \mathbb{R}\} \cup \big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} D_q\big)$, où $D_q = \{(q,y)\ ;\ y \in \mathbb{R}\}$. Alors X est connexe, mais il n'est pas localement connexe.

Théorème 4.3.1. *Soit X un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) X est localement connexe.

(ii) Pour tout ouvert U dans X, les composantes connexes de U sont des ouverts dans X.

(iii) L'espace X admet une base d'ouverts formée d'ensembles connexes.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit U un ouvert de X. Soient $x \in U$ et C_x la composante connexe de x dans U. Pour tout $y \in C_x$, il existe un voisinage connexe V_y de y dans X tel que $V_y \subset U$. Comme $C_x \cap V_y \neq \emptyset$, alors $C_x \cup V_y$ est un connexe de U contenant x, d'où $C_x \cup V_y \subset C_x$. Par conséquent, on a $V_y \subset C_x$. Donc C_x est un ouvert de X.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit U un ouvert non vide de X. Soit $x \in U$, alors C_x la composante connexe de x dans U est un ouvert connexe de X tel que $x \in C_x \subset U$. Donc les ouverts connexes de X forment une base d'ouverts de X, voir proposition 1.1.1.
L'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i) résulte de la proposition 1.1.3. ■

Corollaire 4.3.1. *Les composantes connexes d'un espace topologique localement connexe X sont des ouverts de X.*

Corollaire 4.3.2. *Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.*

Démonstration. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{R}$ est localement connexe, les composantes connexes de U sont des intervalles ouverts deux à deux disjoints et dont la réunion est U. Comme $\mathbb{R}$ est séparable, il résulte de la proposition 1.2.5 que toute famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ deux à deux disjoints est au plus dénombrable, d'où le résultat. ■

Proposition 4.3.1. *Soient X un espace topologique localement connexe et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans X. Alors l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ est localement connexe.*

Démonstration. Soit $q : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ l'application quotient. Soient U un ouvert de $X/\mathcal{R}$ et C une composante connexe de U. Soient $x \in q^{-1}(C) \subset q^{-1}(U)$ et D_x la composante connexe de x dans l'ouvert $q^{-1}(U)$. D'après le théorème précédent, D_x est un ouvert de X. Or on a $q(x) \in q(D_x) \cup C \subset U$ et $q(D_x) \cup C$ est un connexe de U, d'où $q(D_x) \subset q(D_x) \cup C = C$. Donc on a $x \in D_x \subset q^{-1}(C)$. Par conséquent, $q^{-1}(C)$ est un ouvert de X. Donc C est un ouvert de $X/\mathcal{R}$. En appliquant une fois de plus le théorème précédent, on déduit que $X/\mathcal{R}$ est localement connexe. ■

Remarque 4.3.1. L'image par une application continue d'un espace localement connexe n'est pas forcément localement connexe. En effet, soient $X = \mathbb{N}$, $Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\ ;\ n \geq 1\}$ et $f : X \longrightarrow Y$ définie par $f(0) = 0$ et $f(n) = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$. Alors f est continue bijective, X est localement connexe et Y n'est pas localement connexe.

Proposition 4.3.2. *Soit (X, d) un espace métrique compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) X est localement connexe.

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, X est réunion finie de connexes de diamètre $\leq \varepsilon$.

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 4 du supplément.

4.4 Espaces connexes par arcs

Dans de nombreuses branches des mathématiques, on n'utilise que des espaces connexes d'un type très régulier ; par exemple en géométrie différentielle, les espaces utilisés sont en général localement homéomorphes à $\mathbb{R}^n$ ou à un demi-espace fermé de $\mathbb{R}^n$. En plus, il est toujours commode d'avoir des critères pour reconnaître qu'un espace est connexe. C'est pourquoi, on introduit la notion d'espaces connexes par arcs.

Définition 4.4.1. Soient X un espace topologique et $x,\ y \in X$. On appelle **chemin** ou **arc** dans X reliant x à y toute application continue $\varphi : [0,\ 1] \longrightarrow X$ telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = y$. Le point x est alors appelé l'**origine** du chemin et y son **extrémité**.

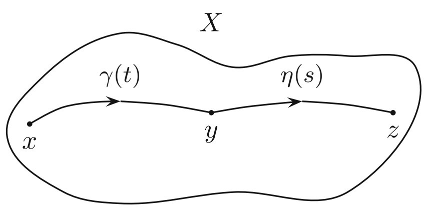
Il ne faut pas confondre un chemin qui est une application avec son image qui est une partie de X. Deux chemins différents peuvent avoir la même image.

Lemme 4.4.1. *Soit X un espace topologique. On définit dans X la relation suivante :*

$$x \sim y \iff \text{il existe un chemin dans } X \text{ reliant } x \text{ à } y\,.$$

Alors $\sim$ est une relation d'équivalence dans X.

Démonstration. Pour tout $x \in X$ et pour tout $t \in [0,\ 1]$, soit $\gamma_0(t) = x$, alors γ_0 est un chemin dans X reliant x à x. Donc $\sim$ est réflexive.
Soient $x, y \in X$ tels que $x \sim y$, et soit γ un chemin dans X reliant x à y. Pour tout $t \in [0,\ 1]$, soit $\eta(t) = \gamma(1-t)$, alors η est application continue de $[0,\ 1]$ dans X telle que $\eta(0) = y$ et $\eta(1) = x$, d'où $y \sim x$. Donc $\sim$ est symétrique.
Soient $x, y, z \in X$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$. Soient γ et η deux applications continues de $[0,\ 1]$ dans X telles que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ et $\eta(0) = y$, $\eta(1) = z$. Soit :



$$\xi(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\,, \\ \eta(2t-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1\,. \end{cases}$$

D'après la proposition 1.4.5, ξ est une application continue de $[0,\ 1]$ dans X. Or on a $\xi(0) = x$ et $\xi(1) = z$, donc $x \sim z$. Donc $\sim$ est transitive. Par conséquent, $\sim$ est bien une relation d'équivalence dans X. ■

Définition 4.4.2. Soit X un espace topologique.

1. On dit que X est **connexe par arcs** si X possède une unique classe d'équivalence pour la relation d'équivalence $\sim$. Autrement dit, pour tout $x, y \in X$, il existe une application continue $\varphi : [0,\ 1] \longrightarrow X$ telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = y$.

2. On dit que X est **localement connexe par arcs** si tout point de X possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs.

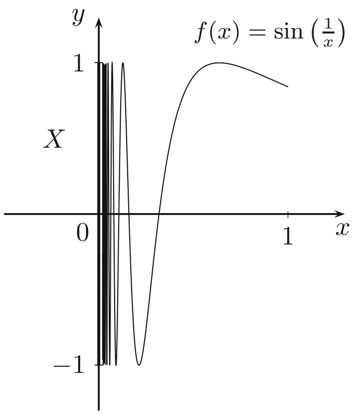
Proposition 4.4.1. *Soit X un espace topologique.*

1. Si X est connexe par arcs, alors X est connexe.

2. Si X est localement connexe par arcs, alors X est localement connexe.

Démonstration. 1. Soit $a \in X$. Pour tout $x \in X$, il existe une application continue $\varphi_x : [0, 1] \longrightarrow X$ telle que $\varphi_x(0) = a$ et $\varphi_x(1) = x$. Soit $A_x = \varphi_x\big([0, 1]\big)$, alors A_x est une partie connexe de X contenant a et x. Comme on a $X = \bigcup\limits_{x\in X} A_x$, il résulte du théorème 4.1.1 que X est connexe.
2. Ceci résulte immédiatement de 1. ∎

Remarque 4.4.1. La réciproque de la proposition précédente est en général fausse. En effet, considérons dans $\mathbb{R}^2$ l'espace $X = \big\{(0, y)\ ;\ -1 \leq y \leq 1\big\} \cup \big\{\big(x, \sin\big(\frac{1}{x}\big)\big)\ ;\ x \in]0, 1]\big\}$.



Montrons que X est connexe, mais qu'il n'est pas connexe par arcs. Puisque l'application $x \longmapsto \big(x, \sin\big(\frac{1}{x}\big)\big)$ est continue de $]0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et $]0, 1]$ est connexe, alors $A = \big\{\big(x, \sin(\frac{1}{x})\big)\ ;\ x \in]0, 1]\big\}$ est connexe. Soit $y \in [-1, 1]$, alors il existe $\theta \in \big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]$ tel que $\sin(\theta) = y$. Pour tout $n \geq 1$, soit $x_n = \dfrac{1}{2\pi n + \theta}$, alors $x_n \in]0, 1]$ et on a $\sin\big(\frac{1}{x_n}\big) = y$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(x_n, \sin\big(\frac{1}{x_n}\big)\big) = (0, y)$, d'où $(0, y) \in \overline{A}$. Par conséquent, on a $A \subset X \subset \overline{A}$. Il résulte de la proposition 4.1.3 que X est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.

Soient $a = (0, y) \in X$ et $b = \big(\alpha, \sin\big(\frac{1}{\alpha}\big)\big)$, avec $\alpha \in]0, 1]$. Montrons que l'on ne peut pas relier a et b par un chemin dans X. Supposons le contraire, et soit $\varphi : [0, 1] \longrightarrow X$ une application continue telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$. Comme $F = \{0\} \times [-1, 1]$ est fermé dans X, alors $\varphi^{-1}(F)$ est une partie fermée de $[0, 1]$ contenant 0, donc $s = \sup(\varphi^{-1}(F)) \in \varphi^{-1}(F)$ et on a $0 \leq s < 1$. On a $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, alors pour tout $t \in]s, 1]$, on a $\varphi_1(t) > 0$ et $\varphi_2(t) = \sin\big(\frac{1}{\varphi_1(t)}\big)$. Comme φ_2 est continue en s, alors il existe $\eta > 0$ tel que $s + \eta \leq 1$ et pour tout $t \in [s, s + \eta]$, on ait $|\varphi_2(s) - \varphi_2(t)| < 1$. Comme φ_1 est continue, alors on a $[0, \varphi_1(s + \eta)] \subset \varphi_1\big([s, s + \eta]\big)$. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{1}{2\pi p + \frac{\pi}{2}}, \dfrac{1}{2\pi q - \frac{\pi}{2}} \in]0, \varphi_1(s + \eta)]$, alors il existe $t_p, t_q \in]s, s + \eta]$ tels que $\varphi_1(t_p) = \dfrac{1}{2\pi p + \frac{\pi}{2}}$ et $\varphi_1(t_q) = \dfrac{1}{2\pi q - \frac{\pi}{2}}$. Or on a $|\varphi_2(s) - \varphi_2(t_p)| < 1$ et $|\varphi_2(s) - \varphi_2(t_q)| < 1$, d'où on a $|\varphi_2(s) - 1| < 1$ et $|\varphi_2(s) + 1| < 1$, ce qui est impossible. Par conséquent, on ne peut pas relier a et b par un chemin dans X. Donc X n'est pas connexe par arcs.

Remarque 4.4.2. Soit X un espace topologique. Les classes d'équivalence pour la relation d'équivalence $\sim$ ne sont pas toujours fermées dans X. En effet, si
$X = \big\{(0, y)\ ;\ -1 \leq y \leq 1\big\} \cup \big\{\big(x, \sin\big(\frac{1}{x}\big)\big)\ ;\ x \in]0, 1]\big\}$. Alors X a deux classes

d'équivalence pour $\sim$; d'une part $A = \{(0, y) \; ; \; -1 \le y \le 1\}$ qui est fermée non ouverte dans X et d'autre part $B = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \; ; \; x \in]0, 1]\right\}$ qui est ouverte non fermée dans X.

Théorème 4.4.1. *Soit X un espace topologique localement connexe par arcs. On a :*

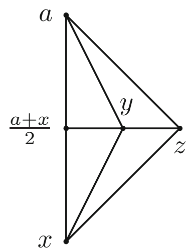
1. *Les classes d'équivalence pour $\sim$ sont ouvertes et fermées dans X.*
2. *Si X est connexe, alors il est connexe par arcs.*
3. *Si X n'est pas connexe, alors chacune de ses composantes connexes est ouverte, fermée et connexe par arcs.*

Démonstration. 1. Soient $a \in X$ et $D_a = \{x \in X \; ; \; a \sim x\}$ la classe d'équivalence de a pour $\sim$. L'ensemble D_a est non vide car $a \in D_a$. Soit $x \in D_a$, il existe un voisinage V_x de x dans X tel que V_x soit connexe par arcs. Donc, pour tout $y \in V_x$, on a $x \sim y$, d'où on a $a \sim y$. Par conséquent, on a $V_x \subset D_a$. Donc D_a est ouvert dans X. Soit $z \in \overline{D_a}$. Soit V_z un voisinage de z dans X tel que V_z soit connexe par arcs. Comme $V_z \cap D_a \neq \emptyset$, il existe $x \in V_z \cap D_a$. On a $a \sim x$ et $x \sim z$, d'où $a \sim z$. Donc on a $z \in D_a$. Par conséquent, D_a est aussi fermé dans X.
2. Soient $a \in X$ et $D_a = \{x \in X \; ; \; a \sim x\}$ la classe d'équivalence de a pour $\sim$. D'après ce qui précède, D_a est une partie non vide et ouverte et fermée dans X. Comme X connexe, alors on a $D_a = X$. Ceci étant vrai pour tout $a \in X$, donc X est connexe par arcs.
3. Soit C une composante connexe de X. D'après le théorème 4.2.1, C est fermée dans X. Comme X est localement connexe, d'après le corollaire 4.3.1, C est ouverte dans X. Or tout ouvert d'un espace localement connexe par arcs est localement connexe par arcs, donc C est localement connexe par arcs. Comme C est aussi connexe, il résulte de 2 que C est connexe par arcs. ■

Il y a un corollaire très important de ce théorème dans le cadre des « espaces normés », voir proposition 6.1.5.
La notion de connexité peut être utilisée pour prouver que deux espaces topologiques ne sont pas homéomorphes : si l'un de ces espaces est connexe et l'autre pas, les deux espaces ne sont évidemment pas homéomorphes.

Proposition 4.4.2. *Soient $n \geq 2$ et B une partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathbb{R}^n \setminus B$ est connexe par arcs.*

Démonstration. Soient $a, x \in \mathbb{R}^n \setminus B$ tels que $a \neq x$. Soit $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + x$ et $a + z$ ne soient pas colinéaires, un tel z existe car $n \geq 2$. Pour tout $y \in I = \left[\frac{a+x}{2}, z\right]$, soit $L_y = [a, y] \cup [y, x]$, alors on a $L_y \cap L_{y'} = \emptyset$ si $y \neq y'$. Comme le segment I n'est pas dénombrable, si pour tout $y \in I$, on a $L_y \cap B \neq \emptyset$, alors B serait infini non dénombrable, ce qui est impossible. Par conséquent, il existe $y \in I$ tel que $L_y \subset \mathbb{R}^n \setminus B$. Donc $\mathbb{R}^n \setminus B$ est connexe par arcs. ■



Corollaire 4.4.1. *Pour tout $n \geq 2$, les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes.*

Démonstration. S'il existe un homéomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ et $\mathbb{R} \setminus \{f(x)\}$ seront homéomorphes. Or $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ est connexe et $\mathbb{R} \setminus \{f(x)\}$ n'est pas connexe, donc $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ et $\mathbb{R} \setminus \{f(x)\}$ ne sont homéomorphes. Par conséquent, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes. ■

Remarque 4.4.3. On peut montrer, mais c'est nettement plus difficile, que si $p \neq q$, alors les espaces $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ ne sont pas homéomorphes.

4.5 Ensemble de Cantor

Définition 4.5.1. L'espace topologique produit $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$, où chaque facteur $\{0, 1\}$ est muni de la topologie discrète, est appelé l'**ensemble de Cantor abstrait**.

Proposition 4.5.1. *L'espace de Cantor $\mathcal{C}$ est compact et métrisable, infini non dénombrable, sans points isolés et totalement discontinu.*

Démonstration. Notons d'abord qu'un élément de $\mathcal{C}$ est une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ où pour tout $n \geq 1$, $x_n \in \{0, 1\}$. D'après le théorème 3.3.2 et la proposition 2.4.3, l'espace de Cantor $\mathcal{C}$ est compact et métrisable, et une distance définissant sa topologie est définie par :

$$d\big((x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}\,.$$

Il est clair que $\mathcal{C}$ est infini. Supposons que $\mathcal{C}$ est dénombrable. Alors $\mathcal{C} = \big\{\xi_p\ ;\ p \geq 1\big\}$ où $\xi_p = (x_{p,n})_{n\geq 1}$, avec $x_{p,n} \in \{0, 1\}$. Soit $\xi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \{0, 1\}$ définie par $\xi(n) = 1 - \xi_n(n)$. Alors $\xi \in \mathcal{C}$ et pour tout $n \geq 1$, on a $\xi(n) \neq \xi_n(n)$, donc $\xi \neq \xi_n$, ce qui est impossible. Donc l'ensemble $\mathcal{C}$ n'est pas dénombrable.
Soit $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}$. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $V_N = \{y = (y_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}\ ;\ y_N = x_N\}$, alors V_N est un ouvert élémentaire de $\mathcal{C}$ contenant x. Soit $y = (y_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}$ tel que $y_{N+1} \neq x_{N+1}$ et $y_n = x_n$ pour tout $n \neq N + 1$. Alors $y \in V_N$ et $y \neq x$. Comme tout ouvert de $\mathcal{C}$ contenant x contient un ouvert de la forme V_N, on en déduit que x n'est pas un point isolé de $\mathcal{C}$.
Il reste à montrer que $\mathcal{C}$ est totalement discontinu. Soient $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}$ et C_x sa composante connexe. Soit $y = (y_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}$ tel que $y \neq x$. Alors il existe $p \geq 1$ tel que $y_p \neq x_p$. Pour tout $z = (z_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}$, on pose $P(z) = z_p$, alors P est une projection canonique de $\mathcal{C}$ sur $\{0, 1\}$, donc P est continue. Comme $\{x_p\}$ est ouvert et fermé dans $\{0, 1\}$, alors $U_p = P^{-1}\big(\{x_p\}\big) = \{z = (z_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}\ ;\ z_p = x_p\}$ est ouvert et fermé dans $\mathcal{C}$ contenant x. Il résulte du théorème 4.2.1 que l'on a $C_x \subset U_p$. Or $y \notin U_p$, donc $y \notin C_x$. Par conséquent, on a $C_x = \{x\}$. Donc $\mathcal{C}$ est totalement discontinu. ■

Ensemble triadique de Cantor. Si $I = [a,\, a + h]$ est un segment de $\mathbb{R}$, on pose :

$$T(I) = \big[a,\, a + \tfrac{h}{3}\big] \cup \big[a + 2\tfrac{h}{3},\, a + h\big] = I \setminus \big]a + \tfrac{h}{3},\, a + 2\tfrac{h}{3}\big[\,.$$

L'opération T sur I consiste à enlever le « tiers médian » ouvert $\big]a + \frac{h}{3},\, a + 2\frac{h}{3}\big[$ de I. Si Y est une union finie de segments disjoints $I_1, \dots, I_p$, on pose $T(Y) = \bigcup\limits_{j=1}^{p} T(I_j)$. Soient :

$$K_1 = T\big([0,\, 1]\big)\ ,\ K_{n+1} = T(K_n) \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et } K = \bigcap_{n\geq 1} K_n\,.$$

Alors K est une partie compacte de $[0, 1]$ appelée l'**ensemble triadique de Cantor**.
On a la propriété suivante :
Pour tout $n \geq 1$, on a $K_n = \underset{\alpha}{\cup} I_n(\alpha)$, où $I_n(\alpha) = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{3^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}\right]$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ parcourt l'ensemble $\{0, 2\}^n$. En effet, pour $n = 1$, on a $K_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.
Supposons la propriété vraie à l'ordre n. Alors on a $K_{n+1} = T(K_n) = \underset{\alpha}{\cup} T(I_n(\alpha))$ et on a $T(I_n(\alpha)) = I_{n+1}(\alpha^0) \cup I_{n+1}(\alpha^2)$, avec $\alpha^0 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0)$ et $\alpha^2 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 2)$, d'où on a $K_{n+1} = \underset{\beta}{\cup} I_{n+1}(\beta)$, avec $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n+1})$ parcourt l'ensemble $\{0, 2\}^{n+1}$.

Proposition 4.5.2. *Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x_n}{3^n}$. Alors f est un homéomorphisme de $\mathcal{C}$ sur K.*

Démonstration. Pour tous $x = (x_n)_{n\geq 1}, y = (y_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}$, on a $0 \leq f(x) \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = 1$ et $|f(x) - f(y)| \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{3^n} \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} = 2\, d(x, y)$. Donc f est une application lipschitzienne de $\mathcal{C}$ dans $[0, 1]$, donc f est continue.
Montrons que f est injective. Soient $x = (x_n)_{n\geq 1}, y = (y_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}$ tels que $x \neq y$. Soit $N = \inf\{n \geq 1\ ;\ x_n \neq y_n\}$, alors $N \in \mathbb{N}^*$ et on a $y_N \neq x_N$. Supposons $y_N = 1$ et $x_N = 0$. Alors on a $f(y) - f(x) = \frac{2}{3^N} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2(x_n - y_n)}{3^n}$, d'où $f(y) - f(x) \geq \frac{2}{3^N} - 2\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^N} - \frac{1}{3^N} = \frac{1}{3^N}$. Donc f est injective. Par conséquent, f est un homéomorphisme de $\mathcal{C}$ sur son image $f(\mathcal{C})$. Il reste à montrer que l'on a $f(\mathcal{C}) = K$. Soit $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}$. Soit n fixé dans $\mathbb{N}^*$ et soit $\alpha = (2x_1, \ldots, 2x_n)$, alors $\alpha \in \{0, 2\}^n$ et on a $0 \leq f(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{3^i} = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{2x_i}{3^i} \leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3^n}$, d'où $f(x) \in I_n(\alpha) \subset K_n$. Donc, pour tout $n \geq 1$, on a $f(x) \in K_n$, d'où $f(x) \in \underset{n\geq 1}{\cap} K_n = K$. Donc on a $f(\mathcal{C}) \subset K$.
Réciproquement, soit $y \in K$, alors pour tout $n \geq 1$, il existe $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0, 2\}^n$ tel que $y \in I_n(\alpha)$, d'où on a $0 \leq y - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{3^i} \leq \frac{1}{3^n}$. Or on a $\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{3^i} = f(\eta_n)$, où $\eta_n = (\frac{\alpha_1}{2}, \ldots, \frac{\alpha_n}{2}, 0, \ldots) \in \mathcal{C}$, donc pour tout $n \geq 1$, il existe $\eta_n \in \mathcal{C}$ tel que $0 \leq y - f(\eta_n) \leq \frac{1}{3^n}$, on en déduit que $y \in \overline{f(\mathcal{C})}$. Comme $f(\mathcal{C})$ est compact, alors on a $\overline{f(\mathcal{C})} = f(\mathcal{C})$, d'où $y \in f(\mathcal{C})$. Donc on a $K \subset f(\mathcal{C})$. Par conséquent, on a $f(\mathcal{C}) = K$. ■

Remarque 4.5.1. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & [0, 1] \\ (x_n)_{n\geq 1} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n} \end{array}$$

est continue et surjective, voir exercice 2.44 du supplément.

Courbe de Peano. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}$, on pose $p(x) = (g(x), h(x))$, où $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_{2n+1}}{2^n}$ et $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_{2n}}{2^n}$. Alors p est continue et surjective de $\mathcal{C}$ dans $[0,\, 1] \times [0,\, 1]$. En effet, pour tous $x = (x_n)_{n\geq 1}, y = (y_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}$, on a :

$$|g(y) - g(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x_{2n+1} - y_{2n+1}|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x_{2n+1} - y_{2n+1}|}{2^{2n+1}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} = d(x, y)\,.$$

Donc g est continue. De même, h est continue. Soit $(a, b) \in [0,\, 1] \times [0,\, 1]$, alors il existe $\alpha_n,\, \beta_n \in \{0,\, 1\}$ tels que $a = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{2^n}$ et $b = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta_n}{2^n}$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $x_{2n+1} = \alpha_n$ et pour tout $n \geq 1$, on pose $x_{2n} = \beta_n$, alors $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{C}$ et on a $p(x) = (a, b)$. Donc p est une application surjective de $\mathcal{C}$ sur $[0,\, 1] \times [0,\, 1]$. En composant avec l'application f^{-1}, on obtient une application continue surjective de K sur $[0,\, 1] \times [0,\, 1]$. On prolonge cette application en une application continue à $[0,\, 1]$, voir théorème 1.9.4, on obtient finalement une application continue surjective de $[0,\, 1]$ sur $[0,\, 1] \times [0,\, 1]$. Une telle application est appelée une **courbe de Peano**.

Théorème 4.5.1. *Si $(X,\, d)$ est un espace métrique compact, alors il existe une application continue surjective de $\mathcal{C}$ sur X. Autrement dit, tout espace métrique compact est image continue de $\mathcal{C}$.*

Théorème 4.5.2. *Si $(X,\, d)$ est un espace métrique compact totalement discontinu et sans aucun point isolé, alors X est homéomorphe à $\mathcal{C}$.*

Pour une preuve des théorèmes précédents, voir ([2], chapitre 24).

4.6 Exercices

Exercice 4.1. Soit d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}$ (*resp.* $\mathbb{C}$). On considère les sous-ensembles $A = \{x \in \mathbb{R}\,;\; d(x, \mathbb{Z}) < r\}$ et $B = \{z \in \mathbb{C}\,;\; d(z, \mathbb{Z}) < r\}$. A quelle condition sur r a-t-on A connexe puis B connexe ?
Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $x \in A$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $d(x, n) < r$. Donc on a $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} B(n, r)$ dans $\mathbb{R}$. Si $r \leq \frac{1}{2}$, alors $B(n, r) \cap B(m, r) = \emptyset$ si $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $n \neq m$. Donc A n'est pas connexe. Si $r > \frac{1}{2}$, alors $B(n, r) \cap B(n+1, r) \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Il résulte du théorème 4.1.1 que A est connexe. De même, on a $B = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} B(n, r)$ dans $\mathbb{C}$ et B est connexe si et seulement si $r > \frac{1}{2}$.

Exercice 4.2. Montrer que si X est un espace topologique connexe et s'il existe $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue non constante, alors X est infini non dénombrable.
Solution. Puisque X est connexe et f est continue non constante, alors $f(X)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, donc $f(X)$ est infini non dénombrable. Par conséquent, X est infini non dénombrable.

Exercice 4.3. Montrer que si $(X,\, d)$ est un espace métrique connexe qui contient deux points distincts, alors X est infini non dénombrable.

Solution. Soit $a \in X$ et pour tout $x \in X$, soit $f(x) = d(a, x)$. Alors f est continue non constante de X dans $\mathbb{R}$. D'après l'exercice précédent, X est infini non dénombrable.

Exercice 4.4. Soit $(X,\, d)$ un espace métrique connexe. On suppose que d n'est pas bornée. Montrer que toute sphère dans $(X,\, d)$ est non vide.
Solution. Soient $a \in X$ et $r > 0$. Comme d n'est pas bornée, alors il existe $x \in X$ tel que $d(a, x) > r$, donc $X \setminus B'(a, r)$ est un ouvert non vide de X. On a $X = B(a, r) \cup S(a, r) \cup \big(X \setminus B'(a, r)\big)$. Si $S(a, r) = \emptyset$, alors on a $X = B(a, r) \cup \big(X \setminus B'(a, r)\big)$, donc X n'est pas connexe, ce qui est impossible. Par conséquent, toute sphère dans $(X,\, d)$ est non vide.

Exercice 4.5. Soient A et B deux parties non vides connexes d'un espace topologique X telles que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.
Solution. Supposons que $A \cup B$ n'est pas connexe. Alors il existe deux ouverts non vides et disjoints U et V dans $A \cup B$ tels que $A \cup B = U \cup V$. Comme A et B sont connexes, d'après la proposition 4.1.2, on peut supposer $A \subset U$ et $B \subset V$. Soit V' un ouvert dans X tel que $V' \cap (A \cup B) = V$, alors on a $V' \cap A = \emptyset$, d'où $\overline{A} \cap V' = \emptyset$. Comme on a $B \subset V'$, on en déduit que $\overline{A} \cap B = \emptyset$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $A \cup B$ est bien connexe.

Exercice 4.6. Soient A et B deux sous-ensembles non vides d'un espace topologique X tels que $A \cup B$ et $A \cap B$ soient connexes.

1. Montrer que si A et B sont fermés dans X, alors A et B sont connexes.
2. Montrer que si A et B sont ouverts dans X, alors A et B sont connexes.
3. L'hypothèse de fermeture ou d'ouverture dans 1 et 2 est-elle essentielle ?

Solution. 1. Supposons que A n'est pas connexe. Alors il existe deux fermés non vides et disjoints E et F dans X tels que $A = E \cup F$. Comme $A \cap B$ est connexe, d'après la proposition 4.1.2, ou bien $A \cap B \subset E$ ou bien $A \cap B \subset F$. Supposons $A \cap B \subset E$. Alors F et $E \cup B$ sont deux fermés non vides et disjoints dans X tels que $A \cup B = F \cup \big(E \cup B\big)$, d'où $A \cup B$ n'est pas connexe, ce qui est impossible, donc A est bien connexe. On fait le même raisonnement pour montrer que B est aussi connexe.
2. Si A et B sont ouverts dans X, on fait le même raisonnement comme ci-dessus, mais en utilisant des ouverts de X.
3. Soient $A = [-1,\, 0[\cup [1,\, 3]$ et $B = [0,\, 1[\cup [2,\, 3]$ dans $\mathbb{R}$, alors A et B ne sont pas connexes et pourtant $A \cup B = [-1,\, 3]$ et $A \cap B = [2,\, 3]$ sont connexes.

Exercice 4.7. Soit $0 < r < R$. Montrer que la couronne $C = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ r < |z| < R\}$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Montrer que $B = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |\mathrm{Re(z)}| < r\}$ est aussi un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. En déduire que l'intersection de deux ouverts connexes n'est pas nécessairement connexe.
Solution. Soit $X =]r,\, R[\times [0,\, 2\pi]$, l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (t, \theta) & \longmapsto & (t\cos(\theta), t\sin(\theta)) \end{array}$$

est continue et on a $f(X) = C$. Comme X est connexe, alors C est connexe. Comme l'application $z \longmapsto |z|$ est continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, alors C est un ouvert de $\mathbb{C}$. Comme

$z \longmapsto |\mathrm{Re(z)}|$ est continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, alors B est un ouvert de $\mathbb{C}$. Il est clair que B est connexe par arcs, donc B est connexe. On a $B \cap C = U \cup V$, où $U = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ r < |z| < R\ ,\ |\mathrm{Re(z)}| < r \text{ et } \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $V = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ r < |z| < R\ ,\ |\mathrm{Re(z)}| < r \text{ et } \mathrm{Im}(z) < 0\}$. Alors U et V sont des ouverts disjoints non vides de $\mathbb{C}$. Donc $B \cap C$ n'est pas connexe.

Exercice 4.8. Montrer que l'intérieur et la frontière d'un ensemble connexe d'un espace topologique ne sont pas toujours connexes.
Solution. Soit $X = B'(-2,1) \cup \big([-1,\,1] \times \{0\}\big) \cup B'(2,1)$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne. Alors X est connexe, mais $\overset{\circ}{X} = B(-2,1) \cup B(2,1)$ n'est pas connexe.
Soient $r, R > 0$ tels que $r < R$ et $X = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ r < |z| < R\}$, alors X est connexe, mais $\mathrm{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \overset{\circ}{X} = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = r\} \cup \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = R\}$ n'est pas connexe.

Exercice 4.9. Soit $X = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^2$. Montrer que X est connexe par arcs.
Solution. Ceci résulte de la proposition 4.4.2, mais donnons une preuve directe. Soit $(x,y) \in X$. Si $x \notin \mathbb{Q}$, alors la réunion de deux segments
$\big[(x,y), \big(x, \sqrt{2}\big)\big] \cup \big[\big(x, \sqrt{2}\big), \big(\sqrt{2}, \sqrt{2}\big)\big]$ est un chemin dans X reliant (x,y) à $\big(\sqrt{2}, \sqrt{2}\big)$. Si $y \notin \mathbb{Q}$, alors la réunion de deux segments $\big[(x,y),\ \big(\sqrt{2}, y\big)\big] \cup \big[\big(\sqrt{2}), y\big),\ \big(\sqrt{2}, \sqrt{2}\big)\big]$ est un chemin dans X reliant (x,y) à $\big(\sqrt{2}, \sqrt{2}\big)$. Par conséquent, X est connexe par arcs.

Exercice 4.10. Soit X un espace topologique séparé.

1. Soit K une partie compacte et non connexe de X. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V dans X tels que $K \subset U \cup V$, $K \cap U \neq \emptyset$ et $K \cap V \neq \emptyset$.

2. Soit $(K_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de parties compactes non vides et connexes de X. On pose $K = \bigcap\limits_{n \geq 0} K_n$. Montrer que K est compact et connexe.

3. Trouver une suite décroissante de parties fermées non vides et connexes de $\mathbb{R}^2$ dont l'intersection n'est pas connexe.

Solution. 1. Puisque K est fermé dans X et non connexe, alors il existe deux fermés non vides et disjoints E et F dans X tels que $K = E \cup F$. Donc E et F sont compacts. D'après la proposition 3.1.2, il existe deux ouverts disjoints U et V dans X tels que $E \subset U$ et $F \subset U$. Donc on a $K \subset U \cup V$, $K \cap U \neq \emptyset$ et $K \cap V \neq \emptyset$.
2. K est une partie fermée du compact K_0, donc K est compacte. Si K n'est pas connexe, d'après 1, il existe deux ouverts disjoints U et V dans X tels que $K \subset U \cup V$, $K \cap U \neq \emptyset$ et $K \cap V \neq \emptyset$. D'après l'exercice 3.2., il existe $n \geq 0$ tel que $K_n \subset U \cup V$, d'où $K_n \cap U \neq \emptyset$ et $K_n \cap V \neq \emptyset$. Donc K_n n'est pas connexe, ce qui est impossible. Par conséquent, K est bien connexe.
3. Pour tout $n \geq 1$, soit $F_n = \big([1, +\infty[\times\{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times [1, +\infty[\big) \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \geq n^2\big\}$. Alors $(F_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante de parties fermées non vides et connexes de $\mathbb{R}^2$. On a $F = \bigcap\limits_{n \geq 1} F_n = \big([1, +\infty[\times\{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times [1, +\infty[\big)$, donc F n'est pas connexe.

Exercice 4.11. Soit $(X,\, d)$ un espace métrique compact tel que pour tout $x \in X$ et pour tout $r > 0$, on ait $B'(x,r) = \overline{B(x,r)}$.

1. Montrer que toute boule de X est connexe.
2. Montrer que X est connexe et localement connexe.

Solution. 1. Puisque l'adhérence de toute partie connexe est connexe, corollaire 4.1.1, il suffit de montrer que toute boule ouverte est connexe. Soient $a \in X$ et $r > 0$. Supposons que $B(a, r)$ n'est pas connexe, alors il existe deux ouverts non vides et disjoints U et V dans X tels que $B(a, r) = U \cup V$. On $U \cap V = \emptyset$, d'où $\overline{U} \cap V = \emptyset$ et $U \cap \overline{V} = \emptyset$. Quitte à échanger les rôles de U et V, on peut supposer $a \in U$, alors on a $0 < d(a, \overline{V}) = d(a, V) = s < r$. On a $B'(a, r) = \overline{B(a, r)} = \overline{U \cup V} = \overline{U} \cup \overline{V}$, donc $\overline{V}$ est compact. Comme l'application $x \longmapsto d(a, x)$ est continue sur $\overline{V}$, alors il existe $x_0 \in \overline{V}$ tel que $d(a, x_0) = d(a, \overline{V}) = d(a, V) < r$. Donc on a $x_0 \in B(a, r) = U \cup V$, d'où $x_0 \in V$. D'autre part, pour tout $x \in V$, on a $s = d(a, V) \leq d(a, x)$, d'où $B(a, s) \cap V = \emptyset$. Comme V est un ouvert, alors $\overline{B(a, s)} \cap V = \emptyset$. Or on a $B'(a, s) = \overline{B(a, s)}$, donc pour tout $x \in V$, on a $s < d(a, x)$, d'où $d(a, x_0) < d(a, x_0)$, ce qui est impossible. Donc $B(a, r)$ est bien connexe.
2. Soit $a \in X$, alors on a $X = \bigcup_{n \geq 1} B(a, n)$. Comme pour tout $n \geq 1$, $B(a, n)$ est connexe, alors X est connexe. Pour tout $x \in X$, les boules ouvertes $B\big(x, \frac{1}{n}\big)$, avec $n \geq 1$, forment un système fondamental de voisinages connexes de X, donc X est localement connexe.

Exercice 4.12. Pour tout $a \in \mathbb{Q}$, on pose $D_a = \{a\} \times]0, 1]$, et pour tout $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on pose $D_b = \{b\} \times [-1, 0]$. Soient $X = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} D_x$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^2$ et U une partie à la fois ouverte et fermée de X.

1. Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ tel que $D_x \cap U \neq \emptyset$, alors on a $D_x \subset U$.
2. Soit $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $(s, 0) \in U$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]s - \varepsilon, s + \varepsilon[$, on ait $D_x \subset U$.
3. Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $t \in]0, 1]$ tels que $(r, t) \in U$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]r - \eta, r + \eta[$, on ait $D_x \subset U$.
4. Soit $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Montrer que f est constante. En déduire que X est connexe.

Solution. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme D_x est connexe, il résulte de la proposition 4.1.2 que si $D_x \cap U \neq \emptyset$, alors on a $D_x \subset U$.
2. Soit $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $(s, 0) \in U$. Comme U est ouvert dans X, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\big(]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\times] - \varepsilon, \varepsilon[\big) \cap X \subset U$. Si $x \in]s - \varepsilon, s + \varepsilon[$, alors on a $D_x \cap U \neq \emptyset$. Il résulte de 1 que l'on a $D_x \subset U$.
3. Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $t \in]0, 1]$ tels que $(r, t) \in U$. Comme U est ouvert dans X, il existe $\eta > 0$ tel que $\big(]r - \eta, r + \eta[\times]t - \eta, t + \eta[\big) \cap X \subset U$. Alors pour tout $q \in]r - \eta, r + \eta[\cap \mathbb{Q}$, on a $D_q \cap U \neq \emptyset$, d'où $D_q \subset U$. Soit $s \in]r - \eta, r + \eta[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, alors il existe une suite $(q_n)_{n \geq 1}$ dans $]r - \eta, r + \eta[\cap \mathbb{Q}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} q_n = s$, d'où on a $\lim_{n \to +\infty} \big(q_n, \frac{1}{n}\big) = (s, 0)$. Or, pour tout $n \geq 1$, on a $\big(q_n, \frac{1}{n}\big) \in U$ et U est fermé dans X, alors on a $(s, 0) \in U$. Par conséquent, on a $D_s \subset U$.
4. Soit $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, D_x est connexe, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{|D_x}$ est constante. Soient $U = f^{-1}(\{0\})$ et $V = f^{-1}(\{1\})$, alors U et V sont des parties disjointes à la fois ouvertes et fermées dans X telles que

$X = U \cup V$. Soit $C = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ f_{|_{D_x}} = 0\}$. Alors on a $\mathbb{R} \setminus C = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ f_{|_{D_x}} = 1\}$. Soit $x \in C$. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors on a $(x, 0) \in U$. Il résulte de 2 qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, \, x + \varepsilon[\subset C$. Si $x \in \mathbb{Q}$, alors on a $(x, 1) \in U$. Il résulte de 3 qu'il existe $\eta > 0$ tel que $]x - \eta, \, x + \eta[\subset C$. Par conséquent, C est un ouvert de $\mathbb{R}$. De même, $\mathbb{R} \setminus C$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Par conséquent, C est à la fois ouvert et fermé dans $\mathbb{R}$. Or $\mathbb{R}$ est connexe, alors ou bien $C = \emptyset$ ou bien $C = \mathbb{R}$. Donc f est constante. Il résulte de la proposition 4.1.1 que X est connexe.

Exercice 4.13. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x, z \in F$ avec $x < z$, il existe $y \in F$ tel que $x < y < z$. Montrer que F est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Solution. Soient $x, z \in F$ tels que $x < z$. Supposons qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $y \notin F$ et $x < y < z$. Soient $A = \{t \in F \ ; \ t \leq y\}$ et $B = \{s \in F \ ; \ y \leq s\}$. Alors A est une partie fermée non vide de $\mathbb{R}$ et majorée par y, donc $\sup(A) = t_0 \in A \subset F$ et on a $t_0 < y$. De même, B est une partie fermée non vide de $\mathbb{R}$ et minorée par y, donc $\inf(B) = s_0 \in A \subset F$ et on a $y < s_0$. Par conséquent, on a $]t_0, \, s_0[\cap F = \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc F est bien un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 4.14. Soit $(X, \, d)$ un espace métrique.

1. Montrer que $(X, \, d)$ est bien enchaîné si et seulement si pour toute partie A de X, non vide et distincte de X, on a $d(A, X \setminus A) = 0$.

2. Soient A et B deux parties non vides bien enchaînées de X. Montrer que $A \cup B$ est bien enchaîné si et seulement si $d(A, B) = 0$.

3. Montrer qu'une partie bien enchaînée et fermée de $\mathbb{R}$ est connexe.

4. Est-ce que toute partie bien enchaînée et fermée de $\mathbb{R}^2$ est connexe ?

Solution. 1. Supposons que $(X, \, d)$ est bien enchaîné. Soit A une partie non vide et distincte de X. Soient $a \in A$ et $b \in X \setminus A$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in X^{n+1}$ telle que $a_0 = a$, $a_n = b$ et $d(a_{i-1}, a_i) \leq \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Alors il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $a_{i-1} \in A$ et $a_i \in X \setminus A$, d'où on a $d(A, X \setminus A) \leq d(a_{i-1}, a_i) \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc on a $d(A, X \setminus A) = 0$.
Réciproquement, supposons que pour toute partie A de X, non vide et distincte de X, on a $d(A, X \setminus A) = 0$. Soient $\varepsilon > 0$ et A_ε une classe d'équivalence de X pour la relation d'équivalence $\underset{\varepsilon}{\sim}$, voir lemme 4.1.1. Alors A_ε est non vide. Si $A_\varepsilon \neq X$, alors on a $d(A_\varepsilon, X \setminus A_\varepsilon) = 0$. Donc il existe $a \in A_\varepsilon$ et $b \in X \setminus A_\varepsilon$ tels que $d(a, b) \leq \varepsilon$, d'où on a $a \underset{\varepsilon}{\sim} b$, donc $b \in A_\varepsilon$, ce qui est impossible. Par conséquent, on a $A_\varepsilon = X$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc X est bien enchaîné.
2. Supposons que $A \cup B$ est bien enchaîné. On peut supposer $A \not\subset B$. Alors on a $0 \leq d(A, B) \leq d(A, (A \cup B) \setminus A) = 0$, d'où $d(A, B) = 0$.
Réciproquement, supposons que $d(A, B) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $d(a, b) \leq \varepsilon$, d'où $a \underset{\varepsilon}{\sim} b$. Or, pour tout $x \in A$, on a $x \underset{\varepsilon}{\sim} a$, et pour tout $y \in B$, on a $b \underset{\varepsilon}{\sim} y$, donc on a $x \underset{\varepsilon}{\sim} y$. Par conséquent, $A \cup B$ est bien enchaîné.
3. Soit F une partie bien enchaînée et fermée de $\mathbb{R}$. Il s'agit de montrer que F est un intervalle. D'après l'exercice précédent, il suffit de montrer que pour tous $x, z \in F$ tels que $x < z$, il existe $a \in F$ tel que $x < a < z$. Soit $\varepsilon = \frac{z-x}{2}$. Comme F est bien enchaînée,

il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in F^{n+1}$ telle que $a_0 = x$, $a_n = z$ et $d(a_{i-1}, a_i) \leq \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si on a $\{a_0, \ldots, a_n\} \cap]x, z[= \emptyset$, alors il existe $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $a_{i-1} \leq x$ et $z \leq a_i$, d'où on a $z - x \leq d(a_{i-1}, a_i) \leq \frac{z-x}{2}$, ce qui est impossible. Par conséquent, il existe $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $a_i \in]x, z[$.
4. Soient $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x > 0 \text{ et } xy = 1\}$ et $B = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$. Alors A et B sont des parties fermées connexes disjointes de $\mathbb{R}^2$, donc $X = A \cup B$ est une partie fermée non connexe de $\mathbb{R}^2$. Or on a $d(A, B) = 0$ et A et B sont bien enchaînées car ils sont connexes, voir théorème 4.1.6, alors on déduit de 2 que X est bien enchaînée.

Exercice 4.15. Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application uniformément continue surjective. Montrer que si X est bien enchaîné, alors Y est bien enchaîné.
Solution. Soient $\varepsilon > 0$ et $a, b \in Y$. Comme f est surjective, il existe $\alpha, \beta \in X$ tels que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$. Comme f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $t, s \in X$ vérifiant $d(t, s) \leq \eta$, on ait $d'(f(t), f(s)) \leq \varepsilon$. Comme X est bien enchaîné, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, \ldots, x_n \in X$ tels que $x_0 = \alpha$, $x_n = \beta$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on ait $d(x_{i-1}, x_i) \leq \eta$. Soit $y_i = f(x_i)$, alors on a $y_0 = a$, $y_n = b$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $d'(y_{i-1}, y_i) \leq \varepsilon$. Par conséquent, Y est bien enchaîné.

Exercice 4.16. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable telle que $f = ff'$. Soit $G = f^{-1}(\{0\})$. Montrer que G est un intervalle. En déduire que $f = 0$ ou $f' = 1$.
Solution. Comme f est continue, alors G est une partie fermée de $\mathbb{R}$. Pour montrer que G est un intervalle, il suffit de montrer que pour tous $x, z \in G$ tels que $x < z$, il existe $y \in G$ tel que $x < y < z$, voir exercice 4.13. Soient $x, z \in G$ tels que $x < z$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y < z$ et $f(z) - f(x) = f'(y)(z - x)$. On a $f(z) = f(x) = 0$ et $z - x \neq 0$, alors $f'(y) = 0$. Or on a $f(y)(1 - f'(y)) = 0$, d'où $f(y) = 0$. Donc on a $y \in G$. Par conséquent, G est un intervalle.
Si $G = \emptyset$, alors on a $f' = 1$. Si $G \neq \emptyset$, alors on a $G = [a, b] \subset [0, 1]$. Si $a = b$, alors $f(x) = x - a$ pour tout $x \in [0, 1]$, d'où $f' = 1$. Supposons maintenant $a < b$.
Si $0 < a$, alors pour tout $x \in [0, a]$, on a $f(x) = x - a$, donc f n'est pas dérivable en a, ce qui est impossible. Donc on a $0 = a$. Si $b < 1$, alors pour tout $x \in [b, 1]$, on a $f(x) = x - b$, donc f n'est pas dérivable en b, ce qui est impossible. Donc on a $b = 1$. Par conséquent, on a $G = [0, 1]$. Autrement dit, on a $f = 0$.

Exercice 4.17. Soient $[a, b]$ un intervalle borné fermé de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une application continue. Montrer qu'elle admet un point fixe. Autrement dit, qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.
Solution. Pour tout $x \in [a, b]$, soit $g(x) = f(x) - x$, alors g est une application continue sur $[a, b]$ et on a $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(1) = f(b) - b \leq 0$. D'après le corollaire 4.1.6, il existe $x \in [a, b]$ tel que $g(x) = 0$, d'où $f(x) = x$.

Exercice 4.18. Soit X un espace topologique. On dit que X a la propriété du point fixe si toute application continue de X dans X a au moins un point fixe.

1. Montrer que si X a la propriété du point fixe, alors X est connexe.

2. Montrer par un exemple que la réciproque dans 1 est fausse.

Solution. 1. Si X n'est pas connexe, alors il existe deux ouverts non vides et disjoints U

et V dans X tels que $X = U \cup V$. Soient $a \in U$ et $b \in V$. Pour tout $x \in U$, soit $f(x) = b$ et pour tout $y \in V$, soit $f(y) = a$. Alors f est une application continue de X dans X qui n'admet aucun point fixe, ce qui contredit l'hypothèse. Donc X est bien connexe.
2. L'espace $\mathbb{R}$ est connexe et pourtant l'application $x \longmapsto x+1$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ qui n'admet pas de point fixe.

Exercice 4.19. Soient X Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Montrer que si X est connexe, alors le graphe de f est une partie connexe de $X \times Y$.
Solution. Comme f est continue, l'application $x \longmapsto (x, f(x))$ est continue de X dans $X \times Y$, et son image est le graphe de f. Comme X est connexe, alors le graphe de f est une partie connexe de $X \times Y$.

Exercice 4.20. Montrer que le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est connexe bien qu'elle ne soit pas continue.
Solution. Comme l'application $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, alors $A = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) ; \; x > 0\right\}$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$. De même, $B = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) ; \; x < 0\right\}$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$. Soit $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, on a $(0,0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(x_n, \sin\left(\frac{1}{x_n}\right)\right)$, d'où $(0,0) \in \overline{A}$. De même, si $x_n = \frac{-1}{2\pi n}$, on a $(0,0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(x_n, \sin\left(\frac{1}{x_n}\right)\right)$, d'où $(0,0) \in \overline{B}$. Comme on a $A \subset A \cup \{(0,0)\} \subset \overline{A}$ et $B \subset B \cup \{(0,0)\} \subset \overline{B}$, il résulte de la proposition 4.1.3 que $A \cup \{(0,0)\}$ et $B \cup \{(0,0)\}$ sont connexes. Comme le graphe de f est l'ensemble $A \cup \{(0,0)\} \cup B$, d'après le théorème 4.1.1, le graphe de f est connexe. Notons enfin, que si $\alpha_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\alpha_n) = 1 \neq f(0)$, donc f n'est pas continue en 0.

Exercice 4.21. Soient X un espace compact, Y un espace topologique séparé connexe et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue et ouverte. Montrer que f est surjective.
Solution. Comme f est continue, alors $f(X)$ est une partie compacte de Y, donc $f(X)$ est fermée dans Y. Puisque f est une application ouverte, alors $f(X)$ est aussi une partie ouverte de Y. Or Y est connexe, donc on a $f(X) = Y$. Autrement dit, f est surjective.

Exercice 4.22. Soit $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 + y^2 = 1\}$.

1. Montrer qu'il existe une application continue surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{S}$. En déduire que $\mathbb{S}$ est connexe.

2. Montrer qu'il n'existe pas d'application continue injective du cercle $\mathbb{S}$ dans $\mathbb{R}$.

3. En déduire que $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$.

Solution. 1. L'application $t \longmapsto (\cos(t), \sin(t))$ est continue et surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{S}$. Donc $\mathbb{S}$ est connexe.
2. Soit $f : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et posons $h(z) = f(z) - f(-z)$, alors $h : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ est aussi continue, donc $h(\mathbb{S})$ est connexe dans $\mathbb{R}$, *i.e.* un intervalle. Soit $z \in \mathbb{S}$, l'intervalle $h(\mathbb{S})$ contient $h(z)$ et $h(-z)$, donc il contient $\dfrac{h(z) + h(-z)}{2} = 0$. Par conséquent, il existe $w \in \mathbb{S}$ tel que $h(w) = 0$, *i.e.* $f(w) = f(-w)$. Cela montre que f n'est

pas injective.
3. Si $\mathbb{R}^2$ était homéomorphe à $\mathbb{R}$, il existerait une application continue injective de $\mathbb{S}$ dans $\mathbb{R}$, ce qui est impossible, donc $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$.

Exercice 4.23. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que f est monotone si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}\big(\{x\}\big)$ est connexe.
Solution. Supposons que f est monotone. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a, b \in f^{-1}\big(\{x\}\big)$ tels que $a < b$. Alors on a $f(a) = f(b) = x$. Si f est croissante, alors pour tout $t \in [a,\, b]$, on a $f(a) \leq f(t) \leq f(b)$, d'où $f(t) = x$, donc on a $t \in f^{-1}\big(\{x\}\big)$. Si f est décroissante, alors pour tout $t \in [a,\, b]$, on a $f(b) \leq f(t) \leq f(a)$, d'où $f(t) = x$, donc on a $t \in f^{-1}\big(\{x\}\big)$. Par conséquent, $f^{-1}\big(\{x\}\big)$ est un intervalle. Donc $f^{-1}\big(\{x\}\big)$ est connexe.
Réciproquement, supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}\big(\{x\}\big)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f n'est pas monotone, alors il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a < b < c$ et vérifiant $f(b) < f(a) = f(c)$, ou $f(a) = f(c) < f(b)$. Par conséquent, $f^{-1}\big(\{f(a)\}\big)$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc f est bien monotone.

Exercice 4.24. Soient $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue surjective. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}\big(\{x\}\big)$ n'est pas borné dans $\mathbb{R}^n$.
Solution. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}\big(\{x\}\big)$ soit borné dans $\mathbb{R}^n$. Alors il existe $r > 0$ tel que $f^{-1}\big(\{x\}\big) \subset B'(0, r)$. Comme $\mathbb{R}^n \setminus B'(0, r)$ est connexe, même connexe par arcs, alors $f\big(\mathbb{R}^n \setminus B'(0, r)\big)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$ ne contenant pas x. Donc, soit on a $f\big(\mathbb{R}^n \setminus B'(0, r)\big) \subset]x, +\infty[$, soit on a $f\big(\mathbb{R}^n \setminus B'(0, r)\big) \subset]-\infty, x[$. Comme $B'(0, r)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$, alors $f\big(B'(0, r)\big)$ est borné dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, f n'est pas surjective, ce qui contredit l'hypothèse. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}\big(\{x\}\big)$ n'est pas borné dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4.25. Quelles sont les composantes connexes de $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; x \neq y\big\}$?
Solution. Soient $U^+ = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; x > 0 \text{ et } y > 0\big\}$, $U^- = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; x > 0 \text{ et } y < 0\big\}$, $V^+ = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; x < 0 \text{ et } y > 0\big\}$ et $V^- = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; x < 0 \text{ et } y < 0\big\}$. Alors U^+, U^-, V^+ et V^- sont des ouverts connexes non vides et deux à deux disjoints dans $\mathbb{R}^2$ tels que $A = U^+ \cup U^- \cup V^+ \cup V^-$. Il résulte du théorème 4.2.1 que U^+, U^-, V^+ et V^- sont les composantes connexes de A.
On déduira de l'exercice 6.20 que l'ensemble $\big\{(z, z') \in \mathbb{C}^2 \;;\; z \neq z'\big\}$ est connexe.

Exercice 4.26. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue de graphe G. Montrer que les composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus G$ sont $G^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; y < f(x)\}$ et $G^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; f(x) < y\}$.
Solution. Comme f est continue, alors G^- et G^+ sont des ouverts disjoints de $\mathbb{R}^2$ tels que $\mathbb{R}^2 \setminus G = G^+ \cup G^-$. Soient $(x, y), (x', y') \in G^-$, on peut supposer $x' \leq x$. Comme f est continue, alors $f\big([x',\, x]\big)$ est une partie bornée dans $\mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{R}$ tel que $z < f(t)$ pour tout $t \in [x',\, x]$. Alors $A = \big(\{x'\} \times]-\infty,\, y']\big) \cup \big([x',\, x] \times \{z\}\big) \cup \big(\{x\} \times]-\infty,\, y]\big)$ est une partie connexe de G^- contenant (x, y) et (x', y'), donc G^- est connexe. De même, G^+ est connexe. Il résulte du théorème 4.2.1 que G^- et G^+ sont les composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus G$.

Exercice 4.27. Soient X un espace topologique non connexe et A, B deux parties non

vides connexes et disjointes de X telles que $X = A \cup B$. Montrer que A et B sont les composantes connexes de X.
Solution. Comme X n'est pas connexe, il existe deux ouverts non vides et disjoints U et V dans X tels que $X = U \cup V$. D'après la proposition 4.1.2, on a $A = U$ et $B = V$. Il résulte du théorème 4.2.1 que A et B sont les composantes connexes de X.

Exercice 4.28. Soit X un espace compact localement connexe. Montrer que X possède un nombre fini de composantes connexes.
Solution. Puisque X est localement connexe, d'après le corollaire 4.3.1, toute composante connexe de X est un ouvert de X. Donc les composantes connexes de X forment un recouvrement ouvert de X. Comme X est compact, alors X possède un nombre fini de composantes connexes.

Exercice 4.29. Soit (X, d) un espace ultramétrique. Montrer que X est totalement discontinu.
Solution. Soient $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. Alors on a $r = d(x, y) > 0$. Comme (X, d) est ultramétrique, toute boule ouverte de X est aussi fermée, voir exercice 2.18. Donc $U = B(x, r)$ est à la fois ouvert et fermé dans X tel que $y \notin U$. D'après le théorème 4.2.1, on a $C_x \subset U$, d'où $y \notin C_x$. Par conséquent, on a $C_x = \{x\}$. Donc X est totalement discontinu.

Exercice 4.30. Soient U un ouvert d'un espace localement connexe X et V une composante connexe de U. Montrer que la frontière de V relativement à X est contenue dans la frontière de U.
Solution. On a $\mathrm{Fr}(U) = \overline{U} \setminus U$. D'après le corollaire 4.3.1, V est un ouvert de X, d'où on a $\mathrm{Fr}(V) = \overline{V} \setminus V$. Comme V est aussi fermé dans U et l'adhérence de V dans U est $\overline{V} \cap U$, alors on a $V = \overline{V} \cap U$. Or on a $\overline{V} \subset \overline{U}$, d'où $\overline{V} = \big(\overline{V} \cap U\big) \cup \big(\overline{V} \cap \big(\overline{U} \setminus U\big)\big) = V \cup \big(\overline{V} \cap \big(\overline{U} \setminus U\big)\big)$. Par conséquent, on a $\overline{V} \setminus V \subset \overline{U} \setminus U$.

Exercice 4.31. Soit X un espace topologique complètement régulier. Montrer que X est connexe si et seulement si sa compactification de Stone-Čech $\beta(X)$ est connexe.
Solution. Supposons que X est connexe. Comme X est dense dans $\beta(X)$, il résulte du corollaire 4.1.1 que $\beta(X)$ est connexe. Réciproquement, supposons que $\beta(X)$ est connexe. Soit $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Comme $\{0, 1\}$ est compact, d'après le théorème 3.5.2, il existe une application continue $\beta(f) : \beta(X) \longrightarrow \{0, 1\}$ prolongeant f. Or $\beta(X)$ est connexe, donc $\beta(f)$ est constante, d'où f est constante. Par conséquent, X est connexe.

Exercice 4.32. Montrer que tout espace éparpillé est complètement régulier.
Solution. Soit X un espace éparpillé. Notons d'abord que par définition, X est séparé. Soient F un fermé de X et $x \in X$ tel que $x \notin F$. Alors $U = X \setminus F$ est un ouvert de X contenant x. Donc il existe une partie A à la fois ouverte et fermée dans X telle que $x \in A \subset U$. Pour tout $a \in A$, on pose $f(a) = 1$ et pour tout $y \in X \setminus A$, on pose $f(y) = 0$. Alors f est une application continue de X dans $[0, 1]$ telle que $f(x) = 1$ et pour tout $y \in F$, on ait $f(y) = 0$. Par conséquent, X est complètement régulier.

Pour plus d'exercices, voir le supplément associé à ce livre.

Chapitre 5

ESPACES FONCTIONNELS

Une motivation essentielle de l'étude générale des espaces topologiques et des espaces métriques est de fournir un cadre adapté à la théorie des espaces fonctionnels, c'est-à-dire des espaces dont les éléments représentent eux-mêmes des applications d'un ensemble dans un autre. On peut, dans un tel espace, parler de la convergence d'applications vers une autre application, en un sens défini par la topologie de l'espace. Inversement, lorsque l'on désire étudier certains caractères donnés d'un ensemble de fonctions données, il est souvent commode de mettre sur cet ensemble une topologie adaptée à l'étude de ces caractères. Dans ce chapitre, on étudie plusieurs notions de convergence d'une suite d'applications et on démontre trois théorèmes importants d'analyse ; à savoir le théorème de Dini, le théorème d'Ascoli, et le théorème de Stone-Weierstrass.
Notation. Soient X et Y des ensembles. L'ensemble des applications de X dans Y est noté Y^X. Si $\mathcal{H}$ est une partie de Y^X et si $x \in X$, on note $\mathcal{H}(x) = \{f(x)\ ;\ f \in \mathcal{H}\}$. Si X et Y sont des espaces topologiques, on notera $C(X, Y)$ la partie de Y^X formée des applications continues de X dans Y.

5.1 Topologie de la convergence simple

Définition 5.1.1. Soient X un ensemble, muni ou non d'une topologie, et Y un espace topologique. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'applications de X dans Y **converge simplement** vers une application $f : X \longrightarrow Y$ si pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$ dans Y.

Remarquons que si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans Y^X telle que pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ soit convergente dans Y et si Y est séparé, alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers $f \in Y^X$ définie par $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in X$.
Notons aussi que si (Y, d) est un espace métrique, une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ dans Y^X converge simplement vers f si et seulement si pour tout $x \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. ($N$ dépend de x et de ε).
On a défini la convergence simple sans utiliser de topologie sur Y^X ; en fait il y a bien une topologie sous-jacente sur cet ensemble, que l'on va définir toute de suite.
Soient X un ensemble et Y un espace topologique. Pour tout $x \in X$, considérons l'application d'évaluation en x de Y^X dans Y définie par $ev_x(f) = f(x)$. On appelle

topologie de la convergence simple sur Y^X la topologie initiale associée à la famille $(ev_x)_{x\in X}$. On note une telle topologie $\mathcal{T}_{cs}$. C'est aussi la topologie la moins fine sur Y^X rendant continues toutes les applications d'évaluations ev_x, voir paragraphe 1.4.
Notons que même si X est un espace topologique, la topologie de la convergence simple sur Y^X ne fait pas intervenir la topologie de X.

Proposition 5.1.1. *Soient X un ensemble et Y un espace topologique.*

1. *Pour tout $x \in X$ et pour tout ouvert U de Y, on pose :*

$$\Omega_{x,U} = \big\{f \in Y^X \ ; \ f(x) \in U\big\} = ev_x^{-1}(U) .$$

   Alors les intersections finies de parties de la forme $\Omega_{x,U}$, où x et U arbitraires, forment une base pour la topologie de la convergence simple $\mathcal{T}_{cs}$ sur Y^X.

2. *Si Y est séparé, alors l'espace topologique $(Y^X, \mathcal{T}_{cs})$ est séparée.*

3. *Supposons que (Y, d) est un espace métrique. Soit $f \in Y^X$. Pour tous $x_1, \dots, x_n \in X$ et $\varepsilon > 0$, on pose :*

$$V(f, \varepsilon, x_1, \dots, x_n) = \big\{g \in Y^X \ ; \ d(f(x_i), g(x_i)) < \varepsilon \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}\big\} .$$

   Alors les $V(f, \varepsilon, x_1, \dots, x_n)$, où ε, n et les x_i arbitraires, forment un système fondamental de voisinages ouverts de f dans $(Y^X, \mathcal{T}_{cs})$.

Démonstration. 1. Ceci résulte de la définition de la topologie de la convergence simple, voir paragraphe 1.4.
2. Ceci résulte du lemme 1.5.1, mais donnons une preuve directe. Soient $f, g \in Y^X$ tels que $f \neq g$, alors il existe un point $x \in X$ tel que $f(x) \neq g(x)$. Or l'espace topologique Y est séparé, donc il existe deux ouverts disjoints U et V dans Y tels que $f(x) \in U$ et $g(x) \in V$. Alors $\Omega_{x,U}$ et $\Omega_{x,V}$ sont deux ouverts disjoints dans $(Y^X, \mathcal{T}_{cs})$ et on a $f \in \Omega_{x,U}$ et $g \in \Omega_{x,V}$. Donc $(Y^X, \mathcal{T}_{cs})$ est séparée.
3. Ceci résulte du lemme 1.4.1, mais donnons une preuve directe. On a :

$$V(f, \varepsilon, x_1, \dots, x_n) = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_{x_i, U_i} ,$$

où $U_i = B(f(x_i), \varepsilon)$ est la boule ouverte de centre $f(x_i)$ et de rayon ε dans Y. Donc $V(f, \varepsilon, x_1, \dots, x_n)$ est un voisinage ouvert de f.
Réciproquement, soit W un ouvert de $(Y^X, \mathcal{T}_{cs})$ contenant f, alors il existe $x_1, \dots, x_n \in X$ et il existe des ouverts $U_1, \dots, U_n$ dans Y tels que $f \in \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_{x_i, U_i} \subset W$. On a $f(x_i) \in U_i$, donc il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $B(f(x_i), \varepsilon_i) \subset U_i$. Soit $\varepsilon = \inf_{1\le i\le n} \varepsilon_i$, alors $\varepsilon > 0$ et on a $f \in V(f, \varepsilon, x_1, \dots, x_n) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_{x_i, U_i} \subset W$. Par conséquent, les $V(f, \varepsilon, x_1, \dots, x_n)$, où ε, n et les x_i arbitraires, forment un système fondamental de voisinages ouverts de f dans $(Y^X, \mathcal{T}_{cs})$. ■

On déduit de la proposition 1.7.3 le résultat suivant :

Proposition 5.1.2. *Une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'applications de X dans Y converge simplement vers une application $f : X \longrightarrow Y$ si et seulement si la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans l'espace topologique $(Y^X,\, \mathcal{T}_{cs})$*

Remarque 5.1.1. Soient X un ensemble, Y un espace topologique et pour tout $x \in X$, soit $Y_x = Y$. Considérons l'espace topologique produit $\prod_{x\in X} Y_x$. Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} (Y^X,\, \mathcal{T}_{cs}) & \longrightarrow & \prod_{x\in X} Y_x \\ f & \longmapsto & (f(x))_{x\in X} \end{array}$$

est un homéomorphisme. On en déduit, voir théorème 3.3.3, le résultat suivant :

Théorème 5.1.1. *Soient X un ensemble, Y un espace topologique séparé et $\mathcal{H}$ une partie de Y^X. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathcal{H}$ est relativement compact pour la topologie de la convergence simple.

(ii) Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\mathcal{H}(x)$ est relativement compact dans Y.

La topologie de la convergence simple souffre de nombreuses lacunes que l'on va énumérer :

- Si X et Y sont des espaces topologiques et si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'applications continues de X dans Y qui converge simplement vers une application f de X dans Y, alors f n'est pas forcément continue. Autrement dit, l'ensemble $C(X,\, Y)$ n'est pas toujours fermé dans $(Y^X,\, \mathcal{T}_{cs})$. En effet, si $X = Y = [0,\, 1]$ et $f_n(x) = x^n$, alors $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions continues sur $[0,\, 1]$ qui converge simplement vers la fonction f définie par $f(1) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \in [0,\, 1[$. Donc f n'est pas continue sur $[0,\, 1]$. Autrement dit, en général, on a :
$$\lim_{x\to x_0}\Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big) \neq \lim_{n\to+\infty}\Big(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\Big).$$
- Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions continues sur un segment $[a,\, b]$ qui converge simplement sur $[a,\, b]$ vers une fonction continue f, alors, en général, on a :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx \neq \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx\,.$$
En effet, pour tout $x \in [0,\, 1]$ et pour tout $n \geq 0$, soit $f_n(x) = n(x^n - x^{2n})$, alors $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions continues sur $[0,\, 1]$ qui converge simplement vers la nulle 0. Or on a $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 n(x^n - x^{2n})\,dx = \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)}$. Donc on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \tfrac{1}{2}$. Alors que $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = 0$.
- Si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions dérivables sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ qui converge simplement sur I vers une fonction f, alors f n'est pas, en général, dérivable sur I. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 1$, soit $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, alors $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers la fonction $f(x) = |x|$ qui n'est pas dérivable en $x = 0$.

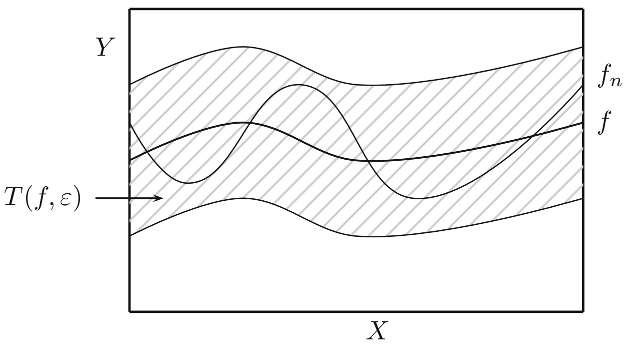
Pour remédier à tous ces défauts, on introduit la topologie de la convergence uniforme.

5.2 Topologie de la convergence uniforme

Définition 5.2.1. Soient X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'applications de X dans Y **converge uniformément** vers une application $f : X \longrightarrow Y$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in X$, on ait $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Pour un $\varepsilon > 0$ donné, l'entier naturel N qui figure dans l'énoncé est indépendant de x. C'est toute la différence avec la notion de convergence simple.

Interprétation graphique de la convergence uniforme.
Soit $T(f, \varepsilon)$ l'ensemble des points de $X \times Y$ tels que $d(y, f(x)) < \varepsilon$. Cet ensemble représente une sorte de « tube » de rayon ε autour du graphe de f. Dire que $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, pour tout $x \in X$, est équivaut à dire que le graphe de f_n est contenu dans $T(f, \varepsilon)$. Donc dire que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f, cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N à partir duquel le graphe de f_n est contenu dans $T(f, \varepsilon)$.



Remarque 5.2.1. Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f, alors pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans X, la suite de réels $\big(d(f_n(x_n), f(x_n))\big)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Remarque 5.2.2. Il résulte de la définition précédente que si la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f, elle converge aussi simplement vers f, mais la réciproque est en général inexacte. En voici quelques exemples :

1. Soit $f_n(x) = \exp\left(\frac{x}{n}\right)$, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement, sur $\mathbb{R}$, vers la fonction constante et égale à 1, mais la convergence n'est pas uniforme car pour tout $n \geq 0$, on a $f_n(n) - 1 = e - 1 \neq 0$.

2. Soit $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + |nx|}$, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement, sur $\mathbb{R}$, vers la fonction définie par :
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0\,, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0\,, \\ 1 & \text{si} \quad x > 0\,. \end{cases}$$
Mais la convergence n'est pas uniforme car pour tout $n \geq 0$, on a $f_n\big(\frac{1}{n}\big) - 1 = \frac{1}{2} - 1 \neq 0$.

3. Soit $f_n(x) = nx(1-x)^n$, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement, sur $[0, 1]$, vers la fonction nulle, mais la convergence n'est pas uniforme, car on a $f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{1+n}\right)^{1+n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} \neq 0$.

Lemme 5.2.1. *Soient X un ensemble, (Y, d) un espace métrique, $f \in Y^X$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans Y^X. Soit d' une distance sur Y uniformément équivalente à d. Alors la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f pour la distance d si et seulement si elle converge uniformément vers f pour d'.*

Pour une preuve du lemme précédent, voir chapitre 5 du supplément.

On va construire une topologie sur Y^X qui rend compte de la convergence uniforme des suites d'applications.
Soient X un ensemble, (Y, d) un espace métrique et d' une distance bornée sur Y uniformément équivalente à d, par exemple $d'(x,y) = \inf\{d(x,y), 1\}$, voir proposition 2.3.5. Pour $f,\ g \in Y^X$, on pose :

$$D'(f,g) = \sup\left\{d'(f(x), g(x))\ ;\ x \in X\right\}.$$

Alors D' est une distance sur Y^X, appelée **distance de la convergence uniforme** associée à d'. Soient d'' une autre distance bornée sur Y et uniformément équivalente à d, donc à d', et D'' la distance de la convergence uniforme associée à d''. Alors les distances D' et D'' sont uniformément équivalentes sur Y^X. Notons aussi que si d_1 est une distance sur Y uniformément équivalente à d et si d'_1 est une distance bornée sur Y uniformément équivalente à d_1, alors D'_1 la distance de la convergence uniforme associée à d'_1 est uniformément équivalente à D'. Donc la topologie $\mathcal{T}_{cu}$ sur Y^X définie par D' ne dépend que de la classe d'équivalence de la distance d. La topologie $\mathcal{T}_{cu}$ est appelée **topologie de la convergence uniforme** sur Y^X associée à d.
Il y a aussi une autre manière de définir la topologie de la convergence uniforme sur Y^X ; pour $f,\ g \in Y^X$, on pose $e(f,g) = \sup\left\{d(f(x), g(x))\ ;\ x \in X\right\} \in [0, +\infty]$. Alors e est un écart séparé sur Y^X. On pose $D(f,g) = \min(e(f,g), 1)$, alors D est une distance sur Y^X uniformément équivalente à D', voir propositions 2.3.5 et 2.9.4. Donc la topologie induite par D sur Y^X est la topologie de la convergence uniforme $\mathcal{T}_{cu}$.
On appelle aussi topologie de la convergence uniforme sur $B(X, Y)$ (*resp.* $C(X, Y)$, si X est un espace topologique) associée à d, et on note aussi $\mathcal{T}_{cu}$ la topologie induite par $\mathcal{T}_{cu}$ sur $B(X, Y)$ (*resp.* $C(X, Y)$).
Pour $f, g \in B(X, Y)$, on pose :

$$D_\infty(f,g) = \sup\left\{d(f(x), g(x))\ ;\ x \in X\right\}.$$

Alors D_∞ est une distance sur $B(X, Y)$ uniformément équivalente à la distance induite par D' sur $B(X, Y)$. En fait, si $d'(x,y) = \inf\{d(x,y), 1\}$, alors on a :
$D'(f,g) = \inf\left\{D_\infty(f,g), 1\right\}$. Donc la topologie sur $B(X, Y)$ définie par D_∞ est égale à la topologie de la convergence uniforme $\mathcal{T}_{cu}$ sur $B(X, Y)$. Si X est un espace compact, on a $C(X, Y) \subset B(X, Y)$, et donc la topologie de la convergence uniforme $\mathcal{T}_{cu}$ sur $C(X, Y)$ est définie par la distance D_∞. Quand on considère l'espace $B(X, Y)$ ou l'espace $C(X, Y)$ si X est compact, muni de la topologie de la convergence uniforme $\mathcal{T}_{cu}$, il est plus naturel de travailler avec la distance D_∞ qu'avec la distance D'.

Proposition 5.2.1. *Soient X un ensemble quelconque et $(Y,\, d)$ un espace métrique. Une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'applications de X dans Y converge uniformément vers une application $f : X \longrightarrow Y$ si et seulement si la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans l'espace topologique $(Y^X,\, \mathcal{T}_{cu})$.*

Démonstration. Supposons d'abord que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f pour la distance d. Pour tous $a, b \in X$, soit $d'(a,b) = \inf(d(a,b), 1)$. D'après le lemme 5.2.1, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f pour la distance d'. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in X$, on ait $d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. D'où on a $D'(f_n, f) \leq \varepsilon$. Donc $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans l'espace topologique $(Y^X,\, \mathcal{T}_{cu})$. Réciproquement, supposons que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans l'espace topologique $(Y^X,\, \mathcal{T}_{cu})$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $D'(f_n, f) < \varepsilon$. Donc pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in X$, on a $d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f pour la distance d'. ■

Remarque 5.2.3. Soient X un ensemble quelconque et $(Y,\, d)$ un espace métrique. La topologie de la convergence uniforme sur Y^X est plus fine que la topologie de la convergence simple. Autrement dit, on a l'inclusion $\mathcal{T}_{cs} \subset \mathcal{T}_{cu}$.

Théorème 5.2.1. *Soient X un espace topologique, $(Y,\, d)$ un espace métrique et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications de X dans Y qui converge uniformément vers une application $f : X \longrightarrow Y$. On a :*

1. *Si toutes les f_n sont continues en $a \in X$, alors f est aussi continue en a. Autrement dit, l'ensemble des applications continues en $a \in X$ est fermé dans $(Y^X,\, \mathcal{T}_{cu})$.*
2. *Si toutes les f_n sont continues, alors f est aussi continue. Autrement dit, $C(X,\, Y)$ est fermé dans $(Y^X,\, \mathcal{T}_{cu})$.*

Démonstration. 1. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in X$, on ait $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Pour tout $x \in X$, on a :

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a)) &\leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), f(a)) \\ &< \tfrac{2\varepsilon}{3} + d(f_N(x), f_N(a))\,. \end{aligned}$$

Comme f_N est continue en a, alors il existe un voisinage V de a dans X tel que pour tout $x \in V$, on ait $d(f_N(x), f_N(a)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Par conséquent, pour tout $x \in V$, on a $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Donc f est continue en a. La deuxième partie de l'assertion résulte du fait que l'espace topologique $(Y^X,\, \mathcal{T}_{cu})$ est métrisable, voir proposition 2.2.3.
2. Ceci résulte de 1. ■

Proposition 5.2.2. *Soient $(X,\, d_1)$, $(Y,\, d)$ des espaces métriques et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications uniformément continues de X dans Y. Si la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une application $f : X \longrightarrow Y$, alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Puisque $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in X$, on ait $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Pour tous $x, z \in X$, on a :

$$\begin{aligned} d(f(x), f(z)) &\leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(z)) + d(f_N(z), f(z)) \\ &< \tfrac{2\varepsilon}{3} + d(f_N(x), f_N(z))\,. \end{aligned}$$

Comme f_N est uniformément continue, alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, z \in X$ vérifiant $d_1(x,z) < \eta$, on ait $d(f_N(x), f_N(z)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Par conséquent, pour tous $x, z \in X$ vérifiant $d_1(x,z) < \eta$, on a $d(f(x), f(z)) < \varepsilon$. Donc f est uniformément continue. ■

Proposition 5.2.3. *Soient X un espace topologique et $(Y,\, d)$ un espace métrique. On munit $C(X,\, Y)$ de la topologie de la convergence uniforme. Alors l'application suivante est continue.*

$$\begin{array}{ccc} C(X,\, Y) \times X & \longrightarrow & Y \\ (f,x) & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Démonstration. Puisque la distance d est uniformément équivalente à une distance bornée sur Y, alors on peut supposer que la distance d est bornée et que la distance sur $C(X,\, Y)$ induisant la topologie de la convergence uniforme est donnée par $D_\infty(f,g) = \sup\limits_{x \in X} d(f(x), g(x))$. Soient $(f_0, x_0) \in C(X,\, Y) \times X$ et $\varepsilon > 0$. Puisque f_0 est continue en x_0, il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V$, on ait $d(f_0(x), f_0(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $B = B(f_0, \frac{\varepsilon}{2})$ la boule ouverte de centre f_0 et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ dans $(C(X,\, Y),\, D_\infty)$. Alors pour tout $f \in B$ et pour tout $x \in X$, on a $d(f(x), f_0(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc $B \times V$ est un voisinage de (f_0, x_0) dans $C(X,\, Y) \times X$ et pour tout $(f,x) \in B \times V$, on a $d(f(x), f_0(x_0)) \leq d(f(x), f_0(x)) + d(f_0(x), f_0(x_0)) < \varepsilon$. Par conséquent, l'application $(f,x) \longmapsto f(x)$ est continue en (f_0, x_0). ■

Théorème 5.2.2 (Dini). *Soient X un espace compact et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'applications continues de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que :*

1. *La suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est croissante, i.e. pour tout $x \in X$, la suite de réels $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante.*

2. *La suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers une application continue f de X dans $\mathbb{R}$.*

Alors la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f.

Démonstration. Notons d'abord que pour tous $x \in X$ et $n \geq 0$, on a $f_n(x) \leq f(x)$ car la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante et on a $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$. Soit $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \geq 0$, soit $F_n = \big\{x \in X \; ; \; |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\big\} = \big\{x \in X \; ; \; f(x) - f_n(x) \geq \varepsilon\big\}$. Comme f et f_n sont continues, alors F_n est une partie fermée de X. On a $f(x) - f_n(x) \geq f(x) - f_{n+1}(x)$, donc $(F_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante. Soit $x \in \bigcap\limits_{n \geq 0} F_n$, alors pour tout $n \geq 0$, on a $f(x) - f_n(x) \geq \varepsilon$. Comme on a $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$, alors $0 \geq \varepsilon$, ce qui est impossible. Donc on a $\bigcap\limits_{n \geq 0} F_n = \emptyset$. Comme X est compact et $(F_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante de parties fermées de X d'intersection vide, il résulte de la proposition 3.1.5 qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $F_n = \emptyset$. Autrement dit, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in X$, on ait $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Par conséquent, la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f. ■

Dans le théorème précédent, on peut remplacer l'hypothèse « croissante » par « décroissante », quitte à remplacer f_n par $-f_n$.

L'hypothèse « f continue » dans le théorème précédent est essentielle. En effet, soit $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n}\,, \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

Alors $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de fonctions continues qui converge simplement vers f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1$ si $x \in]0, 1]$, donc f n'est pas continue, et la convergence n'est pas uniforme, car on a $\sup\limits_{0\leq x\leq 1} |f_n(x) - f(x)| = 1$.

Proposition 5.2.4. *Soient $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que :*

1. *Pour tout $n \geq 0$, l'application f_n est croissante, i.e. pour tous $x, y \in [a, b]$ tels que $x \leq y$, on ait $f_n(x) \leq f_n(y)$.*

2. *La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une application continue f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.*

Alors la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f.

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 5 du supplément.

Lemme 5.2.2. *Soient X un ensemble, (Y, d) un espace métrique et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(Y^X, \mathcal{T}_{cu})$, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$ et pour tout $x \in X$, on ait $d(f_p(x), f_q(x)) \leq \varepsilon$. Si pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers un élément $f(x)$ de (Y, d). Alors la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f.*

Démonstration. D'après le lemme 5.2.1 et le corollaire 2.6.1, on peut supposer que la distance d est majorée par 1 et que la distance induisant la topologie $\mathcal{T}_{cu}$ est donnée par $D_\infty(f, g) = \sup\limits_{x\in X} d(f(x), g(x))$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$, on ait $D_\infty(f_p, f_q) \leq \varepsilon$. Donc, pour tous $p, q \geq N$ et pour tout $x \in X$, on a $d(f_p(x), f_q(x)) \leq \varepsilon$. Pour x fixé dans X, la suite $(f_q(x))_{q\geq 0}$ converge vers $f(x)$ dans (Y, d), donc pour tout $p \geq N$, on a $\lim\limits_{q\to+\infty} d(f_p(x), f_q(x)) = d(f_p(x), f(x))$. Par conséquent, pour tout $p \geq N$ et pour tout $x \in X$, on a $d(f_p(x), f(x)) \leq \varepsilon$. Autrement dit, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f. ■

Théorème 5.2.3. *Soient X un ensemble et (Y, d) un espace métrique complet. Alors les espaces métriques $(Y^X, \mathcal{T}_{cu})$ et $(B(X, Y), \mathcal{T}_{cu})$ sont complets.*

Démonstration. D'après le corollaire 2.6.1 et la proposition 2.3.5, on peut supposer que la distance d est majorée par 1, et que la distance sur Y^X induisant la topologie $\mathcal{T}_{cu}$ est donnée par $D_\infty(f, g) = \sup\limits_{x\in X} d(f(x), g(x))$. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(Y^X, \mathcal{T}_{cu})$. Alors pour tout $x \in X$ et pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a $d(f_n(x), f_m(x)) \leq D_\infty(f_n, f_m)$. Donc pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans (Y, d) qui est complet, donc la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers un élément $f(x)$ dans (Y, d). Il résulte du lemme précédent que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans $(Y^X, \mathcal{T}_{cu})$. Par conséquent, $(Y^X, \mathcal{T}_{cu})$ est complet. On a démontré, proposition 2.6.8, que $(B(X, Y), \mathcal{T}_{cu})$ est complet. ■

Corollaire 5.2.1. *Soient X un espace topologique et $(Y,\, d)$ un espace métrique complet. Alors l'espace métrique $(C(X,\, Y),\, \mathcal{T}_{cu})$ est complet. Si de plus X est compact, alors l'espace métrique $(C(X,\, Y),\, D_\infty)$ est complet.*

Démonstration. Ceci résulte du théorème précédent et du théorème 5.2.1. ■

Proposition 5.2.5. *Soient $[a,\, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $C([a,\, b],\, \mathbb{R})$ convergeant uniformément vers une fonction $f : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.*
Alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt\,.$$

Démonstration. Notons d'abord que f est continue, voir théorème 5.2.1 ou corollaire précédent. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_n(t)\, dt - \int_a^b f(t)\, dt\right| &= \left|\int_a^b \big[f_n(t) - f(t)\big]\, dt\right| \\
&\leq \int_a^b \big|f_n(t) - f(t)\big|\, dt \\
&\leq \int_a^b D_\infty(f_n, f)\, dt \;=\; (b-a) D_\infty(f_n, f)\,.
\end{aligned}$$

Or on a $\lim\limits_{n\to+\infty} D_\infty(f_n, f) = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$. ■

Théorème 5.2.4 (théorème d'interversion des limites). *Soient X un espace topologique, A une partie de X, $x_0 \in \overline{A}$, $(Y,\, d)$ un espace métrique complet et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans Y^A convergeant uniformément vers $f \in Y^A$. Si pour tout n, l'application f_n admet en x_0 une limite $\ell_n \in Y$, alors il existe $\ell \in Y$ tel que :*

1. *La suite $(\ell_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.*
2. *L'application f admet en x_0 la limite ℓ.*

Autrement dit, on a la formule suivante :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\big) = \lim_{n\to+\infty} \big(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\big)\,.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est uniformément convergente vers f, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geq N$ et pour tout $x \in A$, on ait $d(f_n(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n, m \geq N$. Comme l'application f_n admet en x_0 la limite ℓ_n et f_m admet en x_0 la limite ℓ_m, il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que pour tout $x \in A \cap V$, on ait $d(\ell_n, f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ et $d(\ell_m, f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Comme $x_0 \in \overline{A}$, alors il existe $a \in A \cap V$, d'où :

$$d(\ell_n, \ell_m) \leq d(\ell_n, f_n(a)) + d(f_n(a), f_m(a)) + d(f_m(a), \ell_m) < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

Par conséquent, la suite $(\ell_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $(Y,\, d)$, donc convergente dans $(Y,\, d)$, car $(Y,\, d)$ est complet. Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n$. Montrons que f admet en x_0 la limite ℓ. Soit

$\varepsilon > 0$. Comme la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f et la suite $(\ell_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in A$, on ait $d(f_N(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ et $d(\ell_N, \ell) < \frac{\varepsilon}{3}$. Comme f_N admet en x_0 la limite ℓ_N, il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que pour tout $x \in A \cap V$, on ait $d(f_N(x), \ell_N) < \frac{\varepsilon}{3}$. D'où pour tout $x \in A \cap V$, on a $d(f(x), \ell) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), \ell_N) + d(\ell_N, \ell) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Par conséquent, l'application f admet en x_0 la limite ℓ. ■

Exemple 5.2.1. Soient $f_n, f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f et si pour tout $n \geq 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \ell_n$ existe, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ existe aussi et la suite $(\ell_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.

Proposition 5.2.6. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que :*

1. *La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*

2. *La suite $(f'_n)_{n\geq 0}$ est uniformément convergente vers une fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Alors la fonction f est dérivable sur I et sa dérivée est g.

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 5 du supplément.

5.3 Théorème d'Ascoli

Soient X un espace topologique et (Y, d) un espace métrique. Malgré l'intérêt que présentent les espaces métriques complets mis en évidence par le théorème 5.2.3 et le corollaire 5.2.1, il est souvent précieux de pouvoir disposer d'espaces fonctionnels compacts. Mais, même en imposant à X et Y des hypothèses très restrictives, l'espace $C(X, Y)$ muni de la topologie $\mathcal{T}_{cu}$ est loin d'être compact ou localement compact. Par exemple, si $X = Y = [0, 1]$ muni de la topologie usuelle, alors $(C(X, Y), \mathcal{T}_{cu})$ est complet, mais n'est pas localement compact ; en effet, pour tout $\lambda > 0$, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ dans $(C(X, Y), \mathcal{T}_{cu})$ définie par $f_n(x) = \lambda \sin^2(nx)$ n'admet aucune sous-suite convergente. Donc la fonction nulle n'admet aucun voisinage compact. On va voir dans ce paragraphe, théorème d'Ascoli, des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une partie A de $(C(X, Y), \mathcal{T}_{cu})$ soit relativement compacte. C'est la notion d'équicontinuité qui va nous en fournir une classe importante.

Définition 5.3.1. Soient X un espace topologique, (Y, d) un espace métrique et $\mathcal{H}$ une partie de Y^X.

1. On dit que $\mathcal{H}$ est **équicontinue en un point** $x_0 \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V_{x_0}$ et pour tout $f \in \mathcal{H}$, on ait $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.

2. On dit que $\mathcal{H}$ est **équicontinue** s'elle est équicontinue en tout point de X.

Remarque 5.3.1. Si d' est une distance sur Y uniformément équivalente à d, alors $\mathcal{H}$ est équicontinue en x_0 (*resp.* équicontinue) par rapport à d si et seulement si $\mathcal{H}$ est équicontinue en x_0 (*resp.* équicontinue) par rapport à d'.

Remarque 5.3.2. Il est clair que si $\mathcal{H}$ est équicontinue en un point $x_0 \in X$, alors tout $f \in \mathcal{H}$ est continue en x_0. La réciproque est en général fausse. En effet, pour tout $n \geq 0$, la fonction $f_n : x \longmapsto \sin(nx)$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais la famille de fonctions $\{f_n \; ; \; n \geq 0\}$ n'est pas équicontinue en 0.

Remarque 5.3.3.

1. Toute partie finie de $C(X, Y)$ est équicontinue.
2. La reunion de deux parties équicontinue en x_0 (*resp.* équicontinue) est équicontinue en x_0 (*resp.* équicontinue). On peut donc ajouter à une partie équicontinue, un nombre fini d'applications continues ; la nouvelle partie ainsi obtenue est encore équicontinue.
3. Toute partie d'une partie équicontinue en x_0 (*resp.* équicontinue) est équicontinue en x_0 (*resp.* équicontinue).

Exemple 5.3.1.

1. Si $k > 0$, alors l'ensembles des applications k-lipschitziennes d'un espace métrique dans un autre est une partie équicontinue.
2. Soient $X = [a, b]$, $Y = \mathbb{R}$, $k > 0$ et
$$\mathcal{H} = \big\{ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ dérivable telle que } |f'(t)| \leq k \text{ pour tout } \; t \in]a, b[\,\big\}.$$
Alors $\mathcal{H}$ est une partie équicontinue de $C([a, b], \mathbb{R})$.

Exemple 5.3.2. Soient X un espace topologique, Z un espace topologique compact, (Y, d) un espace métrique et $f : X \times Z \longrightarrow Y$ une application continue. Pour tout $z \in Z$, on note $f_z : X \longrightarrow Y$ l'application $x \longmapsto f(x, z)$. Alors $\mathcal{H} = \{f_z \; ; \; z \in Z\}$ est une partie équicontinue de $C(X, Y)$. En effet, soient $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $a \in Z$, f est continue en (x_0, a), donc il existe un voisinage $V_{x_0,a}$ de x_0 dans X et un voisinage W_a de a dans Z tels que pour tout $(x, z) \in V_{x_0,a} \times W_a$, on ait $d(f(x_0, a), f(x, z)) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(f(x_0, a), f(x_0, z)) < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $d(f(x_0, z), f(x, z)) < \varepsilon$. Comme Z est compact et $(W_a)_{a \in Z}$ forment un recouvrement ouvert de Z, alors il existe une partie finie $\{a_1, \dots, a_n\}$ de Z telle que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} W_{a_i} = Z$. Soit $V_{x_0} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{x_0,a_i}$, alors V_{x_0} est un voisinage de x_0 dans X. Soient $x \in V_{x_0}$ et $z \in Z$, alors il existe i tel que $z \in W_{a_i}$, d'où $(x, z) \in V_{x_0,a_i} \times W_{a_i}$. Donc on a $d(f(x_0, z), f(x, z)) < \varepsilon$. Par conséquent, on a $d(f_z(x_0), f_z(x)) < \varepsilon$ pour tout $x \in V_{x_0}$ et pour tout $z \in Z$. Autrement dit, $\mathcal{H}$ est équicontinue en x_0.

Proposition 5.3.1. *Soient X un espace topologique et (Y, d) un espace métrique.*

1. *Si $\mathcal{H}$ est une partie précompacte dans $(C(X, Y), \mathcal{T}_{cu})$, alors $\mathcal{H}$ est équicontinue.*
2. *Si $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite dans $C(X, Y)$ qui converge uniformément vers une application f, alors $\big\{f_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\big\}$ est équicontinue.*

Démonstration. Notons d'abord que l'on peut supposer que la distance d est majorée par 1, voir remarque 5.3.1 et proposition 2.3.5, et dans ce cas la topologie de la convergence uniforme est donnée par la distance $D_\infty(f, g) = \sup\limits_{x \in X} d(f(x), g(x))$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathcal{H}$ est précompacte, il existe un sous-ensemble fini $\{f_1, \dots, f_N\}$ de $\mathcal{H}$ tel que $\mathcal{H} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B\big(f_i, \frac{\varepsilon}{3}\big)$. Soit $x_0 \in X$. Comme les f_i sont continues en x_0, alors il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V$ et pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, on

ait $d(f_i(x), f_i(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $f \in \mathcal{H}$, alors il existe $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $D_\infty(f, f_i) < \frac{\varepsilon}{3}$. Pour tout $x \in V$, on a :

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(x_0)) + d(f_i(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

Par conséquent, $\mathcal{H}$ est équicontinue en x_0.
2. Puisque $\big\{f_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\big\}$ est précompacte, il résulte de 1 que $\{f_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue. ■

Proposition 5.3.2. *Soient X un espace topologique, (Y, d) un espace métrique et $\mathcal{H}$ une partie de Y^X. Alors $\mathcal{H}$ est équicontinue si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U de $X \times X$ contenant la diagonale $\Delta = \{(x, x)\ ;\ x \in X\}$ et telle que, pour tout $(x, x') \in U$ et pour tout $f \in \mathcal{H}$, on ait $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 5 du supplément.

Proposition 5.3.3. *Soient X un espace topologique, (Y, d) un espace métrique, $x_0 \in X$ et $\mathcal{H}$ une partie de Y^X équicontinue en x_0 (resp. équicontinue).*

1. *Soit $\overline{\mathcal{H}}^{cs}$ l'adhérence de $\mathcal{H}$ pour la topologie de la convergence simple. Alors $\overline{\mathcal{H}}^{cs}$ est équicontinue en x_0 (resp. équicontinue).*
2. *Soit $\overline{\mathcal{H}}^{cu}$ l'adhérence de $\mathcal{H}$ pour la topologie de la convergence uniforme. Alors $\overline{\mathcal{H}}^{cu}$ est équicontinue en x_0 (resp. équicontinue).*

Démonstration. 1. Supposons que $\mathcal{H}$ est équicontinue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V$ et pour tout $f \in \mathcal{H}$, on ait $d(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$. Soit $x \in V$. Alors l'ensemble $F_x = \big\{f \in Y^X\ ;\ d(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon\big\}$ est une partie fermée de Y^X pour la topologie de la convergence simple et on a $\mathcal{H} \subset F_x$, d'où $\overline{\mathcal{H}}^{cs} \subset F_x$. Ceci étant vrai pour tout $x \in V$. Donc, pour tout $x \in V$ et pour tout $f \in \overline{\mathcal{H}}^{cs}$, on a $d(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$. Par conséquent, $\overline{\mathcal{H}}^{cs}$ est équicontinue en x_0.
2. Comme on a $\mathcal{T}_{cs} \subset \mathcal{T}_{cu}$, on en déduit $\overline{\mathcal{H}}^{cu} \subset \overline{\mathcal{H}}^{cs}$. Il résulte de 1 que $\overline{\mathcal{H}}^{cu}$ est équicontinue en x_0 (*resp.* équicontinue). ■

Proposition 5.3.4. *Soient X un espace topologique, (Y, d) un espace métrique et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans Y^X.*

1. *Supposons que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une application $f : X \longrightarrow Y$. Si $\{f_n\ ;\ n \geq 0\}$ est équicontinue en x_0 (resp. équicontinue), alors f est continue en x_0 (resp. continue).*
2. *Si (Y, d) est complet et si $\{f_n\ ;\ n \geq 0\}$ est équicontinue telle que pour tout point x d'un sous-ensemble dense D de X, la suite $(f_n(x))$ soit convergente dans Y. Alors la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une application continue f.*

Démonstration. 1. Ceci résulte immédiatement de la proposition précédente, mais on va donner une preuve directe. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V$ et pour tout $n \geq 0$, on ait $d(f_n(x), f_n(x_0)) \leq \varepsilon$. Or on a $d(f(x), f(x_0)) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(f_n(x), f_n(x_0))$, d'où $d(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$. Ainsi, f est continue en x_0.
2. Pour avoir le résultat, il suffit, d'après 1, de montrer que pour tout $x \in X$, la suite

$(f_n(x))_{n\geq 0}$ est convergente dans (Y, d). Soient $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\{f_n \ ; \ n \geq 0\}$ est équicontinue en x, alors il existe un voisinage U de x dans X tel que pour tout $z \in U$ et pour tout $n \geq 0$, on ait $d(f_n(z), f_n(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Comme D est dense, alors il existe $z \in D \cap U$, d'où pour tout $n, m \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} d(f_n(x), f_m(x)) &\leq d(f_n(x), f_n(z)) + d(f_n(z), f_m(z)) + d(f_m(z), f_m(x)) \\ &< \tfrac{2\varepsilon}{3} + d(f_n(z), f_m(z)) \, . \end{aligned}$$

Comme la suite $(f_n(z))_{n\geq 0}$ est convergente dans Y, donc de Cauchy, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$, on ait $d(f_n(z), f_m(z)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Par conséquent, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est de Cauchy, donc convergente car (Y, d) est complet. ■

Théorème 5.3.1. *Soient X un espace compact, (Y, d) un espace métrique et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans Y^X. Si $\{f_n \ ; \ n \geq 0\}$ est équicontinue et si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une fonction f, alors elle converge uniformément vers f. De plus f est continue.*

Démonstration. Il résulte de la proposition précédente que f est continue. Il reste à montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\{f_n \ ; \ n \geq 0\}$ est équicontinue et f est continue, alors pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans X tel que pour tout $z \in U_x$ et pour tout $n \geq 0$, on ait $d(f_n(x), f_n(z)) < \frac{\varepsilon}{3}$ et $d(f(x), f(z)) < \frac{\varepsilon}{3}$. comme X est compact, alors il existe un sous-ensemble fini $\{x_1, \dots, x_p\}$ de X tel que $X = \bigcup_{i=1}^{p} U_{x_i}$. Comme pour tout i, la suite $(f_n(x_i))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x_i)$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on ait $d(f_n(x_i), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $n \geq N$. Soit $x \in X$, alors il existe x_i tel que $x \in U_{x_i}$.
Donc on a :

$$d(f_n(x), f(x)) \leq d(f_n(x), f_n(x_i)) + d(f_n(x_i), f(x_i)) + d(f(x_i), f(x)) < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \, .$$

Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f. ■

Remarque 5.3.4. L'hypothèse X compact dans le théorème précédent n'est pas superflue. En effet, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$, où $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + (x-n)^2}$, converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ et $\{f_n \ ; \ n \geq 0\}$ est équicontinue, mais ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Théorème 5.3.2 (Ascoli). *Soient X un espace topologique, (Y, d) un espace métrique et $\mathcal{H}$ une partie de $C(X, Y)$. On a :*

1. *Si $\mathcal{H}$ est relativement compacte dans $(C(X, Y), \mathcal{T}_{cu})$, alors $\mathcal{H}$ est équicontinue et pour tout $x \in X$, $\mathcal{H}(x)$ est relativement compact dans Y.*

2. *Supposons de plus que X est compact. Si $\mathcal{H}$ est équicontinue et si pour tout $x \in X$, $\mathcal{H}(x)$ est relativement compact dans Y, alors $\mathcal{H}$ est relativement compacte dans $(C(X, Y), \mathcal{T}_{cu})$.*

Démonstration. 1. Comme toute partie relativement compacte dans un espace métrique est précompacte, voir remarque 3.1.7, il résulte de la proposition 5.3.1 que $\mathcal{H}$ est équicontinue. D'autre part, pour tout $x \in X$, l'application $f \longmapsto f(x)$ est continue de

$(C(X,\,Y),\,\mathcal{T}_{cu})$ dans $(Y,\,d)$, voir proposition 5.2.3, donc $\left\{f(x)\ ;\ f\in\overline{\mathcal{H}}\right\}$ est une partie compacte de $(Y,\,d)$ contenant $\mathcal{H}(x)$. Par conséquent, $\mathcal{H}(x)$ est relativement compact dans Y.
2. Puisque X est compact, la topologie $\mathcal{T}_{cu}$ est donnée par la distance D_∞, où pour tout $f,g\in C(X,\,Y)$, on a $D_\infty(f,g)=\sup\limits_{x\in X} d(f(x),g(x))$. Pour montrer que $\mathcal{H}$ est relativement compact, d'après le théorème 3.1.3 et la proposition 3.1.6, il suffit de montrer que $\mathcal{H}$ est précompacte et $\overline{\mathcal{H}}$ est complète. Montrons d'abord que $\mathcal{H}$ est précompacte. Soit $\varepsilon>0$. Comme $\mathcal{H}$ est équicontinue, alors pour tout $z\in X$, il existe un voisinage V_z de z dans X tel que pour tout $x\in V_z$, et pour tout $f\in\mathcal{H}$, on ait $d(f(z),f(x))<\frac{\varepsilon}{4}$. Comme X est compact, alors il existe une partie finie A de X telle que $X=\bigcup\limits_{z\in A}V_z$. Comme A est finie et pour tout $z\in A$, l'ensemble $\mathcal{H}(z)=\left\{f(z)\ ;\ f\in\mathcal{H}\right\}$ est relativement compact dans Y, alors $K=\bigcup\limits_{z\in A}\mathcal{H}(z)$ est relativement compact dans $(Y,\,d)$, donc K est précompact. Par conséquent, il existe une partie finie $B=\{y_1,\dots,y_p\}$ de Y telle que $K\subset\bigcup\limits_{j=1}^{p}B\big(y_j,\frac{\varepsilon}{4}\big)$. Pour toute application $\varphi:A\longrightarrow B$, on pose :

$$C_\varphi=\left\{f:X\longrightarrow Y\ ;\ d(f(x),\varphi(z))<\tfrac{\varepsilon}{2},\ \text{ pour tout }\ z\in A\ \text{ et pour tout }\ x\in V_z\right\}.$$

Montrons que pour tout $\varphi\in B^A$, le diamètre de C_φ est $\le\varepsilon$ et que l'on a $\mathcal{H}\subset\bigcup\limits_{\varphi\in B^A}C_\varphi$. Soient $f,g\in C_\varphi$. Alors, pour tout $x\in X$, il existe $z\in A$ tel que $x\in V_z$, d'où on a $d(f(x),g(x))\le d(f(x),\varphi(z))+d(\varphi(z),g(x))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Donc on a $D_\infty(f,g)\le\varepsilon$. Autrement dit, le diamètre de C_φ est $\le\varepsilon$. Soit $f\in\mathcal{H}$. Pour tout $z\in A$, il existe $j\in\{1,\dots,p\}$ tel que $f(z)\in B\big(y_j,\frac{\varepsilon}{4}\big)$. Soit $j_z=\inf\left\{j\ ;\ f(z)\in B\big(y_j,\frac{\varepsilon}{4}\big)\right\}$, alors $\varphi:z\longmapsto y_{j_z}$ est une application de A dans B, et pour tout $z\in A$ et pour tout $x\in V_z$, on a $d(f(z),\varphi(z))<\frac{\varepsilon}{4}$ et $d(f(x),f(z))<\frac{\varepsilon}{4}$, donc on a $d(f(x),\varphi(z))\le d(f(x),f(z))+d(f(z),\varphi(z))<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, on a $f\in C_\varphi$, d'où $\mathcal{H}\subset\bigcup\limits_{\varphi\in B^A}C_\varphi$. Donc $\mathcal{H}$ est bien précompacte car l'ensemble B^A est fini. Montrons maintenant que $\overline{\mathcal{H}}$ est complète. Soit $(f_n)_{n\ge0}$ une suite de Cauchy dans $\overline{\mathcal{H}}$. Pour tout $n\ge0$, il existe $g_n\in\mathcal{H}$ tel que $D_\infty(f_n,g_n)<2^{-n}$, donc $(g_n)_{n\ge0}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}$. Or pour tous $n,m\ge0$ et pour tout $x\in X$, on a $d(g_n(x),g_m(x))\le D_\infty(g_n,g_m)$, donc la suite $(g_n(x))_{n\ge0}$ est de Cauchy dans le compact $\overline{\mathcal{H}(x)}$, donc $(g_n(x))_{n\ge0}$ converge vers un élément $g(x)\in Y$. D'après le lemme 5.2.2, la suite $(g_n)_{n\ge0}$ converge uniformément vers l'application g. D'après le théorème 5.2.1, on a $g\in C(X,\,Y)$. Or on a $D_\infty(f_n,g)\le D_\infty(f_n,g_n)+D_\infty(g_n,g)<2^{-n}+D_\infty(g_n,g)$, donc la suite $(f_n)_{n\ge0}$ converge uniformément vers g. Par conséquent, $\overline{\mathcal{H}}$ est complète. Donc $\overline{\mathcal{H}}$ est compacte. ∎

Remarque 5.3.5. 1. Le théorème précédent ne s'étend pas au cas où X est localement compact. En effet, soient $X=\mathbb{R}$, $Y=[0,\,1]$ et considérons la suite de fonctions

$$\begin{array}{rccc} f_n: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,\,1] \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+(x-n)^2} \end{array}$$

Soit $\mathcal{H}=\{f_n\ ;\ n\ge0\}$, alors on a :

(a) $\mathcal{H}$ est équicontinue, car on a $|f_n(x)-f_n(y)|\le2|x-y|$.

(b) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathcal{H}(x)$ est relativement compact dans $[0,\,1]$.

(c) Pour tout $n \geq 0$, on a $f_n(n) = 1$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers 0, donc $(f_n)_{n\geq 0}$ n'admet aucune sous-suite convergente pour la topologie de la convergence uniforme, et donc $\mathcal{H}$ n'est pas relativement compacte dans $(C(\mathbb{R}, [0, 1]), \mathcal{T}_{cu})$. Notons aussi que $\mathcal{H}$ est fermé pour $\mathcal{T}_{cu}$.

2. Soient $X = Y = [0, 1]$ et pour tous $x \in [0, 1]$ et $n \geq 0$, soit $f_n(x) = x^n$. Soit $\mathcal{H} = \{f_n \ ; \ n \geq 0\}$, $\mathcal{H}$ est une partie de $C(X, Y)$. Alors on a :

   (a) $\mathcal{H}$ est équicontinue en tout point de $[0, 1[$, mais $\mathcal{H}$ n'est pas équicontinue en 1.

   (b) Pour tout $x \in X$, $\mathcal{H}(x)$ est relativement compact dans Y.

   (c) Chacune des f_n est uniformément continue et la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction f définie par $f(1) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$, mais $(f_n)_{n\geq 0}$ n'admet aucune sous-suite convergente pour la topologie de la convergence uniforme, donc $\mathcal{H}$ n'est pas relativement compacte dans $(C(X, Y), \mathcal{T}_{cu})$.

3. Si $X = [0, 1]$, $Y = \mathbb{R}$ et $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions constantes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{H}$ est une partie équicontinue ; cependant elle n'est pas relativement compacte dans $(C([0, 1], \mathbb{R}), \mathcal{T}_{cu})$. En fait, $\mathcal{H}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in [0, 1]$, on a $\mathcal{H}(x) = \mathbb{R}$.

Corollaire 5.3.1. *Soient X un espace compact et (Y, d) un espace métrique compact. Les parties relativement compactes dans $(C(X, Y), \mathcal{T}_{cu})$ sont les parties équicontinues.*

Corollaire 5.3.2. *Soient X un espace compact et $\mathcal{H}$ une partie de $C(X, \mathbb{R}^n)$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de la distance euclidienne. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathcal{H}$ est relativement compacte dans $(C(X, \mathbb{R}^n), \mathcal{T}_{cu})$.

(ii) $\mathcal{H}$ est équicontinue et pour tout $x \in X$, $\mathcal{H}(x)$ est borné dans $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 5.3.3. *Soient X un espace compact et $\mathcal{H}$ une partie de $C(X, \mathbb{R}^n)$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de la distance euclidienne. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathcal{H}$ est compacte dans $(C(X, \mathbb{R}^n), D_\infty)$.

(ii) $\mathcal{H}$ est fermée, bornée et équicontinue.

Corollaire 5.3.4. *Soient X un espace compact et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications continues de X dans $\mathbb{R}^p$, muni de la distance euclidienne, telle que :*

1. *Pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est bornée dans $\mathbb{R}^p$.*

2. *La famille $\{f_n \ ; \ n \geq 0\}$ est équicontinue.*

Alors la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ possède une sous-suite convergente pour la topologie de la convergence uniforme.

5.4 Théorème de Stone-Weierstrass

Rappelons que si X est un espace compact, alors la topologie de la convergence uniforme $\mathcal{T}_{cu}$ sur $C(X)$ est définie par la distance D_∞, où $D_\infty(f,g) = \sup\limits_{x\in X} |f(x) - g(x)|$, pour tout $f, g \in (X)$.

Définition 5.4.1. Soient X un espace topologique et $\mathcal{A}$ un sous-ensemble non vide de $C(X)$. On dit que :

1. $\mathcal{A}$ **sépare** les points de X si pour tout $x, y \in X$, avec $x \neq y$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Autrement dit, $\mathcal{A}$ est une famille séparante.
2. $\mathcal{A}$ est une **sous-algèbre** de $C(X)$ si pour tout $f, g \in \mathcal{A}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $f + \lambda g$, $fg \in \mathcal{A}$.

Lemme 5.4.1. *Il existe une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de fonctions polynômiales à une variable, à coefficients réels convergeant uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction racine carrée $t \longmapsto \sqrt{t}$. De plus, pour tout $n \geq 0$, on a $P_n(0) = 0$.*

Pour une preuve du lemme précédent, voir chapitre 5 du supplément.

Lemme 5.4.2. *Soient X un espace compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $(C(X, \mathbb{R}), D_\infty)$. Alors on a :*

1. *$\overline{\mathcal{A}}$ est une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{R})$.*
2. *Pour tout $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$, on a $\sup(f,g), \inf(f,g) \in \overline{\mathcal{A}}$.*

Pour une preuve du lemme précédent, voir chapitre 5 du supplément.

Lemme 5.4.3. *Soient X un espace compact et $\mathcal{A}$ une partie de $C(X, \mathbb{R})$ telle que :*

1. *Pour tout $f, g \in \mathcal{A}$, on ait $\sup(f,g), \inf(f,g) \in \mathcal{A}$.*
2. *Pour tout $x \in X$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = \lambda$.*
3. *Pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = \lambda$ et $f(y) = \mu$.*

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $(C(X, \mathbb{R}), D_\infty)$.

Démonstration. Soient $f \in C(X, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Soit $x \in X$. Par hypothèse, pour tout $y \in X$, il existe $g_{x,y} \in \mathcal{A}$ telle que $g_{x,y}(x) = f(x)$ et $g_{x,y}(y) = f(y)$. Comme f et $g_{x,y}$ sont continues, alors $U_{x,y} = \{z \in X \ ; \ g_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon\}$ est un ouvert de X contenant x et y. En faisant parcourir X par le point y, on obtient un recouvrement ouvert $\big(U_{x,y}\big)_{y\in X}$ de X. Comme X est compact, alors il existe une partie finie $\{y_1, \dots, y_p\}$ de X telle que $\bigcup\limits_{i=1}^{p} U_{x,y_i} = X$. Chaque ouvert U_{x,y_i} est défini par une fonction continue $g_{x,y_i} \in \mathcal{A}$. Soit $g_x = \inf\big(g_{x,y_1}, \dots, g_{x,y_p}\big)$, alors on a $g_x \in \mathcal{A}$, $g_x(x) = f(x)$ et $g_x(z) < f(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in X$. Considérons à présent l'ouvert $W_x = \{z \in X \ ; \ g_x(z) > f(z) - \varepsilon\}$, alors on a $x \in W_x$. En faisant parcourir X par le point x, on obtient un recouvrement ouvert $\big(W_x\big)_{x\in X}$ de X. Comme X est compact, alors il existe une partie finie $\{x_1, \dots, x_n\}$ de X telle que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} W_{x_i} = X$. Comme chaque ouvert W_{x_i} est défini par une fonction continue $g_{x_i} \in \mathcal{A}$, alors $g = \sup\big(g_{x_1}, \dots, g_{x_n}\big) \in \mathcal{A}$ et pour tout $z \in X$, on a $f(z) - \varepsilon < g(z) < f(z) + \varepsilon$. Donc on a $D_\infty(f, g) < \varepsilon$. Par conséquent, $\mathcal{A}$ est dense dans $(C(X, \mathbb{R}), D_\infty)$. ■

Remarque 5.4.1. Dans le lemme précédent, en supprimant l'hypothèse 2 et en ajoutant l'hypothèse que X contient au moins deux points, on obtient toujours le même résultat. Par contre, si X contient un seul point, l'hypothèse 2 n'est pas superflue. En effet, si X est réduit à un point, alors on a $C(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, et si $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$, alors $\mathcal{A}$ vérifie les hypothèses 1 et 3, mais $\mathcal{A}$ n'est pas dense dans $C(X, \mathbb{R})$.

Théorème 5.4.1 (Stone-Weierstrass). *Soient X un espace compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{R})$ telle que :*

1. *Pour tout $x \in X$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq 0$.*
2. *$\mathcal{A}$ sépare les points de X, i.e. pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $(C(X, \mathbb{R}), D_\infty)$.

Démonstration. Pour montrer que $\mathcal{A}$ est dense dans $(C(X, \mathbb{R}), D_\infty)$, d'après les lemmes précédents, il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ vérifie les propriétés suivantes :

(a) Pour tout $x \in X$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = \lambda$.

(b) Pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = \lambda$ et $f(y) = \mu$.

Soient $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq 0$. Soit $g = \lambda \dfrac{f}{f(x)}$, alors $g \in \mathcal{A}$ et on a $g(x) = \lambda$. Ainsi, $\mathcal{A}$ vérifie la propriété (a).
Soient $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, et considérons l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & f & \longmapsto & (f(x), f(y)) \end{array}$$

Montrons d'abord qu'il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq 0$, $f(y) \neq 0$ et $f(x) \neq f(y)$. Par hypothèse, il existe $f_1 \in \mathcal{A}$ telle que $f_1(x) \neq f_1(y)$. Si $f_1(x) \neq 0$ et $f_1(y) \neq 0$, on prend $f = f_1$. Si, par exemple, $f_1(x) = 0$, il existe, par hypothèse, $f_2 \in \mathcal{A}$ telle que $f_2(x) \neq 0$. On pose alors $f = f_1 + \varepsilon f_2$, avec $\varepsilon > 0$ assez petit, on obtient que $f \in \mathcal{A}$, $f(x) \neq 0$, $f(y) \neq 0$ et $f(x) \neq f(y)$. On a $f, f^2 \in \mathcal{A}$ et le déterminant

$$\begin{vmatrix} f(x) & f^2(x) \\ f(y) & f^2(y) \end{vmatrix} = f(x)f^2(y) - f(y)f^2(x) = f(x)f(y)[f(y) - f(x)] \neq 0\,.$$

Ainsi, les deux vecteurs $\varphi(f)$ et $\varphi(f^2)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^2$. Donc φ est surjective. Par conséquent, on a $\varphi(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^2$, d'où pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = \lambda$ et $f(y) = \mu$. D'où le résultat. ■

Remarque 5.4.2. Dans le théorème précédent, pour avoir l'hypothèse 1, il suffit que $\mathcal{A}$ contient une fonction constante non nulle.

Il est commode dans les applications de formuler ainsi ce théorème : si une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'éléments de $C(X, \mathbb{R})$ sépare les points de X, et si les f_i ne s'annulent pas toutes en un même point de X, alors toute $f \in C(X, \mathbb{R})$ est limite uniforme de polynômes, sans terme constant, par rapport aux f_i.

Théorème 5.4.2 (Stone-Weierstrass). *Soient X un espace compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{C})$ telle que :*

1. *Pour tout $x \in X$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq 0$.*
2. *$\mathcal{A}$ sépare les points de X, i.e. pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*
3. *Pour tout $f \in \mathcal{A}$, le conjugué $\overline{f}$ de f appartient à $\mathcal{A}$.*

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $(C(X, \mathbb{C}), D_\infty)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{A}_\mathbb{R} = \mathcal{A} \cap C(X, \mathbb{R})$. Pour tout $f \in \mathcal{A}$, on a $\mathrm{Re}(f) = \dfrac{f + \overline{f}}{2}$ et $\mathrm{Im}(f) = \dfrac{f - \overline{f}}{2i}$, donc on a $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{A}_\mathbb{R}$. On en déduit que $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ vérifie les hypothèses du théorème précédent, donc $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ est dense dans $(C(X, \mathbb{R}), D_\infty)$. Soit $f \in C(X, \mathbb{C})$, alors il existe deux suites $(h_n)_{n\geq 0}$ et $(g_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ convergeant respectivement vers $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ dans $(C(X, \mathbb{R}), D_\infty)$. Pour tout $n \geq 0$, soit $f_n = h_n + ig_n$, alors $f_n \in \mathcal{A}$ et la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans $(C(X, \mathbb{C}), D_\infty)$. Par conséquent, $\mathcal{A}$ est dense dans $(C(X, \mathbb{C}), D_\infty)$. ■

La condition 3 du théorème précédent n'est pas superflue. En effet, soient $X = \overline{\mathbb{D}}$ le disque unité fermé dans $\mathbb{C}$, *i.e.* $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| \leq 1\}$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des restrictions sur X des polynômes par rapport à la variable z. Alors $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{C})$ qui vérifie les conditions 1 et 2, mais pas la condition 3. On vérifie également que $\mathcal{A}$ n'est pas dense dans $(C(X, \mathbb{C}), D_\infty)$, par exemple en remarquant que pour toute $f \in \overline{\mathcal{A}}$, $f(0)$ est la moyenne de f sur le cercle unité, ce qui n'est pas vrai de toute $f \in C(X, \mathbb{C})$.

Corollaire 5.4.1. *Soit X une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. La famille des n fonctions coordonnées, $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_i$, pour $i = 1, \ldots, n$, sépare les points de X. Donc l'ensemble des fonctions polynômiales à n variables et à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec terme constant si $0 \in X$; sans terme constant, si on le désire, si $0 \notin X$ est une sous-algèbre de $C(X)$ vérifiant les hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass, donc dense dans $(C(X), D_\infty)$. Autrement dit, pour toute $f \in C(X)$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynômiale de n variables $p(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} a_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, avec $a_\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ telle que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, on ait $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$. De plus, si $0 \notin X$, on peut considérer $a_0 = 0$.*

Soit $\mathbb{S}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$; la fonction $z \longmapsto z$ sépare les points de $\mathbb{S}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{S}$; donc l'ensemble des polynômes en z et $\bar{z}$ et à coefficients complexes est dense dans $C(\mathbb{S}, \mathbb{C})$. Soit φ l'application $t \longmapsto e^{it}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour toute $f \in C(\mathbb{S}, \mathbb{C})$, $f \circ \varphi$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, et réciproquement toute fonction continue périodique de période 2π sur $\mathbb{R}$ est de cette forme, voir exemples 1.4.3 et 3.2.1. Puisque f est limite uniforme de polynômes en z et $\bar{z}$, $f \circ \varphi$ est limite uniforme de polynômes en e^{it} et e^{-it}.
On appelle polynôme trigonométrique une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ de la forme $t \longmapsto \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$, avec $c_n \in \mathbb{C}$. On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 5.4.2. *Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, continue et périodique de période 2π est limite uniforme de polynômes trigonométriques. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique $p(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait $|f(t) - p(t)| < \varepsilon$.*

Rappelons que si X est un espace localement compact, On désigne par $C_0(X)$ l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{K}$ continues et tendant vers 0 à l'infini. Alors $C_0(X) \subset C_b(X)$ et la distance D_∞, où $D_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$, pour tout $f, g \in C_0(X)$, induit sur $C_0(X)$ la topologie de la convergence uniforme $\mathcal{T}_{cu}$.

Théorème 5.4.3. *Soient X un espace localement compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $C_0(X)$ telle que :*

1. *Pour tout $x \in X$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq 0$.*
2. *$\mathcal{A}$ sépare les points de X, i.e. pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*
3. *Pour tout $f \in \mathcal{A}$, le conjugué $\overline{f}$ de f appartient à $\mathcal{A}$.*

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $(C_0(X), D_\infty)$.

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 5 du supplément.

5.5 Exercices

Exercice 5.1. Soit $E = \mathbb{R}^{[0,\,1]}$, l'ensemble des fonctions réelles sur $[0,\,1]$, muni de la topologie de la convergence simple $\mathcal{T}_{cs}$. On note par $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions dans E qui sont nulles partout sauf en un nombre fini de points.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est dense dans E.
2. Montrer que si f est limite d'une suite dans $\mathcal{F}$, alors f est nulle partout sauf peut-être sur un ensemble au plus dénombrable de $[0,\,1]$.
3. En déduire que E n'est pas métrisable.
4. Montrer que toute fonction de $\mathcal{F}$ est limite d'une suite de fonctions continues sur $[0,\,1]$. En déduire que $C([0,\,1], \mathbb{R})$ est dense dans E.
5. Soit g la fonction dans E, qui vaut 1 sur les rationnels et 0 ailleurs. Montrer que g est limite d'une suite de fonctions dans $\mathcal{F}$.
6. Montrer que g n'est pas limite d'une suite dans $C([0,\,1], \mathbb{R})$.

Solution. 1. Soient $f \in E$ et U un ouvert de E contenant f. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et il existe $x_1, \ldots, x_n \in [0,\,1]$ tels que $V(f, \varepsilon, x_1, \ldots, x_n) \subset U$, où $V(f, \varepsilon, x_1, \ldots, x_n) = \big\{g \in \mathbb{R}^{[0,\,1]}\ ;\ |f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon\,,\ \text{pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}\big\}$. Soit $g \in \mathcal{F}$ définie par $g(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $g(x) = 0$ si $x \in [0,\,1] \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors on a $g \in V(f, \varepsilon, x_1, \ldots, x_n)$. Donc $\mathcal{F}$ est bien dense dans E.

2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathcal{F}$ convergeant vers $f \in E$. Pour tout $n \geq 0$, soit A_n une partie finie de $[0,\, 1]$ telle que pour tout $x \in [0,\, 1] \setminus A_n$, on ait $f_n(x) = 0$. Soit $A = \underset{n\geq 0}{\cup} A_n$, alors A est au plus dénombrable et pour tout $x \in [0,\, 1] \setminus A$ et pour tout $n \geq 0$, on a $f_n(x) = 0$. Or pour tout $x \in [0,\, 1]$, on a $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, donc pour tout $x \in [0,\, 1]\setminus A$, on a $f(x) = 0$.
3. Si E était métrisable, alors tout élément de E serait la limite d'une suite dans $\mathcal{F}$. D'après 2, la fonction constante 1 n'est pas limite d'une suite dans $\mathcal{F}$, donc E n'est pas métrisable.
4. Soit $f \in \mathcal{F}$, alors il existe $x_1, \ldots, x_k \in [0,\, 1]$ tels que pour tout $x \in [0,\, 1]\setminus\{x_1, \ldots, x_k\}$, on ait $f(x) = 0$. D'où on a $f = \sum\limits_{i=1}^{k} f(x_i)\chi_i$, où χ_i est la fonction caractéristique au point x_i. Pour avoir le résultat, il suffit donc de montrer que toute fonction caractéristique en un point est la limite d'une suite de fonctions continues sur $[0,\, 1]$. Soit $x \in [0,\, 1]$. Pour tout $n \geq 1$, soit g_n la fonction affine sur $\mathbb{R}$ telle que $g_n(x) = 1$ et pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$, on ait $g_n(t) = 0$. Soit $f_n = {g_n}_{|[0,\, 1]}$, alors f_n est continue sur $[0,\, 1]$ et la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge dans E vers la fonction caractéristique au point x. On en déduit que $C([0,\, 1], \mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{F}$. D'après 1, $\mathcal{F}$ est dense dans E. Par conséquent, $C([0,\, 1], \mathbb{R})$ est dense dans E, voir exercice 1.25.
5. On a $[0,\, 1] \cap \mathbb{Q} = \{x_n \; ; \; n \geq 0\}$. Pour tout $n \geq 0$, soit $h_n \in \mathcal{F}$ définie par $h_n(x_k) = 1$ si $0 \leq k \leq n$ et $h_n(x) = 0$ si $x \in [0,\, 1] \setminus \{x_0, \ldots, x_k\}$. Alors la suite $(h_n)_{n\geq 0}$ converge dans E vers g.
6. La fonction g n'est continue en aucun point de $[0,\, 1]$. Comme $[0,\, 1]$ est un espace de Baire, il résulte du théorème 2.8.2 que g n'est pas limite d'une suite de fonctions continues sur $[0,\, 1]$.

Exercice 5.2. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$.

1. Établir, pour tout $u \geq 0$, l'inégalité $\ln(1+u) \geq \dfrac{u}{1+u}$.
2. En déduire que, quel que soit le réel $t \geq 0$, la suite $(f_n(t))_{n\geq 1}$ est croissante.
3. Démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \left(1 + \tfrac{t}{n}\right)^n dt = e - 1$.

Solution. 1. Pour tout $u \geq 0$, soit $g(u) = \ln(1+u) - \dfrac{u}{1+u}$, alors g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a $g'(u) = \dfrac{1}{1+u} - \dfrac{1}{(1+u)^2} \geq 0$. Donc g est une fonction croissante. Or on a $g(0) = 0$, d'où, pour tout $u \geq 0$, on a $g(u) \geq 0$, donc $\ln(1+u) \geq \dfrac{u}{1+u}$.
2. Soit $t \geq 0$. Pour tout $s \geq 1$, soit $h(s) = s\ln\left(1 + \frac{t}{s}\right)$, h est dérivable sur $[1, +\infty[$ et on a $h'(s) = \ln\left(1 + \frac{t}{s}\right) - \dfrac{\frac{t}{s}}{1 + \frac{t}{s}} \geq 0$. Donc h est croissante. Par conséquent, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq m$, on a $n\ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) \geq m\ln\left(1 + \frac{t}{m}\right)$, d'où $\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m$. Donc la suite $(f_n(t))_{n\geq 1}$ est croissante.
3. Comme la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction $f : t \longmapsto e^t$ sur l'intervalle $[0,\, 1]$, on déduit de 2 et du théorème de Dini que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge

également uniformément vers f sur l'intervalle $[0,\,1]$. D'après la proposition 5.2.5, on a $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \left(1+\tfrac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^1 e^t dt = e-1.$

Exercice 5.3. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,\,+\infty[$ par $f_n(t) = \dfrac{ne^t + te^{-t}}{n+t}$. Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, la suite $(f_n(t))_{n\geq 1}$ est croissante.
En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 (t^2+1)f_n(t)\,dt \;=\; 2e-3.$

Solution. 1. Soit $t \geq 0$. On a $f_{n+1}(t) - f_n(t) = \dfrac{t(e^t - e^{-t})}{(n+t)(n+1+t)} \geq 0$, donc la suite $(f_n(t))_{n\geq 1}$ est croissante.
Pour tout $t \geq 0$, soit $g_n(t) = (t^2+1)f_n(t)$. Alors la suite $(g_n(t))_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,\,+\infty[$ vers la fonction $g : t \longmapsto (t^2+1)e^t$. D'après le théorème de Dini, la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers g sur l'intervalle $[0,\,1]$. D'après la proposition 5.2.5, on a $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 (t^2+1)f_n(t)dt = \int_0^1 (t^2+1)e^t\,dt$. On fait une intégration par partie, on obtient que $\displaystyle\int_0^1 (t^2+1)e^t\,dt \;=\; 2e-3.$

Exercice 5.4. Soient X un espace topologique et $(Y,\,d_Y)$, $(Z,\,d_Z)$ des espaces métriques.

1. Soit $g : (Y,\,d_Y) \longrightarrow (Z,\,d_Z)$ une application uniformément continue. Montrer que l'application suivante est continue.
$$\begin{array}{rccc} T(g): & (C(X,Y),\,\mathcal{T}_{cu}) & \longrightarrow & (C(X,Z),\,\mathcal{T}_{cu}) \\ & f & \longmapsto & g\circ f \end{array}$$

2. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Montrer que l'application suivante est continue.
$$\begin{array}{rccc} T(f): & (C(Y,Z),\,\mathcal{T}_{cu}) & \longrightarrow & (C(X,Z),\,\mathcal{T}_{cu}) \\ & g & \longmapsto & g\circ f \end{array}$$

Solution. 1. Puisque toute distance est uniformément équivalente à une distance bornée, donc on peut supposer que les distances d_Y et d_Z sont bornées et que la distance induisant la topologie de la convergence uniforme $\mathcal{T}_{cu}$ est D_∞. Puisque g est uniformément continue, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $y, y' \in Y$ vérifiant $d_Y(y,y') \leq \eta$, on ait $d_Z(g(y), g(y')) \leq \varepsilon$. Soient $f, h \in C(X,Y)$ tels que $D_\infty(f,h) \leq \eta$, alors pour tout $x \in X$, on a $d_Y(f(x), h(x)) \leq \eta$, d'où pour tout $x \in X$, on a $d_Z(g(f(x)), g(h(x)) \leq \varepsilon$. Donc on a $D_\infty(g\circ f, g\circ h) \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $f, h \in C(X,Y)$ vérifiant $D_\infty(f,h) \leq \eta$, on ait $D_\infty(g\circ f, g\circ h) \leq \varepsilon$. Par conséquent, l'application $T(g)$ est continue.
2. Soient $g, h \in C(Y,Z)$, on a :
$$D_\infty(g\circ f, h\circ f) = \sup_{x\in X} d_Z(g(f(x)), h(f(x))) \leq \sup_{y\in Y} d_Z(g(y), h(y)) = D_\infty(g,h)\,.$$

Donc $T(f)$ est continue.

Remarque 5.5.1. Soient $X = Y = Z = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit $g(t) = t^2$, alors g est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais n'est pas uniformément continue. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} T(g): & (C(\mathbb{R},\mathbb{R}),\, \mathcal{T}_{cu}) & \longrightarrow & (C(\mathbb{R},\mathbb{R}),\, \mathcal{T}_{cu}) \\ & f & \longmapsto & g\circ f \end{array}$$

n'est pas continue. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 1$, soient $f(t) = t$ et $f_n(t) = t + \frac{1}{n}$. Une distance sur $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ induisant la topologie $\mathcal{T}_{cu}$ est donnée par :

$$D(f,h) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \min\big(|f(t) - h(t)|, 1\big)\,.$$

On a $D(f_n, f) = \frac{1}{n}$ et $\min\big(|g\circ f_n(n) - g\circ f(n)|, 1\big) = \min\big(2 + \frac{1}{n^2}, 1\big) = 1$, donc on a $D(g\circ f_n, g\circ f) = 1$. Par conséquent, l'application $T(g)$ n'est pas continue.

Exercice 5.5. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions réelles continues sur l'intervalle $[a,\, b]$ et dérivables sur $]a,\, b[$ telle que pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in]a,\, b[$, on ait $|f_n'(x)| \leq K$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une fonction réelle f sur $[a,\, b]$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[a,\, b]$.

2. Soit $A > 0$. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ définie sur $[-A,\, A]$ par $f_n(x) = n\big(e^{\frac{x}{x+n}} - 1\big)$.

Solution. 1. D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x, y \in [a,\, b]$ et pour tout $n \geq 0$, on a $|f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x-y|$, donc la famille $\big\{f_n\ ;\ n \geq 0\big\}$ est équicontinue. Il résulte du théorème 5.3.1 que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[a,\, b]$.
2. La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $[-A,\, A]$ vers f, où $f(x) = x$ pour tout $x \in [-A,\, A]$. Pour tout $n \geq 0$, f_n est continue sur $[-A,\, A]$ et dérivable sur $]-A,\, A[$, et pour tout $x \in]-A,\, A[$, on a $f_n'(x) = \dfrac{n^2}{(x+n)^2} e^{\frac{x}{x+n}}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > A$. Alors pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in]-A,\, A[$, on a $|f_n'(x)| \leq \dfrac{e}{\big(1 - \frac{A}{n}\big)^2}$. Or on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\big(1 - \frac{A}{n}\big)^2} = 1$, donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq N$ et pour tout $n \geq p$, on ait $\dfrac{1}{\big(1 - \frac{A}{n}\big)^2} \leq 2$. Il résulte de 1 que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[-A,\, A]$.

Définition 5.5.1. Soient $(X,\, d_1)$ et $(Y,\, d)$ des espaces métriques et $\mathcal{H}$ une partie de Y^X. On dit que $\mathcal{H}$ est **uniformément équicontinue** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in X$ vérifiant $d_1(x,y) < \eta$, on ait $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$, pour tout $f \in \mathcal{H}$.

Exercice 5.6. Soient $(X,\, d_1)$ un espace métrique compact, $(Y,\, d)$ un espace métrique et $\mathcal{H}$ une partie équicontinue de $C(X,\, Y)$. Montrer que $\mathcal{H}$ est uniformément équicontinue.
Solution. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathcal{H}$ est une partie équicontinue, alors pour tout $x \in X$, il existe $\eta_x > 0$ tel que pour tout $z \in B(x, \eta_x)$, on ait $d(f(x), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2}$, pour tout $f \in \mathcal{H}$. D'après la proposition 3.1.5 et le lemme 3.1.1, il existe $r > 0$ tel que toute boule

ouverte de rayon r dans X soit contenue dans au moins $B(x, \eta_x)$. Soient $x, z \in X$ tels que $d_1(x, z) < r$. Alors il existe $a \in X$ tel que $x, z \in B(a, \eta_a)$. D'où pour tout $f \in \mathcal{H}$, on a $d(f(a), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(f(a), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2}$, donc $d(f(x), f(z)) < \varepsilon$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x, z \in X$ vérifiant $d_1(x, z) < r$, on ait $d(f(x), f(z)) < \varepsilon$, pour tout $f \in \mathcal{H}$. Autrement dit, $\mathcal{H}$ est uniformément équicontinue.

Exercice 5.7. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0\,, \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1\,, \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1\,. \end{cases}$$

Considérons la suite définie par $f_n(x) = f(nx - n^2)$. Montrer que la famille $\{f_n \ ; \ n \geq 0\}$ est équicontinue mais non uniformément équicontinue dans $\mathbb{R}$, bien que formée de fonctions uniformément continues.

Solution. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x < N$. Alors pour tout $n \geq N$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $|x - y| < N - x$, on a on a $f_n(x) - f_n(y) = 0$. Comme la famille $\{f_n \ ; \ 0 \leq n \leq N\}$ est équicontinue en x, car finie, alors la famille $\{f_n \ ; \ n \geq 0\}$ est équicontinue en x. Par conséquent, la famille $\{f_n \ ; \ n \geq 0\}$ est équicontinue.

La famille $\{f_n \ ; \ n \geq 0\}$ est uniformément équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x - y| < \eta$, on ait $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$, pour tout $n \geq 0$. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$, alors pour tout $\eta > 0$, il existe $n \geq 1$ tel que $\frac{1}{n} < \eta$ et on a $f_n(n) - f_n\big(n + \frac{1}{n}\big) = 1 > \varepsilon$. Donc la famille n'est pas uniformément équicontinue.

Soit $n \geq 1$. La fonction f_n est uniformément continue sur les intervalles $]-\infty, n]$, $\big[n - 1,\, n + \frac{1}{n} + 1\big]$ et $\big[n + \frac{1}{n}, +\infty\big[$, donc f_n est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.8. Soient X un espace topologique et (Y, d), (Z, d') des espaces métriques. Soient $A \subset C(X, Y)$ et $B \subset C(Y, Z)$. Montrer que si A est équicontinue et B est uniformément équicontinue, alors $B \circ A = \big\{g \circ f \ ; \ f \in A,\, g \in B\big\}$ est équicontinue. Ce résultat reste-t-il vrai si on suppose seulement que B est équicontinue.

Solution. Soient $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$. Comme B est uniformément équicontinue, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $y, y' \in Y$ vérifiant $d(y, y') < \eta$, on ait $d'(g(y), g(y')) < \varepsilon$, pour tout $g \in B$. Comme A est équicontinue en x_0, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V_{x_0}$ et pour tout $f \in A$, on ait $d(f(x), f(x_0)) < \eta$. Par conséquent, pour tout $x \in V_{x_0}$ et pour tous $f \in A$ et $g \in B$, on a $d'(g(f(x)), g(f(x_0))) < \varepsilon$. Donc $B \circ A$ est équicontinue en x_0. Par conséquent, $B \circ A$ est équicontinue.

Ce résultat n'est plus vrai si on suppose seulement que B est équicontinue. En effet, soient $X = Y = Z = \mathbb{R}$, $B = \{g\}$, où $g(x) = x^2$, et $A = \big\{f_a \ ; \ a \in \mathbb{R}\big\}$, où $f_a(x) = a + x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors A est uniformément équicontinue, B est équicontinue, mais $B \circ A$ n'est pas équicontinue en 0.

Exercice 5.9. Soient X, Y des espaces topologiques, (Z, d) un espace métrique et $f : X \times Y \longrightarrow Z$ une application. Pour tout $x \in X$, on note $g_x : Y \longrightarrow Z$ l'application $y \longmapsto f(x, y)$ et pour tout $y \in Y$, on note $h_y : X \longrightarrow Z$ l'application $x \longmapsto f(x, y)$. On suppose que pour tout $x \in X$, g_x est continue et que la partie $\mathcal{H} = \big\{h_y \ ; \ y \in Y\big\} \subset Z^X$ est équicontinue. Montrer que f est une application continue.

Solution. Soient $\varepsilon > 0$ et $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Comme $\mathcal{H}$ est équicontinue en x_0, alors il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V_{x_0}$ et pour tout $y \in Y$, on ait $d(h_y(x), h_y(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $d(f(x,y), f(x_0,y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Puisque g_{x_0} est continue en y_0, alors il existe un voisinage W_{y_0} de y_0 dans Y tel que pour tout $y \in W_{y_0}$, on ait $d(g_{x_0}(y), g_{x_0}(y_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $d(f(x_0,y), f(x_0,y_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, pour tout $(x,y) \in V_{x_0} \times W_{y_0}$, on a :

$$d(f(x,y), f(x_0,y_0)) \leq d(f(x,y), f(x_0,y)) + d(f(x_0,y), f(x_0,y_0)) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Donc f est bien continue en (x_0, y_0).

Exercice 5.10. Soit L l'ensemble des fonctions lipschitzienne de rapport 1 de $[0,\,1]$ dans $[0,\,1]$. Autrement dit, L est l'ensemble des fonctions f de $[0,\,1]$ dans $[0,\,1]$ telles que pour tous $s,t \in [0,\,1]$, on ait $|f(t)-f(s)| \leq |t-s|$. On munit L de la distance de la convergence uniforme D_∞. Montrer que $(L,\, D_\infty)$ est compact.

Solution. Il est clair que L est une partie équicontinue et fermée de $C([0,\,1],\,[0,\,1])$ muni de la distance D_∞. En plus pour tout $s \in [0,\,1]$, $\{f(s)\ ;\ f \in L\}$ est une partie compacte de $[0,\,1]$, il résulte du théorème d'Ascoli que $(L,\, D_\infty)$ est compact.

Exercice 5.11. Considérons la suite de fonctions continues définies par :

$$\begin{array}{rccc} f_n : & I = [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin\sqrt{x + 4(n\pi)^2} \end{array}$$

1. Montrer que la famille $\{f_n\ ;\ n \geq 1\}$ est équicontinue sur I et que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers 0.
2. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ n'admet aucune sous-suite convergente pour la topologie de la convergence uniforme dans $C(I,\,\mathbb{R})$.

Solution. 1. Pour tout $n \geq 1$, f_n est dérivable sur $[0,\,+\infty[$ et on a :

$$f_n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + 4(n\pi)^2}} \cos\sqrt{x + 4(n\pi)^2}\,.$$

D'où $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{4n\pi} \leq \frac{1}{4\pi}$. Il résulte du théorème des accroissements finis que la famille $\{f_n\ ;\ n \geq 1\}$ est équicontinue sur I, et que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \geq 1$, on a $|f_n(x) - f_n(0)| \leq \frac{1}{4n\pi}|x|$, donc la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers 0.
2. Soit $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ une sous-suite de $(f_n)_{n\geq 1}$. Notons que $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ converge simplement vers 0. Dire que $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ converge uniformément sur I revient à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$ et pour tout $x \geq 0$, on ait $|f_{n_k}(x)| < \varepsilon$. Or en prenant $x_k = \left(4(n_k\pi) + \frac{\pi}{2}\right)^2 - 4(n_k\pi)^2$, alors $x_k \geq 0$ et on a $f_{n_k}(x_k) = 1$. Donc la sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ ne converge pas uniformément sur I.

Exercice 5.12. Soient $K : [a,\,b] \times [a,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et B une partie bornée de $E = (C([a,\,b],\,\mathbb{R}),\, D_\infty)$. Pour tout $f \in E$ et pour tout $s \in [a,\,b]$, on pose :

$$K(f)(s) = \int_a^b K(s,t)f(t)dt\,.$$

1. Montrer que la partie $\mathcal{H} = \{K(f)\ ;\ f \in B\}$ est uniformément équicontinue.

2. Montrer que $\mathcal{H}$ est une partie relativement compacte de E.

Solution. 1. Soit $M > 0$ tel que $|f(t)| \leq M$ pour tout $f \in B$ et pour tout $t \in [a, b]$. Pour tous $s, s' \in [a, b]$ et pour tout $f \in B$, on a :
$K(f)(s) - K(f)(s') = \displaystyle\int_a^b \big(K(s,t) - K(s',t)\big) f(t)\, dt$, d'où :

$$\begin{aligned} \big|K(f)(s) - K(f)(s')\big| &\leq \int_a^b \big|K(s,t) - K(s',t)\big|\, |f(t)|\, dt \\ &\leq M \int_a^b \big|K(s,t) - K(s',t)\big|\, dt\,. \end{aligned}$$

Comme K est continue sur le compact $[a, b] \times [a, b]$, alors K est uniformément continue. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $s, s', t, t' \in [a, b]$ vérifiant $|s - s'| < \eta$ et $|t - t'| < \eta$, on ait $|K(s,t) - K(s',t')| < \dfrac{\varepsilon}{M(b-a)}$. Par conséquent, pour tous $s, s' \in [a, b]$ vérifiant $|s - s'| < \eta$, on a $|K(f)(s) - K(f)(s')| < \varepsilon$, pour tout $f \in B$. Donc $\mathcal{H}$ est uniformément équicontinue.
2. Comme K est continue et $[a, b] \times [a, b]$ est compact, il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $(s,t) \in [a, b] \times [a, b]$, on ait $|K(s,t)| \leq \lambda$. Soit $s \in [a, b]$. Alors pour tout $f \in B$, on a $|K(f)(s)| \leq M\lambda(b-a)$, donc $\big\{K(f)(s)\ ;\ f \in B\big\}$ est une partie relativement compacte dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème d'Ascoli, $\mathcal{H}$ est une partie relativement compacte de E.

Exercice 5.13. Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions polynômiales qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est une fonction polynômiale.
Solution. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Alors pour tous $n, m \geq N$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|P_n(x) - P_m(x)| < 2\varepsilon$. D'où pour tous $n, m \geq N$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$\big|\big(P_n(x) - P_n(0)\big) - \big(P_m(x) - P_m(0)\big)\big| < 4\varepsilon$. On a :

$$P_n(x) - P_n(0) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k \ \text{ et } \ P_m(x) - P_m(0) = b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_kx^k\,.$$

S'il existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $a_j \neq b_j$, alors on a :
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \big|\big(P_n(x) - P_n(0)\big) - \big(P_m(x) - P_m(0)\big)\big| = +\infty$, ce qui est impossible. Donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et des constantes $a_1, \ldots a_k \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $P_n(x) = P_n(0) + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k$. Or on a $f(x) - f(0) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n(x) - P_n(0)$, d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f(0) + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k$. Donc f est une fonction polynômiale.

Exercice 5.14. Soient X et Y des espaces topologiques compacts et notons $\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel de $C(X \times Y)$ engendré par les applications $(x, y) \longmapsto f(x)g(y)$, pour $f \in C(X)$ et $g \in C(Y)$. On munit $C(X \times Y)$ de la topologie de la convergence uniforme.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est dense dans $C(X \times Y)$. Autrement dit, pour tout $h \in C(X \times Y)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_1, \ldots, f_n \in C(X)$ et $g_1, \ldots, g_n \in C(Y)$ tels que pour tout $(x, y) \in X \times Y$, on ait $\Big|h(x,y) - \displaystyle\sum_{i=1}^n f_i(x)g_i(y)\Big| < \varepsilon$.

2. Soient $X = Y = I = [0,\, 1]$. Pour tout $x \in I$ on définit $f_x \in C(I,\, \mathbb{R})$ par $f_x(y) = |x - y|$. Montrer, en étudiant la dérivabilité, que la famille $(f_x)_{x \in I}$ est libre dans $C(I,\, \mathbb{R})$, *i.e.* toute sous-famille finie est libre.

3. Montrer que la fonction $h\ : (x, y) \longmapsto |x - y|$ de $I \times I$ n'appartient pas à $\mathcal{A}$. En déduire que $\mathcal{A}$ n'est pas fermé dans $C(I \times I,\, \mathbb{R})$.

Solution. 1. Il est clair que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $C(X \times Y)$ contenant les applications constantes. En plus, d'après le théorème 3.6.1, $\mathcal{A}$ sépare les points de $X \times Y$. Il résulte alors du théorème de Stone-Weierstrass que $\mathcal{A}$ est dense dans $C(X \times Y)$.
2. Soient $x_1, \ldots, x_n$, n éléments distincts de $]0,\, 1[$ et $\lambda_i, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha f_0 + \beta f_1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{x_i} = 0$. S'il existe $\lambda_{i_0} \neq 0$, alors on a $f_{x_{i_0}} = -\alpha f_0 - \beta f_1 - \displaystyle\sum_{i=1, i \neq i_0}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} f_{x_i}$. Or la fonction $f_{x_{i_0}}$ n'est pas dérivable en x_{i_0}, par contre $-\alpha f_0 - \beta f_1 - \displaystyle\sum_{i=1, i \neq i_0}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} f_{x_i}$ est dérivable en x_{i_0}, d'où la contradiction. Par conséquent, pour tout i, on a $\lambda_i = 0$. D'où $\alpha f_0 + \beta f_1 = 0$. En prenant $y = 0$ et puis $y = 1$, on obtient $\beta = \alpha = 0$. Donc la famille $(f_x)_{x \in I}$ est libre.
3. Si $h \in \mathcal{A}$, alors il existe $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n \in C(I,\, \mathbb{R})$ tels que pour tout $(x, y) \in I \times I$, on ait $|x - y| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y)$, d'où $f_x(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y)$, donc on a $f_x \in \mathrm{Vect}\{g_1, \ldots, g_n\}$, l'espace vectoriel engendré par les g_i. Or la famille $(f_x)_{x \in I}$ est libre et infinie, d'où la contradiction. Donc $h \notin \mathcal{A}$. Par conséquent, $\mathcal{A}$ n'est pas fermé dans $C(I \times I,\, \mathbb{R})$.

Exercice 5.15. Soit f une fonction continue de $[a,\, b]$ dans $\mathbb{R}$ et k un entier naturel impair.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynômiale P telle que pour tout $x \in [a,\, b]$, on ait $\left|f(x) - P\big(x^k\big)\right| < \varepsilon$.

2. Montrer que si k est pair, le résultat ci-dessus n'est plus vrai.

Solution. 1. Pour tout $x \in [a,\, b]$, soit $\varphi(x) = x^k$, alors φ est une fonction continue sur $[a,\, b]$, d'où $\varphi([a,\, b]) = [c,\, d]$. Comme k est impair, alors φ est injective, donc φ^{-1} est continue de $[c,\, d]$ dans $[a,\, b]$. Pour tout $y \in [c,\, d]$, soit $g(y) = f\big(\varphi^{-1}(y)\big)$, alors g est une fonction continue sur $[c,\, d]$. D'après le théorème de Stone–Weierstrass, il existe une fonction polynômiale P telle que pour tout $y \in [c,\, d]$, on ait $|g(y) - P(y)| < \varepsilon$. Soit $x \in [a,\, b]$, alors on a $x^k \in [c,\, d]$, d'où $\left|g\big(x^k\big) - P\big(x^k\big)\right| < \varepsilon$. Or on a $g\big(x^k\big) = f(x)$, donc $\left|f(x) - P\big(x^k\big)\right| < \varepsilon$.
2. Supposons k pair. Soient $f(x) = x$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $[a,\, b] = [-1,\, 1]$. Comme k est pair, pour toute fonction polynômiale P et pour tout $x \in [-1,\, 1]$, on a $P\big(x^k\big) = P\big((-x)^k\big)$, d'où pour tout $x \in [-1,\, 1]$, on a $|2x| = \left|x - P\big(x^k\big) - \big(-x - P\big((-x)^k\big)\big)\right| \leq \left|x - P\big(x^k\big)\right| + \left|-x - P\big(x^k\big)\right|$. S'il existe une fonction polynômiale P telle que pour tout $x \in [-1,\, 1]$, on ait $\left|f(x) - P\big(x^k\big)\right| < \frac{1}{2}$, alors pour tout $x \in [-1,\, 1]$, on a $|2x| < 2$, ce qui est impossible.

Pour plus d'exercices, voir le supplément associé à ce livre.

Chapitre 6

ESPACES NORMÉS

Dans ce chapitre, le corps des scalaires $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$. Les espaces vectoriels seront des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Lorsque le corps des scalaires n'est pas précisé, il est sous-entendu que les définitions et résultats sont valables dans les deux cas. Lorsque plusieurs espaces vectoriels interviennent dans le même énoncé, il est sous-entendu, à moins que le contraire ne soit spécifié, qu'ils ont le même corps des scalaires. Les espaces normés sont extrêmement utilisés dans de nombreuses branches des mathématiques. Les espaces de Banach, *i.e.* les espaces normés complets se présentent naturellement dans l'étude des espaces fonctionnels liés à la théorie de l'intégration « espaces L^p ». En plus, dans le cadre des espaces de Banach, on peut étendre le calcul différentiel à n variables. On étudie dans ce chapitre les propriétés élémentaires des espaces normés. On poursuivra leur étude dans le chapitre 7.

6.1 Espaces normés

Définition 6.1.1. Une **norme** sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application :

$$\begin{array}{rccc} \|\ \| : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

possédant les propriétés suivantes :

(**N1**) pour tout $x \in E$ non nul, on a $\|x\| \neq 0$;

(**N2**) pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$;

(**N3**) pour tout $x, y \in E$, on a $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**inégalité de convexité**).

L'espace E, muni de la norme $\|\ \|$, est dit **espace normé** ou **espace vectoriel normé** (ou $\mathbb{K}$-**espace vectoriel normé**, si on veut préciser le corps $\mathbb{K}$). On note souvent un tel espace $(E, \|\ \|)$. On déduit de la propriété (**N2**) que l'on a $\|0\| = 0$.

Proposition 6.1.1. *Soit* $(E, \|\ \|)$ *un espace normé.*

1. *La propriété* (**N2**) *ci-dessus est équivalente à la forme affaiblie suivante :*
   (**N2′**) *pour tout* $x \in E$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{K}$, *on a* $\|\lambda x\| \leq |\lambda|\, \|x\|$.

2. *On peut remplacer la propriété* (**N3**) *ci-dessus par la propriété suivante :*
   (**N3′**) *pour tout* $x, y \in E$ *et tout* $t \in [0,\, 1]$, *on a :*
$$\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\|\,.$$

3. *Pour tout* $x, y \in E$, *on a l'inégalité* $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|$.

4. *L'inégalité* (**N3**) *se généralise à* n *points. Pour tout* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$, *on a :*
$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i\Big\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|.$$

Démonstration. 1. Il est clair que (**N2**) $\Longrightarrow$ (**N2′**). Réciproquement, supposons (**N2′**) vérifiée. Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\lambda = 0$, alors $0 \leq \|\lambda x\| \leq |\lambda|\, \|x\| = 0$. Si $\lambda \neq 0$, alors on a $|\lambda|\|x\| = |\lambda|\, \|\lambda^{-1}(\lambda x)\| \leq |\lambda|\, |\lambda^{-1}|\, \|\lambda x\| = \|\lambda x\| \leq |\lambda|\, \|x\|$. On en déduit (**N2**).
2. Supposons (**N3**) vérifiée, alors pour tout $x, y \in E$ et tout $t \in [0,\, 1]$, on a :
$$\|tx + (1-t)y\| \leq \|tx\| + \|(1-t)y\| = t\|x\| + (1-t)\|y\|.$$
Réciproquement, supposons (**N3′**) vérifiée. Soient $x, y \in E$, en prenant $t = \frac{1}{2}$, on obtient :
$$\|x + y\| = \Big\|\tfrac{1}{2}(2x) + \tfrac{1}{2}(2y)\Big\| \leq \tfrac{1}{2}\|2x\| + \tfrac{1}{2}\|2y\| = \tfrac{1}{2}2\|x\| + \tfrac{1}{2}2\|y\| = \|x\| + \|y\|\,.$$
3. On a $\|x\| = \|y + (x-y)\| \leq \|y\| + \|x - y\|$, d'où $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. De même, on a $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$. Par conséquent, on a $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|$.
La dernière propriété est triviale. On vérifie celle-ci par récurrence sur n. ■

Distance associée à une norme. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace normé. Pour tout $x, y \in E$, on pose $d(x, y) = \|x - y\|$. On vérifie facilement que d est une distance sur E, appelée **distance associée à la norme**. La topologie correspondante sera appelée **topologie normique**. Sauf mention du contraire, on munit tous les espaces normés de la topologie normique. La distance d associée à la norme possède les propriétés suivantes :

(a) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ quels que soient $x, y, z \in E$.

(b) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Réciproquement, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une distance d possédant les deux propriétés (a) et (b) ci-dessus, alors d est définie à partir d'une norme ; il suffit de poser $\|x\| = d(0, x)$, pour tout $x \in E$.

Proposition 6.1.2. *Soit* $(E, \|\ \|)$ *un espace normé. Alors on a :*

1. *L'application*
$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$
   est lipschitzienne, donc uniformément continue.

2. *L'application suivante est continue.*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

3. *L'application suivante est lipschitzienne, donc uniformément continue.*

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

4. *Les translations, et les homothéties de rapport non nul sont des homéomorphismes de E. Autrement dit, pour tout $a \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, non nul, les applications suivantes sont des homéomorphismes de E.*

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x+a \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

Démonstration. 1. On a :

$$\|x+y-(x'+y')\| = \|x-x'+y-y'\| \leq \|x-x'\| + \|y-y'\| = D_1\big((x,y),(x',y')\big)\,.$$

Comme la topologie produit sur $E \times E$ est définie par la distance D_1, voir paragraphe 2.4, on en déduit que l'application $(x,y) \longmapsto x+y$ est lipschitzienne, donc elle est uniformément continue.
2. Rappelons que la topologie produit sur $\mathbb{K}\times E$ est aussi définie par la distance D_∞, où $D_\infty\big((\lambda,x),(\lambda_0,x_0)\big) = \max\big\{|\lambda-\lambda_0|, \|x-x_0\|\big\}$. Soient $(\lambda_0,x_0) \in \mathbb{K}\times E$ et $\varepsilon > 0$, alors $\eta = \dfrac{\varepsilon}{\|x_0\|+|\lambda_0|+\varepsilon+1} > 0$. Soit $(\lambda,x) \in \mathbb{K}\times E$ tel que $D_\infty\big((\lambda,x),(\lambda_0,x_0)\big) < \eta$, alors on a $|\lambda-\lambda_0| < \eta$ et $\|x-x_0\| < \eta$. D'où on a :

$$\begin{aligned} \|\lambda x - \lambda_0 x_0\| &= \|\lambda x - \lambda x_0 + \lambda x_0 - \lambda_0 x_0\| \\ &\leq |\lambda|\,\|x-x_0\| + |\lambda-\lambda_0|\,\|x_0\| \\ &\leq \eta\big(|\lambda| + \|x_0\|\big) \\ &< \eta\big(|\lambda_0| + \eta + \|x_0\|\big) \\ &< \eta\big(|\lambda_0| + 1 + \|x_0\|\big) \, < \, \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'application $(\lambda,x) \longmapsto \lambda x$ est continue en (λ_0,x_0), donc elle est continue.
3. Ceci résulte de la proposition précédente.
4. Cette propriété est triviale. ■

Corollaire 6.1.1. *Soient $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites convergentes dans E et $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente dans $\mathbb{K}$. Alors les suites $(x_n+y_n)_{n\geq 0}$, $(\lambda_n x_n)_{n\geq 0}$ et $\big(\|x_n\|\big)_{n\geq 0}$ sont convergentes dans leurs espaces respectives, et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n+y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n + \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n x_n = \big(\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n\big)\big(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\big)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n\| = \big\|\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\big\|$.*

Définition 6.1.2. Deux normes $\| \ \|$ et $\| \ \|'$ sur un espace vectoriel E sont dites **équivalentes** s'il existe $\alpha, \beta \in]0, +\infty[$ tels que pour tout $x \in E$, on ait $\alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|$.

On va voir, exercice 6.6, que deux normes sur E sont équivalentes si et seulement si elles définissent des distances équivalentes, ou encore si et seulement si elles définissent la même topologie sur E.

Remarque 6.1.1. Soient E un espace vectoriel et $\| \ \|$, $\| \ \|'$ deux normes sur E. S'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans E telle que la suite $(\|x_n\|)_{n\geq 0}$ soit bornée et la suite $(\|x_n\|')_{n\geq 0}$ ne soit pas bornée, alors les deux normes $\| \ \|$ et $\| \ \|'$ ne sont pas équivalentes. On va beaucoup utiliser cette remarque dans les exercices.

Définition 6.1.3. Un espace de **Banach** est un espace normé $(E, \| \ \|)$ qui est complet pour la distance associée à la norme.

Remarque 6.1.2. Soient E un espace vectoriel et $\| \ \|$, $\| \ \|'$ deux normes équivalentes sur E. Alors $(E, \| \ \|)$ est un espace de Banach si et seulement si $(E, \| \ \|')$ est un espace de Banach.

Exemple 6.1.1.

1. La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$, le module est une norme sur $\mathbb{C}$.
2. Les normes sur $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel sont de la forme : a$|z|$, avec $a > 0$. En effet, soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{C}$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $z = z.1$ d'où $\|z\| = |z| \, \|1\|$. On pose alors $a = \|1\|$.
3. Sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, on peut définir les trois normes suivantes :
   pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :
   $$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad , \quad \|x\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$
   La norme $\| \ \|_2$ est appelée la **norme euclidienne** sur $\mathbb{K}^n$, voir proposition 2.1.2.
4. Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé et F un sous-espace vectoriel de F. La restriction de la norme $\| \ \|$ sur F est une norme, appelée **norme induite**.
5. Soient X un ensemble non vide et $B(X, \mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications bornées définies sur X et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour tout $f \in B(X, \mathbb{K})$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Alors $\| \ \|_\infty$ est une norme sur $B(X, \mathbb{K})$. Notons que cette norme est associée à la distance d_∞ ; définie par $d_\infty(f, g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$, voir proposition 2.6.8.
6. Soient X un espace compact et $C(X)$ l'espace vectoriel des applications continues de X dans $\mathbb{K}$, on a $C(X) \subset B(X, \mathbb{K})$. Donc $(C(X), \| \ \|_\infty)$ est un espace normé.
7. Soient X un espace localement compact et $C_0(X)$ l'espace vectoriel des applications de X dans $\mathbb{K}$ continues et tendant vers 0 à l'infini, on a $C_0(X) \subset B(X, \mathbb{K})$. Donc $(C_0(X), \| \ \|_\infty)$ est un espace normé.

8. Sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $C([0,\,1])$ des applications continues de $[0,\,1]$ dans $\mathbb{K}$, on a la norme suivante : pour tout $f \in C([0,\,1])$, $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt$.

Les exemples ci-dessus sont des espaces de Banach sauf l'espace $C([0,\,1])$ muni de la norme $\|\ \|_1$, voir exercice 2.32. On verra d'autres exemples d'espaces normés dans le paragraphe 6.2.

Remarque 6.1.3. Sur un espace vectoriel admettant plusieurs normes, le choix d'une norme donnée dépend de ce que l'on veut étudier exactement. Par exemple, sur $E = C^1([0,\,1],\,\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe C^1 définies sur $[0,\,1]$, on a plusieurs normes.

- Si on désire exprimer qu'une fonction $f \in E$ est voisine de 0 lorsqu'elle est petite pour tout x, on choisira la norme $\|f\| = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$.
- Si par contre on veut seulement exprimer qu'une fonction $f \in E$ est petite en moyenne, on choisira la norme $\|f\| = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$.
- Si on souhaite exprimer qu'une fonction $f \in E$, non seulement est petite partout, mais aussi n'oscille pas trop, on choisira la norme $\|f\| = |f(0)| + \sup\limits_{0\leq x\leq 1} |f'(x)|$.

Notations. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B deux sous-ensembles de E, $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit :

$$A + B = \{a + b\,;\ a \in A\,, b \in B\} \quad , \quad x + A = \{x\} + A = \{x + a\,;\ a \in A\}$$

$$\lambda A = \{\lambda a\,;\ a \in A\} \quad , \quad -A = (-1)A = \{-a\,;\ a \in A\}\,.$$

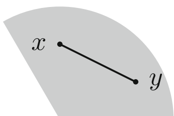
Notez que avec ces conventions, il est possible que $2A \neq A + A$.

Définition 6.1.4. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E.

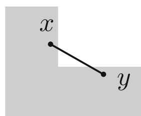
1. Soient $x, y \in E$. On appelle **segment** de E d'extrémités x et y l'ensemble :

$$[x,\,y] = \{(1-t)x + ty\ ;\ 0 \leq t \leq 1\}.$$

2. On dit que A est **convexe** si pour tout $x, y \in A$, le segment de E d'extrémités x et y est contenu dans A. Autrement dit, A est convexe si pour tout $t \in [0,\,1]$, on a $tA + (1-t)A \subset A$.



ensemble convexe



ensemble non convexe

Dans un espace normé, tout ensemble convexe est connexe par arcs, mais la réciproque est en général fausse. En effet, soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. Si $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ xy \geq 0\}$, alors A est connexe par arcs et non convexe.

Exemple 6.1.2. 1. Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors pour tout $a \in E$, $a + F$ est un sous-ensemble convexe de E.

2. Les sous-ensembles convexes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Proposition 6.1.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1. *Si A est un sous-ensemble convexe de E, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute suite finie $x_1, \ldots, x_n$ d'éléments de A et pour toute suite finie $t_1 \geq 0, \ldots, t_n \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, on a $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in A$.*

2. *Si A est un sous-ensemble convexe de E, alors pour tout $n \geq 1$, on a $nA = \underbrace{A + \cdots + A}_{n \text{ fois}}$.*

3. *Si A est un sous-ensemble convexe de E tel que $0 \in A$, alors on a $tA \subset A$ pour tout $0 \leq t \leq 1$.*

4. *Si A et B sont des sous-ensembles convexes de E et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors λA et $A+B$ sont des ensembles convexes.*

5. *Une intersection de sous-ensembles convexes de E est convexe.*

6. *Soient F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une* ***application affine****. Autrement dit, il existe $b \in F$ et $g : E \longrightarrow F$ une application linéaire tels que $f = g+b$. Alors l'image par f (resp. l'image réciproque) d'un sous-ensemble convexe de E (resp. F) est un sous-ensemble convexe de F (resp. E).*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 6 du supplément.

Proposition 6.1.4. *Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé. Alors on a :*

1. *Pour tout $a \in E$ et pour tout $r > 0$, les boules $B(a, r)$ et $B'(a, r)$ sont convexes.*

2. *Tout ouvert de $(E, \| \ \|)$ est localement connexe par arcs.*

Démonstration. 1. Soient $x, y \in E$ et $t \in [0, 1]$, on a :

$$a - (tx + (1-t)y) = ta + (1-t)a - (tx + (1-t)y) = t(a-x) + (1-t)(a-y)\,.$$

D'où on a $\|a - (tx + (1-t)y)\| \leq t\,\|a - x\| + (1-t)\,\|a - y\|$. Si $x, y \in B(a, r)$, alors on a $t\,\|a-x\|+(1-t)\,\|a-y\| < tr+(1-t)r = r$. Par conséquent, on a $\|a-(tx+(1-t)y)\| < r$, d'où $tx + (1-t)y \in B(a, r)$. Si $x, y \in B'(a, r)$, alors on a $t\,\|a - x\| + (1-t)\,\|a - y\| \leq tr+(1-t)r = r$. Par conséquent, on a $\|a-(tx+(1-t)y)\| \leq r$, d'où $tx+(1-t)y \in B'(a, r)$. Donc $B(a, r)$ et $B'(a, r)$ sont des sous-ensembles convexes de E.
2. Ceci résulte de 1. ■

On déduit du théorème 4.4.1 et de la proposition précédente le résultat suivant.

Proposition 6.1.5. *Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé et U un ouvert dans E. On a :*

1. *U est connexe si et seulement si U est connexe par arcs.*

2. *Les composantes connexes de U sont ouvertes, fermées dans U, et connexes par arcs.*

6.2 Deux inégalités fondamentales et espaces ℓ^p

Soit $p \in]1, +\infty[$, il existe un unique $q \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En effet, il suffit de prendre $q = \frac{p}{p-1}$. Notons que l'on a $(p-1)q = p$ et $(q-1)(p-1) = 1$. Notons aussi que si $p = 2$, alors on a $q = 2$.

Lemme 6.2.1. *Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tout $s, t \geq 0$, on a :*

$$s\,t \;\leq\; \frac{1}{p}\,s^p + \frac{1}{q}\,t^q$$

$$s\,t \;=\; \frac{1}{p}\,s^p + \frac{1}{q}\,t^q \iff s^p = t^q\,.$$

Démonstration. Soit $s \geq 0$ fixé et pour tout $t \geq 0$, soit $\varphi(t) = \frac{1}{p}\,s^p + \frac{1}{q}\,t^q - s\,t$, alors φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a $\varphi'(t) = t^{q-1} - s$. On en déduit le tableau de variation ci-contre de φ. Donc pour tout $t \geq 0$, on a $\varphi(t) \geq 0$, et $\varphi(t) = 0 \iff s^p = t^q$. ■

t	0		s^{p-1}		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(t)$	$\frac{1}{p}s^p$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Notations.

– Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$\|x\|_p \;=\; \begin{cases} \big(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\big)^{\frac{1}{p}} & \text{si} \quad 1 \leq p < +\infty\,, \\ \max\big(|x_1|\,, \dots, |x_n|\big) & \text{si} \quad p = \infty\,. \end{cases}$$

– On désigne par ℓ^∞ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites de scalaires bornées en module. Autrement dit, on a $\ell^\infty = B(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = C_b(\mathbb{N})$. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, on pose :

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |x_n|\,.$$

– On désigne par c_0 le sous-espace vectoriel de ℓ^∞ formé des suites qui convergent vers 0. On désigne par c_c le sous-espace vectoriel de c_0 formé des suites dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini. En fait, $\mathbb{N}$ est un espace métrique localement compact et on a $c_0 = C_0(\mathbb{N})$ et $c_c = C_c(\mathbb{N})$, voir définition 3.6.2.

– Pour tout entier $n \geq 0$, soit $\mathbf{e}_n = (\delta_{n,k})_{k\geq 0} \in c_c$, où $\delta_{n,k}$ est le symbole de Kronecker défini par :

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = n\,, \\ 0 & \text{si} \quad k \neq n\,. \end{cases}$$

Autrement dit, $\mathbf{e}_n$ est la suite dont le terme d'indice n vaut 1 et tous les autres sont nuls.

– Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on désigne par ℓ^p l'ensemble des suites de scalaires $x = (x_n)_{n\geq 0}$ pour lesquelles la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |x_n|^p$ est convergente. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^p$, on pose :

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Théorème 6.2.1. *Soient* $p, q \in]1, +\infty[$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Pour tous* $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$*, on a :*

1. $\displaystyle\Big|\sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j\Big| \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\Big)^{\frac{1}{q}}$ (**inégalité de Hölder**).

2. $\displaystyle\Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$ (**inégalité de Minkowski**).

Démonstration. 1. Si $\|x\|_p = 0$ ou $\|y\|_q = 0$, l'inégalité est triviale, donc on suppose $\|x\|_p \neq 0$ et $\|y\|_q \neq 0$. D'après le lemme précédent, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a :

$$\frac{|x_j|}{\|x\|_p}\,\frac{|y_j|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p}\,\frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\,\frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q}$$

donc on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j|}{\|x\|_p}\,\frac{|y_j|}{\|y\|_q} &\leq \frac{1}{p\,\|x\|_p^p} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p + \frac{1}{q\,\|y\|_q^q} \sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \\
&= \frac{1}{p\,\|x\|_p^p}\,\|x\|_p^p + \frac{1}{q\,\|y\|_q^q}\,\|y\|_q^q \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\displaystyle\Big|\sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j\Big| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|\,|y_j| \leq \|x\|_p\,\|y\|_q\,.$

2. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p &= \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|\,|x_j + y_j|^{p-1} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \big(|x_j| + |y_j|\big)\,|x_j + y_j|^{p-1} \\
&= \sum_{j=1}^{n} |x_j|\,|x_j + y_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^{n} |y_j|\,|x_j + y_j|^{p-1}\,.
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j|\,|x_j + y_j|^{p-1} \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{(p-1)q}\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j|\,|x_j + y_j|^{p-1} \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{(p-1)q}\Big)^{\frac{1}{q}}\,.$$

Par conséquent, on a :

$$\|x+y\|_p^p \leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j+y_j|^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)\left(\|x+y\|_p\right)^{\frac{p}{q}}.$$

D'où on a $\left(\|x+y\|_p\right)^{p-\frac{p}{q}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, donc $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. ■

Remarque 6.2.1. Notons que l'inégalité de Cauchy–Schwarz, voir proposition 2.1.2, est un cas particulier de l'inégalité de Hölder.

Proposition 6.2.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'application $x \longmapsto \|x\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.*
2. *Pour tous $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $p \leq q$ et pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a :*
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty.$$
3. *On a $\lim\limits_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.*

Démonstration. 1. Il est clair que $x \longmapsto \|x\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$. On déduit de l'inégalité de Minkowski que pour tout $p \in [1, +\infty[$, $x \longmapsto \|x\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$. Notons aussi que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j\Big| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, |y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, \|y\|_\infty = \|x\|_1\, \|y\|_\infty.$$

2. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $|x_i|^q \leq |x_1|^q + \cdots + |x_n|^q = \|x\|_q^q$, d'où $|x_i| \leq \|x\|_q$. Par conséquent, on a $\|x\|_\infty \leq \|x\|_q$. Si $x = 0$, alors les inégalités à montrer sont triviales, donc on peut supposer $x \neq 0$. On a $\|x\|_q \leq \|x\|_p \iff \left\|\dfrac{x}{\|x\|_p}\right\|_q \leq 1$, d'où l'idée de poser $y_i = \dfrac{x_i}{\|x\|_p}$. On a $|y_i| \leq 1$ et $q \geq p$, on en déduit que l'on a $|y_i|^q \leq |y_i|^p$, d'où $\dfrac{|x_i|^q}{\|x\|_p^q} \leq \dfrac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p}$. Donc on a $\dfrac{\|x\|_q^q}{\|x\|_p^q} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|^q}{\|x\|_p^q} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} = 1$, d'où $\|x\|_q^q \leq \|x\|_p^q$. Par conséquent, on a $\|x\|_q \leq \|x\|_p$. D'autre part, on a $\|x\|_p = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$.

3. Comme on a $\lim\limits_{p \to +\infty} n^{\frac{1}{p}} = 1$, alors $\lim\limits_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$. ■

Remarque 6.2.2. Si $p \in]0, 1[$, on vérifie facilement que pour tous $s \geq 0$ et $t \geq 0$, on a :

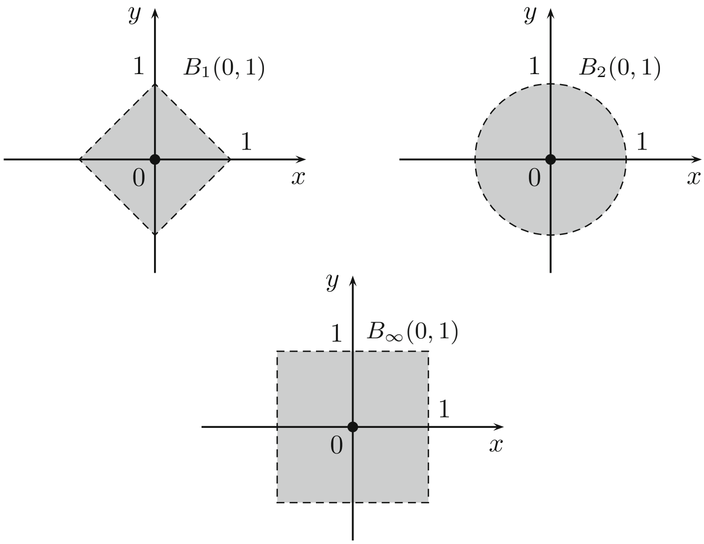
$$(s+t)^p \leq s^p + t^p \quad \text{et} \quad (s+t)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(s^{\frac{1}{p}} + t^{\frac{1}{p}}\right).$$

On en déduit que pour tout $x, y \in \mathbb{K}^n$, on a $\|x+y\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)$. D'autre part, si $x = (1, 0, \cdots, 0)$ et $y = (0, 1, 0, \cdots, 0)$, alors on a :

$$\|x\|_p = \|y\|_p = 1 \quad \text{et} \quad \|x+y\|_p = 2^{\frac{1}{p}} > 2 = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Donc l'application $x \longmapsto \|x\|_p$ n'est pas une norme sur $\mathbb{K}^n$. On reviendra sur ce cas, $p \in]0,\, 1[$, dans le chapitre 9, voir exercice 9.6.

Remarque 6.2.3. Pour tout $p \in [1,\, +\infty]$, soit $B_p = B_p(0,1)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 pour la norme $\|\ \|_p$ dans $\mathbb{K}^n$. Alors B_p est convexe et symétrique par rapport à 0. Comme on a $\|x\|_\infty \leq \|x\|_3 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_{\frac{3}{2}} \leq \|x\|_1$, alors on a les inclusions suivantes $B_1 \subset B_{\frac{3}{2}} \subset B_2 \subset B_3 \subset B_\infty$.
Pour $n = 2$, on a les trois boules ouvertes de centre 0 et de rayon 1 correspondantes dans $\mathbb{R}^2$:



Proposition 6.2.2. *On a les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, ℓ^p est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application $x \longmapsto \|x\|_p$ est une norme sur ℓ^p.*

2. *L'espace $(\ell^p,\, \|\ \|_p)$ est de Banach.*

3. *L'espace $(c_0,\, \|\ \|_\infty)$ est de Banach.*

4. *Pour tout $p \in [1,\, +\infty[$, on a $c_c \subset \ell^p \subset c_0 \subset \ell^\infty$.*

5. *Pour tous $p, q \in [1, +\infty[$, on a $\ell^p \subset \ell^q$ si et seulement si $p \leq q$*

6. *Si $1 \leq p \leq q < +\infty$, alors pour tout $x \in \ell^p$, on a $\|x\|_\infty \leq \|x\|_q \leq \|x\|_p$.*

Démonstration. 1. Si $p = +\infty$, c'est clair. On suppose $p \in [1, +\infty[$. Il est clair que $\|x\|_p = 0 \iff x = 0$. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^p$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\|\lambda x\|_p = |\lambda|\, \|x\|_p < +\infty$, donc $\lambda x \in \ell^p$. Soient $x = (x_n)_{n\geq 0}$ et $y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^p$. D'après l'inégalité de Minkowski, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\Big(\sum_{j=0}^{n} |x_j + y_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{j=0}^{n} |x_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{j=0}^{n} |y_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p < +\infty\,.$$

On fait tendre n vers l'infini, on obtient $\displaystyle\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|x_j+y_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p+\|y\|_p$. Donc $x+y\in\ell^p$ et on a $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p+\|y\|_p$. Par conséquent, ℓ^p est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x\longmapsto \|x\|_p$ est bien une norme sur ℓ^p.

2. Le fait que $(\ell^\infty, \|\ \|_\infty)$ est un espace de Banach résulte de la proposition 2.6.8. Montrons que $(\ell^p, \|\ \|_p)$ est un espace de Banach pour tout $p\in[1,+\infty[$. Soit $(\xi_k)_{k\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(\ell^p, \|\ \|_p)$. Pour tout $k\geq 0$, on a $\xi_k=(x_{k,n})_{n\geq 0}$, avec $x_{k,n}\in\mathbb{K}$. Soit $\varepsilon>0$, alors il existe $k_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $k,k'\geq k_0$, on ait :

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|x_{k,n}-x_{k',n}|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \|\xi_k-\xi_{k'}\|_p<\varepsilon\,.$$

Soit $n\geq 0$. Pour tout k,k', on a $|x_{k,n}-x_{k',n}|\leq \|\xi_k-\xi_{k'}\|_p$, donc la suite $(x_{k,n})_{k\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ qui est de Banach, donc il existe $x_n\in\mathbb{K}$ tel que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}x_{k,n}=x_n$. Pour tout $N\geq 0$ et pour tout $k,k'\geq k_0$, on a :

$$\Big(\sum_{n=0}^{N}|x_{k,n}-x_{k',n}|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \|\xi_k-\xi_{k'}\|_p<\varepsilon\,.$$

On fait tendre k' vers l'infini, on obtient que :

$$\Big(\sum_{n=0}^{N}|x_{k,n}-x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon\,.$$

Ceci étant vrai pour tout $N\geq 0$, d'où on a :

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|x_{k,n}-x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon\,.$$

Soit $x=(x_n)_{n\geq 0}$, alors on a $x-\xi_k\in\ell^p$. Comme $\ell^p(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel, alors $x=x-\xi_k+\xi_k\in\ell^p$. De plus l'inégalité précédente montre que $(\xi_k)_{k\geq 0}$ converge vers x dans $(\ell^p, \|\ \|_p)$.

3. Quand on munit $\mathbb{N}$ de la topologie discrète, alors $\mathbb{N}$ est un espace localement compact et on a $c_0=C_0(\mathbb{N})$, et la norme $\|\ \|_\infty$ est la norme associée à la distance de la convergence uniforme. Il résulte de la proposition 3.6.5 que $(c_0, \|\ \|_\infty)$ est de Banach. Mais on va donner une preuve directe de ce résultat. Il suffit de montrer que c_0 est fermé dans $(\ell^\infty, \|\ \|_\infty)$. Soit $(\xi_k)_{k\geq 0}$ une suite dans c_0 convergente vers $x=(x_n)_{n\geq 0}\in\ell^\infty$. Pour tout $k\geq 0$, on a $\xi_k=(x_{k,n})_{n\geq 0}$, avec $x_{k,n}\in\mathbb{K}$. Soit $\varepsilon>0$, alors il existe $k_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $k,k'\geq k_0$, on ait $\|\xi_k-x\|_\infty<\varepsilon$, d'où pour tout $k\geq k_0$ et pour tout $n\geq 0$ on a $|x_{k,n}-x_n|<\varepsilon$. Donc, pour tout $n\geq 0$, on a $|x_n|\leq |x_{k_0,n}-x_n|+|x_{k_0,n}|<\varepsilon+|x_{k_0,n}|$. Comme $\xi_{k_0}\in c_0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, on ait $|x_{k_0,n}|<\varepsilon$, d'où pour tout $n\geq N$, on a $|x_n|<2\varepsilon$. Donc on a $x\in c_0$. Par conséquent, $(c_0, \|\ \|_\infty)$ est un espace de Banach.

4. Les inclusions $c_c\subset\ell^p$ et $c_0\subset\ell^\infty$ sont claires. Vérifions que l'on a $\ell^p\subset c_0$. Soit $x=(x_n)_{n\geq 0}\in\ell^p$, alors on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|x_n|^p<+\infty$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}|x_n|^p=0$ et alors on a

$\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = 0$. Autrement dit, on a $x \in c_0$.
5. Supposons d'abord que $p \leq q$. Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^p$, alors $x \in c_0$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|x_n| \leq 1$. Par conséquent, pour tout $n \geq N$, on a $|x_n|^q \leq |x_n|^p$, d'où $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|^q < +\infty$, donc $x \in \ell^p$. Ainsi, on a $\ell^p \subset \ell^q$.
Réciproquement, supposons que l'on a $\ell^p \subset \ell^q$. Si $p > q$, pour tout $n \geq 1$, soit $x_n = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{q}}}$, alors $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^p$, mais $x \notin \ell^q$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc on a bien $p \leq q$.
6. Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^p$. Pour tout $n \geq 0$, on a $|x_n| \leq \|x\|_q$, d'où $\|x\|_\infty \leq \|x\|_q$. D'après la proposition précédente, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} |x_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \Big(\sum_{i=0}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p \,.$$

On fait tendre n vers l'infini, on obtient $\|x\|_q \leq \|x\|_p$. ∎

Remarque 6.2.4. On verra, exercice 6.34, que si $1 \leq p \leq q < +\infty$, alors ℓ^p est dense dans $(\ell^q, \| \, \|_q)$.

6.3 Applications linéaires continues

Théorème 6.3.1. *Soient $(E_1, \| \, \|_1)$, $(E_2, \| \, \|_2)$ deux espaces normés et $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe un nombre $M > 0$ tel que pour tout $x \in E_1$, on ait $\|f(x)\|_2 \leq M\|x\|_1$.

(ii) f est bornée sur la sphère $S = \{x \in E_1 \; ; \; \|x\|_1 = 1\}$.

(iii) f est lipschitzienne.

(iv) f est uniformément continue.

(v) f est continue.

(vi) f est continue en 0.

Démonstration. Il est clair que (i)$\Longrightarrow$(ii). Montrons que (ii)$\Longrightarrow$(iii). Par hypothèse, il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout $x \in S$, on ait $\|f(x)\|_2 \leq A$. Soient $x, y \in E_1$ tels que $x \neq y$, alors on a $\Big\|f\Big(\dfrac{x-y}{\|x-y\|_1}\Big)\Big\|_2 \leq A$. Or on a :

$$\Big\|f\Big(\frac{x-y}{\|x-y\|_1}\Big)\Big\|_2 = \Big\|\frac{1}{\|x-y\|_1}(f(x)-f(y))\Big\|_2 = \frac{1}{\|x-y\|_1}\|f(x)-f(y)\|_2$$

d'où $\|f(x) - f(y)\|_2 \leq A \, \|x - y\|_1$. Donc f est lipschitzienne. Les implications (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (v) $\Longrightarrow$ (vi) sont claires. Il reste à montrer que (vi) $\Longrightarrow$ (i). Par hypothèse, l'application f est continue en 0, et on a $f(0) = 0$ car f est linéaire, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in E_1$ vérifiant $\|x\|_1 \leq \eta$, on ait $\|f(x)\|_2 \leq \varepsilon$. Soit $x \in E_1$, avec $x \neq 0$, alors $\Big\|\dfrac{\eta x}{\|x\|_1}\Big\|_1 = \eta$, donc on a $\Big\|f\Big(\dfrac{\eta x}{\|x\|_1}\Big)\Big\|_2 \leq \varepsilon$.

Or on a $\left\|f\Big(\dfrac{\eta x}{\|x\|_1}\Big)\right\|_2 = \left\|\dfrac{\eta}{\|x\|_1}f(x)\right\|_2 = \dfrac{\eta}{\|x\|_1}\|f(x)\|_2$, d'où $\|f(x)\|_2 \leq \dfrac{\varepsilon}{\eta}\|x\|_1$. Il suffit maintenant de prendre $M = \dfrac{\varepsilon}{\eta}$ pour avoir (i). ■

Définition 6.3.1. Soient $(E_1, \|\ \|_1)$, $(E_2, \|\ \|_2)$ deux espaces normés et $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application linéaire continue. La meilleure constante apparaissant dans la condition (i) du théorème précédent s'appelle la **norme de** f et se note $\|f\|$. Autrement dit, on a $\|f\| = \inf\big\{M > 0\ ;\ \|f(x)\|_2 \leq M\,\|x\|_1 \text{ pour tout } x \in E_1\big\}$.

Proposition 6.3.1. *Soient* $(E_1, \|\ \|_1)$, $(E_2, \|\ \|_2)$ *deux espaces normés et* $f : E_1 \longrightarrow E_2$ *une application linéaire continue. Alors on a :*

1. $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|_1<1}\|f(x)\|_2 = \sup\limits_{\|x\|_1\leq 1}\|f(x)\|_2 = \sup\limits_{\|x\|_1=1}\|f(x)\|_2 = \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_1}$.

2. *Pour tout* $x \in E_1$, *on a* $\|f(x)\|_2 \leq \|f\|\,\|x\|_1$.

Démonstration. 1. Puisque f est continue, alors l'ensemble

$$B = \big\{M > 0\ ;\ \|f(x)\|_2 \leq M\,\|x\|_1 \text{ pour tout } x \in E_1\big\}$$

est non vide (et minoré dans $\mathbb{R}_+$), donc $\|f\| = \inf\big\{M\ ;\ M \in B\big\}$ existe dans $\mathbb{R}_+$. Soit $M \in B$, alors pour tout $x \in E_1$, on a $\|f(x)\|_2 \leq M\,\|x\|_1$, donc $\sup\limits_{\|x\|_1\leq 1}\|f(x)\|_2 \leq M$. Par conséquent, on a $\sup\limits_{\|x\|_1\leq 1}\|f(x)\|_2 \leq \inf\big\{M\ ;\ M \in B\big\} = \|f\|$. Pour tout $x \neq 0$, on a $\dfrac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_1} \leq \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_1}$, donc pour tout $x \in E_1$, on a $\|f(x)\|_2 \leq \Big(\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_1}\Big)\|x\|_1$, d'où $\|f\| \leq \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_1}$. Soit $x \in E_1$ tel que $x \neq 0$, alors on a :

$$\frac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_1} = \left\|\frac{1}{\|x\|_1}f(x)\right\|_2 = \left\|f\Big(\frac{x}{\|x\|_1}\Big)\right\|_2 \leq \sup_{\|x\|_1=1}\|f(x)\|_2 \leq \sup_{\|x\|_1\leq 1}\|f(x)\|_2 \leq \|f\|\,.$$

Donc on a $\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_1} \leq \sup\limits_{\|x\|_1=1}\|f(x)\|_2 \leq \sup\limits_{\|x\|_1\leq 1}\|f(x)\|_2 \leq \|f\|$. Par conséquent, on a $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|_1\leq 1}\|f(x)\|_2 = \sup\limits_{\|x\|_1=1}\|f(x)\|_2 = \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_1}$. On a $\sup\limits_{\|x\|_1<1}\|f(x)\|_2 \leq \sup\limits_{\|x\|_1\leq 1}\|f(x)\|_2 = \|f\|$. Il reste à montrer l'inégalité inverse. Soit $x \in E$ tel que $\|x\|_1 \leq 1$, alors pour tout $n \geq 1$, on a $\big\|\big(1-\frac{1}{n}\big)x\big\|_1 = \big(1-\frac{1}{n}\big)\|x\|_1 < 1$, d'où $\big(1-\frac{1}{n}\big)\|f(x)\|_2 = \big\|f\big(\big(1-\frac{1}{n}\big)x\big)\big\|_2 \leq \sup\limits_{\|x\|_1<1}\|f(x)\|_2$. On fait tendre n vers $+\infty$, on obtient $\|f(x)\|_2 \leq \sup\limits_{\|x\|_1<1}\|f(x)\|_2$. Par conséquent, on a $\|f\| \leq \sup\limits_{\|x\|_1<1}\|f(x)\|_2$.

2. Pour tout $x \neq 0$, on a $\dfrac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_1} \leq \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_1} = \|f\|$, donc pour tout $x \in E_1$, on a $\|f(x)\|_2 \leq \|f\|\,\|x\|_1$. ■

Exemple 6.3.1. 1. On munit $\mathbb{K}^n$ de l'une des normes définies dans l'exemple 6.1.1, alors les projections canoniques

$$\begin{array}{cccc} \pi_i : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

sont linéaires continues et on a $\|\pi_i\| = 1$.

2. Soit $C([0,\,1])$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0,\,1]$ dans $\mathbb{K}$ muni de la norme $\|x\|_\infty = \max\limits_{0\le t\le 1} |x(t)|$ et soit $t_0 \in [0,\,1]$. Alors l'application

$$\begin{array}{cccc} f : & C([0,\,1]) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & x(t_0) \end{array}$$

est linéaire continue et on a $\|f\| = 1$.

3. On prend le même espace comme ci-dessus, et considérons l'application suivante.

$$\begin{array}{cccc} f : & C([0,\,1]) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 x(t)\,dt \end{array}$$

Alors f est linéaire continue et on a $\|f\| = 1$.

Proposition 6.3.2. *Soient $(E,\,\|\ \|)$, $(F,\,\|\ \|')$ des espaces normés et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) f est un homéomorphisme.

(ii) f est surjective et il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que pour tout $x \in E$, on ait :

$$\alpha\,\|x\| \le \|f(x)\|' \le \beta\,\|x\|\,.$$

Si $(E,\,\|\ \|)$ est un espace de Banach, alors (i) et (ii) sont équivalentes à :

(iii) $f(E)$ est dense dans F et il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que pour tout $x \in E$, on ait :

$$\alpha\,\|x\| \le \|f(x)\|' \le \beta\,\|x\|\,.$$

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 6 du supplément.

Soient $(E_1,\,\|\ \|_1)$ et $(E_2,\,\|\ \|_2)$ deux espaces normés. Il résulte du théorème 6.3.1 que si f et g sont des applications linéaires continues de E_1 dans E_2 et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f+g$ et λf sont des applications linéaires continues de E_1 dans E_2, où pour tout $x \in E_1$, on a $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ et $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$.

Notation. On note $\mathscr{L}(E_1;\,E_2)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E_1 dans E_2. Lorsque $E_1 = E_2 = E$, on note simplement $\mathscr{L}(E_1;\,E_2) = \mathscr{L}(E)$.

Proposition 6.3.3. *Soient $(E_1,\,\|\ \|_1)$ et $(E_2,\,\|\ \|_2)$ deux espaces normés.*

1. *L'application* $f \longmapsto \|f\|$ *est une norme sur l'espace vectoriel* $\mathscr{L}(E_1;\, E_2)$*. Sauf mention du contraire, l'espace vectoriel* $\mathscr{L}(E_1;\, E_2)$ *sera toujours muni de cette norme.*

2. *Si* $(E_2,\, \|\ \|_2)$ *est un espace de Banach. Alors* $(\mathscr{L}(E_1;\, E_2),\, \|\ \|)$ *est un espace de Banach.*

Démonstration. 1. Supposons $\|f\| = 0$. Comme pour tout $x \in E_1$, on a $0 \le \|f(x)\|_2 \le \|f\|\,\|x\|_1$, alors $\|f(x)\|_2 = 0$, d'où $f(x) = 0$, et donc on a $f = 0$. Réciproquement, si $f = 0$, alors pour tout $x \in E_1$, on a $f(x) = 0$, donc $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|_1 \le 1} \|f(x)\|_2 = 0$.
Soient $f, g \in \mathscr{L}(E_1;\, E_2)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $x \in E_1$, on a $\|(\lambda f)(x)\|_2 = \|\lambda f(x)\|_2 = |\lambda|\,\|f(x)\|_2 \le |\lambda|\,\|f\|\,\|x\|_1$. On en déduit que $\|\lambda f\| \le \lambda\,\|f\|$. Pour tout $x \in E_1$, on a $\|(f+g)(x)\|_2 = \|f(x)+g(x)\|_2 \le \|f(x)\|_2 + \|g(x)\|_2 \le \|f\|\,\|x\|_1 + \|g\|\,\|x\|_1 = (\|f\|+\|g\|)\|x\|_1$. On en déduit que $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$. Donc l'application $f \longmapsto \|f\|$ est bien une norme sur l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E_1;\, E_2)$.
2. Soit $(f_n)_{n\ge 0}$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}(E_1;\, E_2),\, \|\ \|)$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \ge N$, on ait $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Comme pour tout $n, m \ge N$ et tout $x \in E_1$, on a :

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_2 \le \|f_n - f_m\|\,\|x\|_1 \tag{6.1}$$

donc la suite $(f_n(x))_{n\ge 0}$ est de Cauchy dans $(E_2,\, \|\ \|_2)$. Elle est convergente, puisque E_2 est de Banach. Notons $f(x)$ sa limite. Autrement dit, on a $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.
Pour tout $x, y \in E_1$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x+\lambda y) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x+\lambda y) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \lambda f_n(y) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \lambda \lim_{n\to\infty} f_n(y) \;=\; f(x) + \lambda f(y)\,. \end{aligned}$$

Donc f est linéaire. La fonction norme étant continue sur E_2, on fixe $n \ge N$ et on fait tendre m vers l'infini, l'équation (6.1) implique que pour tout $n \ge N$ et pour tout $x \in E_1$, on a $\|f_n(x) - f(x)\|_2 \le \varepsilon\|x\|_1$. Donc $f_n - f$ est continue et on a $\|f_n - f\| \le \varepsilon$. L'application f_n étant continue, on en déduit que $f = f_n - (f_n - f)$ est continue et que la suite $(f_n)_{n\ge 0}$ converge vers f dans $(\mathscr{L}(E_1;\, E_2),\, \|\ \|)$. Donc $(\mathscr{L}(E_1;\, E_2),\, \|\ \|)$ est un espace de Banach. ■

Proposition 6.3.4. *Soient* $(E_1,\, \|\ \|_1)$*,* $(E_2,\, \|\ \|_2)$ *et* $(E_3,\, \|\ \|_3)$ *trois espaces normés. Soient* $f : E_1 \longrightarrow E_2$ *et* $g : E_2 \longrightarrow E_3$ *deux applications linéaires continues. Alors* $g \circ f : E_1 \longrightarrow E_3$ *est une application linéaire continue et on a* $\|g \circ f\| \le \|f\|\,\|g\|$*.*

Démonstration. Il est clair que $g \circ f$ est linéaire. Pour tout $x \in E_1$, on a :

$$\|g \circ f(x)\|_3 = \|g(f(x))\|_3 \le \|g\|\,\|f(x)\|_2 \le \|g\|\,\|f\|\,\|x\|_1\,.$$

Donc $g \circ f$ est continue et on a $\|g \circ f\| \le \|f\|\,\|g\|$. ■

Proposition 6.3.5 (théorème de prolongement). *Soient $(E, \| \|)$ un espace normé, $(F, \| \|')$ un espace de Banach, H un sous-espace vectoriel dense dans E et $f \in \mathscr{L}(H; F)$. Alors il existe une unique $g \in \mathscr{L}(E; F)$ prolongeant f. De plus, on a $\|g\| = \|f\|$.*

Démonstration. Puisque f est uniformément continue, d'après le théorème 2.6.2, il existe une unique application continue $g : E \longrightarrow F$ prolongeant f. Soient $x, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme H est dense dans E, il existe des suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ dans H telles que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $z = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$, d'où on a :

$$\begin{aligned} g(x+\lambda z) &= \lim_{n\to\infty} g(x_n + \lambda z_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n + \lambda z_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lambda \lim_{n\to\infty} f(z_n) \ = \ g(x) + \lambda g(z)\,. \end{aligned}$$

Donc g est aussi linéaire. On a :

$$\|f\| = \sup_{x\in H, \|x\|_1 \leq 1} \|f(x)\|' = \sup_{x\in H, \|x\|_1 \leq 1} \|g(x)\|' \leq \sup_{x\in E, \|x\|_1 \leq 1} \|g(x)\|' = \|g\|\,.$$

D'autre part, pour tout $n \geq 0$, on a $\|g(x_n)\|' = \|f(x_n)\|' \leq \|f\|\,\|x_n\|$, d'où $\|g(x)\|' \leq \|f\|\,\|x\|$. Donc on a $\|g\| \leq \|f\|$. Par conséquent, on a bien $\|g\| = \|f\|$. ■

On va revenir au problème de prolongement des applications linéaires continues au chapitre 7.

Définition 6.3.2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace vectoriel H de E de codimension 1 : il existe $a \in E$ non nul tel que $E = H + \mathbb{K}\,a$ et $H \cap \mathbb{K}\,a = \{0\}$.
2. On dit qu'un sous-ensemble H_α de E est un **hyperplan affine** s'il existe un hyperplan H de E et un élément $z \in E$ tels que $H_\alpha = H + z$. Autrement dit, un hyperplan affine est le translaté d'un hyperplan.

Lemme 6.3.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1. *Soit H un hyperplan de E. Alors il existe une forme linéaire non nulle f sur E telle que $H = \ker(f)$.*
2. *Inversement, soit f une forme linéaire non nulle sur E. Alors $H = \ker(f)$ est un hyperplan de E.*
3. *Soient f et g des formes linéaires sur E. Alors $\ker(f) = \ker(g)$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $g = \lambda f$.*

Pour une preuve du lemme précédent, voir chapitre 6 du supplément.

Remarque 6.3.1. Soit H_α un sous-ensemble d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On déduit du lemme précédent que H_α est un hyperplan affine de E si et seulement si il existe une forme linéaire non nulle f sur E et un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que $H_\alpha = \{x \in E\ ;\ f(x) = \alpha\}$.

Proposition 6.3.6. *Soit* $(E, \|\ \|)$ *un espace normé.*

1. *Tout hyperplan de* E *est ou bien fermé ou bien dense dans* $(E, \|\ \|)$.
2. *Une forme linéaire sur* E *est continue si et seulement si son noyau est fermé dans* E.

Démonstration. 1. Soient H un hyperplan de E et $a \in E$ tel que $E = H + \mathbb{K}\,a$ et $H \cap \mathbb{K}\,a = \{0\}$. Supposons H non fermé dans E et montrons qu'alors H est dense dans E. Puisque H n'est pas fermé, il existe $x \in \overline{H}$ tel que $x \notin H$. Alors il existe $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $x = h + \lambda\,a$ et $\lambda \neq 0$. On en déduit que $a = \dfrac{x-h}{\lambda} \in \overline{H}$ car $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E, voir exercice 6.9. Par conséquent, on a $E = \overline{H}$. Donc H est dense dans E.
2. Soient f une forme linéaire sur E et $H = \ker(f)$. Si $f = 0$, alors f est continue et on a $H = E$, d'où H est fermé dans E. Donc on peut supposer f non nulle. Si f est continue, alors $H = \ker(f) = f^{-1}(\{0\})$ est fermé dans E. Réciproquement, on suppose $H = \ker(f)$ fermé dans E. Soit $a \in E$ tel que $f(a) = 1$. Puisque l'application $x \longmapsto a + x$ est un homéomorphisme de E, alors $a + H$ est un fermé dans E ne contenant pas 0, donc il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \cap (a + H) = \emptyset$. Soit $x \in B(0, r)$. Si $|f(x)| > 1$, alors $\left\|\dfrac{x}{f(x)}\right\| = \dfrac{\|x\|}{|f(x)|} < \|x\| < r$ et on a $f\Big(\dfrac{x}{f(x)}\Big) = 1$. Comme il existe $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\dfrac{x}{f(x)} = h + \lambda\,a$, on en déduit que $\lambda = 1$, donc $\dfrac{x}{f(x)} = a + h \in a + H$, ce qui est impossible. Donc on a $|f(x)| \leq 1$. Soit x un élément non nul de E, alors on a $\left\|\dfrac{rx}{2\|x\|}\right\| = \frac{r}{2} < r$, d'où $\dfrac{r}{2\|x\|}|f(x)| = \left|f\Big(\dfrac{rx}{2\|x\|}\Big)\right| \leq 1$. Par conséquent, on a $|f(x)| \leq \frac{2}{r}\|x\|$. Donc f est continue. ■

Proposition 6.3.7. *Soient* $(E, \|\ \|)$ *et* $(F, \|\ \|')$ *deux* $\mathbb{R}$*-espaces normés et* $f : E \longrightarrow F$ *une application bornée sur* $B(0,1) = \{x \in E\ ;\ \|x\| < 1\}$, *et elle vérifie* $f(x + y) = f(x) + f(y)$ *pour tout* $x, y \in E$. *Alors* f *est linéaire et continue.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 6 du supplément.

Théorème 6.3.2 (Mazur-Ulam). *Soient* $(E, \|\ \|)$ *et* $(F, \|\ \|')$ *deux* $\mathbb{R}$*-espaces normés et* $f : E \longrightarrow F$ *une application isométrique surjective. Alors il existe une application linéaire surjective et isométrique* $g : E \longrightarrow F$ *et il existe un élément* $c \in F$ *tels que* $f(x) = g(x) + c$, *pour tout* $x \in E$.

Pour une preuve du théorème précédent, voir exercice 6.78 du supplément.

Proposition 6.3.8. *Soient* $(E, \|\ \|)$ *un espace normé de dimension finie et* $f : E \longrightarrow E$ *une application isométrique, i.e. pour tout* $x, y \in E$, *on a* $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. *Alors on a :*

1. f *est surjective.*
2. *Si* E *est un* $\mathbb{R}$*-espace normé, alors il existe une application linéaire surjective et isométrique* $g : E \longrightarrow E$ *et il existe un élément* $c \in E$ *tels que* $f(x) = g(x) + c$, *pour tout* $x \in E$.

Démonstration. 1. Soit $B'(0,r)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon r dans E. Comme E est de dimension finie, alors $B'(0,r)$ est compacte. Soit $g = f - f(0)$, alors g est une application isométrique de E telle que $g(0) = 0$, donc on a $g(B'(0,r)) \subset B'(0,r)$. D'après l'exercice 3.28, on a $g(B'(0,r)) = B'(0,r)$. Ceci étant vrai pour tout $r > 0$, alors g est surjective. Donc, pour tout $z \in E$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) - f(0) = g(x) = z - f(0)$, d'où $f(x) = z$, donc f est surjective.
2. Ceci résulte de 1 et du théorème précédent. ■

Remarque 6.3.2. Une isométrie $\mathbb{R}$-linéaire d'un $\mathbb{C}$-espace normé dans lui-même, n'est pas forcément $\mathbb{C}$-linéaire. En effet, si $f(z) = \bar{z}$, alors f est une isométrie $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, mais f n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.

6.4 Quelques constructions d'espaces normés

I. Sous-espaces normés

Si $(E, \| \ \|)$ est un espace normé et F est un sous-espace vectoriel de E, on note encore $\| \ \|$ la **norme induite** sur F ; muni de cette norme, $(F, \| \ \|)$ est dit un **sous-espace normé** de $(E, \| \ \|)$. Notez que la norme induite sur F est associée à la distance induite sur F par la distance sur E associée à la $\| \ \|$ sur E. On déduit de la proposition 2.6.5 le résultat suivant :

Proposition 6.4.1. *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace normé $(E, \| \ \|)$.*

1. *Si F est un espace de Banach pour la norme induite, alors F est fermé dans E.*
2. *Si E est un espace de Banach et F est fermé dans E, alors F est un espace de Banach pour la norme induite.*

II. Produit fini d'espaces normés

Soient $(E_1, \| \ \|_1), \dots, (E_n, \| \ \|_n)$ des espaces normés. L'ensemble produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ a une structure naturelle d'espace vectoriel, et pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$, on pose :

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i \ , \ N_2(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ , \ N_\infty(x) = \sup_{1 \le i \le n} \|x_i\|_i$$

Alors N_1, N_2 et N_∞ définissent trois normes équivalentes sur l'espace vectoriel produit E. Muni de l'une des ces normes, E est dit **espace normé produit** des espaces donnés. Notez que ces trois normes sont associées respectivement aux trois distances D_1, D_2 et D_∞ définies dans le chapitre 2, paragraphe 2.4. On en déduit que la topologie d'un produit fini d'espaces normés coïncide avec la topologie produit. On déduit de la proposition 2.6.6 le résultat suivant :

Proposition 6.4.2. *Soient $(E_1, \| \ \|_1), \dots, (E_n, \| \ \|_n)$ des espaces normés et $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ l'espace normé produit. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) E est un espace de Banach.

(ii) Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, E_j est un espace de Banach.

III. Norme quotient

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E. On définit sur E la relation d'équivalence suivante : pour $x,\, y \in E$,

$$x \,\mathcal{R}\, y \iff x - y \in H\,.$$

On note $\pi : E \longrightarrow E/\mathcal{R}$ l'application quotient. Soient $x_1,\, x_2,\, y_1,\, y_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $x_1 \,\mathcal{R}\, y_1$ et $x_2 \,\mathcal{R}\, y_2$, alors on a :

$$(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) \in H\,,$$

$$\lambda x_1 - \lambda y_1 = \lambda(x_1 - y_1) \in H\,.$$

Donc on a $(x_1 + x_2) \,\mathcal{R}\, (y_1 + y_2)$ et $\lambda x_1 \,\mathcal{R}\, \lambda y_1$. Autrement dit, si on a $\pi(x_1) = \pi(y_1)$ et $\pi(x_2) = \pi(y_2)$, alors on a $\pi(x_1 + x_2) = \pi(y_1 + y_2)$ et $\pi(\lambda x_1) = \pi(\lambda y_1)$. Par conséquent, l'espace quotient $E/\mathcal{R}$ possède une structure naturelle de $\mathbb{K}$-espace vectoriel définie par :

$$\pi(x) + \pi(y) := \pi(x + y) \;\text{ et }\; \lambda\pi(x) := \pi(\lambda x)\,.$$

Dans ce cas, l'espace quotient $E/\mathcal{R}$ est noté E/H et appelé l'**espace vectoriel quotient**, et l'application quotient π est linéaire.
Supposons à présent que $(E, \|\ \|)$ est un espace normé, et il s'agit de mettre une norme sur l'espace vectoriel quotient E/H de telle sorte que la topologie associée à cette norme soit la topologie quotient. On souhaite que l'application quotient $\pi : E \longrightarrow E/H$ soit continue, et donc on va forcer la norme $\|\ \|'$ sur E/H de vérifier l'inégalité $\|\pi(x)\|' \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$. Or on a $\pi(x) = \pi(x - h)$ pour tout $h \in H$, ainsi on a besoin que la norme $\|\ \|'$ satisfait $\|\pi(x)\|' \leq \|x - h\|$ pour tout $h \in H$. Ceci nous conduit à poser $\|\pi(x)\|' = \inf\limits_{h \in H} \|x - h\| = d(x, H)$. Donc on a $\|\pi(x)\|' = 0$ si et seulement si $x \in \overline{H}$. D'où la nécessité de supposer H fermé pour avoir une norme sur E/H.

Proposition 6.4.3. *Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé, d la distance associée à la norme $\|\ \|$ sur E, H un sous-espace vectoriel fermé de E, et $\pi : E \longrightarrow E/H$ l'application quotient. Pour tout $x \in E$, on pose :*

$$\|\pi(x)\|' = \inf_{h \in H} \|x - h\| = d(x, H)\,.$$

Alors on a :

1. *$\|\ \|'$ est une norme sur l'espace vectoriel quotient E/H, appelée la **norme quotient** sur E/H.*

2. *π est une application linéaire continue et $\|\pi\| \leq 1$. On a même $\|\pi\| = 1$ si $H \neq E$.*

3. *Pour tout $a \in E$ et tout $\rho > 0$, on a $\pi(B(a, \rho)) = B(\pi(a), \rho)$. Donc π est une application ouverte. Autrement dit, l'image par π de tout ouvert de E est ouverte de E/H.*

4. *La topologie associée à cette norme $\|\ \|'$ coïncide avec la topologie quotient sur E/H.*

Démonstration. 1. Si $x \in H$, alors on a $0 \leq \|\pi(x)\|' \leq \|x - x\| = 0$. Donc $\|\pi(x)\|' = 0$. Autrement dit, on a $\|0\|' = 0$. Soit $x \in E$ tel que $\|\pi(x)\|' = 0$, d'où $d(x, H) = 0$, donc on a $x \in \overline{H}$. Comme H est fermé dans E, alors $H = \overline{H}$. Donc on a $x \in H$, d'où $\pi(x) = 0$. Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\lambda = 0$, alors on a $\|\lambda\pi(x)\|' = \|0\|' = 0 = |\lambda|\,\|\pi(x)\|'$. On suppose $\lambda \neq 0$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\|\lambda\pi(x)\|' = \|\pi(\lambda x)\|' &= \inf_{h\in H} \|\lambda x - h\| \\
&= \inf_{h\in H} |\lambda| \Big\| x - \frac{h}{\lambda} \Big\| \\
&= |\lambda| \inf_{h\in H} \Big\| x - \frac{h}{\lambda} \Big\| \\
&= |\lambda| \inf_{k\in H} \|x - k\| = |\lambda|\, \|\pi(x)\|' .
\end{aligned}$$

Soient $x, y \in E$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h, k \in H$ tels que :

$$\|x - h\| \leq \|\pi(x)\|' + \varepsilon \ \text{ et } \ \|y - k\| \leq \|\pi(y)\|' + \varepsilon .$$

On a $h + k \in H$ et $\|x + y - (h + k)\| \leq \|x - h\| + \|y - k\| \leq \|\pi(x)\|' + \|\pi(y)\|' + 2\varepsilon$. Donc on a $\|\pi(x) + \pi(y)\|' = \|\pi(x + y)\|' \leq \|\pi(x)\|' + \|\pi(y)\|' + 2\varepsilon$. On en déduit que $\|\pi(x) + \pi(y)\|' \leq \|\pi(x)\|' + \|\pi(y)\|'$. Par conséquent, $\|\ \|'$ est une norme sur E/H.
2. L'application π est linéaire par définition de la structure vectoriel sur E/H. Pour tout $x, y \in E$, on a $\|\pi(x) - \pi(y)\|' = \|\pi(x - y)\|' \leq \|x - y\|$. Donc π est continue et on a $\|\pi\| \leq 1$.
3. Pour tout $a \in E$ et tout $\rho > 0$, on a $\|\pi(a) - \pi(x))\|' = \|\pi(a - x)\|' \leq \|a - x\|$, donc $\pi(B(a, \rho)) \subset B(\pi(a), \rho)$. Réciproquement, soit $\pi(x) \in B(\pi(a), \rho)$, alors on a $\|\pi(a - x)\|' = \|\pi(a) - \pi(x))\|' < \rho$. Or on a $\|\pi(a - x)\|' = \inf_{h\in H} \|a - x - h\|$, donc il existe $h \in H$ tel que $\|a - (x + h)\| < \rho$. Soit $y = x + h$, alors on a $y \in B(a, \rho)$ et $\pi(y) = \pi(x + h) = \pi(x) + \pi(h) = \pi(x) + 0 = \pi(x)$, donc on a $\pi(x) \in \pi(B(a, \rho))$, d'où $B(\pi(a), \rho) \subset \pi(B(a, \rho))$. Par conséquent on a $\pi(B(a, \rho)) = B(\pi(a), \rho)$. On en déduit que l'application π est ouverte et que $\|\pi\| = 1$ si $H \neq E$.
4. Puisque π est une application continue et ouverte, on en déduit que la topologie associée à la norme $\|\ \|'$ sur E/H coïncide avec la topologie quotient sur E/H, voir corollaire 1.4.2. ■

Remarque 6.4.1. Notons que si d' est la distance associée à la norme $\|\ \|'$ sur E/H et d est la distance associée à la norme $\|\ \|$ sur E, alors on a :

$$d'(\pi(x), \pi(y)) = d(x + H, y + H) .$$

Autrement dit, la distance $d'(\xi, \eta)$ de deux classes de E/H est simplement la distance des sous-ensembles ξ et η de E, *i.e.* $\inf\{d(a, b) \ ;\ a \in \xi \ \text{ et } \ b \in \eta\}$.

Exemple 6.4.1. On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ de l'une des trois normes suivantes :

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|, \quad \|(x, y)\|_2 = \big(x^2 + y^2\big)^{\frac{1}{2}}, \quad \|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|\,,\,|y|\} .$$

Soit $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x = 0\}$. Alors H est un sous-espace vectoriel fermé de E et les trois normes ci-dessus engendrent la même norme quotient sur E/H. En fait, on a :

$$\|\pi((x,y))\|_1' = \|\pi((x,y))\|_2' = \|\pi((x,y))\|_\infty' = |x| \,.$$

De plus, l'application suivante est un homéomorphisme linéaire.

$$\begin{array}{ccc} E/H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \pi((x,y)) & \longmapsto & x \end{array}$$

Exemple 6.4.2. Considérons l'espace de Banach $(\ell^\infty, \| \, \|_\infty)$. Alors la norme quotient sur ℓ^∞/c_0 est définie par $\|\pi(x)\|' = \limsup\limits_{n\to+\infty} |x_n|$, pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$. En effet, soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, alors on a $\|\pi(x)\|' = \inf\{\|x - h\|_\infty \; ; \; h \in c_0\}$. Pour tout $n \geq 1$, soit $h_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k \, \mathbf{e}_k$, alors $h_n \in c_c \subset c_0$ et on a $\|x - h\|_\infty = \sup\limits_{p\geq n} |x_p|$. Donc on a $\|\pi(x)\|' \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} |x_n|$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $h \in c_0$ tel que $\|x-h\|_\infty < \|\pi(x)\|' + \varepsilon$. On a $\limsup\limits_{n\to+\infty} |x_n| = \limsup\limits_{n\to+\infty} |x_n - h_n|$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0$, et $\limsup\limits_{n\to+\infty} |x_n - h_n| \leq \sup\limits_{n\geq 0} |x_n - h_n| = \|x - h\|_\infty$, d'où $\limsup\limits_{n\to+\infty} |x_n| < \|\pi(x)\|' + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que l'on a $\limsup\limits_{n\to+\infty} |x_n| \leq \|\pi(x)\|'$. Par conséquent, on a $\|\pi(x)\|' = \limsup\limits_{n\to+\infty} |x_n|$.

Proposition 6.4.4. *Soient $(E, \| \, \|)$, $(F, \| \, \|')$ deux espaces normés et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Soient H un sous-espace vectoriel fermé de E tel que $H \subset \ker(f)$ et $\pi : E \longrightarrow E/H$ l'application quotient. Alors on a :*

1. *Il existe une unique application linéaire $\widetilde{f} : E/H \longrightarrow F$ telle que $\widetilde{f} \circ \pi = f$. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \\ & E/H \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

2. *Si f est continue, alors $\widetilde{f}$ est continue et on a $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$.*

Démonstration. 1. Pour tout $x \in E$, on pose $\widetilde{f}(\pi(x)) = f(x)$. Vérifions que $\widetilde{f}$ est bien définie et qu'elle est linéaire. Soient $a, b \in E$ tels que $\pi(a) = \pi(b)$, alors $a-b \in H \subset \ker(f)$, donc on a $f(a)-f(b) = f(a-b) = 0$, d'où $f(a) = f(b)$. Par conséquent, $\widetilde{f}$ est bien définie. Pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\widetilde{f}(\pi(x) + \lambda\pi(y)) = \widetilde{f}(\pi(x + \lambda y)) = f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) = \widetilde{f}(\pi(x)) + \lambda\widetilde{f}(\pi(y)) \,.$$

Donc $\widetilde{f}$ est linéaire. Par construction, on a $\widetilde{f} \circ \pi = f$. Puisque π est surjective, alors $\widetilde{f}$ est unique.
2. On suppose de plus f continue. Soit $a \in E/H$ tel que $\|a\| < 1$, d'après la proposition précédente, il existe $x \in E$ tel que $\|x\| < 1$ et $\pi(x) = a$. D'où on a $\|\widetilde{f}(a)\|' = \|f(x)\|' \leq \|f\| \, \|x\| \leq \|f\|$. Par conséquent, $\widetilde{f}$ est continue et on a $\|\widetilde{f}\| \leq \|f\|$. On a aussi $\|f\| = \|\widetilde{f} \circ \pi\| \leq \|\widetilde{f}\| \, \|\pi\| \leq \|\widetilde{f}\|$ car $\|\pi\| \leq 1$. Donc on a $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$. ∎

Proposition 6.4.5. *Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé et H un sous-espace vectoriel fermé de E. Soit $\pi : E \longrightarrow E/H$ l'application quotient. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) E est un espace de Banach.

(ii) H et E/H sont des espaces de Banach.

Démonstration. Montrons d'abord l'implication $(ii) \Longrightarrow (i)$. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans E. Pour tout $x, y \in E$, on a $\|\pi(x) - \pi(y)\|' = \|\pi(x-y)\|' \leq \|x-y\|$, donc $(\pi(x_n))_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans E/H, donc elle converge vers un élément $\pi(x) \in E/H$. Pour tout $n \geq 1$, il existe $y_n \in F$ tel que $\|x_n - x - y_n\| < \frac{1}{n} + \|\pi(x_n - x)\| = \frac{1}{n} + \|\pi(x_n) - \pi(x)\|$, d'où on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - (x + y_n) = 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\| &= \|y_n - (x_n - x) + (x_n - x) - (x_m - x) + (x_m - x - y_m)\| \\
&\leq \|y_n - (x_n - x)\| + \|x_n - x_m\| + \|x_m - x - y_m\| \\
&\leq \frac{1}{n} + \|\pi(x_n) - \pi(x)\| + \|x_n - x_m\| + \frac{1}{m} + \|\pi(x_m) - \pi(x)\| .
\end{aligned}$$

Donc la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans F, donc elle converge vers un élément $y \in F$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x + y_n = x + y$. Pour tout $n \geq 1$, on a $x_n = x_n - (x + y_n) + (x + y_n)$, donc la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers $x + y \in E$. Par conséquent, E est un espace de Banach.
Montrons l'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$. Puisque F est fermé dans E qui est un espace de Banach, on en déduit que F est de Banach. Il reste à montrer que E/H est de Banach. Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans E/H. D'après la proposition 2.6.2, il existe une sous-suite $(z_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ de $(z_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|z_{\varphi(n+1)} - z_{\varphi(n)}\|' < 2^{-n}$. En plus, la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ est convergente si et seulement si la sous-suite $(z_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ est convergente. On montre facilement par récurrence qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans E telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $\pi(x_n) = z_{\varphi(n)}$ et $\|x_{n+1} - x_n\| < 2^{-n}$. Alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans E, donc elle converge vers un élément $x \in E$. Or π est continue, on en déduit que $(z_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge vers $\pi(x)$. Par conséquent, la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\pi(x)$, donc E/H est un espace de Banach[†]. ■

IV. Complété d'un espace normé

On a vu, chapitre 2, théorème 2.7.1, que à tout espace métrique (X, d) on associe un espace métrique complet $(\widehat{X}, \hat{d})$ tel que X soit isométrique à un sous-ensemble dense de $\widehat{X}$ et le couple $(\widehat{X}, \hat{d})$ est unique à isométrie près. Étant donné un espace normé $(E, \| \ \|)$, alors il existe un espace de Banach $(\widehat{E}, \| \ \|')$ tel que E soit linéairement isométrique à un sous-espace normé dense de $\hat{E}$, et que le couple $(\widehat{E}, \| \ \|')$ est unique à isométrie linéaire près. Autrement dit, si $(F, \| \ \|'')$ est un espace de Banach tel que E soit linéairement isométrique à un sous-espace normé dense de F, alors il existe une application linéaire isométrique de $\widehat{E}$ sur F dont la restriction à E soit l'application identité. Un tel espace $(\widehat{E}, \| \ \|')$ est appelé l'**espace de Banach complété** de l'espace normé $(E, \| \ \|)$. Il y a

[†]On verra, remarque 6.7.6, une autre preuve plus facile de l'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$ en utilisant le théorème 6.7.1

plusieurs manières pour construire l'espace de Banach $(\widehat{E}, \| \|')$. Ici, on va donner une idée de la construction de tel espace, mais on verra au chapitre 7 une autre construction plus élégante, utilisant la notion de « bidual ».

Soient $(E, \| \|)$ un espace normé et d la distance associée à la norme $\| \|$. Pour tout $x, y \in E$, on a $d(x,y) = \|x - y\|$. Soit $(\widehat{E}, \hat{d})$ le complété de l'espace métrique (E, d). Autrement dit, $(\widehat{E}, \hat{d})$ est un espace métrique complet, E est un sous-ensemble dense dans $\widehat{E}$ et pour tout $x, y \in E$, on a $\hat{d}(x,y) = d(x,y) = \|x - y\|$. On montre facilement qu'il existe une structure d'espace vectoriel sur $\widehat{E}$ et qu'il existe également une norme sur $\widehat{E}$ dont la distance associée est $\hat{d}$. On résume cette construction par le théorème suivant :

Théorème 6.4.1. *Soit $(E, \| \|)$ un espace normé. Alors il existe un espace de Banach $(\widehat{E}, \| \|')$ tel que :*

1. *Il existe $\imath : (E, \| \|) \longrightarrow (\widehat{E}, \| \|')$ une application linéaire et isométrique telle que $\imath(E)$ soit dense dans $\widehat{E}$, et ainsi, on peut identifier E à $\imath(E)$, et considérer E comme un sous-espace vectoriel dense de $\widehat{E}$.*

2. *Pour tout espace de Banach G et toute $f \in \mathscr{L}(E; G)$, il existe une unique $\widetilde{f} \in \mathscr{L}(\widehat{E}; G)$ telle que $\widetilde{f} \circ \imath = f$ et $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$.*

3. *Si $(F, \| \|'')$ est un espace de Banach et s'il existe une application linéaire et isométrique $\jmath : E \longrightarrow F$ telle que $\jmath(E)$ est dense dans F, alors il existe une unique $\varphi : \widehat{E} \longrightarrow F$ application linéaire bijective et isométrique telle que le diagramme suivant soit commutatif.*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\jmath"] \arrow[dr, "\imath"'] & & F \\ & \widehat{E} \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Ainsi, on peut identifier les deux espaces de Banach $(\widehat{E}, \| \|')$ et $(F, \| \|'')$.

Remarque 6.4.2. Soient $(E_1, \| \|_1)$ et $(E_2, \| \|_2)$ deux espaces normés. Donnons-nous un complété $(\widehat{E_1}, \| \|_1^{'})$ de $(E_1, \| \|_1)$ et un complété $(\widehat{E_2}, \| \|_2^{'})$ de $(E_2, \| \|_2)$. Soit $f \in \mathscr{L}(E_1; E_2)$, alors il existe une unique application $\hat{f} \in \mathscr{L}(\widehat{E_1}; \widehat{E_2})$ qui prolonge f et on a $\|\hat{f}\| = \|f\|$. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\imath"'] & E_2 \arrow[d, "\imath"] \\ \widehat{E_1} \arrow[r, "\hat{f}"] & \widehat{E_2} \end{tikzcd}$$

L'application $f \longmapsto \hat{f}$ est clairement linéaire. Ainsi, $\mathscr{L}(E_1; E_2)$ se plonge linéairement et isométriquement dans $\mathscr{L}(\widehat{E_1}; \widehat{E_2})$.

6.5 Applications multilinéaires continues

Définition 6.5.1. Soient E_1, ..., E_n, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application

$$\begin{array}{rcl} f : E_1 \times \cdots \times E_n & \longrightarrow & F \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

est dite **multilinéaire** (**bilinéaire** si $n = 2$) du produit des E_i dans F si pour tout j, $1 \leq j \leq n$, et tout $a_i \in E_i$, avec $i \neq j$, l'application

$$\begin{array}{rcl} E_j & \longrightarrow & F \\ x_j & \longmapsto & f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) \end{array}$$

est linéaire. Autrement dit, f est multilinéaire si elle est linéaire par rapport à chacune des variables.

Notons que si f est multilinéaire, alors on a $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si l'une des variables est nulle. D'autre part, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ et pour tout $\lambda_i \in \mathbb{K}$, on a $f(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n) = \big(\prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\big) f(x_1, \ldots, x_n)$.

Lemme 6.5.1. *Soient E_1, ..., E_n, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E = E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ une application multilinéaire. Pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n), a = (a_1, \ldots, a_n) \in E$, on a $f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.*

Pour une preuve du lemme précédent, voir chapitre 6 du supplément.

Proposition 6.5.1. *Soient $(E_1, \| \;\|_1), \ldots, (E_n, \| \;\|_n)$, $(F, \| \;\|')$ des espaces normés et $f : E = E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ une application multilinéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) f est continue.

(ii) f est continue en 0.

(iii) Il existe $M > 0$ tel que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, on ait :

$$\|f(x_1, \ldots, x_n)\|' \leq M \, \|x_1\|_1 \cdots \|x_n\|_n \, .$$

Démonstration. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est triviale. Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Considérons la norme $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_i$ sur E. Comme f est continue en 0, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $z \in E$ vérifiant $\|z\|_\infty \leq \eta$, on ait $\|f(z)\|' \leq 1$. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, on peut supposer tous les $x_i \neq 0$. Soit $z_i = \dfrac{\eta}{\|x_i\|_i} x_i$, alors on a $\|(z_1, \ldots, z_n)\|_\infty \leq \eta$, d'où $\left\| f\Big(\dfrac{\eta}{\|x_1\|_1} x_1, \ldots, \dfrac{\eta}{\|x_n\|_n} x_n\Big) \right\|' \leq 1$. D'autre part, on a $f\Big(\dfrac{\eta}{\|x_1\|_1} x_1, \ldots, \dfrac{\eta}{\|x_n\|_n} x_n\Big) = \dfrac{\eta^n}{\|x_1\|_1 \cdots \|x_n\|_n} f(x_1, \ldots, x_n)$, d'où $\|f(x_1, \ldots, x_n)\|' \leq \frac{1}{\eta^n} \|x_1\|_1 \cdots \|x_n\|_n$.

Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). On fixe $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E$. On veut montrer que f est continue en a. D'après le lemme précédent, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E$, on a :

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\,.$$

D'où on a :
$\|f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)\|' \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\|' \leq$
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} M\|x_i - a_i\|_i\, \|a_1\|_1 \cdots \|a_{i-1}\|_{i-1}\, \|x_{i+1}\|_{i+1} \cdots \|x_n\|_n$. On en déduit que si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B(a, 1)$, on a :

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)\|' &\leq \sum_{i=1}^{n} M\|x - a\|_\infty \big(1 + \|a\|_\infty\big)^{n-1} \\ &= nM\|x - a\|_\infty \big(1 + \|a\|_\infty\big)^{n-1}\,. \end{aligned}$$

Donc la restriction de f à $B(a, 1)$ est continue en a. Par conséquent, f est continue en a. ■

Remarque 6.5.1. Une application multilinéaire continue n'est pas toujours uniformément continue. En effet, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

est bilinéaire continue, mais n'est pas uniformément continue.

Soient $(E_1, \|\ \|_1), \ldots, (E_n, \|\ \|_n)$, $(F, \|\ \|')$ des espaces normés. Il résulte de la proposition précédente que si f et g sont des applications multilinéaires continues de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f + g$ et λf sont des applications multilinéaires continues de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F, où pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, on a :

$$(f + g)(x_1, \ldots, x_n) := f(x_1, \ldots, x_n) + g(x_1, \ldots, x_n)\,,$$

$$(\lambda f)(x_1, \ldots, x_n) := \lambda f(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

On note $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ l'espace vectoriel des applications multilinéaires continues de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F.

On démontre, comme dans les propositions 6.3.1 et 6.3.3, le résultat suivant :

Proposition 6.5.2. *Soient* $(E_1, \|\ \|_1), \ldots, (E_n, \|\ \|_n)$ *et* $(F, \|\ \|')$ *des espaces normés. Pour tout* $f \in \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, *on pose :*

$$\|f\| = \sup\big\{\|f(x_1, \ldots, x_n)\|'\ ;\ \|x_1\|_1 \leq 1, \ldots, \|x_n\|_n \leq 1\big\}\,.$$

1. *L'application* $f \longmapsto \|f\|$ *est une norme sur* $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

2. On a :

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup\big\{\|f(x_1,\dots,x_n)\|' \,;\ \|x_1\|_1 = 1,\dots,\|x_n\|_n = 1\big\}\\ &= \inf\big\{M > 0 \,;\ \|f(x_1,\dots,x_n)\|' \le M\|x_1\|_1\cdots\|x_n\|_n\big\}\\ &= \sup\Big\{\frac{\|f(x_1,\dots,x_n)\|'}{\|x_1\|_1\cdots\|x_n\|_n} \,;\ x_1 \neq 0,\dots,x_n \neq 0\Big\}.\end{aligned}$$

3. Pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$, on a l'inégalité fondamental

$$\|f(x_1,\dots,x_n)\|' \le \|f\|\ \|x_1\|_1\cdots\|x_n\|_n\,.$$

4. Si $(F, \|\ \|')$ est un espace de Banach, $\mathscr{L}(E_1,\dots,E_n; F)$ muni de la norme ci-dessus est un espace de Banach.

6.6 Espaces normés de dimension finie

Lemme 6.6.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie. Alors il existe une infinité de normes sur E.*

Démonstration. Soient n la dimension de E et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Donc pour tout $x \in E$, il existe un unique $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i$. Alors l'application

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{K}^n & \longrightarrow & E\\ (\lambda_1,\dots,\lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\end{array}$$

est linéaire bijective. Comme il y a une infinité de normes sur $\mathbb{K}^n$, voir proposition 6.2.1, on en déduit le résultat. ■

Théorème 6.6.1. *Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) E est de dimension finie.

(ii) Toutes les normes sur E sont équivalentes.

(iii) Toutes les formes linéaires sur E sont continues.

Démonstration. Montrons d'abord l'implication (i)$\Longrightarrow$ (ii). Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E, où n est la dimension de E. Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i \in E$, on pose $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$, alors $\|\ \|_\infty$ est une norme sur E. On va montrer que les deux normes $\|\ \|$ et $\|\ \|_\infty$ sont équivalentes. On a $\|x\| = \|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n\| \le \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\|e_i\| \le \Big(\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|\Big)\|x\|_\infty$. Soit

$a = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|$, alors $a > 0$, et pour tout $x \in E$, on a $\|x\| \leq a\,\|x\|_\infty$. Comme l'ensemble $\big\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \ ; \ \max\limits_{1\leq i\leq n} |\lambda_i| = 1\big\}$ est compact dans $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_\infty)$, voir corollaire 3.3.2, alors la sphère $S(0,1) = \big\{x \in E \ ; \ \|x\|_\infty = 1\big\}$ est compact dans $(E, \|\ \|_\infty)$. On a $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\| \leq a\,\|x-y\|_\infty$, donc l'application $x \longmapsto \|x\|$ est continue de $(E, \|\ \|_\infty)$ dans $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, il existe $x_0 \in S(0,1)$ tel que $\inf\limits_{\|x\|_\infty = 1} \|x\| = \|x_0\| > 0$. Autrement dit, il existe $b > 0$ tel que $b \leq \|x\|$ si $\|x\|_\infty = 1$. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$, alors on a $\Big\|\dfrac{x}{\|x\|_\infty}\Big\|_\infty = 1$, d'où $b \leq \Big\|\dfrac{x}{\|x\|_\infty}\Big\|$. Or on a $\Big\|\dfrac{x}{\|x\|_\infty}\Big\| = \dfrac{1}{\|x\|_\infty}\|x\|$, donc $b\,\|x\|_\infty \leq \|x\|$. Par conséquent, il existe $b > 0$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $b\,\|x\|_\infty \leq \|x\|$. Donc les deux normes $\|\ \|$ et $\|\ \|_\infty$ sont équivalentes. On en déduit (ii).
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire quelconque sur E. Pour tout $x \in E$, on pose $\|x\|' = |f(x)| + \|x\|$. Alors $\|\ \|'$ est une norme sur E. Par hypothèse toutes les normes sur E sont équivalentes, donc il existe $a > 0$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $\|x\|' \leq a\,\|x\|$, d'où $|f(x)| \leq a\,\|x\|$. Par conséquent, f est continue.
Pour montrer l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i), il suffit de montrer que si E est de dimension infinie, alors il existe une forme linéaire non continue sur E. On suppose donc $\dim(E) = +\infty$, et soient $(e_n)_{n\geq 1}$ une suite infinie de vecteurs de E linéairement indépendants et V le sous-espace vectoriel de E engendré par $(e_n)_{n\geq 1}$. Soient W un supplémentaire algébrique de V dans E et p la projection sur V parallèlement à W. On définit une forme linéaire φ sur V par : $\varphi(e_n) = n\|e_n\|$, donc on a $\varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, i\|e_i\|$. Soit $f = \varphi \circ p$, alors f est une forme linéaire sur E, et on a $f(e_n) = \varphi(e_n) = n\|e_n\|$, d'où $\dfrac{|f(e_n)|}{\|e_n\|} = n$. Donc on a $\sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|} = +\infty$. Par conséquent, f n'est pas continue. ∎

Corollaire 6.6.1. *Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. On a :*

1. *Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors l'application linéaire*

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ & (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \end{array}$$

   est un homéomorphisme.

2. *$(E, \|\ \|)$ est un espace de Banach.*

3. *Toute application linéaire de E dans un espace normé est continue.*

Démonstration. 1. Puisque la continuité de l'application σ ne change pas si on remplace les normes sur $\mathbb{K}^n$ et E par des normes équivalentes, alors on choisit la norme $\|\ \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ et pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in E$, on prend la norme $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$. Dans ce cas, l'application σ est une isométrie et bijective, donc c'est un homéomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans E.

2. Puisque $(\mathbb{K}^n, \| \|_\infty)$ est un espace de Banach, voir proposition 2.6.6, on en déduit que $(E, \| \|_\infty)$ est un espace de Banach. Par conséquent, $(E, \| \|)$ est un espace de Banach car les deux normes $\| \|_\infty$ et $\| \|$ sont équivalentes sur E.
3. Soient $(F, \| \|')$ un espace normé et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Il s'agit de montrer que f est continue. Pour tout $x \in E$, on pose $\|x\|'' = \|f(x)\|' + \|x\|$. Alors $\| \|''$ est une norme sur E. Puisque toutes les normes sur E sont équivalentes, alors il existe $a > 0$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $\|x\|'' \leq a\,\|x\|$, donc on a $\|f(x)\|' \leq a\,\|x\|$. Par conséquent, f est continue. ■

Corollaire 6.6.2. *Dans un espace normé $(E, \| \|)$ tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé dans E.*

Démonstration. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. D'après le corollaire précédent, $(F, \| \|)$ est un espace de Banach. On déduit de la proposition 6.4.1 que F est fermé dans E. ■

Proposition 6.6.1. *Soient $(E, \| \|)$ et $(F, \| \|')$ deux espaces normés et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire de rang fini. Autrement dit, on a $\dim(f(E)) < +\infty$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) f *est continue.*

(ii) $\ker(f)$ *est fermé dans* E.

Démonstration. On a $\ker(f) = f^{-1}(\{0\})$ et $\{0\}$ est fermé dans F, donc si f est continue, alors $\ker(f)$ est fermé dans E. Montrons maintenant l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Par hypothèse, $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel fermé dans E. D'après la proposition 6.4.4, il existe une application linéaire $\widetilde{f} : E/\ker(f) \longrightarrow F$ telle que $\widetilde{f} \circ \pi = f$. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \\
& E/\ker(f) \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Comme $\widetilde{f}$ est injective, alors on a $\dim(E/\ker(f)) = \dim(f(E)) < +\infty$. Il résulte du corollaire 6.6.1 que $\widetilde{f}$ est continue. Par conséquent, f est continue. ■

On démontre comme dans le corollaire 6.6.1 le résultat suivant :

Proposition 6.6.2. *Soient $E_1, \ldots, E_n$ des espaces normés de dimension finie et F un espace normé. Toute application multilinéaire $f : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ est continue.*

Exemple 6.6.1. Soit $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$. On identifie canoniquement $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ à $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ grâce à la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Ainsi, le choix d'une norme sur $\mathbb{K}^n$ définit une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Notons aussi que toutes les normes sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes car $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie. Donc, on peut choisir n'importe quelle norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$; cela dépend de la propriété que l'on cherche à montrer. Notons aussi que l'on peut identifier $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^{n^2} = \underbrace{\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n}_{n \text{ fois}}$, par exemple au moyen de l'isomorphisme linéaire ψ, qui à la matrice $[a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ associe l'élément $(x_k)_{1\leq k\leq n^2}$ de $\mathbb{K}^{n^2}$, défini par $x_{(i-1)n+j} = a_{ij}$, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. On déduit de la proposition précédente que l'application déterminant,

$$\begin{array}{rcl} \det \ : \ \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A = [a_{ij}] & \longmapsto & \det(A) = \displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} \end{array}$$

est continue car c'est une forme multilinéaire et l'espace normé $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie.

Théorème 6.6.2 (F. Riesz). *Soit $(E, \|\ \|)$ un espace normé. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) E est de dimension finie.

(ii) E est un espace localement compact.

(iii) La boule unité fermé $B'(0,1)$ dans $(E, \|\ \|)$ est compacte.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). D'après le corollaire 6.6.1, $(E, \|\ \|)$ est homéomorphe à $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_\infty)$ qui est localement compact. Donc $(E, \|\ \|)$ est localement compact.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Si $(E, \|\ \|)$ est un espace localement compact, alors il existe $r > 0$ tel que la boule fermé $B'(0,r)$ soit compacte. Comme la multiplication par $\frac{1}{r}$ est un homéomorphisme, alors $B'(0,1) = \frac{1}{r}B'(0,r)$ est compact.
On va donner deux démonstrations de l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i).
Première démonstration. Par hypothèse la boule unité fermé $B'(0,1)$ est compacte, donc il existe une suite finie $a_1, \ldots, a_n \in E$ telle que $B'(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\big(a_i, \frac{1}{2}\big)$. Soit F le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par les a_i. Prouvons par l'absurde que $F = E$. Supposons qu'il existe un $x \in E$ qui ne soit pas dans F. Comme F est fermé dans E, voir corollaire 6.6.2, alors on a $d(x, F) = d > 0$. Par conséquent, il existe $y \in F$ tel que $d \leq d(x,y) = \|x-y\| < 2d$. Soit $z = \dfrac{x-y}{\|x-y\|}$, alors on a $\|z\| = 1$, donc $z \in B'(0,1)$, d'où il existe i tel que $\|z - a_i\| < \frac{1}{2}$. On a :

$$x = y + x - y = y + \|x-y\|\, z = y + \|x-y\|\,(a_i + z - a_i) = y + \|x-y\|\, a_i + \|x-y\|\,(z - a_i)\,.$$

Comme $y + \|x-y\|\, a_i \in F$, alors on a $d \leq d(x,F) \leq \|x-y\|\,\|z-a_i\| < \frac{1}{2}\|x-y\|$, d'où $2d < \|x-y\|$. Ce qui contraire au choix de y. Donc on a bien $E = F$.
Deuxième démonstration. On suppose que E est de dimension infinie, et on montre qu'alors la boule unité fermé $B'(0,1)$ dans E n'est pas compacte. On va montrer, exercice 6.42, que si F est un sous-espace vectoriel fermé dans E tel que $E \neq F$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$ et $d(a, F) > 1 - \varepsilon$. Si E est de dimension infinie, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on trouve une suite infinie $(a_n)_{n\geq 1}$ dans $B'(0,1)$ telle que pour tout $n \geq 2$, on ait $d(a_n, \mathrm{Vect}(\{a_1, \ldots, a_{n-1}\})) > \frac{1}{2}$. Par conséquent, si $n \neq m$, on a $d(a_n, a_m) > \frac{1}{2}$. Donc la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ n'admet aucune sous-suite convergente. Donc la boule unité fermé $B'(0,1)$ n'est pas compacte. ∎

Corollaire 6.6.3. *Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé de dimension finie et A est un sous-ensemble de E. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. A est compact.

2. A est borné et fermé dans E.

6.7 Séries convergentes et familles sommables dans les espaces normés

On définit comme dans le cas des scalaires la notion de série dans les espaces normés.

Définition 6.7.1. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace normé. Une **série** dans E est un couple constitué de deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ dans E tel que pour tout $n \geq 0$, on ait $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. On dit que x_n est le **terme général** de la série, et que S_n est **sa somme partielle d'ordre** n . Pour simplifier l'écriture on symbolisera ce couple par la notation $\sum x_n$ ou $\sum_{n\geq 0} x_n$. On dit que la série $\sum x_n$ **converge** (ou **est convergente**) si la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ des sommes partielles converge dans E. Dans ce cas, on notera $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k$, et il est appelé **la somme de la série** $\sum x_n$. Si la série $\sum x_n$ converge, son **reste partiel de rang** n est $R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n - S_n$. Une série non convergente est dite **divergente**.

Notez qu'une série $\sum x_n$ est entièrement définie par la donnée de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ ou la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ des sommes partielles, puisque les S_n se calculent à partir des x_n, et réciproquement, on a $x_0 = S_0$ et $x_n = S_n - S_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. En résumé, une série est une suite dont on étudie les sommes partielles. La notion de série dans E se ramène donc à celle de suite ; réciproquement d'ailleurs la notion de suite se ramène à celle de série. En effet, une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans E est convergente, et de limite a si et seulement si la série $\sum x_n$, où $x_0 = a_0$ et pour tout $n \geq 1$, $x_n = a_n - a_{n-1}$, est convergente et de somme a.

Soit $(x_n)_{n\geq n_0}$ une suite dans E, définie à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$. La série $\sum x'_n$, où $(x'_n)_{n\geq 0}$ est définie par $x'_0 = x'_1 = \ldots = x'_{n_0-1} = 0$ et $x'_n = x_n$ pour $n \geq n_0$, est encore appelée série de terme général x_n et notée $\sum_{n\geq n_0} x_n$. Pour la suite $(S'_n)_{n\geq 0}$ des sommes partielles, on a alors $S'_n = \sum_{k=n_0}^{n} x_k$ pour tout $n \geq n_0$. Si la série $\sum_{n\geq n_0} x_n$ est convergente, sa somme est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$, et on a donc $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} x_k$.

Remarque 6.7.1. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé, on a :

1. La convergence ou la divergence d'une série subsiste si on remplace la norme de E par une norme équivalente ; car la convergence est une propriété topologique.

2. Si $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont deux séries convergentes dans E et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors les séries $\sum \lambda\, x_n$ et $\sum (x_n + y_n)$ sont convergentes dans E et on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda\, x_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n + \sum_{n=0}^{+\infty} y_n\,.$$

3. La nature d'une série (le fait d'être convergente ou divergente) n'est pas modifiée si l'on supprime un nombre fini de termes. Autrement dit, si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans E, alors les séries $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ et $\sum\limits_{n\geq n_0} x_n$ sont de même nature, et, si elles convergent, on a :
$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} x_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n\,.$$

4. Si $\sum x_n$ est une série convergente dans E, son reste partiel de rang n est donné par $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x_k$ et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Si E est un espace vectoriel et si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie d'éléments de E, par les propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition dans E, la somme des éléments de cette famille est bien définie et ne dépend pas de l'ordre dans lequel les x_i sont pris, et sera notée $\sum\limits_{i\in I} x_i$. Si $(E, \|\ \|)$ est un espace normé et si on considère une famille quelconque $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E, l'ensemble I des indices n'est pas ordonné en général, d'où la nécessité de définir la sommabilité des x_i indépendamment d'un ordre sur I (voir proposition 6.7.4).

Définition 6.7.2. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est **sommable** s'il existe un élément $x \in E$ possédant la propriété suivante :
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J_\varepsilon \subset I$ telle que pour toute partie finie $J \subset I$ contenant J_ε, on ait $\Big\| x - \sum\limits_{i\in J} x_i \Big\| < \varepsilon$. L'élément x est alors unique, et appelé la **somme** de la famille $(x_i)_{i\in I}$ et on notera $x = \sum\limits_{i\in I} x_i$.

Montrons l'unicité de l'élément x vérifiant la définition ci-dessus. Soient $x, y \in E$ satisfaisant aux conditions précédentes, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des parties finies J_ε et J'_ε de I telles que pour toutes parties finies J et J' de I contenant respectivement J_ε et J'_ε, on ait $\Big\| x - \sum\limits_{i\in J} x_i \Big\| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\Big\| y - \sum\limits_{i\in J'} x_i \Big\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $K = J_\varepsilon \cup J'_\varepsilon$, alors on a $\|x - y\| \leq \Big\| x - \sum\limits_{i\in K} x_i \Big\| + \Big\| y - \sum\limits_{i\in K} x_i \Big\| < \varepsilon$. Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $x = y$.

Remarque 6.7.2. Soient $(E, \| \|)$ un espace normé et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On note $\Lambda = \mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I. Alors Λ est un ensemble ordonné filtrant croissant, voir chapitre 1, paragraphe 1.8. Pour $J \in \Lambda$, on pose $S_J = \sum_{i\in J} x_i$, si $J = \emptyset$, on pose $S_\emptyset = 0$. Alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable de somme S si et seulement si la famille filtrante croissante $(S_J)_{J\in\Lambda}$ converge vers S.

Remarque 6.7.3. Soit $(E, \| \|)$ un espace normé.

1. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille sommable d'éléments de E, alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est bornée.

2. La sommabilité d'une famille d'éléments de E est inchangée si la norme $\| \|$ est remplacée par une autre norme équivalente.

3. Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont deux familles, avec le même ensemble d'indices, sommables d'éléments de E et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors les familles $(\lambda x_i)_{i\in I}$ et $(x_i + y_i)_{i\in I}$ sont sommables dans E et on a $\sum_{i\in I} \lambda x_i = \lambda \sum_{i\in I} x_i$ et $\sum_{i\in I} \lambda(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$.

4. La nature d'une famille (le fait d'être, ou non, sommable) ne change pas si l'on supprime un nombre fini de termes. Autrement dit, si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de E et si J est une partie **finie** de I, alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(x_i)_{i\in I\setminus J}$ est sommable, et dans ce cas, on a $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in J} x_i + \sum_{i\in I\setminus J} x_i$.

5. Soient $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E et J une partie de I telle que pour tout $i \notin J$, on ait $x_i = 0$, alors les deux familles $(x_i)_{i\in I}$ et $(x_i)_{i\in J}$ sont de même nature. Si elles sont sommables, alors elles ont des sommes égales ; autrement dit, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in J} x_i$.

Proposition 6.7.1. *Une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$ est sommable dans $\mathbb{R}$ si et seulement si l'ensemble $\left\{ \sum_{i\in J} \lambda_i \ ; \ J \text{ fini } \subset I \right\}$ est majoré. Dans ce cas, on a :*

$$\sum_{i\in I} \lambda_i = \sup \left\{ \sum_{i\in J} \lambda_i \ ; \ J \text{ fini } \subset I \right\}.$$

Démonstration. Supposons d'abord que la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est sommable de somme μ et soit J une partie finie de I. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe une partie finie J_ε de I telle que pour toute partie finie K de I contenant J_ε, on ait $\left|\mu - \sum_{i\in K} \lambda_i\right| < \varepsilon$. En particulier, on a $\left|\mu - \sum_{i\in J\cup J_\varepsilon} \lambda_i\right| < \varepsilon$ d'où $\sum_{i\in J\cup J_\varepsilon} \lambda_i < \varepsilon + \mu$. Or on a $\sum_{i\in J} \lambda_i \leq \sum_{i\in J\cup J_\varepsilon} \lambda_i$, donc $\sum_{i\in J} \lambda_i < \varepsilon + \mu$. Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\sum_{i\in J} \lambda_i \leq \mu$. Par conséquent, l'ensemble $\left\{ \sum_{i\in J} \lambda_i \ ; \ J \text{ fini } \subset I \right\}$ est majoré. Réciproquement, supposons que $\lambda = \sup\left\{\sum_{i\in J}\lambda_i \ ;\ J \text{ fini } \subset I\right\} < +\infty$. D'après la définition de la borne supérieure, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J_ε de I telle que $\lambda - \varepsilon < \sum_{i\in J_\varepsilon}\lambda_i \le \lambda$. Alors pour toute partie finie J de I contenant J_ε, on a $\sum_{i\in J_\varepsilon}\lambda_i \le \sum_{i\in J}\lambda_i \le \lambda$, d'où $\lambda - \varepsilon < \sum_{i\in J}\lambda_i \le \lambda$. Donc on a $\left|\lambda - \sum_{i\in J}\lambda_i\right| < \varepsilon$. Par conséquent, la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est sommable et on a $\sum_{i\in I}\lambda_i = \lambda = \sup\left\{\sum_{i\in J}\lambda_i \ ;\ J \text{ fini } \subset I\right\}$. ■

Remarque 6.7.4. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé et $(x_n)_{n\ge 0}$ une suite dans E. Il est évident que si la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, alors la série $\sum x_n$ est convergente dans E, et dans ce cas, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$. La réciproque est en générale fausse : il suffit de prendre $E = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ et pour tout $n \ge 1$, $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, alors la série $\sum x_n$ est convergente, mais la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable. Toutefois, dans le cas des séries de nombres réels positifs, les deux notions coïncident. Le corollaire suivant résulte de la proposition précédente.

Corollaire 6.7.1. *Soit $(x_n)_{n\ge 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) La famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

(b) La série $\sum x_n$ est convergente.

(c) La suite des sommes partielles $(S_n)_{n\ge 0}$ est majorée.

(d) L'ensemble $\left\{\sum_{i\in J} x_i \ ;\ J \textit{ fini } \subset \mathbb{N}\right\}$ est majoré.

Si ces conditions sont vérifiées, on a l'égalité :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sup\left\{\sum_{i\in J} x_i \ ;\ J \textit{ fini } \subset \mathbb{N}\right\} = \sup_{n\ge 0} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n .$$

L'intérêt des espaces de Banach est que, dans de tels espaces, on peut reconnaître qu'une série (*resp.* une famille) est convergente (*resp.* est sommable) sans connaître à l'avance la somme de la série (*resp.* de la famille).

Définition 6.7.3. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé.

1. On dit qu'une série $\sum x_n$ d'éléments de E vérifie le **critère de Cauchy** si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\ge 0}$ est une suite de Cauchy dans E. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n \ge m \ge N$, on ait $\left\|\sum_{k=m}^{n} x_k\right\| < \varepsilon$.

2. On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E vérifie le **critère de Cauchy** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J_\varepsilon \subset I$ telle que pour toute partie finie $J \subset I$ disjointe de J_ε, on ait $\Big\| \sum_{i\in J} x_i \Big\| < \varepsilon$.

Notons que si la famille $(x_i)_{i\in I}$ vérifie le critère de Cauchy, alors pour toute partie $J \subset I$, la famille $(x_i)_{i\in J}$ vérifie aussi le critère de Cauchy.

Proposition 6.7.2. *Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé, $\sum x_n$ une série d'éléments de E et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.*

1. *Si la série $\sum x_n$ est convergente, alors elle vérifie le critère de Cauchy.*

2. *Si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, alors elle vérifie le critère de Cauchy.*

3. *Si $(E, \|\ \|)$ est un espace de Banach et si la série $\sum x_n$ vérifie le critère de Cauchy, alors elle est convergente.*

4. *Si $(E, \|\ \|)$ est un espace de Banach et si la famille $(x_i)_{i\in I}$ vérifie le critère de Cauchy, alors elle est sommable.*

Démonstration. Les propriétés 1, 2 et 3 sont faciles à vérifier. Montrons la propriété 4. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de $(E, \|\ \|)$ vérifiant le critère de Cauchy. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J_ε de I telle que pour toute partie finie J de I vérifiant $J \cap J_\varepsilon = \emptyset$, on ait $\Big\| \sum_{i\in J} x_i \Big\| < \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $n \geq 1$, il existe une partie finie J_n de I telle que pour toute partie finie J de I vérifiant $J \cap J_n = \emptyset$, on ait $\Big\| \sum_{i\in J} x_i \Big\| < \frac{1}{n}$. On peut aussi supposer $J_n \subset J_{n+1}$. On pose $S_n = \sum_{i\in J_n} x_i$, alors pour tout $p, n \geq 1$, on a $\|S_{n+p} - S_n\| = \Big\| \sum_{i\in J_{n+p}\setminus J_n} x_i \Big\| < \frac{1}{n}$. Donc la suite $\big(S_n\big)_{n\geq 1}$ est de Cauchy. Or $(E, \|\ \|)$ est un espace de Banach, donc la suite $\big(S_n\big)_{n\geq 1}$ converge vers un élément $S \in E$. Montrons que $(x_i)_{i\in I}$ est sommable et de somme S. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n \geq 1$ tel que $\big\|S_n - S\big\| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit J une partie finie de I contenant J_n, on a :

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{i\in J} x_i - S \Big\| &= \Big\| S_n - S + \sum_{i\in J\setminus J_n} x_i \Big\| \\ &\leq \big\| S_n - S \big\| + \Big\| \sum_{i\in J\setminus J_n} x_i \Big\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable et de somme S. ■

Corollaire 6.7.2. *Soient $(E, \|\ \|)$ un espace de Banach et $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments de E. Alors toute sous-famille $(x_i)_{i\in I'}$, où $I' \subset I$, est sommable dans E.*

On a un autre critère suffisant de convergence et de sommabilité dans les espaces de Banach ; un tel critère est fourni par la notion suivante :

Définition 6.7.4. Soit $(E, \| \|)$ un espace normé.

1. On dit qu'une série $\sum x_n$ d'éléments de E est **normalement convergente** si la série à termes positifs $\sum \|x_n\|$ est convergente dans $\mathbb{R}_+$.

2. On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est **normalement sommable** si la famille à termes positifs $(\|x_i\|)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}_+$.

Si $E = \mathbb{K}$, une série $\sum x_n$ d'éléments de $\mathbb{K}$ normalement convergente est dite **absolument convergente** et une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ normalement sommable est dite **absolument sommable**.
On déduit du corollaire 6.7.1 le corollaire suivant :

Corollaire 6.7.3. *Soient $(E, \| \|)$ un espace normé et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de E. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) La série $\sum x_n$ est normalement convergente.

(ii) La famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est normalement sommable.

Théorème 6.7.1. *Soit $(E, \| \|)$ un espace normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $(E, \| \|)$ est un espace de Banach.

(ii) Toute série $\sum x_n$ d'éléments de E normalement convergente est convergente dans E. Dans ce cas, on a l'inégalité $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$.

(iii) Toute famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E normalement sommable est sommable dans E.
Dans ce cas, on a l'inégalité $\left\| \sum_{i\in I} x_i \right\| \leq \sum_{i\in I} \|x_i\|$.

Démonstration. Montrons d'abord l'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans E telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $q > p \geq N$, on ait $\sum_{n=p+1}^{q} \|x_n\| < \varepsilon$. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$, alors pour tout $q > p$, on a $S_q - S_p = \sum_{n=p+1}^{q} x_n$, d'où on a $\|S_q - S_p\| \leq \sum_{n=p+1}^{q} \|x_n\| < \varepsilon$. Donc la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans E, donc convergente. Comme pour tout $n \geq 0$, on a $\left\| \sum_{k=0}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|x_k\| \leq$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$. On en déduit que l'on a $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$.
Montrons l'implication $(ii) \Longrightarrow (i)$. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans E. D'après la proposition 2.6.2, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ de $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout $k \geq 0$, on ait $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}$, d'où on a $\sum_{k=0}^{+\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < +\infty$. Par hypothèse, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ est convergente. Or la somme partielle d'ordre k de cette série n'est autre que $x_{n_{k+1}} - x_{n_0}$. Ainsi la suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ est convergente, et il en est de même de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$, voir proposition 2.6.2.
L'implication $(iii) \Longrightarrow (ii)$ résulte du corollaire précédent et de la remarque 6.7.4. Il reste à montrer l'implication $(i) \Longrightarrow (iii)$. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E normalement sommable. Alors la famille $\big(\|x_i\|\big)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$ vérifie le critère de Cauchy, donc la famille $(x_i)_{i\in I}$ vérifie le critère de Cauchy. D'après la proposition précédente, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable dans E. Soit $S = \sum_{i\in I} x_i$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J_ε de I telle que $\left\| S - \sum_{i\in J_\varepsilon} x_i \right\| < \varepsilon$. Donc on a $\|S\| < \varepsilon + \left\| \sum_{i\in J_\varepsilon} x_i \right\| < \varepsilon + \sum_{i\in J_\varepsilon} \|x_i\|$. D'après la proposition 6.7.1, on a $\sum_{i\in J_\varepsilon} \|x_i\| \leq \sum_{i\in I} \|x_i\|$. Donc on a $\|S\| < \varepsilon + \sum_{i\in I} \|x_i\|$. Comme ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que l'on a $\|S\| \leq \sum_{i\in I} \|x_i\|$. ■

Remarque 6.7.5. 1. Dans un espace de Banach une famille peut être sommable sans être normalement sommable. En effet, il suffit de prendre $E = \ell^2$, et pour tout $n \geq 0$, soit $a_n = \big(0, \cdots, 0, \frac{1}{n+1}, 0, \cdots\big)$, alors la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et de somme $a = \big(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\big)$. On a $\|a_n\|_2 = \frac{1}{n+1}$, donc la famille $(\|a_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable.

2. Dans un espace normé une famille normalement sommable n'est pas nécessairement sommable. En effet, soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynômiales muni de la norme $\|P\|_\infty = \max_{0\leq x\leq 1} |P(x)|$. Pour tout $n \geq 0$, soit $P_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$. Alors on a $\|P_n\|_\infty = \dfrac{1}{n!}$, donc la famille $(\|P_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable de somme e, mais la série $\sum P_n$ n'est même pas convergente dans E. Donc la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable dans E.

Remarque 6.7.6. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé, H un sous-espace vectoriel fermé de E et $\pi : E \longrightarrow E/H$ l'application quotient. On a vu, proposition 6.4.5, que si E est un espace de Banach, alors E/H muni de la norme quotient $\|\ \|'$ est aussi un espace de Banach. On va donner ci-dessous une autre preuve plus simple de ce résultat en utilisant le théorème précédent. Supposons donc que $(E, \|\ \|)$ est un espace de Banach. Pour montrer que E/H est de Banach, on montre que toute série d'éléments de E/H

normalement convergente est convergente dans E/H. Soit $\sum_{n\geq 0} y_n$ une série d'éléments de E/H normalement convergente. Pour tout $n \geq 0$, il existe $x_n \in E$ tel que $\pi(x_n) = y_n$ et $\|x_n\| < \|y_n\|' + \frac{1}{2^n}$. On en déduit que la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ est normalement convergente dans E. Comme $(E, \| \ \|)$ est un espace de Banach, alors il existe $x \in E$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k = x$. Comme π est linéaire continue, alors on a $\pi(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \pi(x_k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} y_k$. Donc la série $\sum_{n\geq 0} y_n$ est convergente dans E/H. Par conséquent, E/H est un espace de Banach.

Remarque 6.7.7. Soient X un ensemble quelconque, $(E, \| \ \|)$ un espace de Banach et $B(X, E)$ l'ensemble des applications de X dans E bornées en normes. On le munit de sa structure naturelle d'espace vectoriel et de la norme $\|f\|_\infty = \sup\big\{\|f(x)\| \ ; \ x \in X\big\}$. Muni de cette norme, $B(X, E)$ est un espace de Banach, voir théorème 5.2.3 ou proposition 2.6.8. Une série $\sum f_n$ dans $B(X, E)$ est dite **uniformément convergente** si elle est convergente pour la norme définie ci-dessus, **normalement convergente** si $\sum_n \|f_n\|_\infty$ est convergente. La convergence normale entraîne le convergence uniforme. Notons également que si X est un espace topologique, la somme d'une série uniformément convergente d'applications continues est continue, voir théorème 5.2.1 et corollaire 5.2.1.

Le résultat suivant montre que la différence entre la théorie des familles sommables et celle des séries ne tient pas à la cardinalité de l'ensemble des indices.

Proposition 6.7.3. *Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé et $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments de E . Alors on a :*

1. *L'ensemble $I' = \{i \in I \ ; \ x_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable. Plus précisément, il existe une suite croissante $(I_n)_{n\geq 1}$ de parties finies de I telles que $I' = \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$*

2. *Soit $(J_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de parties finies de I telles que $I' \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} J_n$, alors la suite $(S_n)_{n\geq 1}$, où $S_n = \sum_{i\in J_n} x_i$, est convergente dans $(E, \| \ \|)$ et on a $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{i\in I} x_i$.*

Démonstration. 1. Pour tout $n \geq 1$, soit $I_n = \big\{i \in I \ ; \ \|x_i\| > \frac{1}{n}\big\}$. Comme la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, alors elle vérifie le critère de Cauchy. Donc il existe une partie finie J de I telle que pour toute partie finie K de I ne rencontrant pas J, on ait $\Big\|\sum_{i\in K} x_i\Big\| < \frac{1}{n}$, et en particulier $\|x_i\| < \frac{1}{n}$ si $i \notin J$. D'où on a $I_n \subset J$, et donc I_n est finie. Or on a $I' = \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$, donc I' est au plus dénombrable.

2. Soit $J = \bigcup_{n=1}^{+\infty} J_n$. D'après la remarque 6.7.3, la famille $(x_i)_{i\in J}$ est sommable et on a

$\sum_{i\in J} x_i = \sum_{i\in I} x_i$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie K de J telle que pour toute partie finie L de J contenant K, on ait $\Big\|\sum_{i\in J} x_i - \sum_{i\in L} x_i\Big\| < \varepsilon$. Comme K est une partie finie de J, il existe $N \geq 1$ tel que $K \subset J_N$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a $K \subset J_n$, d'où $\Big\|\sum_{i\in J} x_i - S_n\Big\| < \varepsilon$. Par conséquent, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente et on a $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{i\in I} x_i$. ■

La proposition précédente nous dit que l'on peut toujours se ramener au cas $I = \mathbb{N}$ à l'aide de la remarque 6.7.3.
Rappelons qu'une permutation d'un ensemble I est une bijection de I sur I. La proposition suivante montre que la notion de sommabilité d'une famille est indépendante de toute notion d'ordre sur les indices.

Proposition 6.7.4. *Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé et $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments de E. Alors pour toute permutation φ de I, la famille $(x_{\varphi(i)})_{i\in I}$ est sommable et on a $\sum_{i\in I} x_{\varphi(i)} = \sum_{i\in I} x_i$.*

Démonstration. Soient $S = \sum_{i\in I} x_i$ et φ une permutation de I. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe une partie finie J_ε de I tel que pour toute partie finie J de I contenant J_ε, on ait $\Big\|S - \sum_{i\in J} x_i\Big\| < \varepsilon$. Soit $J'_\varepsilon = \varphi^{-1}(J_\varepsilon)$, alors J'_ε est une partie finie de I. Pour toute partie finie J' de I contenant J'_ε, on a $J_\varepsilon \subset \varphi(J')$ et $\varphi(J')$ est une partie finie de I. Donc on a $\Big\|S - \sum_{i\in J'} x_{\varphi(i)}\Big\| < \varepsilon$. Par conséquent, la famille $(x_{\varphi(i)})_{i\in I}$ est sommable et on a $\sum_{i\in I} x_{\varphi(i)} = \sum_{i\in I} x_i$. ■

La définition suivante est donc naturelle.

Définition 6.7.5. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé et $\sum x_n$ une série d'éléments de E. On dit que la série $\sum x_n$ est **commutativement convergente** lorsque pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum x_{\sigma(n)}$ est convergente.

Remarquons que cette définition n'impose pas à priori que les séries $\sum x_n$ et $\sum x_{\sigma(n)}$ aient même somme.
Pour toute partie finie non vide B de $\mathbb{N}$, on note φ_B l'unique bijection croissante de B sur l'ensemble $\{1, \ldots, \mathrm{Card}(B)\}$.

Lemme 6.7.1. *Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties finies non vides de $\mathbb{N}$, deux à deux disjointes. Alors il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que si $R_n = \sigma(A_n)$, la suite des parties R_n vérifie $\max(R_n) < \min(R_{n+1})$ pour tout $n \geq 0$, et les éléments de R_n sont consécutifs dans $\mathbb{N}$.*

Pour une preuve du lemme précédent, voir chapitre 6 du supplément.

Théorème 6.7.2. *Soient* $(E, \| \|)$ *un espace de Banach et* $(x_n)_{n\geq 0}$ *une suite d'éléments de* E *. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) La série $\sum x_n$ *est commutativement convergente.*

(ii) La famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est sommable.*

Dans ce cas, pour toute permutation σ *de* $\mathbb{N}$*, on a* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

Démonstration. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) résulte de la proposition précédente et de la remarque 6.7.4.
Preuve de (i) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons que la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable. Puisque $(E, \| \|)$ est de Banach, on déduit de la proposition 6.7.2 que la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne vérifie pas le critère de Cauchy, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute partie finie J de $\mathbb{N}$, il existe une partie finie non vide K de $\mathbb{N}$ telle que $J \cap K = \emptyset$ et $\Big\| \displaystyle\sum_{p\in K} x_p \Big\| \geq \varepsilon$. On va construire par récurrence une suite $(A_n)_{n\geq 0}$ de parties finies non vides de $\mathbb{N}$, deux à deux disjointes, telles que $\Big\| \displaystyle\sum_{p\in A_n} x_p \Big\| \geq \varepsilon$. Soit A_0 une partie finie non vide de $\mathbb{N}$ telle que $\Big\| \displaystyle\sum_{p\in A_0} x_p \Big\| \geq \varepsilon$. Supposons construites les n premières parties vérifiant les propriétés cherchées. On pose $J = \overset{n-1}{\underset{k=0}{\cup}} A_k$, alors J est une partie finie de $\mathbb{N}$, et donc il existe une partie finie non vide A_n de $\mathbb{N}$ telle que $J \cap A_n = \emptyset$ et $\Big\| \displaystyle\sum_{p\in A_n} x_p \Big\| \geq \varepsilon$. Ainsi, la récurrence est construite. Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$ comme dans le lemme précédent. Pour tout $n \geq 0$, soit $y_n = x_{\sigma^{-1}(n)}$, alors on a $\Big\| \displaystyle\sum_{p\in R_n} y_p \Big\| = \Big\| \displaystyle\sum_{j\in A_n} y_\sigma(j) \Big\| = \Big\| \displaystyle\sum_{j\in A_n} x_j \Big\| \geq \varepsilon$. On en déduit que la série $\sum x_{\sigma^{-1}(n)}$ ne vérifie pas le critère de Cauchy, donc $\sum x_{\sigma^{-1}(n)}$ n'est pas convergente. C'est une contradiction. Par conséquent, la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien sommable.
Supposons à présent que la série $\sum x_n$ est commutativement convergente et soit σ une permutation de $\mathbb{N}$. On déduit de la remarque 6.7.4 et de la proposition 6.7.4 que l'on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\sigma(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$. ∎

Il est bien connu qu'une série à termes réels peut être convergente sans être absolument convergente, par exemple $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$, on dit alors qu'elle est semi–convergente. Un théorème célèbre, dû à Riemann, affirme que si $\sum x_n$ est une série à termes réels semi–convergente, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe une permutation σ_a de $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum x_{\sigma_a(n)}$ converge vers a. Pour une preuve de tel théorème le lecteur peut consulter ([27], p. 76).

Le théorème suivant montre une différence importante entre la théorie des séries et celles des familles sommables.

Théorème 6.7.3. *Dans un espace normé de dimension finie, une famille est sommable si et seulement si elle est normalement sommable.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 6 du supplément.

On déduit de tout ce qui précède le corollaire suivant :

Corollaire 6.7.4. *Soient $(E, \| \|)$ un espace de Banach et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans E.*

1. *Si la série $\sum x_n$ est normalement convergente, alors elle est commutativement convergente et pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.*
2. *Si E est de dimension finie, alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   (a) *La série $\sum x_n$ est commutativement convergente.*
   (b) *La série $\sum x_n$ est normalement convergente.*
   (c) *La famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.*
   (d) *La famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est normalement sommable.*

Remarque 6.7.8. Soient $(E, \| \|)$ un espace normé, $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans E et $(k_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs. On pose $y_0 = \displaystyle\sum_{p=0}^{k_0} x_p$ et pour tout $n \geq 1$, soit $y_n = \displaystyle\sum_{p=k_{n-1}+1}^{k_n} x_p$. On a :

1. Si la série $\sum x_n$ vérifie le critère de Cauchy, il en est de même de la série $\sum y_n$.
2. Si la série $\sum x_n$ est convergente, alors la série $\sum y_n$ est convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n .$$

En fait, si pour tout $n \geq 0$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} y_k$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$, alors pour tout $n \geq 0$, on a $T_n = S_{k_n}$. Autrement dit, $\big(T_n\big)_{n\geq 0}$ est une sous-suite de la suite $\big(S_n\big)_{n\geq 0}$. Remarquons qu'il peut arriver que la série $\sum y_n$ converge et que la série $\sum x_n$ diverge : par exemple si $E = \mathbb{R}$, $x_n = (-1)^n$ et $k_n = 2n+1$, alors $y_n = x_{2n} + x_{2n+1} = 0$.

Théorème 6.7.4 (sommation par paquets). *Soient $(E, \| \|)$ un espace de Banach, $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments de E et $(I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ une partition de I. On a :*

1. *Pour tout $\alpha \in \Lambda$, la famille $(x_i)_{i\in I_\alpha}$ est sommable.*

2. La famille $\Big(\sum_{i\in I_\alpha} x_i\Big)_{\alpha\in\Lambda}$ *est sommable et on a* $\sum_{\alpha\in\Lambda}\Big(\sum_{i\in I_\alpha} x_i\Big) = \sum_{i\in I} x_i$.

Démonstration. 1. Comme $(x_i)_{i\in I}$ est une famille sommable et $(E, \|\ \|)$ est un espace de Banach, d'après le corollaire 6.7.2, pour tout $\alpha\in\Lambda$, la famille $(x_i)_{i\in I_\alpha}$ est sommable.
2. On note $S_\alpha = \sum_{i\in I_\alpha} x_i$ et $S = \sum_{i\in I} x_i$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que pour toute partie finie K de I contenant J, on ait $\Big\|\sum_{i\in K} x_i - S\Big\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $\Gamma = \{\alpha\in\Lambda\ ;\ I_\alpha\cap J\neq\emptyset\}$, alors Γ est une partie finie de Λ et on va montrer que pour toute partie finie B de Λ contenant Γ, on a $\Big\|\sum_{\alpha\in B} S_\alpha - S\Big\| < \varepsilon$. Soient B une telle partie et $d = \mathrm{Card}(B)$. Pour tout $\alpha\in B$, la sous-famille $(x_i)_{i\in I_\alpha}$ est sommable de somme S_α, donc il existe une partie finie J_α de I_α telle que pour toute partie finie K_α de I_α contenant J_α, on ait $\Big\|\sum_{i\in K_\alpha} x_i - S_\alpha\Big\| < \dfrac{\varepsilon}{2d}$. Pour tout $\alpha\in B$, on pose $K_\alpha = J_\alpha\cup(J\cap I_\alpha)$, alors on a $J_\alpha\subset K_\alpha\subset I_\alpha$ et $K = \bigcup_{\alpha\in B} K_\alpha$ est une partie finie de I contenant J. Comme les I_α sont deux à deux disjoints, alors les K_α sont disjoints deux à deux, et donc on a $\sum_{i\in K} x_i = \sum_{\alpha\in B}\Big(\sum_{i\in K_\alpha} x_i\Big)$. On a :

$$
\begin{aligned}
\Big\|S - \sum_{\alpha\in B} S_\alpha\Big\| &= \Big\|S - \sum_{i\in K} x_i + \sum_{i\in K} x_i - \sum_{\alpha\in B} S_\alpha\Big\| \\
&\leq \Big\|S - \sum_{i\in K} x_i\Big\| + \Big\|\sum_{\alpha\in B}\Big(\sum_{i\in K_\alpha} x_i\Big) - \sum_{\alpha\in B} S_\alpha\Big\| \\
&\leq \Big\|S - \sum_{i\in K} x_i\Big\| + \sum_{\alpha\in B}\Big\|\sum_{i\in K_\alpha} x_i - S_\alpha\Big\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{\alpha\in B}\frac{\varepsilon}{2d} = \varepsilon\,.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, la famille $\Big(\sum_{i\in I_\alpha} x_i\Big)_{\alpha\in\Lambda}$ est sommable et de somme $\sum_{i\in I} x_i$. ■

Corollaire 6.7.5. *Soient* $(E, \|\ \|)$ *un espace de Banach et* $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ *une famille sommable d'éléments de* E*. Alors on a :*

1. *Pour tout* $i\in I$*, la famille* $(x_{i,j})_{j\in J}$ *est sommable.*
2. *La famille* $\Big(\sum_{j\in J} x_{i,j}\Big)_{i\in I}$ *est sommable.*
3. *Pour tout* $j\in I$*, la famille* $(x_{i,j})_{i\in I}$ *est sommable.*
4. *La famille* $\Big(\sum_{i\in I} x_{i,j}\Big)_{j\in J}$ *est sommable.*

5. *On a* $\displaystyle\sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J} x_{i,j}\Big) = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I} x_{i,j}\Big) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j}$.

6. *Si* $I \times J = \mathbb{N}^2$*, on a de plus :*

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} x_{n,m} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{k=0}^{n} x_{k,n-k}\Big) \quad (\textbf{\textit{sommation par diagonale}}).$$

Remarque 6.7.9. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E . Soit $(I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ une partition finie de I, *i.e.* Λ est un ensemble fini, alors on a :

1. Si pour tout $\alpha \in \Lambda$, la famille $(x_i)_{i\in I_\alpha}$ est de Cauchy, alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est de Cauchy.

2. Si pour tout $\alpha \in \Lambda$, la famille $(x_i)_{i\in I_\alpha}$ est sommable, alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable et dans ce cas, on a $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{\alpha\in\Lambda}\Big(\sum_{i\in I_\alpha} x_i\Big)$.

Notez que l'hypothèse Λ est fini est essentielle.

Remarque 6.7.10. Soient $(a_i)_{i\in I}$ une famille dans $\mathbb{R}_+$ et $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une partition de I. Alors la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si :

1. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, la famille $(a_i)_{i\in I_\lambda}$ est sommable.

2. La famille $\displaystyle\Big(\sum_{i\in I_\lambda} a_i\Big)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable.

Dans ce cas, on a $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i = \sum_{\lambda\in\Lambda}\Big(\sum_{i\in I_\lambda} a_i\Big)$.

Proposition 6.7.5. *1. Soient* $(a_i)_{i\in I}$ *et* $(b_j)_{j\in J}$ *deux familles sommables d'éléments du corps* $\mathbb{K}$*. Alors la famille* $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ *est sommable dans* $\mathbb{K}$ *et on a :*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \Big(\sum_{i\in I} a_i\Big)\Big(\sum_{j\in J} b_j\Big).$$

2. Si $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *sont deux séries dans* $\mathbb{K}$ *absolument convergentes. Alors la série* $\displaystyle\sum\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big)$ *est absolument convergente et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big).$$

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 6 du supplément.

Proposition 6.7.6. *Soient* $(E, \|\ \|)$*,* $(F, \|\ \|')$ *deux espaces normés et* $f : E \longrightarrow F$ *une application linéaire continue. Alors on a :*

1. *Si* $\sum x_n$ *est une série convergente de somme* x *dans* E*, alors la série* $\sum f(x_n)$ *est convergente dans* F *et de somme* $f(x)$*.*

2. *Si* $(x_i)_{i\in I}$ *est une famille sommable de somme* S *dans* E*, alors la famille* $(f(x_i))_{i\in I}$ *est sommable dans* F *et de somme* $f(S)$*.*

Démonstration. 1. Soit $x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$, alors on a $x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k$. Comme f est linéaire et continue, alors on a $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f\Big(\sum_{k=0}^{n} x_k\Big) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f(x_k)$. Donc la série $\sum f(x_n)$ est convergente dans F et de somme $f(x)$.
2. Soit $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J_\varepsilon \subset I$ tel que pour toute partie finie $J \subset I$ contenant J_ε, on ait $\Big\|S - \sum_{i\in J} x_i\Big\| < \varepsilon$, d'où on a :

$$\Big\|f(S) - \sum_{i\in J} f(x_i)\Big\| = \Big\|f\Big(S - \sum_{i\in J} x_i\Big)\Big\| \leq \Big\|S - \sum_{i\in J} x_i\Big\| \, \|f\| < \varepsilon \, \|f\| \, .$$

Donc la famille $(f(x_i))_{i\in I}$ est sommable dans F et de somme $f(S)$. ■

Proposition 6.7.7. *Soient* $(E, \| \|)$*,* $(F, \| \|')$ *deux espaces normés,* $(G, \| \|'')$ *un espace de Banach et* $f : E \times F \longrightarrow B$ *une application bilinéaire continue. Soit* $(x_i)_{i\in I}$ *(resp.* $(y_j)_{j\in J}$*) une famille sommable d'éléments de* E *(resp.* F*) de somme* a *(resp.* b*). Si les deux familles sont normalement sommables, alors la famille* $(f(x_i, y_j))_{(i,j)\in I\times J}$ *est normalement sommable et aussi sommable et de somme* $f(a, b)$*. Autrement dit, dans ce cas, on a :*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} f(x_i, y_j) = f\Big(\sum_{i\in I} x_i, \sum_{j\in J} y_j\Big) .$$

Démonstration. Comme f est bilinéaire continue, il existe $M > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in E \times F$, on ait $\|f(x, y)\|'' \leq M \|x\| \, \|y\|'$, voir proposition 6.5.1. Soit K une partie finie de $I \times J$, alors il existe une partie finie I_1 de I et une partie finie J_1 de J telles que $K \subset I_1 \times J_1$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in K} \|f(x_i, y_j)\|'' &\leq \sum_{(i,j)\in I_1\times J_1} \|f(x_i, y_j)\|'' \\
&\leq M \sum_{(i,j)\in I_1\times J_1} \|x_i\| \, \|y_j\|' \\
&= M\Big(\sum_{i\in I_1} \|x_i\|\Big)\Big(\sum_{j\in J_1} \|y_j\|'\Big) \\
&\leq M\Big(\sum_{i\in I} \|x_i\|\Big)\Big(\sum_{j\in J} \|y_j\|'\Big) .
\end{aligned}$$

D'après la proposition 6.7.1, la famille $(f(x_i, y_j))_{(i,j)\in I\times J}$ est alors normalement sommable. Comme $(G, \| \|'')$ est un espace de Banach, d'après le théorème 6.7.1, la famille

$(f(x_i, y_j))_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable dans $(G, \| \|'')$. Soit $i \in I$, d'après le corollaire 6.7.5 et la proposition précédente, la famille $(f(x_i, y_j))_{j\in J}$ est sommable dans $(G, \| \|'')$ et de somme $f(x_i, b)$. Une fois de plus, on applique le corollaire 6.7.5 et la proposition précédente, on obtient que la famille $(f(x_i, b))_{i\in I}$ est sommable et de somme $f(a, b)$, et que l'on a $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} f(x_i, y_j) = f(a, b)$. ■

6.8 Parties totales et séparabilité

Proposition 6.8.1. *Tout $\mathbb{K}$-espace normé de dimension finie est séparable.*

Démonstration. Si E est un $\mathbb{K}$-espace normé de dimension finie, alors E est un $\mathbb{R}$-espace normé de dimension finie. Soient $x_1, \cdots, x_n$ une base de E et $D = \Big\{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ ; \ \lambda_i \in \mathbb{Q}\Big\}$. Alors D est dénombrable et dense dans E. En effet, l'ensemble $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable et D est l'image de l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \end{array}$$

donc D est dénombrable. Montrons que D est dense dans E. Soient $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe des $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ tels que $|\alpha_i - \lambda_i| < \dfrac{\varepsilon}{n\beta}$, où $\beta = \displaystyle\max_{1\le i\le n} \|x_i\|$. Alors on a $\Big\|x - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big\| < \varepsilon$. Par conséquent, D est dense dans E. ■

Définition 6.8.1. Soient E un espace normé et A une partie de E. On dit que A est **totale** dans E si le sous-espace vectoriel (algébrique) engendré par A est dense dans E. Une famille libre et totale d'un espace normé E est appelée **base topologique** de E.

Notons qu'une partie génératrice est totale ; la réciproque est en général fausse : un sous-espace vectoriel dense d'un espace normé E distinct de E est total et non générateur.

Proposition 6.8.2. *Soit $(E, \| \|)$ un espace normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) E est séparable.

(ii) E possède une partie totale et au plus dénombrable.

(iii) Il existe une suite croissante $(F_n)_{n\geq 0}$ de sous-espaces vectoriels de dimension finie de E telle que $\bigcup\limits_{n\geq 0} F_n$ soit dense dans E.

Démonstration. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est triviale. Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $A = \{a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$ une partie totale et au plus dénombrable dans E. Pour tout $n \geq 0$, soit $F_n = Vect\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$. Alors on a $0 \leq \dim(F_n) \leq n + 1$ et

$\bigcup\limits_{n \geq 0} F_n$ est dense dans E.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). Soit D_n une partie au plus dénombrable et dense dans F_n. Alors $D = \bigcup\limits_{n \geq 0} D_n$ est au plus dénombrable et dense dans E. Donc E est séparable. ■

Proposition 6.8.3. *Soit* $(E, \| \ \|)$ *un espace normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'espace E *est séparable.*

(ii) La boule unité fermée $B'(0, 1)$ *est séparable.*

(iii) La boule unité ouverte $B(0, 1)$ *est séparable.*

(iv) La sphère unité $S(0, 1)$ *est séparable.*

Démonstration. Puisque tout sous-espace d'un espace métrique séparable est séparable, voir théorème 2.2.1, les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) sont triviales.
Preuve de (iv) $\Longrightarrow$ (i). Soit $D = \{x_n \ ; \ n \geq 0\}$ une partie au plus dénombrable et dense dans $S(0, 1)$. Montrons que D est une partie totale de E, *i.e.* $\overline{\text{Vect}(D)}$ est dense dans E. Comme on a $0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_n}{n}$ et $\frac{x_n}{n} \in \text{Vect}(D)$, alors $0 \in \overline{\text{Vect}(D)}$. Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in E$ tel que $x \neq 0$. Alors on a $\dfrac{x}{\|x\|} \in S(0, 1)$. Comme D est dense dans $S(0, 1)$, il existe x_n tel que $\left\| \dfrac{x}{\|x\|} - x_n \right\| < \dfrac{\varepsilon}{\|x\|}$, d'où on a $\|x - \|x\| x_n\| < \varepsilon$. Donc $x \in \overline{\text{Vect}(D)}$. Par conséquent, $\text{Vect}(D)$ est dense dans E. ■

Proposition 6.8.4. *Soient* $(E, \| \ \|)$ *un espace normé et* F *un sous-espace vectoriel fermé de* E*. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'espace E *est séparable.*

(ii) Les espaces F *et* E/F *sont séparables.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 6 du supplément.
On a montré, corollaire 3.4.5 et proposition 3.6.1, le résultat suivant :

Proposition 6.8.5. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace compact et* $C(X)$ *l'espace vectoriel des applications continues de* X *dans* $\mathbb{K}$ *muni de la norme* $\| \ \|_\infty$*. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'espace $(X, \mathcal{T})$ *possède une base dénombrable d'ouverts.*

(ii) L'espace $(X, \mathcal{T})$ *est métrisable.*

(iii) L'espace de Banach $(C(X), \| \ \|_\infty)$ *est séparable.*

Remarque 6.8.1. On va voir, exercices 6.34 et 6.35, que pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace de Banach ℓ^p est séparable. Par contre, l'espace de Banach ℓ^∞ n'est pas séparable.

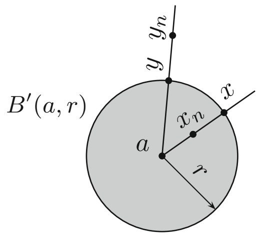
6.9 Exercices

Exercice 6.1. Soient $(E, \| \,\|)$ un espace normé, $a \in E$ et $r > 0$. Montrer que l'on a :

$$\overline{B(a,r)} = B'(a,r) \quad \text{et} \quad \overbrace{B'(a,r)}^{\circ} = B(a,r)\,.$$

En déduire que l'on a $\mathrm{Fr}\big(B'(a,r)\big) = \mathrm{Fr}\big(B(a,r)\big) = \{x \in E\ ;\ \|x-a\| = r\}$.

Solution. On a déjà vu, exercice 2.1, que l'on a $\overline{B(a,r)} \subset B'(a,r)$ et $B(a,r) \subset \overbrace{B'(a,r)}^{\circ}$. Pour montrer les inclusions réciproques, il faut exploiter la structure d'espace vectoriel de E. Soit $x \in B'(a,r)$, on va construire une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ appartenant au segment $[a,\, x[\subset B(a,r)$ et convergeant vers x. Un élément de $[a,\, x[$ est de la forme $(1-t)x + ta$, avec $0 < t \leq 1$. On pose $x_n = \big(1-\frac{1}{n}\big)x + \frac{1}{n}a$, alors la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers x. D'autre part, on a $x_n - a = \big(1-\frac{1}{n}\big)(x-a)$, d'où $\|x_n - a\| = \big(1-\frac{1}{n}\big)\|x-a\| \leq (1-\frac{1}{n})r < r$, donc $x_n \in B(a,r)$. Par conséquent, on a $x \in \overline{B(a,r)}$, d'où $\overline{B(a,r)} = B'(a,r)$.



On va donner deux preuves de l'inclusion $\overbrace{B'(a,r)}^{\circ} \subset B(a,r)$.

Première preuve : on montre que $E \setminus B(a,r) \subset E \setminus \overbrace{B'(a,r)}^{\circ}$. Soit $y \in E \setminus B(a,r)$, alors on a $\|y-a\| \geq r$. On va construire une suite $(y_n)_{n\geq 2}$ dans le fermé $E \setminus \overbrace{B'(a,r)}^{\circ}$ qui converge vers y, ceci impliquera que $y \in E \setminus \overbrace{B'(a,r)}^{\circ}$. Soit y_n tel que $y = \big(1-\frac{1}{n}\big)y_n + \frac{1}{n}a$; autrement dit, on a $y_n = \frac{n}{n-1}y - \frac{1}{n-1}a$, donc la suite $(y_n)_{n\geq 2}$ converge vers y, et on a $y_n - a = \frac{n}{n-1}(y-a)$, d'où $\|y_n - a\| = \frac{n}{n-1}\|y-a\| \geq \frac{n}{n-1}r > r$, donc $y_n \in E \setminus B'(a,r) \subset E \setminus \overbrace{B'(a,r)}^{\circ}$.

Deuxième preuve : on montre directement l'inclusion $\overbrace{B'(a,r)}^{\circ} \subset B(a,r)$. Soit $z \in \overbrace{B'(a,r)}^{\circ}$, avec $z \neq a$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(z, 2\varepsilon) \subset B'(a,r)$. Soit $t = z + \varepsilon\dfrac{z-a}{\|z-a\|}$, alors on a $\|t-z\| = \varepsilon < 2\varepsilon$, donc $t \in B'(a,r)$. On a $t - a = z - a + \varepsilon\dfrac{z-a}{\|z-a\|} = \dfrac{\|z-a\|+\varepsilon}{\|z-a\|}(z-a)$, d'où $\|z-a\| < \|z-a\| + \varepsilon = \|t-a\| \leq r$. Donc on a $z \in B(a,r)$, d'où $\overbrace{B'(a,r)}^{\circ} \subset B(a,r)$.

Pour toute partie A d'un espace topologique X, on a $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$, voir exercice 1.10. On en déduit que l'on a :

$$\mathrm{Fr}\big(B'(a,r)\big) = \mathrm{Fr}\big(B(a,r)\big) = B'(a,r) \setminus B(a,r) = \{x \in E\ ;\ \|x-a\| = r\}\,.$$

Exercice 6.2. Soient $(E, \| \,\|)$ un espace normé, $a, b \in E$ et $r > 0$, $\lambda > 0$.

1. Montrer que l'on a $B(a,r) + b = B(a+b, r)$ et $B'(a,r) + b = B'(a+b, r)$.

2. Montrer que l'on a $\lambda\, B(a,r) = B(\lambda a, \lambda r)$ et $\lambda\, B'(a,r) = B'(\lambda a, \lambda r)$.

Solution. 1. Soit $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} x \in B(a+b,r) &\iff \|a+b-x\| < r \\ &\iff \|a-(x-b)\| < r \\ &\iff x-b \in B(a,r) \\ &\iff x \in B(a,r)+b\,. \end{aligned}$$

Donc on a $B(a+b,r) = B(a,r)+b$. De même, on a $B'(a+b,r) = B'(a,r)+b$.
2. Soit $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} x \in B(\lambda a,\lambda r) &\iff \|\lambda a - x\| < \lambda r \\ &\iff \left\|a - \tfrac{x}{\lambda}\right\| < r \\ &\iff \tfrac{x}{\lambda} \in B(a,r) \\ &\iff x \in \lambda\, B(a,r)\,. \end{aligned}$$

Donc on a $B(\lambda a,\lambda r) = \lambda\, B(a,r)$. De même, on a $B'(\lambda a,\lambda r) = \lambda\, B'(a,r)$.

Exercice 6.3. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé, $a, b \in E$ et $r > 0, s > 0$.

1. Montrer que $B(a,r) \subset B(b,s) \iff B'(a,r) \subset B'(b,s) \iff \|a-b\| \le s-r$.
2. En déduire que $B(a,r) = B(b,s) \iff B'(a,r) = B'(b,s) \iff a = b$ et $s = r$.
3. Montrer que si E est un espace de Banach, alors toute intersection d'une suite décroissante de boules fermées dans E est une boule fermée dans E.

Solution. 1. La première équivalence résulte de l'exercice 6.1. Montrons la deuxième équivalence. Supposons d'abord que $\|a-b\| \le s-r$. Soit $x \in B'(a,r)$, alors on a :

$$\|b-x\| \le \|b-a\| + \|a-x\| \le s-r+r = s\,.$$

Donc on a $x \in B'(b,s)$, d'où $B'(a,r) \subset B'(b,s)$.
Réciproquement, supposons que $B'(a,r) \subset B'(b,s)$. Si $a = b$, on pose $x = a + r\dfrac{a}{\|a\|}$ si $a \neq 0$, et si non, on pose $x = r\dfrac{y}{\|y\|}$, avec $y \neq 0$. Alors on a $\|a-x\| = r$, d'où $x \in B'(a,r) \subset B'(a,s)$, donc on a $\|a-x\| \le s$. Par conséquent, on a $r \le s$ et $\|b-a\| = 0 \le s-r$. On suppose maintenant $a \neq b$, donc on a $\|b-a\| > 0$. Soit $x = a + r\dfrac{a-b}{\|a-b\|}$, alors on a $\|a-x\| = r$, donc $x \in B'(a,r) \subset B'(b,s)$. D'autre part, on a $x - b = a - b + r\dfrac{a-b}{\|a-b\|} = \dfrac{\|a-b\|+r}{\|a-b\|}(a-b)$, d'où $\|a-b\|+r = \|x-b\| \le s$. Par conséquent, on a $\|a-b\| \le s-r$.

2. Cela résulte immédiatement de 1.
3. On suppose que $(E, \| \|)$ est un espace de Banach. Soit $\big(B'(a_n, r_n)\big)_{n\geq 0}$ une suite de boules fermées dans E telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $B'(a_{n+1}, r_{n+1}) \subset B'(a_n, r_n)$. Donc pour tout $m \geq n$, on a $\|a_m - a_n\| \leq r_n - r_m$. On en déduit que la suite $(r_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée par 0, et que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans E. Soient $r = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n$ et $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Montrons que l'on a $B'(a, r) = \bigcap\limits_{n\geq 0} B'(a_n, r_n)$. On fait tendre m vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient $\|a_n - a\| \leq r_n - r$ pour tout $n \geq 0$, donc on a $B'(a, r) \subset \bigcap\limits_{n\geq 0} B'(a_n, r_n)$. Réciproquement, soit $x \in \bigcap\limits_{n\geq 0} B'(a_n, r_n)$, alors pour tout ≥ 0, on a $\|a_n - x\| \leq r_n$. On fait tendre n vers $+\infty$, on obtient $\|a - x\| \leq r$, donc $x \in B'(a, r)$, d'où on a $\bigcap\limits_{n\geq 0} B'(a_n, r_n) \subset B'(a, r)$. Par conséquent, on a $B'(a, r) = \bigcap\limits_{n\geq 0} B'(a_n, r_n)$.

Exercice 6.4. Soient $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et $r > 0$.

1. Montrer que $B(0, r)$ est homéomorphe à E.
2. En déduire que pour tout $a \in E$, $B(a, r)$ est homéomorphe à E.
3. En déduire que $U_r = \{x \in E \ ; \ \|x\| > r\}$ est homéomorphe à $E \setminus \{0\}$.

Solution. 1. Soit $x \in E$, alors on a $x \in B(0, r) \iff \|x\| < r \iff r - \|x\| > 0$. D'où l'idée de considérer l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : B(0, r) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{r - \|x\|} \end{array}$$

Soient $x \in B(0, r)$ et $y \in E$, alors on a $\dfrac{x}{r - \|x\|} = y \iff x = \dfrac{r\, y}{1 + \|y\|}$. Donc f est bijective et on a $f^{-1}(y) = \dfrac{r\, y}{r + \|y\|}$. Comme f et f^{-1} sont des composées d'applications continues, alors f et f^{-1} sont continues. Par conséquent, f est un homéomorphisme.
2. Pour tout $a \in E$, l'application $x \longmapsto x + a$ est un homéomorphisme de E et on a $B(a, r) = B(0, r) + a$, on en déduit que $B(a, r)$ est homéomorphe à E.
3. Soit $x \in E$, alors on a $\|x\| > r \iff \dfrac{1}{\|x\|} < \dfrac{1}{r} \iff \left\| \dfrac{x}{\|x\|^2} \right\| < \dfrac{1}{r}$. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} g : & U_r & \longrightarrow & B\big(0, \frac{1}{r}\big) \setminus \{0\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{\|x\|^2} \end{array}$$

alors g est un homéomorphisme. Donc U_r est homéomorphe à $B\big(0, \frac{1}{r}\big) \setminus \{0\}$ qui est homéomorphe à $E \setminus \{0\}$.

Remarque 6.9.1. Soient $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et $r > 0$. Alors les applications suivantes

$$\begin{array}{rccc} f : & B(0, r) & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2r\, x}{r^2 - \|x\|^2} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rccc} g : & B(0, r) & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{\sqrt{r^2 - \|x\|^2}} \end{array}$$

sont des homéomorphismes et on a :

$$f^{-1}(y) = \frac{r\,y}{1+\sqrt{1+\|y\|^2}} \quad , \quad g^{-1}(y) = \frac{r\,y}{\sqrt{1+\|y\|^2}} \,.$$

L'intérêt des ces applications ce qu'elles sont de classe « C^∞ ».

Remarque 6.9.2. Pour tout $n \geq 1$, Soit $\|\ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et soient :

$$B^n = \big\{x \in \mathbb{R}^n \ ;\ \|x\| \leq 1\big\} \quad \text{et} \quad \mathbb{S}^{n-1} = \big\{x \in \mathbb{R}^n \ ;\ \|x\| = 1\big\}\,.$$

L'application suivante

$$\begin{array}{rccc} g: & \overset{\circ}{B^n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{\sqrt{1-\|x\|^2}} \end{array}$$

est un homéomorphisme et on a $g^{-1}(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1+\|y\|^2}}$, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.

Soit $N = (0,\ldots,0,1)$ le pôle nord de $\mathbb{S}^n = \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ ;\ \|(x,t)\| = 1\big\}$. Alors l'application suivante

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{S}^n \setminus N & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (x,t) & \longmapsto & \dfrac{x}{1-t} \end{array}$$

est un homéomorphisme, appelée la **projection stéréographique** du pôle nord, et on a :

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1}: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{S}^n \setminus N \\ & x & \longmapsto & \Big(\dfrac{2x}{1+\|x\|^2}, \dfrac{\|x\|^2-1}{1+\|x\|^2}\Big) \end{array}$$

Soit $\rho = g^{-1} \circ \varphi$, alors :

$$\begin{array}{rccc} \rho: & \mathbb{S}^n \setminus N & \longrightarrow & \overset{\circ}{B^n} \\ & (x,t) & \longmapsto & \dfrac{x}{\sqrt{2(1-t)}} \end{array}$$

est un homéomorphisme. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \pi\ : & B^n & \longrightarrow & \mathbb{S}^n \\ & x & \longmapsto & \Big(2\sqrt{1-\|x\|^2}\,x,\ 2\|x\|^2-1\Big) \end{array}$$

alors π est une application continue surjective et fermée car B^n est compact. De plus, pour $x \in B^n$, on a $\pi(x) = N$ si et seulement si $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Notons aussi que la restriction de π à $\overset{\circ}{B^n}$ est égale à ρ^{-1}. On déduit du corollaire 1.4.1 qu'il existe un homéomorphisme $\widetilde{\pi}$ de $B^n/\mathbb{S}^{n-1}$ sur $\mathbb{S}^n$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} B^n \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "q"'] & & \mathbb{S}^n \\ & B^n/\mathbb{S}^{n-1} \arrow[ur, "\widetilde{\pi}"'] & \end{tikzcd}$$

Autrement dit, $\mathbb{S}^n$ est obtenue de B^n en identifiant sa frontière $\mathbb{S}^{n-1}$ à un point.

Exercice 6.5. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\| \|_1$, $\| \|_2$ deux normes équivalentes sur E. Soient B_1 et B_2 les boules unités fermées de $(E, \| \|_1)$ et $(E, \| \|_2)$ respectivement. Considérons l'application $\Phi : (E, \| \|_1) \longrightarrow (E, \| \|_2)$ définie par $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(x) = \dfrac{\|x\|_1}{\|x\|_2}x$ si $x \neq 0$. Montrer que Φ est un homéomorphisme. En déduire que B_1 et B_2 sont homéomorphes.

Solution. Il est clair que Φ est bijective et que l'on a $\Phi^{-1}(0) = 0$ et $\Phi^{-1}(x) = \dfrac{\|x\|_2}{\|x\|_1}x$ si $x \neq 0$. Pour tout $x \in E$, on a $\|\Phi(x)\|_2 = \|x\|_1$, donc Φ est continue en 0. Soit a un élément non nul de E. D'après la proposition 2.2.3, Φ est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ convergeant vers a dans $(E, \| \|_1)$, alors la suite $\big(\Phi(x_n)\big)_{n\geq 0}$ converge vers $\Phi(a)$ dans $(E, \| \|_2)$. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une telle suite, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\|_1 = \|a\|_1$. Comme $\| \|_1$ et $\| \|_2$ sont équivalentes, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ converge aussi vers a dans $(E, \| \|_2)$. Donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ dans $(E, \| \|_2)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\|_2 = \|a\|_2$. Puisque l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times (E, \| \|_2) & \longrightarrow & (E, \| \|_2) \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

est continue, voir proposition 6.1.2, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi(x_n) = \Phi(a)$ dans $(E, \| \|_2)$, donc Φ est continue en a. Par conséquent, Φ est continue. On démontre de même que Φ^{-1} est continue, donc Φ est homéomorphisme. Pour tout $x \in E$, on a $\|\Phi(x)\|_2 = \|x\|_1$, donc $\Phi(B_1) = B_2$. Par conséquent, B_1 et B_2 sont homéomorphes.

Exercice 6.6. Soient E un espace vectoriel et $\| \|_1$, $\| \|_2$ deux normes sur E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Les deux normes sont équivalentes.

(ii) Les distances associées aux normes sont équivalentes.

(iii) Les deux normes définissent la même topologie sur E.

Solution. Il résulte des définitions 6.1.2 et 2.3.2 que l'on a les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Montrons l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i). Les deux normes définissent la même topologie sur E si et seulement si l'application identité

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_E : & (E, \| \|_1) & \longrightarrow & (E, \| \|_2) \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

est un homéomorphisme. Or id_E est de plus linéaire, alors il résulte du théorème 6.3.1 que id_E est un homéomorphisme s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que pour tout $x \in E$, on ait $\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$. Par conséquent, les deux normes définissent la même topologie sur E si et seulement si les deux normes sont équivalentes.

Exercice 6.7. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $\| \|_1$, $\| \|_2$ deux normes sur E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $\| \|_1 = \| \|_2$. Autrement dit, pour tout $x \in E$, on a $\|x\|_1 = \|x\|_2$.

(ii) Les deux normes ont la même sphère unité.

(iii) Les deux normes ont la même boule unité ouverte (ou fermée).

Solution. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est claire. Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit x un élément non nul de E. On a $\left\| \dfrac{x}{\|x\|_1} \right\|_1 = 1$, donc $\dfrac{1}{\|x\|_1}\|x\|_2 = \left\| \dfrac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 = 1$, d'où $\|x\|_1 = \|x\|_2$.
L'implication (i) $\Longrightarrow$ (iii) est claire. Montrons l'implication réciproque. Soit x un élément non nul de E. Alors, pour tout $n \geq 1$, on a $\left\| \big(1 - \frac{1}{n}\big) \dfrac{x}{\|x\|_1} \right\|_1 = 1 - \frac{1}{n} < 1$, donc $\big(1 - \frac{1}{n}\big) \dfrac{1}{\|x\|_1}\|x\|_2 = \left\| \big(1 - \frac{1}{n}\big) \dfrac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 < 1$, d'où $\big(1 - \frac{1}{n}\big)\|x\|_2 < \|x\|_1$. On fait tendre n vers + l'infini, on obtient $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. De même, on montre que l'on a $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$. Donc, pour tout $x \in E$, on a $\|x\|_1 = \|x\|_2$.

Exercice 6.8. Soient $(E, \| \|)$ un espace normé et A, D deux sous-ensembles de E tels que $A \subset \overline{D}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $A \subset D + B(0, \varepsilon)$.
Solution. Soient $a \in A$ et $\varepsilon > 0$, alors $a - B(0, \varepsilon)$ est un ouvert de E contenant a. Par conséquent, on a $\big(a - B(0, \varepsilon)\big) \cap D \neq \emptyset$, donc il existe $x \in B(0, \varepsilon)$ et $d \in D$ tels que $a - x = d$, d'où $a = d + x \in D + B(0, \varepsilon)$. Donc on a $A \subset D + B(0, \varepsilon)$.

Exercice 6.9. Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E, \| \|)$.

1. Montrer que $\overline{F}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

2. Montrer que si F est distinct de E, alors F est d'intérieur vide.

3. Déterminer le sous-espace vectoriel de E engendré par la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1.

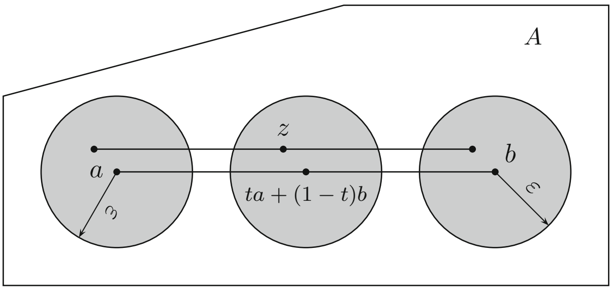
Solution. 1. Soient $x, y \in \overline{F}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors il existe deux suites $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ dans F telles que $x = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ et $y = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$. Comme on a :

$$\|x + \lambda y - (x_n + \lambda y_n)\| \leq \|x - x_n + \lambda(y - y_n)\| \leq \|x - x_n\| + |\lambda| \, \|y - y_n\|$$

alors la suite $(x_n + \lambda y_n)_{n \geq 0}$ converge vers $x + \lambda y$. Puisque F est sous-espace vectoriel de E, alors la suite $(x_n + \lambda y_n)_{n \geq 0}$ est dans F, donc on a $x + \lambda y \in \overline{F}$. Par conséquent, F est un sous-espace vectoriel de E.
2. On suppose $F \neq E$. Si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, alors il existe $x \in F$ et $r > 0$ tels que $B(x, r) \subset F$.

Alors on a $B(0,r) = B(x,r) - x \subset F$. Soit y un élément non nul de E, alors $z = \dfrac{ry}{2\|y\|} \in B(0,r) \subset F$. Donc $y = \dfrac{2\|y\|}{r} z \in F$, d'où on a $E = F$ ce qui contredit l'hypothèse, donc on a bien $\overset{\circ}{F} = \emptyset$.
3. Le sous-espace vectoriel de E engendré par la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 est d'intérieur non vide, donc il est égal à E.

Exercice 6.10. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et A un sous-ensemble convexe de E. Montrer que $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ sont des sous-ensembles convexes de E.
Solution. Soient $x, y \in \overline{A}$ et $t \in [0,\ 1]$, alors il existe deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ dans A telles que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. On déduit du corollaire 6.1.1 que l'on a $tx + (1-t)y = \lim\limits_{n\to+\infty} tx_n + (1-t)y_n$. Comme A est convexe, alors $tx_n + (1-t)y_n \in A$, pour tout $n \geq 0$. Par conséquent, on a $tx + (1-t)y \in \overline{A}$, donc $\overline{A}$ est convexe.
Pour montrer que $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert, on va donner deux preuves.
Première preuve. Pour tout $t \in [0,\ 1]$, $t\overset{\circ}{A} + (1-t)\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de $(E, \|\ \|)$ et contenu dans $tA + (1-t)A \subset A$, donc on a $t\overset{\circ}{A} + (1-t)\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{A}$. Autrement dit, $\overset{\circ}{A}$ est convexe.
Deuxième preuve. Soient $a, b \in \overset{\circ}{A}$ et $t \in [0,\ 1]$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset A$ et $B(b,\varepsilon) \subset A$. Montrons que l'on a $B(ta + (1-t)b, \varepsilon) \subset A$. Soit $z \in B(ta + (1-t)b, \varepsilon)$. On a $ta + (1-t)b - z = b - (z - t(a-b))$ et $ta + (1-t)b - z = a - (z + (1-t)(a-b))$, on en déduit $z - t(a-b) \in B(b,\varepsilon) \subset A$ et $z + (1-t)(a-b) \in B(a,\varepsilon) \subset A$. Comme A est convexe, alors $z = (1-t)[z - t(a-b)] + t[z + (1-t)(a-b)] \in A$. Par conséquent, on a $B(ta + (1-t)b, \varepsilon) \subset A$, d'où $ta + (1-t)b \in \overset{\circ}{A}$. Donc $\overset{\circ}{A}$ est convexe.



Exercice 6.11. Soient E un espace normé et A un sous-ensemble convexe de E.

1. Soient $u \in \overset{\circ}{A}$ et $v \in A$. Montrer que l'intervalle $]u,\ v[= \{(1-t)u + tv\ ;\ 0 < t < 1\}$ est contenu dans $\overset{\circ}{A}$.

2. Soient $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ et $x \in \overline{A}$. On se propose de montrer que l'intervalle $]x_0,\ x[= \{(1-t)x_0 + tx\ ;\ 0 < t < 1\}$ est contenu dans $\overset{\circ}{A}$. Soit $y \in]x_0,\ x[$, alors il existe $t \in]0,\ 1[$ tel que $y = (1-t)x_0 + tx$.

   (i) Montrer qu'il existe $u \in \overset{\circ}{A}$ et $v \in A$ tels que $y \in]u,\ v[$. (Considérer l'homothétie de centre y transformant x en x_0).

(ii) En déduire que $y \in \overset{\circ}{A}$.

3. Montrer que si $\overset{\circ}{A}$ est non vide, alors on a $\overline{A} = \overline{\overset{\circ}{A}}$.

4. Montrer que si $\overset{\circ}{A}$ est non vide, alors on a $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\overline{A}}$. (Si $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ et $x \in \overset{\circ}{\overline{A}}$, montrer qu'il existe $x_1 \in \overline{A}$ tel que $x \in]x_0,\, x_1[$).

Solution. 1. Soit $y \in]u,\, v[$, alors il existe $t \in]0,\, 1[$ tel que $y = (1-t)u + tv$. Comme $u \in \overset{\circ}{A}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(u,\varepsilon) \subset A$. En considérant le cône de base $B(u,\varepsilon)$ et de sommet v, on a l'idée de poser $z = (1-t)u' + tv$, où $u' \in B(u,\varepsilon)$ et $z \in B(y,\alpha)$ à déterminer. On a $z - y = (1-t)(u'-u)$, donc $u' \in B(u,\varepsilon) \iff z \in B(y,(1-t)\varepsilon)$. Soit $z \in B(y,(1-t)\varepsilon)$ et posons $u' = \frac{1}{1-t}(z - tv)$, alors on a $u' - u = \frac{1}{1-t}(z-y)$, d'où $u' \in B(u,\varepsilon) \subset A$. Comme A est convexe, alors $z \in A$, d'où $B(y,(1-t)\varepsilon) \subset A$. Donc on a $y \in \overset{\circ}{A}$.
2(i). Soient $y \in]x_0,\, x[$ et $t \in]0,\, 1[$ tels que $y = (1-t)x_0 + tx$. Une homothétie de E de centre y est de la forme $h(z) = y + \lambda(y-z)$, pour tout $z \in E$, où $\lambda \in \mathbb{K}$, fixé. On veut de plus que $x_0 = h(x) = y + \lambda(y-x)$, d'où $y = \frac{1}{1+\lambda}x_0 + \frac{\lambda}{1+\lambda}x$. Or on a $y = (1-t)x_0 + tx$, il suffit de prendre $\lambda = \frac{t}{1-t}$. Donc on a $h(z) = y + \frac{t}{1-t}(y-z)$, pour tout $z \in E$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B\big(x_0, \frac{t}{1-t}\varepsilon\big) \subset \overset{\circ}{A}$. Comme on a $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, alors il existe $v \in B(x,\varepsilon) \cap A$. Soit $u = h(v) = y + \frac{t}{1-t}(y-z)$, alors on a $x_0 - u = \frac{t}{1-t}(v-x)$, d'où $\|x_0 - u\| < \frac{t}{1-t}\varepsilon$. Donc on a $u \in \overset{\circ}{A}$. Or on a $u = y + \frac{t}{1-t}(y-v)$, d'où $y = (1-t)u + tv \in]u,\, v[$, avec $u \in \overset{\circ}{A}$ et $v \in A$.
2(ii). Il résulte de 1 et de 2(i) que $y \in \overset{\circ}{A}$, donc on a $]x_0,\, x[\subset \overset{\circ}{A}$.
3. Supposons $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$. On a toujours $\overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{A}$. Réciproquement, soient $x \in \overline{A}$ et $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. D'après 2, on a $]x_0,\, x[\subset \overset{\circ}{A}$. Comme on a $x = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}x_0 + \big(1 - \frac{1}{n}\big)x$, alors $x \in \overline{\overset{\circ}{A}}$, donc $\overline{A} \subset \overline{\overset{\circ}{A}}$. Par conséquent, on a $\overline{A} = \overline{\overset{\circ}{A}}$.
4. Supposons $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$. On a toujours $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{A}}$. Réciproquement, soient $x \in \overset{\circ}{\overline{A}}$ et $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset \overline{A}$. Pour tout $n \geq 2$, soit $x_n = \frac{n}{n-1}x - \frac{1}{n-1}x_0$, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, donc il existe $p \geq 2$ tel que $x_p \in B(x,\varepsilon) \subset \overline{A}$. Comme on a $x = \big(1 - \frac{1}{p}\big)x_p + \frac{1}{p}x_0 \in]x_0,\, x_p[$, il résulte de 2 que $x \in \overset{\circ}{A}$. Donc on a $\overset{\circ}{\overline{A}} \subset \overset{\circ}{A}$, d'où $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\overline{A}}$.

Remarque 6.9.3. Dans le chapitre 9, on généralisera les résultats obtenus dans les exercices 6.9, 6.10 et 6.11, voir propositions 9.1.3 et 9.1.4.

Exercice 6.12. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé et $x, y \in E$ tels que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Montrer que pour tout $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$, on a $\|\alpha x + \beta y\| = \alpha\|x\| + \beta\|y\|$.
Solution. On peut supposer $\alpha \geq \beta$. On a $\alpha x + \beta y = \alpha(x+y) - (\alpha-\beta)y$, d'où :

$$\alpha\|x+y\| - (\alpha-\beta)\|y\| \leq \|\alpha(x+y) - (\alpha-\beta)y\| = \|\alpha x + \beta y\| \leq \alpha\|x\| + \beta\|y\| .$$

Or on a $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, on en déduit $\|\alpha x + \beta y\| = \alpha\|x\| + \beta\|y\|$.

Exercice 6.13. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé.

1. Montrer que pour tout $x, y, z \in E$, on a :

$$\|x\| + \|z - x\| \leq \|y\| + \|z - y\| + 2\|x - y\| .$$

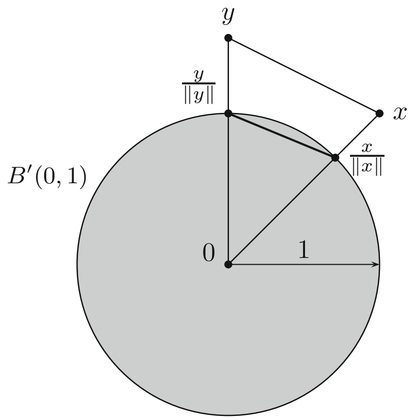
2. Montrer que si $x, y \in E$ tels que $\|x\| = 1$ et $0 < \|y\| \leq 1$, alors on a :

$$\|x - y\| \geq \frac{1}{2}\left\|x - \frac{y}{\|y\|}\right\| .$$

3. Soient x et y deux éléments non nuls de E. Montrer que l'on a :

(∗) $$\|x - y\| \geq \tfrac{1}{2} \max\big(\|x\|, \|y\|\big) \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|$$

(∗∗) $$\|x - y\| \geq \tfrac{1}{4}\big(\|x\| + \|y\|\big) \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| .$$



Solution. 1. Soient $x, y, z \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \|x\| + \|z - x\| &= \|x - y + y\| + \|z - y + y - x\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y\| + \|z - y\| + \|y - x\| \\ &= \|y\| + \|z - y\| + 2\|x - y\| . \end{aligned}$$

2. Soient $x, y \in E$ tels que $\|x\| = 1$ et $0 < \|y\| \leq 1$. On pose $z = \dfrac{y}{\|y\|}$ dans 1, on obtient $1 + \left\|x - \dfrac{y}{\|y\|}\right\| \leq \|y\| + \left\|\dfrac{y}{\|y\|} - y\right\| + 2\|x - y\|$. Puisque l'on a :

$$\|y\| + \left\|\frac{y}{\|y\|} - y\right\| = \|y\| + \frac{1}{\|y\|}\left\|(1 - \|y\|)y\right\| = \|y\| + 1 - \|y\| = 1 ,$$

on en déduit l'inégalité cherchée.
3. Soient x et y deux éléments non nuls de E. On a $\max\big(\|x\|, \|y\|\big) \geq \frac{1}{2}\big(\|x\| + \|y\|\big)$, donc il suffit de démontrer l'inégalité (∗). Si $\|x\| = 1$ et $\|y\| \leq 1$, l'inégalité (∗) est réduite

à l'inégalité $\|x-y\| \geq \dfrac{1}{2}\left\|x - \dfrac{y}{\|y\|}\right\|$, et ceci a été fait dans 2. Si $\|x\| = \|y\|$, l'inégalité $(*)$ est triviale. Donc on peut supposer $\|x\| \geq \|y\|$, d'où $\left\|\dfrac{y}{\|x\|}\right\| \leq 1$. On déduit de 2 que l'on a $\left\|\dfrac{x}{\|x\|} - \dfrac{y}{\|x\|}\right\| \geq \dfrac{1}{2}\left\|\dfrac{x}{\|x\|} - \dfrac{y}{\|x\|\frac{\|y\|}{\|x\|}}\right\|$. Donc on a $\|x-y\| \geq \frac{1}{2}\|x\|\left\|\dfrac{x}{\|x\|} - \dfrac{y}{\|y\|}\right\|$. Or on a $\max\big(\|x\|, \|y\|\big) = \|x\|$, on en déduit l'inégalité $(*)$.

Exercice 6.14. Soient $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace normé et x, y, z trois vecteurs non linéairement indépendants dans E. Il s'agit de Montrer l'inégalité suivante :

$$(*) \qquad \|x+y\| + \|y+z\| + \|z+x\| \leq \|x\| + \|y\| + \|z\| + \|x+y+z\| .$$

1. Vérifier que l'inégalité $(*)$ est inchangée en faisant le changement de variables suivant :
$$x' = x,\ y' = y \text{ et } z' = -x-y-z\,.$$

2. Montrer que l'on peut se ramener au cas où $x + \beta y + \gamma z = 0$, avec $0 \leq \beta \leq 1$ et $0 \leq \gamma \leq 1$.

3. Montrer l'inégalité $(*)$.

Solution. 1. On a $\|x'+y'\| = \|x+y\|$, $\|y'+z'\| = \|x+z\|$, $\|x'+z'\| = \|y+z\|$, $\|x'\| = \|x\|$, $\|y'\| = \|y\|$, $\|z'\| = \|x+y+z\|$ et $\|x'+y'+z'\| = \|z\|$. Donc l'inégalité $(*)$ est inchangée en faisant un tel changement de variables.
2. Puisque l'inégalité $(*)$ est symétrique en x, y et z, on peut considérer que l'on a la relation $x+sy+tz = 0$, avec $s, t \in \mathbb{R}$. Si $t \notin [0,\, 1]$, on pose $x' = x$, $y' = y$ et $z' = -x-y-z$, et on obtient $(1-t)x' + (s-t)y' - tz' = 0$, d'où on a $x' + \frac{(s-t)}{1-t}y' - \frac{t}{1-t}z' = 0$, avec $0 \leq -\frac{t}{1-t} \leq 1$. Donc on a $x' + by' + cz' = 0$, avec $0 \leq c \leq 1$. Si $b \notin [0,\, 1]$, on pose $x'' = x'$, $y'' = -x'-y'-z'$ et $z'' = z'$, et on obtient $(1-b)x'' - by'' + (c-b)z'' = 0$, d'où on a $x'' - \frac{b}{1-b}y'' + \frac{c-b}{1-b}z'' = 0$, avec $0 \leq -\frac{b}{1-b} \leq 1$ et $0 \leq \frac{c-b}{1-b} \leq 1$. Par conséquent, on peut considérer que l'on a la relation $x + \beta y + \gamma z = 0$, avec $0 \leq \beta \leq 1$ et $0 \leq \gamma \leq 1$.
3. On a $x+y = (1-\beta)y - \gamma z$ et $-(x+z) = \beta y - (1-\gamma)z$, d'où on a $\|x+y\| \leq (1-\beta)\|y\| + \gamma\|z\|$ et $\|x+z\| \leq \beta\|y\| + (1-\gamma)\|z\|$. On a $\|y+z\| = \|(x+y+z)-x\| \leq \|x+y+z\| + \|x\|$. Par conséquent, on a bien l'inégalité $(*)$.

Exercice 6.15. Soit A un sous-ensemble d'un espace normé $(E, \|\ \|)$. Montrer que A est précompact si, et seulement si, A est borné et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel F_ε de E de dimension finie tel que pour tout $x \in A$, on ait $d(x, F_\varepsilon) < \varepsilon$.
Solution. Supposons d'abord que A est précompact. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $x_1, \ldots, x_n \in E$ tels que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$. Donc A est borné. Soit $F_\varepsilon = \mathrm{Vect}\big(\{x_1, \ldots, x_n\}\big)$, alors F_ε est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et pour tout $x \in A$, on a $d(x, F_\varepsilon) < \varepsilon$.
Réciproquement, supposons que A est borné et que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel F_ε de E de dimension finie tel que pour tout $x \in A$, on ait $d(x, F_\varepsilon) < \varepsilon$. Soit $r > 0$ tel que $A \subset B(0, r)$. Soient $\varepsilon > 0$ et F_ε un sous-espace vectoriel de E de dimension finie tel que pour tout $x \in A$, on ait $d(x, F_\varepsilon) < \varepsilon$. L'ensemble $F_\varepsilon \cap B'(0, r+\varepsilon)$ est compact, donc il existe $x_1, \ldots, x_n \in E$ tels que $F_\varepsilon \cap B'(0, r+\varepsilon) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.

Montrons qu'alors $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_1, 2\varepsilon)$. Soit $x \in A$, il existe $y \in F_\varepsilon$ tel que $\|x-y\| < \varepsilon$. Donc on a $y \in F_\varepsilon \cap B'(0, r+\varepsilon)$. Par conséquent, il existe i tel que $\|x_i - y\| < \varepsilon$, d'où $\|x - x_i\| < 2\varepsilon$. Donc on a bien $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_1, 2\varepsilon)$. On en déduit que A est précompact.

Exercice 6.16. Soient A et B deux parties non vides d'un espace normé $(E, \| \ \|)$. Établir les résultats suivants :

1. Si A est ouvert, $A+B$ est ouvert.

2. Si A et B sont compacts, $A+B$ est compact.

3. Si A est compact et B fermé, $A+B$ est fermé.

4. Si A et B sont fermés, $A+B$ n'est pas nécessairement fermé.

Solution. On donne deux preuves de 1.
Première preuve : soit $b \in B$. Comme l'application $x \longmapsto x+b$ est un homéomorphisme de E, on en déduit que $A+b$ est un ouvert de E. Comme on a $A+B = \bigcup\limits_{b\in B} A+b$, alors $A+B$ est ouvert dans E.
Deuxième preuve : soient $a+b \in A+B$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset A$, d'où $B(a,\varepsilon)+b \subset A+B$. Or on a $B(a,\varepsilon)+b = B(a+b,\varepsilon)$, donc $B(a+b,\varepsilon) \subset A+B$. Ainsi, pour tout $a+b \in A+B$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a+b,\varepsilon) \subset A+B$, donc $A+B$ est un ouvert de E.
2. L'application

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \longrightarrow & E \\ (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$$

est continue et $A \times B$ est compact, on en déduit que $A+B$ est compact.
3. L'ensemble $A+B$ est fermé si et seulement si $A+B = \overline{A+B}$. On a toujours $A+B \subset \overline{A+B}$, il reste à montrer l'inclusion réciproque. Soit $x \in \overline{A+B}$, alors il existe deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ dans A et $(b_n)_{n\geq 0}$ dans B telles que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n + b_n$. Or A est compact, donc $(a_n)_{n\geq 0}$ admet une sous-suite convergente $(a_{n_k})_{k\geq 0}$. Soit $a = \lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} \in A$. On a aussi $x = \lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} + b_{n_k}$, on en déduit que la suite $(b_{n_k})_{k\geq 0}$ est convergente. Comme B est fermé, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} b_{n_k} = b \in B$. Par conséquent, on a $x = a+b \in A+B$, donc $\overline{A+B} \subset A+B$.
4. Soient $E = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,0) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ xy = 1\}$. Alors A et B sont fermés dans E, mais $A+B$ n'est pas fermé car $(0,0) = \lim\limits_{n\to+\infty} (-n,0) + \left(n, \frac{1}{n}\right) \in \overline{A+B}$, mais $(0,0) \notin A+B$.

Exercice 6.17. Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si F est fermé dans E et G est de dimension finie, alors $F+G$ est fermé dans E.
Solution. Considérons l'espace normé quotient E/F et soit $\pi : E \longrightarrow E/F$ l'application quotient. Alors $\pi(G)$ est sous-espace de dimension finie de E/F, donc $\pi(G)$ est fermé. Comme on a $F+G = \pi^{-1}(\pi(G))$ et π est continue, alors $F+G$ est fermé dans E.

Exercice 6.18. Soient M et N les sous-espaces vectoriels fermés de c_0 définis par :

$$M = \left\{x = (x_n)_{n\geq 0} \in c_0 \ ; \ x_{2n} = 2n\, x_{2n-1} \text{ pour tout } n \geq 1\right\},$$

$$N = \left\{x = (x_n)_{n\geq 0} \in c_0 \ ; \ x_{2n+1} = 0 \text{ pour tout } n \geq 0\right\}.$$

Montrer que $M + N$ est un sous-espace vectoriel propre et dense dans c_0. En particulier, $M + N$ n'est pas fermé dans c_0.
Solution. Pour tout $n \geq 0$, soit $a_n = \frac{1}{n+1}$, alors on a $a = (a_n)_{n\geq 0} \in c_0$ et on vérifie facilement que $a \notin M + N$. Donc $M + N$ est un sous-espace vectoriel propre de c_0. Pour tout $n \geq 0$, on a $\mathbf{e}_{2n} \in N$. Soit $p \geq 1$. On pose $x_{2p-1} = 1$, $x_{2p} = 2p$ et $x_n = 0$ si $n \notin \{2p-1, 2p\}$. On pose $y_{2p} = -2p$ et $y_n = 0$ si $n \neq 2p$. Alors on a $x = (x_n)_{n\geq 0} \in M$, $y = (y_n)_{n\geq 0} \in N$ et $x + y = \mathbf{e}_{2p-1}$. Par conséquent, pour tout $n \geq 0$, on a $\mathbf{e}_n \in M + N$. Comme $\mathrm{Vect}(\{\mathbf{e}_n \ ; \ n \geq 0\}) = c_c$ est dense dans c_0, alors $M + N$ est dense dans c_0. On en déduit que $M + N$ n'est pas fermé dans c_0.

Exercice 6.19. Soient E un espace vectoriel normé, K et L deux parties compactes non vides de E. Montrer que la réunion des segments joignant un point de K à un point de L est un compact de E.
Solution. Soit C la réunion des segments joignant un point de K à un point de L, alors on a $C = \left\{tx + (1-t)y \ ; \ x \in K \ , y \in L \text{ et } 0 \leq t \leq 1\right\}$. L'application

$$\begin{array}{ccc} K \times L \times [0,\, 1] & \longrightarrow & E \\ (x, y, t) & \longmapsto & tx + (1-t)y \end{array}$$

est continue et $K \times L \times [0,\, 1]$ est compact, on en déduit que C est compact.

Exercice 6.20. Soient $(E, \|\ \|)$ espace normé et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que si F est de codimension ≥ 2, alors $E \setminus F$ est connexe.

2. On suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace normé et que F est un hyperplan fermé de E. Montrer que $E \setminus F$ a deux composantes connexes.

3. On suppose que E est un $\mathbb{C}$-espace normé et que F est un hyperplan de E. Montrer que $E \setminus F$ est connexe.

Solution. 1. Soit G un supplémentaire algébrique de F. Comme $\dim(G) \geq 2$, alors $G \setminus \{0\}$ est connexe. L'application

$$\begin{array}{cccc} f : & F \times G & \longrightarrow & E \\ & (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

est continue et bijective et on a $f(F \times (G \setminus \{0\})) = E \setminus F$. Or $F \times (G \setminus \{0\})$ est connexe, donc $E \setminus F$ est connexe.
2. Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue non nulle telle que $F = \ker(\varphi)$. Soient $C_- = \{x \in E \ ; \ \varphi(x) < 0\}$ et $C_+ = \{x \in E \ ; \ \varphi(x) > 0\}$, alors C_- et C_+ sont des ouverts non vides disjoints de E tels que $E \setminus F = C_- \cup C_+$. Pour tout $x, y \in C_-$ et pour tout $t \in [0,\, 1]$, on a $\varphi(tx + (1-t)y) = t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) < 0$, donc C_- est convexe, d'où C_-

est connexe. De même, C_+ est connexe. Par conséquent, C_- et C_+ sont les composantes connexes de $E \setminus F$, voir théorème 4.2.1.
3. Soit $a \in E$ tel que $E = F + \mathbb{C}\, a$ et $F \cap \mathbb{C}\, a = \{0\}$. L'application

$$\begin{array}{rccc} f: & F \times \mathbb{C}\, a & \longrightarrow & E \\ & (h, \lambda a) & \longmapsto & h + \lambda a \end{array}$$

est continue et bijective et on a $f(F \times (\mathbb{C}\, a \setminus \{0\})) = E \setminus F$. Or $F \times (\mathbb{C}\, a \setminus \{0\})$ est connexe, donc $E \setminus F$ est connexe.

Exercice 6.21. Soient $(E, \|\ \|)$ espace normé et H un sous-espace vectoriel dense de E. Montrer que $E \setminus H$ est connexe.
Solution. Si H est de codimension ≥ 2, il résulte de l'exercice précédent que $E \setminus H$ est connexe. Supposons maintenant que H est un hyperplan. On distingue deux cas.
Premier cas : E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé. Il résulte de l'exercice précédent que $E \setminus H$ est connexe.
Deuxième cas : E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit $a \in E$ tel que $E = H + \mathbb{R}a$ et $H \cap \mathbb{R}a = \{0\}$. Soient $C_- = \{h + \lambda a\ ;\ h \in H \text{ et } \lambda < 0\}$ et $C_+ = \{h + \lambda a\ ;\ \lambda > 0\}$, alors C_- et C_+ sont des ensembles connexes et on a $E \setminus H = C_- \cup C_+$. Comme H est dense, alors H n'est pas fermé dans E, donc il existe une suite $(h_n)_{n\geq 0}$ dans H telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = h + \lambda a$, avec $h \in H$ et $\lambda \neq 0$. Quitte à prendre la suite $(-h_n)_{n\geq 0}$, on peut supposer $\lambda > 0$. Alors la suite $(h_n - \frac{1}{n}a)_{n\geq 0}$ est dans C_- et converge vers $h + \lambda a \in C_+$, donc $\overline{C_-} \cap C_+ \neq \emptyset$. Il résulte de l'exercice 4.5 que $E \setminus H$ est connexe.

Exercice 6.22. Soient $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace normé et H un hyperplan de E. Montrer que $E \setminus H$ est connexe si et seulement si H n'est pas fermé dans E.
Solution. Il suffit de combiner le deux exercices précédents, car un hyperplan est ou bien fermé ou bien dense dans E, voir proposition 6.3.6.

Exercice 6.23. Soient $E = C([0, 1])$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{K}$ et g un élément fixé dans E. Pour tout $f \in E$, on pose :

$$N_g(f) = \sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)g(t)| = \|fg\|_\infty\,.$$

1. Montrer que N_g est une norme sur E si et seulement si $g^{-1}(0)$ est d'intérieur vide.
2. Montrer que N_g et $\|\ \|_\infty$ sont équivalentes si et seulement si $g^{-1}(0) = \emptyset$.

Solution. 1. Pour tout $f, h \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$N_g(\lambda f) = \|\lambda fg\|_\infty = |\lambda|\|fg\|_\infty = |\lambda| N_g(f)\,,$$

$$N_g(f + h) = \|fg + hg\|_\infty \leq \|fg\|_\infty + \|hg\|_\infty = N_g(f) + N_g(h)\,.$$

On a $N_g(0) = 0$, donc N_g est une norme sur E si et seulement si pour tout $f \in E$, on a l'implication

$$N_g(f) = 0 \Longrightarrow f = 0\,.$$

Supposons d'abord que $g^{-1}(0)$ est d'intérieur vide. Soit $f \in E$ tel que $N_g(f) = 0$, alors pour tout $t \in [0,\, 1]$, on a $f(t)g(t) = 0$. Soit $U = f^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$, alors U est un ouvert de $[0,\, 1]$ et pour tout $t \in U$, on a $g(t) = 0$, d'où $U \subset g^{-1}(0)$. Comme $g^{-1}(0)$ est d'intérieur vide, alors $U = \emptyset$, donc pour tout $t \in [0,\, 1]$, on a $f(t) = 0$, d'où $f = 0$. Donc N_g est bien une norme sur E.
Réciproquement, supposons que N_g est une norme sur E. Si $g^{-1}(0)$ est d'intérieur non vide, alors il existe un intervalle non vide I de $[0,\, 1]$ tel que pour tout $t \in I$, on ait $g(t) = 0$. Soit $f \in E$ tel que $f \neq 0$ et pour tout $t \in [0,\, 1] \setminus I$, on ait $f(t) = 0$. Une telle fonction existe, il suffit de prendre une fonction affine. Alors on a $N_g(f) = 0$, ce qui est impossible. Donc $g^{-1}(0)$ est d'intérieur vide.
2. Supposons d'abord que $g^{-1}(0) = \emptyset$. Comme $[0,\, 1]$ est compact et g est continue, alors il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tel que pour tout $t \in [0,\, 1]$, on ait $\alpha \leq |g(t)| \leq \beta$. D'où pour tout $f \in E$, on a $\alpha\|f\|_\infty \leq N_g(f) \leq \beta\|f\|_\infty$. Donc N_g et $\|\ \|_\infty$ sont équivalentes.
Supposons maintenant que $g^{-1}(0) \neq \emptyset$. Pour tout $n \geq 1$, soit $f_n(t) = \dfrac{1}{1 + n|g(t)|}$, alors $f_n \in E$ et on a $\|f_n\|_\infty = 1$. On a $|f_n(t)g(t)| = \dfrac{|g(t)|}{1 + n|g(t)|} \leq \frac{1}{n}$, d'où $N_g(f_n) \leq \frac{1}{n}$, donc N_g et $\|\ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes, voir remarque 6.1.1. Par conséquent, si N_g et $\|\ \|_\infty$ sont équivalentes, alors $g^{-1}(0) = \emptyset$.

Exercice 6.24. Soit $E = C([0,\, 1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,\, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on pose :

$$N(f) = \int_0^1 t\,|f(t)|\,dt \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|\,.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{n}\,, \\ 0 & \text{si} \quad \frac{1}{n} \leq t \leq 1\,. \end{cases}$$

   Calculer $\|f_n\|_\infty$ et $N(f_n)$. En déduire que les deux normes ne sont pas équivalentes.

Solution. 1. Il est clair que N est une norme sur E.
2. On a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N(f_n) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} t - nt^2\,dt = \frac{1}{6n^2}$. Donc les deux normes ne sont pas équivalentes, voir remarque 6.1.1.

Exercice 6.25. Soit $E = C^1([0,\, 1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe C^1 de $[0,\, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère sur E les normes suivantes :

$$N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad , \quad N_3(f) = \|\,|f| + |f'|\,\|_\infty \quad , \quad N_4(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

$$N_5(f) = \|f\|_\infty + \int_0^1 |f'(t)|dt \quad , \quad N_6(f) = \int_0^1 |f(t)|dt + \|f'\|_\infty\,.$$

Montrer que :

1. Les normes N_2, N_3, N_4 et N_6 sont équivalentes.

2. Les normes N_2 et N_5 ne sont pas équivalentes.

3. L'espace $(E,\, N_2)$ est de Banach.

4. Trouver une suite de Cauchy dans $(E,\, N_5)$ non convergente. En déduire que $(E,\, N_5)$ n'est pas de Banach.

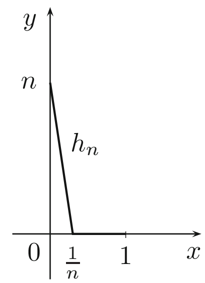
Solution. 1. Pour tout $x \in [0,\, 1]$, on a $|f(x)| + |f'(x)| \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, on en déduit que $N_3(f) \leq N_2(f)$. On a $|f(0)| \leq N_3(f)$ et $\|f'\|_\infty \leq N_3(f)$, on en déduit que $N_4(f) \leq 2\, N_3(f)$. D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in [0,\, 1]$, il existe $c_x \in\,]0,\, x[$ tel que $f(x) - f(0) = x f'(c_x)$, d'où on a $|f(x)| \leq |f(0)| + |f'(c_x)| \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty = N_4(f)$, donc on a $\|f\|_\infty \leq N_4(f)$ et $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\, dx \leq \int_0^1 \|f\|_\infty\, dx = \|f\|_\infty \leq N_4(f)$. On a $\|f'\|_\infty \leq N_4(f)$, on en déduit que $N_2(f) \leq 2\, N_4(f)$ et $N_6(f) \leq 2\, N_4(f)$. On a aussi $|f(0)| \leq |f'(c_x)| + |f(x)| \leq \|f'\|_\infty + |f(x)|$. On en déduit que $|f(0)| = \displaystyle\int_0^1 |f(0)|\, dx \leq \int_0^1 \big(\|f'\|_\infty + |f(x)|\big)\, dx = \|f'\|_\infty + \int_0^1 |f(x)|)\, dx = N_6(f)$. On a $\|f'\|_\infty \leq N_6(f)$, on en déduit que $N_4(f) \leq 2\, N_6(f)$. Ainsi, on a montré que pour tout $f \in E$, on a :

$$\tfrac{1}{4}\, N_2(f) \leq \tfrac{1}{2}\, N_4(f) \leq N_3(f) \leq N_2(f) \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}\, N_4(f) \leq N_6(f) \leq 2\, N_4(f)\,.$$

Par conséquent, les normes N_2, N_3, N_4 et N_6 sont équivalentes.
2. Pour tout $f \in E$, on a :

$$N_5(f) = \|f\|_\infty + \int_0^1 |f'(t)| dt \leq \|f\|_\infty + \int_0^1 \|f'\|_\infty\, dt = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = N_2(f)\,.$$

Montrons qu'il n'existe aucune constante $A > 0$ telle que pour tout $f \in E$, on ait $N_4(f) \leq A\, N_5(f)$.
Pour tout $n \geq 1$, soit h_n la fonction continue sur $[0, 1]$ définie par $h_n(0) = n$, h_n est affine sur $[0, \frac{1}{n}]$ et $h_n(t) = 0$ si $t \in [\frac{1}{n}, 1]$. Pour tout $x \in [0, 1]$, soit $f_n(x) = \displaystyle\int_0^x h_n(t)\, dt$, alors $f_n \in E$ et on a $f_n' = h_n$. On a $N_4(f_n) = \|f_n'\|_\infty = n$, $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\int_0^1 |f_n'(t)|\, dt = \int_0^1 f_n'(t)\, dt = \int_0^1 h_n(t)\, dt = \frac{1}{2}$, donc on a $N_5(f_n) = 1$. Par conséquent, il n'existe aucune constante $A > 0$ telle que pour tout $f \in E$, on ait $N_4(f) \leq A\, N_5(f)$. Donc N_2 et N_5 ne sont pas équivalentes.



3. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(E,\, N_2)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$, on ait $\|f_n - f_m\|_\infty + \|f_n' - f_m'\|_\infty < \varepsilon$. Par conséquent, les deux suites $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(f_n')_{n\geq 0}$ sont de Cauchy dans l'espace de Banach $(C([0,\, 1],\, \mathbb{R}),\, \|\ \|_\infty)$. Donc il existe deux fonctions continues f et g sur $[0,\, 1]$ telles que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|f_n' - g\|_\infty = 0$. Montrons que l'on a $f' = g$. Soit $h(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\, dt$, pour tout $x \in [0,\, 1]$, alors $h \in E$ et on a $h' = g$. Pour tout $x \in [0,\, 1]$,

on a $f_n(x) - f_n(0) = \displaystyle\int_0^x f_n'(t)\, dt$, d'où :

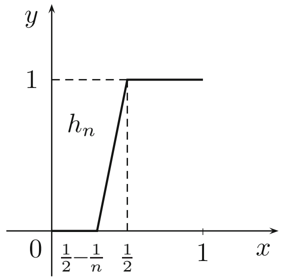
$$|f_n(x) - f_n(0) - h(x)| \leq \int_0^x |f_n'(t) - g(t)|\, dt \leq \int_0^1 |f_n'(t) - g(t)|\, dt \leq \|f_n' - g\|_\infty \,.$$

On fait tendre n vers $+\infty$, on obtient que pour tout $x \in [0,\, 1]$, on a $f(x) = h(x) + f(0)$. Par conséquent, $f \in E$ et on a $f' = g$. Comme on a :

$$N_2(f_n - f) = \|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - f'\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - g\|_\infty \,,$$

on en déduit que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans $(E,\, N_2)$, donc $(E,\, N_2)$ est un espace de Banach.

4. Pour tout $n \geq 2$, soit h_n la fonction continue sur $[0,\, 1]$ définie par $h_n(t) = 0$ si $t \in \left[0,\, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right]$, h_n est affine sur $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n},\, \frac{1}{2}\right]$ et $h_n(t) = 1$ si $t \in \left[\frac{1}{2},\, 1\right]$. Alors la suite $(h_n)_{n\geq 2}$ est de Cauchy dans l'espace normé $(C([0,\, 1], \mathbb{R}),\, \|\ \|_1)$, où $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, dt$, pour tout $f \in C([0,\, 1], \mathbb{R})$. Pour tout $x \in [0,\, 1]$, soit $f_n(x) = \displaystyle\int_0^x h_n(t)\, dt$, alors $f_n \in E$ et on a $f_n' = h_n$.



On a :

$$\int_0^1 |f_n'(t) - f_m'(t)|\, dt = \int_0^1 |h_n(t) - h_m(t)|\, dt = \|h_n - h_m\|_1$$

et

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \int_0^x |h_n(t) - h_m(t)|\, dt \leq \int_0^1 |h_n(t) - h_m(t)|\, dt = \|h_n - h_m\|_1 \,.$$

D'où $N_5(f_n - f_m) \leq 2\, \|h_n - h_m\|_1$. Donc la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ est de Cauchy dans $(E,\, N_5)$. Montrons que $(f_n)_{n\geq 2}$ ne converge pas dans $(E,\, N_5)$. Supposons le contraire, alors il existerait $f \in E$ telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} N_5(f_n - f) = 0$. D'où on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |h_n(t) - f'(t)|\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |f_n'(t) - f'(t)|\, dt = 0\,.$$

Soit $x \in \left]0,\, \frac{1}{2}\right[$, alors on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x |h_n(t) - f'(t)|\, dt = 0$. Comme il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $h_n(t) = 0$ sur l'intervalle $[0,\, x]$, on en déduit que $f'(t) = 0$ sur l'intervalle $[0,\, x]$. Par conséquent, pour tout $t \in \left[0,\, \frac{1}{2}\right[$, on a $f'(t) = 0$. On a aussi :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - f'(t)|\, dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 |h_n(t) - f'(t)|\, dt \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{2}}^1 |h_n(t) - f'(t)|\, dt = 0$$

d'où $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - f'(t)|\, dt = 0$. Par conséquent, pour tout $t \in \left[\frac{1}{2},\, 1\right]$, on a $f'(t) = 1$. Donc f' n'est pas continue en $\frac{1}{2}$, ce qui contredit l'hypothèse sur f. Par conséquent, $(E,\, N_5)$

n'est pas un espace de Banach.

Exercice 6.26. Soit $C([0,\,1])$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,\,1]$ dans $\mathbb{K}$. Pour tout $f \in C([0,\,1])$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt \quad , \quad \|f\|_2 = \Big(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{0\le t\le 1} |f(t)|\,.$$

Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$f_n(t) = \begin{cases} 2nt & \text{si} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2n}\,, \\ -2nt+2 & \text{si} \quad \frac{1}{2n} \le t \le \frac{1}{n}\,, \\ 0 & \text{si} \quad \frac{1}{n} \le t \le 1\,. \end{cases}$$

En calculant les normes de f_n et $\sqrt{n}\,f_n$, montrer que les normes $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ sont deux à deux non équivalentes.
Solution. On a :

$$\|f_n\|_\infty = 1 \quad , \quad \|f_n\|_1 = \tfrac{1}{2n} \quad , \quad \|f_n\|_2 = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\tfrac{11}{6}}$$

$$\|\sqrt{n}f_n\|_\infty = \sqrt{n} \quad , \quad \|\sqrt{n}f_n\|_1 = \tfrac{1}{2\sqrt{n}} \quad , \quad \|\sqrt{n}f_n\|_2 = \sqrt{\tfrac{11}{6}}\,.$$

Donc les normes $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ sont deux à deux non équivalentes, voir remarque 6.1.1.

Exercice 6.27. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Pour tout $P \in E$, on pose :

$$\|P\|_1 = \int_a^b |P_n(t)|dt \quad \text{et} \quad \|P\|_\infty = \sup_{a\le t\le b} |P(t)|\,.$$

1. Vérifier que $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$ sont des normes sur E.
2. Soit $(P_k)_{k\geq 0}$ une suite bornée dans $(E,\,\|\ \|_1)$. Montrer que l'on peut en extraire une sous-suite convergente dans $(E,\,\|\ \|_\infty)$.

Solution. 1. C'est clair.
2. Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, alors les deux normes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$ sont équivalentes et toute boule fermée pour chacune de deux normes est compacte dans E, voir théorèmes 6.6.1 et 6.6.2. Si $(P_k)_{k\geq 0}$ est une suite bornée dans $(E,\,\|\ \|_1)$, alors $(P_k)_{k\geq 0}$ est une suite bornée dans $(E,\,\|\ \|_\infty)$. Donc la suite $(P_k)_{k\geq 0}$ admet une sous-suite convergente dans $(E,\,\|\ \|_\infty)$.

Exercice 6.28. On considère l'espace normé $E = (c_c,\,\|\ \|_\infty)$. Calculer $\|\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_m\|_\infty$ et $\|\mathbf{e}_n\|_\infty$. En déduire que E est de dimension infinie.
Solution. On a $\|\mathbf{e}_n\|_\infty = 1$ et $\|\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_m\|_\infty = 1$, si $n \neq m$. On en déduit que la suite $(\mathbf{e}_n)_{n\geq 0}$ est dans la boule unité fermée $B'(0,1)$ de E et n'admet aucune sous-suite convergente, donc $B'(0,1)$ n'est pas compacte. Il résulte du théorème 6.6.2 que E est de

dimension infinie.

Exercice 6.29. Soient $E = C([0, 1])$ l'espace de Banach des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{K}$, muni de la norme $\| \|_\infty$, et $F = \{f \in E \; ; \; f(0) = 0\}$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E. Trouver une expression simple de la norme quotient sur l'espace vectoriel quotient E/F.
Solution. Soient $\pi : E \longrightarrow E/F$ l'application quotient et $\| \|'$ la norme quotient sur E/F. Soit $g \in E$ définie par $g(t) = 1$ pour tout $t \in [0, 1]$. Pour tout $f \in E$, on a $f - f(0)g \in F$, d'où $\pi(f) = \pi(f(0)g) = f(0)\pi(g)$. Donc on a $\|\pi(f)\|' = |f(0)| \, \|\pi(g)\|'$. D'autre part, on a $\|\pi(g)\|' = \inf\limits_{h \in F} \|g - h\|_\infty$ et $\|g - h\|_\infty = \max\limits_{0 \leq t \leq 1} |1 - h(t)| \geq |1 - h(0)| = 1$, d'où $\|\pi(g)\|' \geq 1$. Or on a $\|\pi(g)\|' \leq \|g\|_\infty = 1$, donc $\|\pi(g)\|' = 1$. Par conséquent, pour tout $f \in E$, on a $\|\pi(f)\|' = |f(0)|$.

Exercice 6.30. Soient M et N les sous-espaces vectoriels fermés de c_0 définis par :

$$M = \big\{x = (x_n)_{n \geq 0} \in c_0 \; ; \; x_0 = 0\big\} \quad \text{et} \quad N = \big\{x = (x_n)_{n \geq 0} \in c_0 \; ; \; x_0 = x_1 = 0\big\}.$$

1. Montrer que M est isométriquement isomorphe à N.
2. Montrer que c_0/M n'est pas isomorphe à c_0/N

Solution. 1. Pour tout $x = (x_n)_{n \geq 0} \in c_0$, on pose $T(x) = (0, x_0, x_1, \ldots) \in c_0$, alors T est une application linéaire continue et isométrique de c_0 dans c_0 et on a $T(M) = N$. Donc M est isométriquement isomorphe à N.
2. Puisque l'on a $\dim(c_0/M) = 1$ et $\dim(c_0/N) = 2$, alors c_0/M n'est pas isomorphe à c_0/N.

Exercice 6.31. Soient $(E, \| \|)$ et $(F, \| \|')$ deux espaces normés et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) f est continue.

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans E convergeant vers 0, la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ est bornée.

Solution. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte clairement du théorème 6.3.1.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Si f n'est pas continue, alors f ne serait pas bornée sur la sphère $S = \{x \in E \; ; \; \|x\| = 1\}$. Par conséquent, il existe une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ dans S telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $\|f(a_n)\|' \geq n^2$. D'où on a $\big\|f\big(\frac{a_n}{n}\big)\big\|' \geq n$. Donc la suite $\big(\frac{a_n}{n}\big)_{n \geq 1}$ converge vers 0 dans E, mais la suite $\big(f\big(\frac{a_n}{n}\big)\big)_{n \geq 1}$ n'est pas bornée dans F ce qui contredit l'hypothèse. Donc f est bien continue.

Exercice 6.32. Soient E, F deux espaces normés et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire telle que pour toute série absolument convergente $\sum x_n$ dans E, la série $\sum f(x_n)$ converge dans F. Montrer que f est continue.
Solution. Supposons que f n'est pas continue. D'après l'exercice précédent, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ dans E telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$, mais la suite $(f(x_n))_{n \geq 1}$ n'est pas bornée dans F. Par récurrence, on construit une sous-suite $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ telle que pour tout $k \geq 1$, on ait $\|f(x_{n_k})\| > k^2$. Alors la série $\sum \dfrac{x_{n_k}}{k^2}$ est absolument convergente dans E, mais la

série $\sum \dfrac{f(x_{n_k})}{k^2}$ n'est pas convergente dans F. D'où la contradiction.

Exercice 6.33. On considère l'espace de Banach $E = C([0,\,1])$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$. Montrer que les applications linéaires T suivantes sont continues. Calculer leur norme d'opérateur $\|T\|$ et voir si elle est atteinte sur la sphère unité $\{f \in E\ ;\ \|f\|_\infty = 1\}$.

1.
$$\begin{array}{rccc} T: & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & T(f) \end{array}$$

où $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, pour tout $x \in [0,\,1]$.

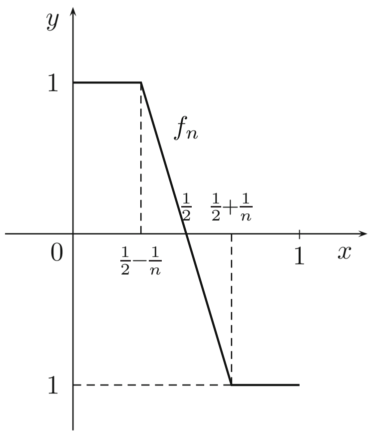
2.
$$\begin{array}{rccc} T: & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rccc} T: & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & f(1) - f(0) \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{rccc} T: & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(y)\,dy - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(y)\,dy \end{array}$$

Solution. 1. On a $|T(f)(x)| = \Big|\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt\Big| \leq \int_0^x |f(t)|\,dt \leq \int_0^x \|\,f\,\|_\infty\,dt = x\,\|\,f\,\|_\infty \leq \|\,f\,\|_\infty$, donc $\|\,T(f)\,\|_\infty = \displaystyle\sup_{0\leq x\leq 1} |T(f)(x)| \leq \|\,f\,\|_\infty$. Donc T est continue et on a $\|\,T\| \leq 1$. Pour tout $t \in [0,\,1]$, soit $g(t) = 1$, alors on a $\|\,g\,\|_\infty = 1$ et $T(g)(x) = x$, donc on a $\|T(g)\,\|_\infty = 1$. Par conséquent, on a $\|\,T\,\| = 1 = \|T(g)\,\|_\infty$.
2. On a $|T(f)| = \Big|\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt\Big| \leq \int_0^1 |f(t)|\,dt \leq \int_0^1 \|\,f\,\|_\infty\,dt = \|\,f\,\|_\infty$, donc T est continue de E dans $\mathbb{K}$ et on a $\|\,T\| \leq 1$. On prend g comme ci-dessus, alors on a $T(g) = 1$. Par conséquent, on a $\|\,T\,\| = 1 = |T(g)|$.
3. On a $|T(f)| = |f(1) - f(0)| \leq |f(1)| + |f(0)| \leq 2\|\,f\,\|_\infty$, donc T est continue de E dans $\mathbb{K}$ et on a $\|\,T\| \leq 2$. Pour tout $t \in [0,1]$, soit $g(t) = 2t - 1$, alors on a $\|\,g\,\|_\infty = 1$ et $T(g) = g(1) - g(0) = 2$. Par conséquent, on a $\|\,T\,\| = 2 = |T(g)|$.
4. On a $|T(f)| = \Big|\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,dt\Big| \leq \Big|\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt\Big| + \Big|\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,dt\Big| \leq \int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|\,dt + \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(t)|\,dt = \int_0^1 |f(t)|\,dt \leq \int_0^1 \|\,f\,\|_\infty\,dt = \|\,f\,\|_\infty$, donc T est continue et on a $\|\,T\| \leq 1$.

Pour tout $n \geq 2$, soit $f_n \in E$ dont le graphe est ci-contre. On a $\| f_n \|_\infty = 1$ et $T(f_n) = \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} f(t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} f(t)\,dt - \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$, donc on a $|T(f_n)| = 1 - \frac{1}{n}$. Or pour tout $n \geq 2$, on a $\|T\| \geq |T(f_n)|$, d'où $\|T\| = 1$.



Montrons qu'il n'existe aucune $f \in E$ telle que $\| f \|_\infty = 1$ et $\| T \| = |T(f)|$. Supposons le contraire, et soit $f \in E$ telle que $\| f \|_\infty = 1$ et $\| T \| = |T(f)|$. Quitte à remplacer f par $|f|$, on peut supposer $T(f) \in \mathbb{R}$. On a $|T(f)| = 1$, donc on peut supposer $T(f) = 1$, quitte à remplacer f par $-f$. D'où on a $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,dt = 1$. Comme on a $\left| \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt \right| \leq \int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|\,dt \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \| f \|_\infty\,dt = \frac{1}{2}$ et $\left| \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,dt \right| \leq \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(t)|\,dt \leq \int_{\frac{1}{2}}^{1} \| f \|_\infty\,dt = \frac{1}{2}$, on en déduit que $0 \leq \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,dt = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt \leq 0$, donc on a $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$ et $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,dt = -\frac{1}{2}$. D'où on a $\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - f(t))\,dt = 0$ et $\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1 + f(t))\,dt = 0$. Comme pour tout $t \in [0,\, 1]$, on a $-1 \leq f(t) \leq 1$, on en déduit que $f(t) = 1$ sur $\left[0,\, \frac{1}{2}\right]$ et $f(t) = -1$ sur $\left[\frac{1}{2},\, 1\right]$, donc f n'est pas continue, ce qui contredit l'hypothèse sur f. Par conséquent, la norme de T n'est pas atteinte sur la sphère unité.

Exercice 6.34. Rappelons, proposition 6.2.2, que pour tout $p \in [1, +\infty[$, on a les inclusions suivantes : $c_c \subset \ell^p \subset c_0 \subset \ell^\infty$.

1. Vérifier que l'adhérence de c_c dans ℓ^∞ est c_0. En déduire que c_0 est séparable.

2. Montrer que pour tout $q \in [1, +\infty[$, l'espace c_c est dense dans $(\ell^q,\, \| \, \|_q)$. En déduire que ℓ^q est séparable.

3. En déduire que si $1 \leq p \leq q < +\infty$, alors ℓ^p est dense dans $(\ell^q,\, \| \, \|_q)$.

Solution. 1. Pour tout $n \geq 0$, soit $\mathbf{e}_n = (\delta_{n,k})_{k \geq 0} \in c_c$. Soit $F_n = \mathrm{Vect}\big(\{\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_n\}\big)$, alors on a $\dim(F_n) = n+1$ et $c_c = \bigcup_{n \geq 0} F_n$. Soit $x = (x_n)_{n \geq 0} \in c_0$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|x_n| < \varepsilon$. Soit $Y_N = \sum_{n=0}^{N} x_n \mathbf{e}_n$, alors $Y_N \in F_N \subset c_c$ et $\|Y_N - x\|_\infty = \sup_{n > N} |x_n| \leq \varepsilon$. Donc on a $\overline{c_c} = c_0$. Par conséquent, c_0 est séparable, voir proposition 6.8.2.

2. Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^q$, alors on a $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^q < +\infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n|^q < \varepsilon^q$. Soit $Y_N = \sum_{n=0}^{N} x_n \mathbf{e}_n$, alors $Y_N \in F_N \subset c_c$ et $\|Y_N - x\|_q = \Big(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n|^q \Big)^{\frac{1}{q}} < \varepsilon$. Donc c_c est dense dans $(\ell^q, \| \|_q)$. On en déduit que $(\ell^q, \| \|_q)$ est séparable.
3. Si $1 \leq p \leq q < +\infty$, alors on a $c_c \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0 \subset \ell^\infty$. Or c_c est dense dans $(\ell^q, \| \|_q)$, on en déduit que ℓ^p est dense dans $(\ell^q, \| \|_q)$.

Exercice 6.35. Montrer que l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. En déduire que l'espace de Banach ℓ^∞ n'est pas séparable.
Solution. Pour montrer que l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable, on raisonne par l'absurde. Supposons donc que l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est dénombrable. Alors $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{f_n \ ; \ n \geq 0\}$ où f_n est une application de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$. Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$ définie par $f(n) = 1 - f_n(n)$, pour tout $n \geq 0$. Alors $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et pour tout $n \geq 0$, on a $f(n) \neq f_n(n)$, donc $f \neq f_n$, ce qui est impossible. Par conséquent, l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. On a $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subset \ell^\infty$ et pour tout $f, g \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tels que $f \neq g$, on a $\|f - g\|_\infty = 1$. Donc $\big(B(f, \frac{1}{2})\big)_{f\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$ est une famille non dénombrable d'ouverts non vides deux à deux disjoints. Il résulte de la proposition 1.2.5 que ℓ^∞ n'est pas séparable.

Exercice 6.36. Montrer que l'espace de Banach $(\mathscr{L}(\ell^2), \| \|)$ n'est pas séparable.
Solution. Il suffit de montrer que $\mathscr{L}(\ell^2)$ contient une copie de ℓ^∞. Pour tout $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$ et pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, soit $L_a(x) = (a_n x_n)_{n\geq 0}$, alors $L_a(x) \in \ell^2$ et $L_a \in \mathscr{L}(\ell^2)$. Considérons l'application suivante.

$$\begin{array}{rccc} L: & \ell^\infty & \longrightarrow & \mathscr{L}(\ell^2) \\ & a & \longmapsto & L_a \end{array}$$

Alors L est linéaire. Montrons que L est aussi une application isométrique. On a :

$$\|L_a(x)\|_2 = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x_n|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \|a\|_\infty^2 |x_n|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = \|a\|_\infty \, \|x\|_2$$

donc on a $\|L_a\| \leq \|a\|_\infty$. Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|a\|_\infty - \varepsilon \leq |a_N|$. On a $\|\mathbf{e}_N\|_\infty = 1$ et $L_a(\mathbf{e}_N) = |a_N| \geq \|a\|_\infty - \varepsilon$, d'où $\|L_a\| \geq \|a\|_\infty - \varepsilon$. On en déduit que $\|L_a\| \geq \|a\|_\infty$, donc on a $\|L_a\| = \|a\|_\infty$. Ainsi, L est une application isométrique linéaire. Par conséquent, on peut considérer $\ell^\infty \subset \mathscr{L}(\ell^2)$. Or ℓ^∞ n'est pas séparable, donc $\mathscr{L}(\ell^2)$ n'est pas séparable, voir proposition 2.4.1.

Exercice 6.37. Soit I un ensemble non vide quelconque.

– Pour $p \in [1, +\infty[$, on note $\ell^p(I)$ l'ensemble des familles $(x_i)_{i\in I}$ dans $\mathbb{K}$ telles que la famille de nombres réels positifs $\big(|x_i|^p\big)_{i\in I}$ soit sommable. Pour tout $x = (x_i)_{i\in I} \in \ell^p(I)$, on pose $\|x\|_p = \Big(\sum_{i\in I} |x_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$.

Notons que l'on a $\sum_{i\in I} |x_i|^p = \sup\Big\{ \sum_{i\in F} |x_i|^p \ ;\ F \text{ est un sous-ensemble fini de } I\Big\}$.

– On note $\ell^\infty(I)$ l'ensemble des familles $(x_i)_{i\in I}$ dans $\mathbb{K}$ telles que la famille de nombres réels positifs $(|x_i|)_{i\in I}$ soit bornée. Pour tout $x = (x_i)_{i\in I} \in \ell^\infty(I)$, on pose $\|x\|_\infty = \sup_{i\in I} |x_i|$.

– On note $C_0(I)$ le sous-ensemble de $\ell^\infty(I)$ formé des familles $(x_i)_{i\in I}$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{i \in I \ ;\ |x_i| \geq \varepsilon\}$ soit fini.

– On note $C_c(I)$ le sous-ensemble de $C_0(I)$ formé des familles $(x_i)_{i\in I}$ telles que l'ensemble $\{i \in I \ ;\ x_i \neq 0\}$ soit fini.

Notons que si $I = \mathbb{N}$, on a $\ell^p(\mathbb{N}) = \ell^p$, $\ell^\infty(\mathbb{N}) = \ell^\infty$, $C_0(\mathbb{N}) = c_0$ et $C_c(\mathbb{N}) = c_c$.

1. Montrer que les espaces $(\ell^p(I), \| \ \|_p)$, $(\ell^\infty(I), \| \ \|_\infty)$ sont des espaces de Banach.
2. Montrer que $(C_0(I), \| \ \|_\infty)$ est un espace de Banach, et que $(C_c(I), \| \ \|_\infty)$ est sous-espace vectoriel dense dans $(C_0(I), \| \ \|_\infty)$.
3. Montrer que $(\ell^p(I), \| \ \|_p)$ est séparable si et seulement si I est au plus dénombrable.

Solution. 1. Le fait que $(\ell^\infty(I), \| \ \|_\infty)$ est un espace de Banach résulte de la proposition 2.6.8. En fait, on a $\ell^\infty(I) = B(I, \mathbb{K})$ et $\| \ \|_\infty$ est la norme associée à la distance de la convergence uniforme. Soit $p \in [1, +\infty[$. Notons d'abord que $\ell^p(I)$ est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^I$. Soient $x = (x_i)_{i\in I}, y = (y_i)_{i\in I} \in \ell^p(I)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il est clair que $\|x\|_p = 0 \iff x = 0$. Soit F une partie finie de I, d'après l'inégalité de Minkowski, on a :

$$\Big(\sum_{i\in F} |x_i + y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{i\in F} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i\in F} |y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p \,,$$

$$\Big(\sum_{i\in F} |\lambda x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\Big(\sum_{i\in F} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} .$$

Par conséquent, $\lambda x, x + y \in \ell^p(I)$ et on a $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ et $\|\lambda x\|_p = |\lambda|\|x\|_p$. Donc $\ell^p(I)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x \longmapsto \|x\|_p$ est bien une norme sur $l^p(I)$.
Montrons que $(l^p(I), \| \ \|_p)$ est un espace de Banach pour tout $p \in [1, +\infty[$. Soit $(\xi_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(l^p(I), \| \ \|_p)$. Pour tout $n \geq 0$, on a $\xi_n = (x_{n,i})_{i\in I}$, avec $x_{n,i} \in \mathbb{K}$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$, on ait :

$$\Big(\sum_{i\in I} |x_{n,i} - x_{m,i}|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \|\xi_n - \xi_m\|_p < \varepsilon \,.$$

Soit $i \in I$. Pour tout n, m, on a $|x_{n,i} - x_{m,i}| \leq \|\xi_n - \xi_m\|_p$, donc la suite $(x_{n,i})_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ qui est de Banach, donc il existe $x_i \in \mathbb{K}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} x_{n,i} = x_i$. Soit F une partie finie de I. Pour tout $n, m \geq N$, on a $\Big(\sum_{i\in F} |x_{n,i} - x_{m,i}|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \|\xi_n - \xi_m\|_p < \varepsilon$.

On fait tendre m vers l'infini, on obtient que $\Big(\sum_{i\in F} |x_{n,i} - x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai

pour toute partie finie F de I, donc on a $\Big(\sum_{i\in I} |x_{n,i} - x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$. Soit $x = (x_i)_{i\in I}$, alors on a $x - \xi_n \in l^p(\mathbb{N})$. Comme $l^p(I)$ est un espace vectoriel, alors $x = x - \xi_n + \xi_n \in l^p(I)$. De plus l'inégalité précédente montre que $(\xi_n)_{n\geq 0}$ converge vers x dans $(l^p(I), \|\ \|_p)$. Donc $(l^p(I), \|\ \|_p)$ est un espace de Banach.
2. Quand on munit I de la topologie discrète, alors I est un espace localement compact. Il résulte de la proposition 3.6.5 que $(C_0(I), \|\ \|_\infty)$ est un de Banach et que $C_c(I)$ est un sous-espace vectoriel dense dans $C_0(I)$. Notons aussi que l'on peut donner une preuve directe de ce résultat comme dans la proposition 6.2.2.
3. Si I est au plus dénombrable, il résulte du corollaire 6.7.1 et de l'exercice 6.34 que $(\ell^p(I), \|\ \|_p)$ est séparable.
Réciproquement, supposons que $(\ell^p(I), \|\ \|_p)$ est séparable. Pour tout $i \in I$, soit $\mathbf{e}_i \in C_c(I) \subset \ell^p(I)$ défini par $\mathbf{e}_i = (\delta_{ij})_{j\in I}$, avec $\delta_{ij} = 1$ si $j = i$, et $\delta_{ij} = 0$ si $j \neq i$. Alors on a $\|\mathbf{e}_i\|_p = 1$ et pour tout $i, j \in I$ tels que $j \neq i$, on a $\|\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$. Pour tout $i \in I$, soit $U_i = B\big(\mathbf{e}_i, 2^{\frac{1}{p}-1}\big)$, la boule ouverte de centre $\mathbf{e}_i$ et de rayon $2^{\frac{1}{p}-1}$ dans $\ell^p(I)$, alors $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints dans $(\ell^p(I), \|\ \|_p)$. Comme $(\ell^p(I), \|\ \|_p)$ est séparable, il résulte de la proposition 1.2.5 que I est au plus dénombrable.

Exercice 6.38. On considère l'espace normé $E = B([0,\, 2], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$. Soient $F = C([0,\, 2], \mathbb{R})$ et $g \in E$ défini par :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1\,, \\ \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2\,. \end{cases}$$

Montrer qu'il existe $h \in F$ tel que $d(g, F) = d(g, h) = \frac{1}{2}$.
Solution. Pour tout $t \in [0,\, 2]$, soit $h(t) = \frac{3}{2}$, alors on a $h \in F$ et $d(g, h) = \|g - h\|_\infty = \frac{1}{2}$. Soit $f \in F$, alors on a :

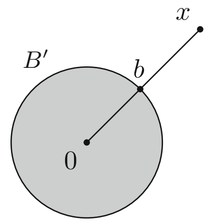
$$d(g, f) = \|g - f\|_\infty = \sup_{0\leq t\leq 2} |g(t) - f(t)|\,.$$

Donc pour tout $t \in [0,\, 1]$, on a $|1 - f(t)| \leq d(g, f)$ et pour tout $t \in]1,\, 2]$, on a $|2 - f(t)| \leq d(g, f)$. Or f est continue, donc on a $|1 - f(1)| \leq d(g, f)$ et $|2 - f(1)| \leq d(g, f)$. Par conséquent, on a $d(g, f) \geq \frac{1}{2} = d(g, h)$, d'où $d(g, F) = d(g, h) = \frac{1}{2}$.

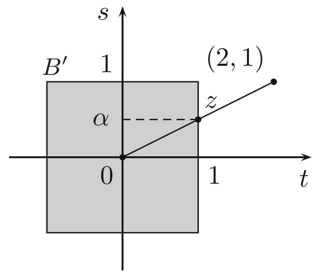
Exercice 6.39. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et $B' = B'(0, 1)$.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $b \in B'$ tel que $d(x, B') = d(x, b) = \|x - b\|$.

2. Donner un exemple montrant que le point b dans la question précédente n'est pas unique.



Solution. 1. Soit $x \in E$. Si $x \in B'$, alors on a $d(x,x) = d(x,B') = 0$. On suppose donc $x \notin B'$, d'où on a $\|x\| > 1$. Soit $b = \dfrac{x}{\|x\|}$, alors $b \in B'$ et on a $d(x,b) = \|x-b\| = \left\|x - \dfrac{x}{\|x\|}\right\| = \left(1 - \dfrac{1}{\|x\|}\right)\|x\| = \|x\| - 1$. Soit $z \in B'$, alors on a $\|z\| \leq 1$ et $d(x,z) = \|x-z\| \geq \|x\| - \|z\| \geq \|x\| - 1 = d(x,b)$. Donc on a $d(x,b) = \inf\limits_{z \in B'} d(x,z) = d(x,B')$.



2. Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|(t,s)\|_\infty = \max\{|t|, |s|\}$. Soit $x = (2,1) \in \mathbb{R}^2$, alors on a $\|x\|_\infty = 2$ et $d(x,B') = \|x\|_\infty - 1 = 1$. Soit $z = (1,\alpha)$, avec $0 \leq \alpha \leq 1$, alors $z \in B'$, et on a $d(x,z) = \max\{1,\, 1-\alpha\} = 1 = d(x,B')$. Donc b n'est pas unique.

Exercice 6.40. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, x un élément de E et A un sous-ensemble fermé non vide de E. Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $d(x,A) = d(x,a) = \|x - a\|$.

Solution. Pour tout $n \geq 1$, il existe $a_n \in A$ tel que $d(x,A) \leq d(x,a_n) < d(x,A) + \frac{1}{n}$, d'où on a $a_n \in B'(x, d(x,A)+1)$ qui est compact car E est de dimension finie. Donc la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ admet une sous-suite convergente $(a_{n_k})_{k\geq 1}$. Puisque A est fermé, alors $a = \lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} \in A$. Pour tout $k \geq 1$, on a $d(x,A) \leq d(x,a_{n_k}) < d(x,A) + \frac{1}{n_k}$ et on a $\lim\limits_{k\to+\infty} d(x,a_{n_k}) = d(x,a)$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{n_k} = 0$. Par conséquent, on a $d(x,a) = d(x,A)$.

Exercice 6.41. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que $d(x,F) = d(x,y) = \|x-y\|$.

2. En déduire que, si $E \neq F$, pour tout $y \in F$ et tout $\lambda > 0$; il existe $x \in E$, tel que $d(x,F) = \|x-y\| = \lambda$.

Solution. 1. Pour tout $n \geq 1$, il existe $y_n \in F$ tel que $d(x,F) \leq d(x,y_n) < d(x,F) + \frac{1}{n}$, d'où on a $y_n \in B'(x, d(x,F)+1) \cap F$ qui est compact car F est de dimension finie. Donc la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ admet une sous-suite convergente $(y_{n_k})_{k\geq 1}$. Puisque F est fermé, alors $y = \lim\limits_{k\to+\infty} y_{n_k} \in F$. Pour tout $k \geq 1$, on a $d(x,F) \leq d(x,y_{n_k}) < d(x,F) + \frac{1}{n_k}$ et on a $\lim\limits_{k\to+\infty} d(x,y_{n_k}) = d(x,y)$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{n_k} = 0$. Par conséquent, on a $d(x,y) = d(x,F)$.
2. Soit $\pi : E \longrightarrow E/F$ l'application quotient. Rappelons que pour tout $x \in E$, on a $\|\pi(x)\|' = d(x,F)$, où $\|\ \|'$ est la norme quotient. Comme $E \neq F$, alors pour tout $\lambda > 0$, il existe $z \in E$ tel que $\|\pi(z)\|' = \lambda$. On a aussi $d(z-y,F) = \|\pi(z-y)\|' = \|\pi(z)\|' = \lambda$. D'après 1, il existe $a \in F$ tel que $d(z-y,F) = \|z-y-a\|$. Soit $x = z - a$, alors on a :

$$\|x-y\| = d(z-y,F) = \|\pi(z-y)\|' = \lambda = \|\pi(z)\|' = \|\pi(x)\|' = d(x,F)\,.$$

Exercice 6.42. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que pour tous $x \in E$, $y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, on a :

$$d(\lambda x, F) = |\lambda|\, d(x, F) \quad \text{et} \quad d(x - y, F) = d(x, F)\,.$$

2. On suppose F fermé et $F \neq E$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$ et $d(a, F) > 1 - \varepsilon$.

3. On suppose F de dimension finie et $F \neq E$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $d(x, F) = 1$.

Solution. 1. Soient $x \in E$, $y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Soit $\overline{F}$, l'adhérence de F dans E, alors $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E, voir exercice 6.9. Soient $\pi : E \longrightarrow E/\overline{F}$ l'application quotient et $\|\ \|'$ la norme quotient sur $E/\overline{F}$. D'après la proposition 6.4.3, on a :

$$d(\lambda x, F) = d(\lambda x, \overline{F}) = \|\pi(\lambda x)\|' = |\lambda|\, \|\pi(x)\|' = |\lambda| d(x, \overline{F}) = |\lambda| d(x, F)\,,$$

$$d(x - y, F) = d(x - y, \overline{F}) = \|\pi(x - y)\|' = \|\pi(x)\|' = d(x, \overline{F}) = d(x, F)\,.$$

2. Soient $\pi : E \longrightarrow E/F$ l'application quotient et $\|\ \|'$ la norme quotient sur E/F. Alors pour tout $x \in E$, on a $\|\pi(x)\|' = d(x, F)$. Comme E/F est non nul, alors pour tout $t \in]1 - \varepsilon, 1[$, il existe $z \in E/F$ tel que $1 - \varepsilon < t = \|z\|' < 1$. D'après la proposition 6.4.3, on a $\pi(B_E(0, 1)) = B_{E/F}(0, 1)$, donc il existe $x \in E$ tel que $\|x\| < 1$ et $\pi(x) = z$. Soit $a = \dfrac{x}{\|x\|}$, alors on a $\|a\| = 1$ et $d(a, F) = \dfrac{1}{\|x\|} d(x, F) = \dfrac{1}{\|x\|} \|z\|' > \|z\|' > 1 - \varepsilon$.
3. Ceci résulte de l'exercice précédent, en prenant $y = 0$ et $\lambda = 1$.

Exercice 6.43. Soient $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire continue non nulle. Soit $H = \ker(\varphi)$. Montrer que pour tout $x \in E$, on a $d(x, H) = \dfrac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|}$.

Solution. Pour tout $h \in H$, on a $|\varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(h)| \leq \|\varphi\|\, \|x - h\|$, d'où $\dfrac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|} \leq \|x - h\|$. Par conséquent, on a $\dfrac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|} \leq d(x, H)$. Il reste à montrer l'inégalité réciproque. Remarquons d'abord que pour tout $b \in E \setminus H$, on a $E = H + \mathbb{K} b$. En effet, on a $\varphi(b) \neq 0$ et pour tout $x \in E$, on a $x = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(b)} b + x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(b)} b$, avec $x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(b)} b \in H$. On a $\sup\limits_{\|x\|=1} |\varphi(x)| = \|\varphi\| \neq 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, il existe $x_n \in E$ tel que $\|x_n\| = 1$ et $|\varphi(x_n)| \geq \|\varphi\| - \frac{1}{n} > 0$. Donc $x_n \notin H$, et on a $x = h_n + t_n x_n$, avec $h_n \in H$ et $t_n \in \mathbb{K}$. On a $\varphi(x) = t_n \varphi(x_n)$ et $\dfrac{|\varphi(x)|}{|\varphi(x_n)|} = |t_n|$, d'où $|t_n| \leq \dfrac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\| - \frac{1}{n}}$. On a $x - h_n = t_n x_n$, d'où $\|x - h_n\| = |t_n| \leq \dfrac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\| - \frac{1}{n}}$. Par conséquent, on a $d(x, H) \leq \dfrac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\| - \frac{1}{n}}$, on en déduit $d(x, H) \leq \dfrac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|}$. Donc on a bien $d(x, H) = \dfrac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|}$.

Exercice 6.44. Soient $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire continue non nulle. Soit $H = \ker(\varphi)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$ et $\|\varphi\| = |\varphi(a)|$.

(ii) Pour tout $x \in E$, il existe $h \in H$ tel que $d(x, H) = \|x - h\|$.

(iii) Il existe $x \in E \setminus H$ et $h \in H$ tels que $d(x, H) = \|x - h\|$.

Solution. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est claire. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $x \in E$. D'après l'exercice précédent, on a $d(x, H) = \dfrac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|}$. Par hypothèse, il existe $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$ et $\|\varphi\| = |\varphi(a)|$, donc $a \notin H$ et il existe $t \in \mathbb{K}$ et $h \in H$ tels que $x = h + ta$, d'où on a $\|x - h\| = \|ta\| = |t|$. On a $\varphi(x) = t\varphi(a)$, d'où $\dfrac{|\varphi(x)|}{|\varphi(a)|} = |t|$. Donc on a $\dfrac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|} = |t| = \|x - h\|$. Par conséquent, on a $d(x, H) = \|x - h\|$. Ainsi, pour tout $x \in E$, il existe $h \in H$ tel que $d(x, H) = \|x - h\|$.
Montrons l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i). Soient $x \in E \setminus H$ et $h \in H$ tels que $d(x, H) = \|x - h\|$. Soit $a = \dfrac{x - h}{d(x, H)}$, alors on a $\|a\| = 1$ et $\varphi(a) = \dfrac{\varphi(x)}{d(x, H)}$, d'où on a $d(x, H) = \dfrac{|\varphi(x)|}{|\varphi(a)|}$. D'après l'exercice précédent, on a $d(x, H) = \dfrac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|}$, on en déduit $\|\varphi\| = |\varphi(a)|$.

Exercice 6.45. Soit l'espace de Banach $E = (c_0\,, \|\ \|_\infty)$. Considérons l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi\ :\ E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \end{array}$$

1. Montrer que φ est une forme linéaire continue non nulle et calculer sa norme.

2. Soient $H = \ker(\varphi)$ et $x \in E \setminus H$. Montrer qu'il n'existe aucun $h \in H$ tel que $d(x, H) = d(x, h) = \|x - h\|_\infty$.

Solution. 1. Il est clair que φ est linéaire. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in c_0$, on a :

$$|\varphi(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n} \leq 2\|x\|_\infty\,,$$

donc φ est continue et on a $\|\varphi\| \leq 2$. Pour tout $n \geq 0$, soit $X_n = (x_k)_{k\geq 0} \in c_0$ défini par $x_k = 1$ si $0 \leq k \leq n$ et $x_k = 0$ sinon, alors on a $\|X_n\|_\infty = 1$ et $\varphi(X_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$, donc on a $\|\varphi\| \geq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$. Par conséquent, on a $\|\varphi\| \geq 2$, d'où $\|\varphi\| = 2$.

2. Soit $h = (h_n)_{n\geq 0} \in H$, alors on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n}{2^n} = 0$, d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n}{2^{n+1}} = 0$. Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in$

$E \setminus H$, alors on a :

$$\begin{aligned} d(x,H) &= \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|} = \Big|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}\Big| \\ &= \Big|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n}{2^{n+1}}\Big| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - h_n|}{2^{n+1}} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x-h\|_\infty}{2^{n+1}} = \|x-h\|_\infty \,. \end{aligned}$$

Si $d(x,H) = d(x,h) = \|x-h\|_\infty$, alors on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - h_n|}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x-h\|_\infty}{2^{n+1}}$. Or pour tout $n \geq 0$, on a $|x_n - h_n| \leq \|x-h\|_\infty$, on en déduit que pour tout $n \geq 0$, on a $|x_n - h_n| = \|x-h\|_\infty$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0$, on en déduit que $x = h$ ce qui est impossible. Donc il n'existe aucun $h \in H$ tel que $d(x,H) = d(x,h) = \|x-h\|_\infty$.

Exercice 6.46. Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé et A une partie convexe non vide de E. Soient $x \in E$ et $a \in A$ tels que $d(x,A) = \|x-a\|$. Montrer que pour tout $z \in [x, a]$, on a $d(z,A) = \|z-a\|$.
Solution. Si $z = x$ ou si $z = a$, c'est clair, donc on peut $z \in]x, a[$. Soit $t \in]0, 1[$ tel que $z = (1-t)x + ta$, d'où on a $z - a = (1-t)(x-a)$. Pour tout $b \in A$, on a :

$$\begin{aligned} \|z-a\| &= (1-t)\|x-a\| \\ &\leq (1-t)\|x-b\| \\ &= \|(1-t)x - (1-t)b\| \\ &= \|(1-t)x + ta - (1-t)b - ta\| \\ &= \|z - (1-t)b - ta\| \\ &= \|(1-t)z + tz - (1-t)b - ta\| \\ &\leq (1-t)\|z-b\| + t\|z-a\| \,. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $(1-t)\|z-a\| \leq (1-t)\|z-b\|$, d'où $\|z-a\| \leq \|z-b\|$. Donc on a bien $d(z,A) = \|z-a\|$.

Pour plus d'exercices, voir le supplément associé à ce livre.

Chapitre 7

THÉORÈMES FONDAMENTAUX

On continue dans ce chapitre l'étude des espaces de Banach et on démontre plusieurs théorèmes fondamentaux ; à savoir le théorème de l'application ouverte, le théorème du graphe fermé, le théorème de Banach-Steinhaus, et les théorèmes de Hahn-Banach sur le prolongement des formes linéaires continues et sur la séparation des ensembles convexes. Souvent dans ce chapitre, on manipule à la fois plusieurs espaces normés. Pour éviter toute confusion, si $(E, \| \ \|)$ est un espace normé et si $a \in E$ et $r > 0$, on note $B_E(a,r)$ (*resp.* $B'_E(a,r)$) la boule ouverte (*resp.* fermée) dans E de centre a et de rayon r. On note aussi $B_E = B'_E(0,1) = \{x \in E \ ; \ \|x\| \leq 1\}$ et $S_E = \{x \in E \ ; \ \|x\| = 1\}$.

7.1 Théorème de l'application ouverte

Proposition 7.1.1. *Soient $(E, \| \ \|)$, $(F, \| \ \|')$ deux espaces normés et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) T est une application ouverte.

(ii) Il existe $r > 0$ tel que $B_F(0,r) \subset T(B_E(0,1))$.

(iii) Il existe $M > 0$ tel que pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $T(x) = y$ et $\|x\| \leq M \|y\|'$.

Démonstration. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est claire. Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soient U un ouvert de E et $y \in T(U)$. Montrons qu'il existe $s > 0$ tel que $B_F(y,s) \subset T(U)$. Soit $x \in U$ tel que $T(x) = y$. Comme U est un ouvert de E, il existe $t > 0$ tel que $B_E(x,t) \subset U$. On a $B_E(x,t) = x + B_E(0,t)$, d'où $T(x) + T(B_E(0,t)) \subset T(U)$. Par hypothèse, on a $B_F(0,r) \subset T(B_E(0,1))$, d'où $B_F(0,tr) = t\, B_F(0,r) \subset t\, T(B_E(0,1)) = T(B_E(0,t))$. Par conséquent, on a $B_F(y,tr) = y + B_F(0,tr) \subset y + T(B_E(0,t)) \subset T(U)$. Donc $T(U)$ est un ouvert de F.

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $y \in F \setminus \{0\}$, alors $\dfrac{ry}{2\|y\|'} \in B_F(0,r)$, donc il existe $z \in B_E(0,1)$ tel que $\dfrac{ry}{2\|y\|'} = T(z)$. Soit $x = \dfrac{2\|y\|'}{r} z$, alors on a $T(x) = y$ et $\|x\| \leq \frac{2}{r}\|y\|'$. Il

suffit de prendre $M = \frac{2}{r}$.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Soient $r = \frac{1}{M} > 0$ et $y \in B_F(0,r)$, alors il existe $x \in E$ tel que $T(x) = y$ et $\|x\| \leq M\,\|y\|'$, d'où on a $\|x\| < 1$. Par conséquent, on a $B_F(0,r) \subset T(B_E(0,1))$. ■

Lemme 7.1.1. *Soient $(E, \|\ \|)$ un espace de Banach, $(F, \|\ \|')$ un espace normé et $T \in \mathscr{L}(E;\,F)$. Soient $\varepsilon \in]0,\,1[$ et A un sous-ensemble borné de F tels que $A \subset T(B_E(0,1)) + \varepsilon A$. Alors on a $A \subset \frac{1}{1-\varepsilon}T(B_E(0,1))$.*

Démonstration. Soit $a_0 \in A$; d'après l'hypothèse, il existe $x_0 \in B_E(0,1)$ et $a_1 \in A$ tels que $a_0 = T(x_0) + \varepsilon a_1$. En recommençant avec a_1, on trouve $x_1 \in B_E(0,1)$ et $a_2 \in A$ tels que $a_1 = T(x_1) + \varepsilon a_2$, ce qui donne $a_0 = T(x_0 + \varepsilon x_1) + \varepsilon^2 a_2$. En continuant ainsi, on construit une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans $B_E(0,1)$ et une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans A telles que pour tout $n \geq 1$, on ait $a_0 = T(x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots + \varepsilon^n x_n) + \varepsilon^{n+1}a_{n+1}$. La série $\sum \varepsilon^n x_n$ est normalement convergente, donc convergente dans E puisque E est de Banach. Soit $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n x_n$, alors on a $a_0 = T(x)$ car T est continue et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varepsilon^{n+1}a_{n+1} = 0$. Puisque l'on a $\|x\| \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \|x_n\| < \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n = \frac{1}{1-\varepsilon}$, alors $(1-\varepsilon)x \in B_E(0,1)$ et on a $a_0 = \frac{1}{1-\varepsilon}T((1-\varepsilon)x) \in \frac{1}{1-\varepsilon}T(B_E(0,1))$. Autrement dit, on a $A \subset \frac{1}{1-\varepsilon}T(B_E(0,1))$. ■

Proposition 7.1.2. *Soient $(E, \|\ \|)$ un espace de Banach, $(F, \|\ \|')$ un espace normé, $T \in \mathscr{L}(E;\,F)$ et $r > 0$, $s > 0$.*

1. *Si on a $B_F(0,s) \subset \overline{T(B_E(0,r))}$, alors on a $B_F(0,s) \subset T(B_E(0,r))$.*
2. *Si on a $B'_F(0,s) \subset \overline{T(B'_E(0,r))}$, alors on a $B_F(0,s) \subset T(B_E(0,r))$.*

Démonstration. 1. Quitte à considérer $\frac{r}{s}T$, on peut supposer $s = r = 1$. On a donc $B_F(0,1) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a $B_F(0,1) \subset T(B_E(0,1)) + \varepsilon B_F(0,1)$, voir exercice 6.8. On déduit du lemme précédent que l'on a $B_F(0,1) \subset \frac{1}{1-\varepsilon}T(B_E(0,1))$, pour tout $\varepsilon > 0$. Soit $y \in B_F(0,1)$, alors il existe $\varepsilon \in]0,\,1[$ tel que $\|y\|' < 1 - \varepsilon < 1$, d'où $\left\|\frac{1}{1-\varepsilon}y\right\|' < 1$. Autrement dit, on a $\frac{1}{1-\varepsilon}y \in B_F(0,1)$. Donc il existe $x \in B_E(0,1)$ tel que $\frac{1}{1-\varepsilon}y = \frac{1}{1-\varepsilon}T(x)$, d'où $y = T(x)$. Donc on a $B_F(0,1) \subset T(B_E(0,1))$.
2. Puisque l'on a toujours $\overline{T(B'_E(0,r))} = \overline{T(B_E(0,r))}$, alors 2 résulte de 1. ■

Remarque 7.1.1. Soient E, F deux espaces normés et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire ouverte, alors T est surjective. En effet, $T(E)$ est un sous-espace vectoriel ouvert de F, donc $T(E) = F$, voir exercice 6.9.

Théorème 7.1.1 (théorème de l'application ouverte). *Soient E, F deux espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}(E;\,F)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) T est une application surjective.

(ii) T est une application ouverte.

Démonstration. L'implication $(ii) \Longrightarrow (i)$ résulte de la remarque précédente. Montrons l'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$. D'après les propositions 7.1.1 et 7.1.2, il suffit de montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $B_F(0,r) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$. On a $E = \bigcup\limits_{n>0} B_E(0,n)$, d'où $T(E) = \bigcup\limits_{n>0} T(B_E(0,n))$. Comme T est surjective, alors $F = T(E)$, donc on a $F = \bigcup\limits_{n>0} T(B_E(0,n))$. En particulier, on a $F = \bigcup\limits_{n>0} \overline{T(B_E(0,n))}$. Comme F est un espace de Banach, alors par le théorème de Baire, il existe $n_0 > 0$ tel que $\overline{T(B_E(0,n_0))}$ a un intérieur non vide. On a $\overline{T(B_E(0,n_0))} = n_0 \overline{T(B_E(0,1))}$ et la multiplication par n_0 est un homéomorphisme, on en déduit que $\overline{T(B_E(0,1))}$ a un intérieur non vide. Donc il existe $y \in \overline{T(B_E(0,1))}$ et $r > 0$ tel que $B_F(y,r) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$. Comme on a $z \in \overline{T(B_E(0,1))}$ si et seulement si $-z \in \overline{T(B_E(0,1))}$, on en déduit que $B_F(-y,r) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$. Soit $z \in B_F(0,r)$, on a $z = \frac{1}{2}(z+y) + \frac{1}{2}(z-y)$, avec $z+y \in B_F(y,r)$ et $z-y \in B_F(-y,r)$. Puisque $\overline{T(B_E(0,1))}$ est convexe, on en déduit que $z \in \overline{T(B_E(0,1))}$. Donc on a $B_F(0,r) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$. ∎

Corollaire 7.1.1. *Soient E, F deux espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}(E; F)$ bijective, alors T est un homéomorphisme.*

Corollaire 7.1.2. *Soient $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ deux normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que $(E, \| \ \|_1)$ est un espace de Banach et qu'il existe une constante $a > 0$ telle que pour tout $x \in E$, on ait $\|x\|_2 \le a \|x\|_1$. Alors les deux normes sont équivalentes si et seulement si $(E, \| \ \|_2)$ est de Banach.*

Démonstration. On applique le corollaire précédent à l'application identité

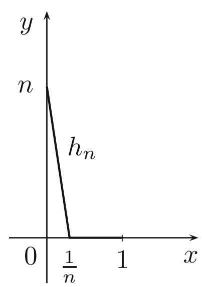
$$\begin{array}{ccc} (E, \| \ \|_1) & \longrightarrow & (E, \| \ \|_2) \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

qui est linéaire bijective et continue. ∎

Exemple 7.1.1. Soient $E = C([0,1])$ muni de deux normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$. On sait que $(E, \| \ \|_\infty)$ est un espace de Banach et que pour tout $f \in E$, on a $\|f\|_1 \le \|f\|_\infty$. Donc $(E, \| \ \|_1)$ est un espace de Banach si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $f \in E$, on ait $\|f\|_\infty \le M \|f\|_1$.

Considérons la suite $(h_n)_{n \ge 1}$ définie par :

$$h_n(t) = \begin{cases} -n^2 t + n & \text{si} \quad 0 \le t \le \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si} \quad \frac{1}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$



Alors on obtient $\|h_n\|_\infty = n$ et $\|h_n\|_1 = \frac{1}{2}$. Donc on ne peut pas trouver une telle constante M. Par conséquent, $(E, \| \ \|_1)$ n'est pas un espace de Banach.

Proposition 7.1.3. *Soient $(E, \| \ \|)$ et $(F, \| \ \|')$ des espaces normés.*

1. *Si $(E, \| \ \|)$ est de Banach, alors l'ensemble des applications linéaires continues ouvertes de E dans F est un ouvert de l'espace normé $\mathscr{L}(E; F)$.*

2. *Si $(E, \| \ \|)$ et $(F, \| \ \|')$ sont de Banach, alors l'ensemble des applications linéaires continues surjectives de E dans F est un ouvert de l'espace de Banach $\mathscr{L}(E; F)$.*

Démonstration. 1. Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue ouverte. D'après la proposition 7.1.1, il existe $r > 0$ tel que $B_F(0,r) \subset T(B_E(0,1))$. Soit $S \in \mathscr{L}(E;\, F)$ tel que $\|T - S\| < \frac{r}{2}$. Alors, pour tout $x \in B_E(0,1)$, on a $\|T(x) - S(x)\|' < \frac{r}{2}$, d'où $T(B_E(0,1)) \subset S(B_E(0,1)) + \frac{1}{2}B_F(0,r)$. Donc on a $B_F(0,r) \subset S(B_E(0,1)) + \frac{1}{2}B_F(0,r)$. Il résulte du lemme 7.1.1 que l'on a $B_F(0,r) \subset 2S(B_E(0,1))$, d'où $B_F(0,\frac{r}{2}) \subset S(B_E(0,1))$. On déduit de la proposition 7.1.1 que S est une application ouverte. Par conséquent, l'ensemble des applications linéaires continues ouvertes de E dans F est un ouvert de l'espace normé $\mathscr{L}(E;\, F)$.
2. Ceci résulte de 1 et du théorème de l'application ouverte. ■

Proposition 7.1.4. *Soient $(E, \|\;\|)$, $(F, \|\;\|')$ deux espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}(E;\, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) T est injective et $T(E)$ est fermé dans F.

(ii) T est un homéomorphisme de E sur $T(E)$.

(iii) Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $\delta\,\|x\| \le \|T(x)\|'$.

(iv) On a $\inf\Big\{\|T(x)\|'\;;\; x \in E \text{ et } \|x\| = 1\Big\} > 0$.

(v) Il n'existe pas de suite $(x_n)_{n\ge 0}$ dans E telle que $\|x_n\| = 1$, pour tout $n \ge 0$, et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T(x_n)\|' = 0$.

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 7 du supplément.

Corollaire 7.1.3. *Soient $(E, \|\;\|)$, $(F, \|\;\|')$ deux espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}(E;\, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) T est bijective.

(ii) On a $\overline{T(E)} = F$ et il existe une constante $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $\delta\,\|x\| \le \|T(x)\|'$.

Proposition 7.1.5. *Tout espace de Banach séparable est un quotient de ℓ^1.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 7 du supplément.

Rappelons que si X et Y sont deux ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ est une application, le graphe de f est l'ensemble $G(f) = \{(x, f(x))\;;\; x \in X\} \subset X \times Y$. On a vu, exercice 1.32, que si X et Y sont des espaces topologiques, avec Y séparé, et si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue, alors son graphe $G(f)$ est une partie fermée de $X \times Y$, mais la réciproque n'est pas toujours vraie. En effet, soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0\,, \\[2ex] \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0\,. \end{cases}$$

Alors $G(f)$ est une partie fermée de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mais f n'est pas continue en 0.
Le théorème suivant nous dit que la réciproque est vraie si X et Y sont des espaces de Banach et si f est linéaire.

Théorème 7.1.2 (théorème du graphe fermé). *Soient E, F deux espaces de Banach et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors f est continue si et seulement si son graphe $G(f)$ est fermé dans l'espace de Banach $E \times F$.*

Démonstration. Supposons d'abord que f est continue, et montrons directement, sans utiliser l'exercice 1.32, que $G(f)$ est fermé dans l'espace normé produit $E \times F$. Soit $(x, y) \in \overline{G(f)}$, comme $E \times F$ est un espace métrique, même espace normé, alors il existe une suite $(x_n, f(x_n))_{n\geq 0}$ dans $E \times F$ qui converge vers (x, y). D'où on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = y$. Comme f est continue en x, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$. Par unicité de la limite dans un espace topologique séparé, on a $f(x) = y$, d'où $(x, y) \in G(f)$. Par conséquent, on a $\overline{G(f)} = G(f)$, donc $G(f)$ est une partie fermée de $X \times Y$.
Réciproquement, supposons que $G(f)$ est fermé dans $E \times F$. Comme $G(f)$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Banach $E \times F$, alors $G(f)$ est un espace de Banach. Considérons les projections canoniques

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & G(f) & \longrightarrow & E \\ & (x, f(x)) & \longmapsto & x \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rccc} \pi_2 : & G(f) & \longrightarrow & F \\ & (x, f(x)) & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

alors π_2 est linéaire continue et π_1 est linéaire continue et bijective. On déduit du corollaire 7.1.1 que π_1 est un homéomorphisme. Or on a $f = \pi_2 \circ {\pi_1}^{-1}$, donc f est continue. ■

7.2 Théorème de Banach-Steinhaus

Définition 7.2.1. Soient X un espace topologique et A un sous-ensemble de X. On dit que A est **maigre** dans X s'il existe une suite $(A_n)_{n\geq 0}$ de sous-ensembles de X telle que $A = \bigcup\limits_{n\geq 0} A_n$ et pour tout $n \geq 0$, on ait $\overset{\circ}{\overline{A_n}} = \emptyset$.

Exemple 7.2.1. L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est maigre dans $\mathbb{R}$.

Remarque 7.2.1. Soit X un espace de Baire, voir proposition 2.8.1 et théorème 2.8.1. Alors on a :

1. X n'est pas maigre dans X, si $X \neq \emptyset$.

2. Si A est un sous-ensemble maigre dans X, alors $X \setminus A$ est dense dans X.

Soient $(E, \| \|)$, $(F, \| \|')$ des espaces normés et A un sous-ensemble borné dans l'espace normé $\mathscr{L}(E; F)$, alors pour tout $x \in E$, le sous-ensemble $\big\{f(x) \; ; \; f \in A\big\}$ est borné dans F. En effet, soit $M > 0$ tel que pour tout $f \in A$, on ait $\|f\| \leq M$. Soit $x \in E$, alors pour tout $f \in A$, on a $\|f(x)\|' \leq \|f\| \, \|x\| \leq M \, \|x\|$. Donc l'ensemble $\big\{f(x) \; ; \; f \in A\big\}$ est borné dans F.

Théorème 7.2.1 (Banach-Steinhaus). *Soient $(E, \| \|)$, $(F, \| \|')$ des espaces normés et A un sous-ensemble de $\mathscr{L}(E; F)$. Pour tout $x \in E$, soit $A_x = \big\{f(x) \; ; \; f \in A\big\} \subset F$ et soit $B = \big\{x \in E \; ; \; A_x$ soit borné dans $F\big\}$. Si B n'est pas maigre dans E, alors l'ensemble A est borné dans $\mathscr{L}(E; F)$. Autrement dit, il existe une constante $M > 0$ tel que pour tout $f \in A$, on ait $\|f\| \leq M$. En particulier, on a $B = E$.*

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, posons :

$$C_n = \{x \in E\ ;\ \|f(x)\|' \leq n\,,\ \text{pour tout } f \in A\} = \{x \in E\ ;\ A_x \subset B'_F(0,n)\}\,.$$

Pour tout $f \in A$, $C_{f,n} = \{x \in E\ ;\ \|f(x)\|' \leq n\}$ est fermé dans E. Comme on a $C_n = \bigcap_{f \in A} C_{f,n}$, alors C_n est fermé dans E. De plus, on a $B = \bigcup_{n \geq 1} C_n$. Puisque B n'est pas maigre dans E, il existe $n \geq 1$ tel que C_n ait un intérieur non vide. Pour tout $n \geq 1$, on a $C_n = n\,C_1$, et comme la multiplication par n, $n \neq 0$, est un homéomorphisme, on en déduit que C_1 a un intérieur non vide. Donc il existe $x_0 \in C_1$ et $r > 0$ tels que $B(x_0, r) \subset C_1$. Autrement dit, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $z \in B(x_0, r)$ et pour tout $f \in A$, on ait $\|f(z)\|' \leq 1$. Soient $x \in B(0,1)$ et $f \in A$; comme $x_0 \pm rx \in B(x_0, r)$ et $f(x) = \frac{1}{2r}\big(f(x_0+rx) - f(x_0-rx)\big)$, on obtient $\|f(x)\|' \leq \frac{1}{r}$. Donc, pour tout $x \in B(0,1)$ et pour tout $f \in A$, on a $\|f(x)\|' \leq \frac{1}{r}$. Cela montre que pour tout $f \in A$, on a $\|f\| \leq \frac{1}{r}$. ∎

Corollaire 7.2.1. *Soient $(E, \|\ \|)$ un espace de Banach, $(F, \|\ \|')$ un espace normé et A un sous-ensemble de $\mathscr{L}(E; F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) A est borné dans $\mathscr{L}(E; F)$.

(ii) Pour tout $x \in E$, le sous-ensemble $\{f(x)\ ;\ f \in A\}$ est borné dans F.

Démonstration. Ceci résulte du théorème précédent et du fait que si E est un espace de Banach, alors E n'est pas maigre dans E car E est un espace de Baire. ∎

Corollaire 7.2.2. *Soient $(E, \|\ \|)$ un espace de Banach, $(F, \|\ \|')$ un espace normé et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite non bornée dans $\mathscr{L}(E; F)$. Alors l'ensemble*

$$D = \{x \in E\ ;\ (f_n(x))_{n \geq 0} \text{ n'est pas convergente dans } F\}$$

est dense dans E.

Démonstration. Soit $B = \{x \in E\ ;\ (f_n(x))_{n \geq 0}$ soit bornée dans $F\}$. D'après le théorème précédent, l'ensemble B est maigre. Comme E est un espace de Baire, alors $E \setminus B$ est dense dans E. Or on a $E \setminus B \subset D$, donc D est dense dans E. ∎

Corollaire 7.2.3. *Soient $(E, \|\ \|)$ un espace de Banach, $(F, \|\ \|')$ un espace normé et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'applications linéaires continues de E dans F. On suppose que pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ converge ; notons $f(x)$ sa limite. Alors la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est bornée, f est linéaire et continue et on a $\|f\| \leq \liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|$.*

Démonstration. Il est clair que f est linéaire. Pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est convergente, donc bornée. Par le théorème précédent, il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\|f_n\| \leq M$. Donc, pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|f_n(x)\|' \leq M\,\|x\|$. On passe à la limite, on trouve $\|f(x)\|' \leq M\,\|x\|$. Donc f est continue. Pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|' &= \lim_{n \to +\infty} \|f_n(x)\|' = \liminf_{n \to +\infty} \|f_n(x)\|' \\
&\leq \liminf_{n \to +\infty} \|x\|\,\|f_n\| = \|x\| \liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\|f\| \leq \liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|$. ∎

Proposition 7.2.1. *Soient $(E, \| \ \|)$ un espace de Banach et $(F, \| \ \|)$, $(G, \| \ \|)$ deux espaces normés. Soit $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire vérifiant les conditions suivantes :*

1. *Pour tout $x \in E$, l'application linéaire $y \longmapsto B(x, y)$ est continue.*

2. *Pour tout $y \in F$, l'application linéaire $x \longmapsto B(x, y)$ est continue.*

Alors B est continue.

Démonstration. D'après la proposition 6.5.1, l'application bilinéaire B est continue s'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in B_E = B'_E(0, 1)$ et pour tout $y \in B_F = B'_F(0, 1)$, on ait $\|B(x, y)\| \leq M$. Pour tout $x \in E$, l'application $y \longmapsto B(x, y)$ est linéaire continue de F dans G, donc il existe une constante $M_x > 0$ telle que pour tout $y \in B_F$, on ait $\|B(x, y)\| \leq M_x$. Pour tout $y \in B_F$, l'application $B_y : x \longmapsto B(x, y)$ est linéaire continue de E dans G. Soit $\mathcal{A} = \{B_y \ ; \ y \in B_F\}$, alors $\mathcal{A}$ est une famille d'applications linéaires continues de E dans G telle que pour tout $x \in E$, il existe une constante $M_x > 0$ telle que pour tout $y \in B_F$, on ait $\|B_y(x)\| = \|B(x, y)\| \leq M_x$. D'après le corollaire 7.2.1, la famille $\mathcal{A}$ est bornée. Autrement dit, il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $y \in B_F$, on ait $\|B_y\| \leq M$. D'où, pour tout $x \in B_E$ et pour tout $y \in B_F$, on a $\|B(x, y)\| = \|B_y(x)\| \leq M$. Donc B est continue. ■

7.3 Somme directe topologique

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Alors l'application

$$\begin{array}{rcl} \sigma : F_1 \times \cdots \times F_n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array}$$

est linéaire. Si de plus, E est un espace normé, l'application σ est aussi continue.

Définition 7.3.1. Soient E un espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

1. On dit que E est la **somme directe algébrique** des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_n$ si l'application σ est bijective.

2. Si E est un espace normé et si σ est un homéomorphisme, on dit que E est la **somme directe topologique** des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_n$.

Exemple 7.3.1. Soient $E_1, \ldots, E_n$ des espaces normés et $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ l'espace normé produit. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, l'application

$$\begin{array}{rcl} E_i & \longrightarrow & E = E_1 \times \cdots \times E_n \\ x_i & \longmapsto & (0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) \end{array}$$

est linéaire injective et continue de E_i dans E, dont l'image est un sous-espace vectoriel F_i de E. De plus, E est la somme directe topologique des sous-espaces F_i.

Exemple 7.3.2. Soit N un hyperplan fermé d'un espace de Banach E. Soit $a \in E$ tel que $a \notin N$. Alors E est la somme directe topologique de N et $a\mathbb{K}$, car $N \times a\mathbb{K}$ est un espace de Banach et l'application $(x, a\lambda) \longmapsto x + a\lambda$ est continue et bijective de $N \times a\mathbb{K}$ sur E, d'où c'est aussi un homéomorphisme par le théorème de l'application ouverte.

Remarque 7.3.1. Soit E un espace normé qui est la somme directe algébrique des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_n$. Alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la projection naturelle $\pi_i : E \longrightarrow F_i$ est une application ouverte. En effet, comme l'application

$$\begin{array}{rcl} \sigma : F_1 \times \cdots \times F_n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array}$$

est bijective et continue, alors l'application inverse

$$\begin{array}{rcl} \sigma^{-1} : E & \longrightarrow & F_1 \times \cdots \times F_n \\ x & \longmapsto & (\pi_1(x), \ldots, \pi_n(x)) \end{array}$$

est ouverte. D'après la proposition 1.4.7, la projection canonique

$$\begin{array}{rcl} p_i \ : \ F_1 \times \cdots \times F_n & \longrightarrow & F_i \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

est ouverte. Par conséquent, la projection naturelle $\pi_i = p_i \circ \sigma^{-1} : E \longrightarrow F_i$ est une application ouverte.

Proposition 7.3.1. *Soit E un espace normé qui est la somme directe topologique des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_n$. Alors on a :*

1. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, F_i est fermé dans E.*
2. *E est un espace de Banach si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, F_i est un espace de Banach.*

Démonstration. 1. Comme $\{0\} \times \cdots \times \{0\} \times F_i \times \{0\} \cdots \times \{0\}$ est fermé dans l'espace normé produit $F_1 \times \cdots \times F_n$, alors F_i est fermé dans E.
2. Si E est de Banach, il résulte de 1 que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, F_i est de Banach. Réciproquement, si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, F_i est de Banach, alors l'espace normé produit $F_1 \times \cdots \times F_n$ est de Banach. Par conséquent, E est de Banach. ■

Proposition 7.3.2. *Soient E un espace normé qui est la somme directe algébrique des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) E est la somme directe topologique des sous-espaces $F_1, \ldots, F_n$.

(ii) Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la projection naturelle $\pi_i : E \longrightarrow F_i$ est continue.

Si de plus E est de Banach, les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes à :

(iii) Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, F_i est fermé dans E.

Démonstration. Par hypothèse, l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} \sigma \ : \ F_1 \times \cdots \times F_n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array}$$

est bijective et continue. Comme l'application inverse σ^{-1} est définie par :

$$\begin{array}{rcl} \sigma^{-1} \ : \ E & \longrightarrow & F_1 \times \cdots \times F_n \\ x & \longmapsto & (\pi_1(x), \ldots, \pi_n(x)) \end{array}$$

alors σ est un homéomorphisme si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la projection naturelle $\pi_i : E \longrightarrow F_i$ est continue. Par conséquent, on a l'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii).
L'implication (i) $\Longrightarrow$ (iii) résulte de la proposition précédente.
On suppose à présent E de Banach. Montrons l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i). Si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, F_i est fermé dans E, alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, F_i est un espace de Banach, donc l'espace produit $F_1 \times \cdots \times F_n$ est de Banach. Comme l'application σ est une application linéaire continue bijective, on déduit du théorème de l'application ouverte que σ est un homéomorphisme, donc E est la somme directe topologique des sous-espaces $F_1, \dots, F_n$. ∎

Définition 7.3.2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.

1. On dit que F admet un **supplémentaire algébrique** dans E s'il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que E soit la somme directe algébrique des F et G. Dans ce cas, on dit que G est un **supplémentaire algébrique** de F dans E ou que F et G sont supplémentaires algébriques dans E.

2. Si $(E, \| \ \|)$ est un espace normé, on dit que F admet un **supplémentaire topologique** dans E s'il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que E soit la somme directe topologique des F et G. Dans ce cas, on dit G est un **supplémentaire topologique** de F dans E ou que F et G sont supplémentaires topologiques dans E.

Remarque 7.3.2. Soit E un espace vectoriel. Tout sous-espace vectoriel de E admet en général une infinité de supplémentaires algébriques qui sont algébriquement isomorphes. Par contre, un sous-espace vectoriel d'un espace normé n'admet pas toujours un supplémentaire topologique. Par exemple, c_0 est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞, et on peut montrer, mais c'est difficile, que c_0 n'admet pas de supplémentaire topologique dans ℓ^∞.

Proposition 7.3.3. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) G est un supplémentaire algébrique de F dans E.

(ii) Pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ et un unique $z \in G$ tels que $x = y + z$.

(iii) Il existe une application linéaire $\pi : E \longrightarrow E$ telle que $\pi \circ \pi = \pi$, $\pi(E) = F$ et $\ker(\pi) = G$.

(iv) Il existe une application linéaire $\pi : E \longrightarrow F$ telle que $\ker(\pi) = G$ et pour tout $y \in F$, on ait $\pi(y) = y$.

Démonstration. Les équivalences (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) et (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) sont triviales.
Preuve de (i) $\Longrightarrow$ (iv). Par hypothèse, l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & F \times G & \longrightarrow & E \\ & (y, z) & \longmapsto & y + z \end{array}$$

est bijective. Soit $p : F \times G \longrightarrow F$ la projection canonique définie par $p(y, z) = y$. Soit $\pi = p \circ \sigma^{-1}$, alors π est une application linéaire de E dans F telle que $\ker(\pi) = G$ et pour tout $y \in F$, on ait $\pi(y) = y$.

Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Par hypothèse, il existe une application linéaire $\pi : E \longrightarrow E$ telle que $\pi \circ \pi = \pi$, $\pi(E) = F$ et $\ker(\pi) = G$. Vérifions d'abord que l'on a $\ker(\pi) \cap \pi(E) = \{0\}$. Soit $b \in \ker(\pi) \cap \pi(E)$, alors on a $\pi(b) = 0$ et il existe $a \in E$ tel que $b = \pi(a)$. D'où on a $0 = \pi(b) = \pi \circ \pi(a) = \pi(a) = b$, donc $\ker(\pi) \cap \pi(E) = \{0\}$. Soit $x \in E$. Alors on a $x = x - \pi(x) + \pi(x)$ et $\pi(x - \pi(x)) = \pi(x) - \pi(\pi(x)) = 0$, d'où $x - \pi(x) \in \ker(\pi)$. Il reste à vérifier l'unicité de la décomposition de x. Soient $y, y' \in F$ et $z, z' \in G$ tels que $x = y + z = y' + z'$. Alors on a $y - y' = z' - z \in \ker(\pi) \cap \pi(E)$, d'où $y = y'$ et $z = z'$. ■

Remarque 7.3.3. Soient E un espace normé et F un sous-espace vectoriel de E. S'il existe $\pi : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue telle que pour tout $y \in F$, on ait $\pi(y) = y$, alors F est fermé dans E. En effet, soit $x \in \overline{F}$. Alors il existe une suite $(y_n)_{n \geq 0}$ dans F telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = x$. Comme π est continue, alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \pi(y_n) = \pi(x)$. Or, pour tout $n \geq 0$, on a $\pi(y_n) = y_n$, d'où $x = \pi(x) \in F$. Donc F est fermé dans E.

On déduit des propositions 7.3.2 et 7.3.3 les deux corollaires suivants :

Corollaire 7.3.1. *Soient E un espace de Banach et $\pi : E \longrightarrow E$ une application linéaire telle que $\pi \circ \pi = \pi$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *π est continue.*

(ii) $\ker(\pi)$ *et $\pi(E)$ sont fermés dans E.*

(iii) *E est la somme directe topologique des* $\ker(\pi)$ *et $\pi(E)$.*

Corollaire 7.3.2. *Soient E un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'espace F admet un supplémentaire topologique. Autrement dit, il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que E est la somme directe topologique des F et G.*

(ii) *Il existe une application linéaire continue $\pi : E \longrightarrow E$ telle que $\pi \circ \pi = \pi$ et $\pi(E) = F$.*

(iii) *Il existe une application linéaire continue $\pi : E \longrightarrow F$ telle que pour tout $y \in F$, on ait $\pi(y) = y$.*

Remarque 7.3.4. Soient E un espace de Banach et F, G des sous-espaces vectoriels de E tels que E soit la somme directe topologique des F et G. Soit $\pi : E \longrightarrow F$ la projection naturelle, alors π est linéaire continue. Puisque pour tout $x \in F$, on a $\pi(x) = x$, alors on a $\|\pi\| \geq 1$. Mais, on peut avoir $\|\pi\| > 1$. En effet, soient $E = \mathbb{R}^2$, muni de la norme $\| \ \|_\infty$, et $G = \{(x, x) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$, $F = \{(x, 0) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$. Alors E est la somme directe topologique des F et G. Soient $z = (2, 0) \in F$ et $w = (-1, -1) \in G$, alors on a $\|z + w\|_\infty = 1$ et $\|\pi(z + w)\|_\infty = \|z\|_\infty = 2$, donc $\|\pi\| \geq 2$.

7.4 Dual d'un espace normé ; dualité des espaces ℓ^p

Rappelons que si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée une **forme linéaire** sur E. On appelle **dual algébrique** de E, et on note E', l'espace vectoriel des formes linéaires sur E. Soit $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Comme $(\mathbb{K}, | \ |)$ est un espace de Banach, d'après la proposition 6.3.3, l'espace normé $\mathscr{L}(E; \mathbb{K})$ est de Banach.

Définition 7.4.1. Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. On appelle **dual topologique** de E et l'on note E^* l'espace de Banach $E^* = \mathscr{L}(E; \mathbb{K})$ †. Un élément de E^* est dit **forme linéaire continue** sur E.

Remarque 7.4.1. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace normé.

– Si F est un sous-espace vectoriel dense de E, alors l'application

$$\begin{array}{ccc} E^* = \mathscr{L}(E; \mathbb{K}) & \longrightarrow & F^* = \mathscr{L}(F; \mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & f_{|F} \end{array}$$

est linéaire bijective et isométrique, voir la proposition 6.3.5. Par conséquent, on peut identifier E^* et F^*.
Notez que c_c est un sous-espace vectoriel dense dans l'espace de Banach c_0 et donc on a $c_c^* = c_0^*$, mais c_c et c_0 ne sont pas isométriquement isomorphes car c_0 est un espace de Banach et c_c ne l'est pas.

– D'après le théorème 6.6.1, le dual topologique de E coïncide avec le dual algébrique de E si et seulement si E est de dimension finie. Donc si E est de dimension infinie, alors le dual topologique est inclus strictement dans le dual algébrique.

Proposition 7.4.1 (dual (topologique) de $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_p)$). *Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose $T_x(y) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j$. Alors on a :*

1. *T_x est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$ et l'application*

$$\begin{array}{cccc} T : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n*} \\ & x & \longmapsto & T_x \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Autrement dit, T est linéaire bijective.

2. *Le dual (topologique) de $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_1)$ est isométriquement isomorphe à $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_\infty)$.*

3. *Le dual (topologique) de $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_\infty)$ est isométriquement isomorphe à $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_1)$.*

4. *Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Le dual (topologique) de $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_q)$ est isométriquement isomorphe à $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_p)$.*

Démonstration. 1. Il est clair que $T_x \in \mathbb{K}^{n*}$ et que T est une application linéaire injective. Montrons que T est surjective. Soit f une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$. Soit $(e_j)_{1\le j\le n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, soit $x_j = f(e_j)$. Alors $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et pour tout $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$f(y) = f\Big(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} y_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = T_x(y)$$

donc $f = T_x$.
2. On munit $\mathbb{K}^n$ de la norme $\|\ \|_1$. Pour tout $y \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$|T_x(y)| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j|\, |y_j| \le \sum_{j=1}^{n} \|x\|_\infty\, |y_j| = \|x\|_\infty\, \|y\|_1$$

†Certains auteurs notent le dual topologique d'un espace normé E par E'.

d'où on a $\|T_x\| \leq \|x\|_\infty$. Soit $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\|x\|_\infty = |x_{j_0}|$. Soit $y \in \mathbb{K}^n$ tel que $y_{j_0} = 1$ et $y_j = 0$ si $j \neq j_0$. Alors on a $\|y\|_1 = 1$ et $|T_x(y)| = |x_{j_0}| = \|x\|_\infty$. Donc on a $\|T_x\| = \|x\|_\infty$. Par conséquent, le dual (topologique) de $(\mathbb{K}^n, \| \, \|_1)$ est isométriquement isomorphe à $(\mathbb{K}^n, \| \, \|_\infty)$.
3. On munit $\mathbb{K}^n$ de la norme $\| \, \|_\infty$. Pour tout $y \in \mathbb{K}^n$, on a aussi $|T_x(y)| \leq \|x\|_1 \, \|y\|_\infty$. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe $\theta_j \in [0, 2\pi[$ tel que $x_j = |x_j| \, e^{i\theta_j}$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a $\theta_j \in \{0, \pi\}$). Soit $y \in \mathbb{K}^n$ tel que pour tout j, on ait $y_j = e^{-i\theta_j}$, alors on a $\|y\|_\infty = 1$ et $T_x(y) = \|x\|_1$. On en déduit que l'on a $\|T_x\| = \|x\|_1$. Par conséquent, le dual (topologique) de $(\mathbb{K}^n, \| \, \|_\infty)$ est isométriquement isomorphe à $(\mathbb{K}^n, \| \, \|_1)$.
4. On munit $\mathbb{K}^n$ de la norme $\| \, \|_q$. On peut supposer $x \neq 0$. D'après l'inégalité de Hölder, pour tout $y \in \mathbb{K}^n$, on a $|T_x(y)| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q$, d'où $\|T_x\| \leq \|x\|_p$. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe $\theta_j \in [0, 2\pi[$ tel que $x_j = |x_j| \, e^{i\theta_j}$. Soit $y \in \mathbb{K}^n$ tel que pour tout j, on ait $y_j = e^{-i\theta_j} \Big(\dfrac{|x_j|}{\|x\|_p} \Big)^{\frac{p}{q}}$, alors on a $\|y\|_q = 1$ et $T_x(y) = \|x\|_p$. On en déduit que l'on a $\|T_x\| = \|x\|_p$. Par conséquent, le dual (topologique) de $(\mathbb{K}^n, \| \, \|_q)$ est isométriquement isomorphe à $(\mathbb{K}^n, \| \, \|_p)$.

■

Proposition 7.4.2 (dual topologique de ℓ^1). *On a les propriétés suivantes :*

1. *Soit $x = (x_n)_{n \geq 0} \in \ell^\infty$. Alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} T_x : & (\ell^1, \| \, \|_1) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & y & \longmapsto & T_x(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \, y_n \end{array}$$

est une forme linéaire continue sur ℓ^1, de norme égale à $\|x\|_\infty$.

2. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} T : & (\ell^\infty, \| \, \|_\infty) & \longrightarrow & (\ell^{1^*}, \| \, \|) \\ & x & \longmapsto & T_x \end{array}$$

alors T est un isomorphisme isométrique de ℓ^∞ sur le dual topologique de ℓ^1. Autrement dit, le dual topologique de $(\ell^1, \| \, \|_1)$ est $(\ell^\infty, \| \, \|_\infty)$.

Démonstration. 1. On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n \, y_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| \, |y_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x\|_\infty \, |y_n| = \|x\|_\infty \, \|y\|_1 < +\infty$, donc T_x est bien définie. Soient $y = (y_n)_{n \geq 0}$, $z = (z_n)_{n \geq 0} \in \ell^1$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $T_x(y + \lambda \, z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \, (y_n + \lambda \, z_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \, y_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \, z_n = T_x(y) + \lambda \, T_x(z)$. Donc T_x est linéaire. On a $|T_x(y)| \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n \, y_n| \leq \|x\|_\infty \, \|y\|_1 < +\infty$, donc T_x est continue et on a $\|T_x\| \leq \|x\|_\infty$. On a $T_x(\mathbf{e}_n) = x_n$ et $\|\mathbf{e}_n\|_1 = 1$, d'où $\|T_x\| \geq |x_n|$, donc on a $\|T_x\| \geq \|x\|_\infty$. Par conséquent, on a $\|T_x\| = \|x\|_\infty$.
2. Il est clair que T est linéaire. On a montré ci-dessus que T est aussi isométrique, donc il reste à montrer que T est surjective. Soit f forme linéaire continue sur ℓ^1 . Pour tout $n \geq 0$, on pose $x_n = f(\mathbf{e}_n)$. On a $|x_n| = |f(\mathbf{e}_n)| \leq \|f\| \, \|\mathbf{e}_n\|_1 = \|f\|$, donc $x = (x_n)_{n \geq 0} \in \ell^\infty$.

Pour tout $n \geq 0$, on a $T_x(\mathbf{e}_n) = x_n = f(\mathbf{e}_n)$, donc $T_x = f$ sur c_c. On a montré, exercice 6.34, que c_c est dense dans ℓ^1, donc on a $T_x = f$. Par conséquent, T est surjective. ■

Proposition 7.4.3 (**dual topologique de** c_0). *On a les propriétés suivantes :*

1. *Soit $x = (x_n) \in \ell^1$. L'application*

$$\begin{array}{cccc} T_x : & (\ell^\infty, \|\ \|_\infty) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & y & \longmapsto & T_x(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, y_n \end{array}$$

est une forme linéaire continue sur ℓ^∞, de norme égale à $\|x\|_1$.

2. *On note aussi T_x la restriction de T_x à c_0 et considérons l'application suivante :*

$$\begin{array}{cccc} T : & (\ell^1, \|\ \|_1) & \longrightarrow & ({c_0}^*, \|\ \|) \\ & x & \longmapsto & T_x \end{array}$$

alors T est un isomorphisme isométrique de ℓ^1 sur le dual topologique de $(c_0, \|\ \|_\infty)$. Autrement dit, le dual topologique de $(c_0, \|\ \|_\infty)$ est $(\ell^1, \|\ \|_1)$.

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 7 du supplément.

La proposition précédente nous dit aussi que $(\ell^1, \|\ \|_1)$ est inclus dans dans le dual topologique de $(\ell^\infty, \|\ \|_\infty)$. En fait, cette inclusion est stricte, voir exercices 7.35 et 7.36.

Proposition 7.4.4 (**dual topologique de** ℓ^q). *Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

1. *Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^p$. L'application*

$$\begin{array}{cccc} T_x : & (\ell^q, \|\ \|_q) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & y = (y_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & T_x(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, y_n \end{array}$$

est une forme linéaire continue sur ℓ^q, de norme égale à $\|x\|_p$.

2. *Soit*

$$\begin{array}{cccc} T : & (\ell^p, \|\ \|_p) & \longrightarrow & ({\ell^q}^*, \|\ \|) \\ & x & \longmapsto & T_x \end{array}$$

Alors T est un isomorphisme isométrique de ℓ^p sur le dual topologique de ℓ^q. Autrement dit, si $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors le dual topologique de $(\ell^q, \|\ \|_q)$ est $(\ell^p, \|\ \|_p)$.

Démonstration. 1. Par l'inégalité de Hölder, pour tout $N \geq 0$, on a :

$$\Big|\sum_{n=0}^{N} x_n\, y_n\Big| \leq \sum_{n=0}^{N} |x_n|\, |y_n| \leq \Big(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{n=0}^{N} |y_n|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

On fait tendre N vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|\, |y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q$, donc T_x est bien définie, et on a $|T_x(y)| \leq \|x\|_p \|y\|_q$. Il est clair que T_x est linéaire, donc T_x est continue et

on a $\|T_x\| \leq \|x\|_p$. Montrons que l'on a $\|T_x\| = \|x\|_p$. On peut supposer $x \neq 0$. Pour tout $n \geq 0$, il existe $\theta_n \in [0, 2\pi[$ tel que $x_n = |x_n|\, e^{i\theta_n}$. Pour tout $n \geq 0$, soit $y_n = e^{-i\theta_n}\Big(\dfrac{|x_n|}{\|x\|_p}\Big)^{\frac{p}{q}}$, alors on a $\|y\|_q = 1$ et $T_x(y) = \|x\|_p$, d'où $\|T_x\| \geq \|x\|_p$. Par conséquent, on a $\|T_x\| = \|x\|_p$.
2. L'application T est isométrique et linéaire. Il reste à montrer que T est surjective. Soit $f \in \ell^{q*}$ et pour tout $n \geq 0$, soit $x_n = f(\mathbf{e}_n)$. Pour tout $n \geq 0$, il existe $\theta_n \in [0, 2\pi[$ tel que $x_n = |x_n|\, e^{i\theta_n}$. Pour tout $N \geq 0$, soit :

$$X_N = \sum_{n=0}^{N} |x_n|^{p-1} e^{-i\theta_n}\mathbf{e}_n = \big(|x_0|^{p-1}e^{-i\theta_0}, \cdots, |x_N|^{p-1}e^{-i\theta_N}, 0, \cdots\big) \in \ell^q\,.$$

Alors on a :

$$\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p = f(X_N) \leq \|f\|\|X_N\|_q \quad \text{et} \quad \|X_N\|_q = \Big(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^{q(p-1)}\Big)^{\frac{1}{q}} = \Big(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

On en déduit que pour tout $N \geq 0$, on a $\Big(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|$. On fait tendre N vers $+\infty$, on trouve que $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^p$ et que l'on a $\|x\|_p \leq \|f\|$. On a $T_x = f$ sur c_c et c_c est dense dans ℓ^q, on en déduit $T_x = f$, donc T est surjective. ∎

Remarque 7.4.2. Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé. C'est, en particulier, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Il y a deux notions distinctes de dual topologique pour E : le dual en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel réel $E^*_{\mathbb{R}} = \mathscr{L}(E;\mathbb{R})$ et le dual en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel complexe $E^*_{\mathbb{C}} = \mathscr{L}(E;\mathbb{C})$. En fait, on peut identifier ces deux espaces. Soit $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application $\mathbb{R}$-linéaire qui à un nombre complexe $a + ib$ associe sa partie réelle a $(a, b \in \mathbb{R})$.

Proposition 7.4.5. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} T: & E^*_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & E^*_{\mathbb{R}} \\ & f & \longmapsto & Re \circ f \end{array}$$

est $\mathbb{R}$-linéaire, bijective et isométrique. L'application inverse T^{-1} est définie par : pour tout $g \in E^*_{\mathbb{R}}$, on a $T^{-1}(g)(x) = g(x) - ig(ix)$, pour tout $x \in E$.

Démonstration. Il est clair que T est $\mathbb{R}$-linéaire. Vérifions que T est isométrique. Soit $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$. On a $|T(f)(x)| = |\mathrm{Re}(f(x))| \leq |f(x)| \leq \|f\|\,\|x\| \leq \|f\|$. Donc on a $\|T(f)\| \leq \|f\|$. Par ailleurs, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = e^{i\theta}|f(x)|$, d'où on a $f(e^{-i\theta}x) = |f(x)|$ et donc $T(f)(e^{-i\theta}x) = (\mathrm{Re} \circ f)(e^{-i\theta}x) = |f(x)|$. Comme on a $\|e^{-i\theta}x\| = |e^{-i\theta}|\|x\| = \|x\| \leq 1$, alors $\|T(f)\| \geq |f(x)|$. Par conséquent, on a $\|T(f)\| \geq \|f\|$, d'où $\|T(f)\| = \|f\|$. On en déduit que T est injective. Soit $g \in E^*_{\mathbb{R}}$, pour tout $x \in E$, on pose $f(x) = g(x) - ig(ix)$, alors $f \in E^*_{\mathbb{C}}$ et on a $T(f) = g$, donc T est surjective. Par conséquent, T est bijective. ∎

7.5 Semi-normes

Définition 7.5.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **semi-norme** sur E est une application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions suivantes :

1. Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$.

2. Pour tout $x, y \in E$, on a $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (inégalité de convexité).

Si p est une semi-norme sur un espace vectoriel E, alors le couple (E, p) est appelé **espace vectoriel semi-normé**, ou simplement **espace semi-normé**

Remarque 7.5.1. Soit p une semi-norme sur un espace vectoriel E.

1. On a $p(0) = 0$.

2. Pour tout $x, y \in E$, on a $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$.

Exemple 7.5.1. 1. Une norme est une semi-norme.

2. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire, alors l'application définie par $p(x) = |f(x)|$, pour tout $x \in E$, est une semi-norme sur E.

3. Si $E = C^1([0, 1])$, l'espace vectoriel des applications de classe C^1 de $[0, 1]$ dans $\mathbb{K}$, et si pour tout $f \in E$, on pose $p(f) = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|$, alors p est une semi-norme sur E.

4. Soient F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $q : F \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une semi-norme. Alors l'application $q \circ f$ est une semi-norme sur E.

Remarque 7.5.2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit $(p_n)_{n \geq 0}$ une suite de semi-normes sur E. On suppose que pour tout $x \in E$, la suite $(p_n(x))_{n \geq 0}$ converge vers un réel $p(x)$. Alors l'application $x \longmapsto p(x)$ est une semi-norme sur E.

2. Soient I un ensemble non vide et $(p_i)_{i \in I}$ une famille de semi-normes sur E. Alors l'ensemble $F = \{x \in E \ ;\ \sup\{p_i(x) \ ;\ i \in I\} < +\infty\}$ est un sous-espace vectoriel de E et l'application $x \longmapsto p(x) = \sup\{p_i(x) \ ;\ i \in I\}$ est une semi-norme sur F.

3. Si p est une semi-norme sur E et si pour tout $x, y \in E$, on pose $e(x, y) = p(x - y)$, alors e est un écart sur E, voir définition 2.9.1.

Proposition 7.5.1 (séparé d'un espace vectoriel semi-normé). *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une semi-norme sur E. Soit $F = \{x \in E \ ;\ p(x) = 0\}$, on a :*

1. *Si $x, y \in E$ tels que $x - y \in F$, alors on a $p(x) = p(y)$.*

2. *L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E.*

3. *Il existe une norme $\|\ \|$ sur l'espace vectoriel quotient E/F telle que $\|\pi(x)\| = p(x)$, pour tout $x \in E$, où $\pi : E \longrightarrow E/F$ est l'application quotient.*

Démonstration. 1. Soient $x, y \in E$ tels que $x-y \in F$, alors on a $p(x) \leq p(x-y)+p(y) = p(y)$ et $p(y) \leq p(x) + p(y-x) = p(x) + p(x-y) = p(x)$, d'où $p(x) = p(y)$.
2. On a $p(0) = 0$, donc $0 \in F$. Soient $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. D'après 1, on a $p(x+y) = p(x) = 0$, donc $x + y \in F$. Enfin, on a $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) = |\lambda| 0 = 0$, donc $\lambda x \in F$. Par conséquent, F est un sous-espace vectoriel de E.
3. D'après 1, l'application

$$\begin{array}{cccc} \| \ \| : & E/F & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & \pi(x) & \longmapsto & \|\pi(x)\| = p(x) \end{array}$$

est bien définie. Il reste à montrer que $\| \ \|$ est une norme sur E/F. Soient $a, b \in E/F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $x, y \in E$ tels que $\pi(x) = a$ et $\pi(y) = b$. Si $\|a\| = 0$, alors $p(x) = 0$, donc $x \in F$, d'où $a = \pi(x) = 0$. On a $\|\lambda a\| = \|\pi(\lambda x)\| = p(\lambda x) = |\lambda| p(x) = |\lambda| \, \|a\|$. On a $\|a + b\| = \|\pi(x+y)\| = p(x+y) \leq p(x) + p(y) = \|a\| + \|b\|$. Donc $\| \ \|$ est une norme sur E/F. ∎

L'espace vectoriel normé $(E/F, \| \ \|)$ associé à (E, p) s'appelle le **séparé** de E.

Proposition 7.5.2. *Soient (E, p) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel semi-normé, $(E/F, \| \ \|)$ l'espace vectoriel normé séparé de E et $\pi : E \longrightarrow E/F$ l'application quotient. Soient $(G, \| \ \|')$ un espace normé et $f : E \longrightarrow G$ une application linéaire.*

1. *Pour qu'il existe une application linéaire continue $\widetilde{f} : E/F \longrightarrow G$ satisfaisant $\widetilde{f} \circ \pi = f$, il faut et il suffit qu'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, on ait $\|f(x)\|' \leq M p(x)$.*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & G \\ & E/F \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

2. *Si un tel $\widetilde{f}$ existe, il est unique et sa norme est la plus petite constante $M > 0$ satisfaisant la propriété 1.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 7 du supplément.

7.6 Jauge d'un ensemble convexe absorbant

Définition 7.6.1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

1. On dit que f est **positivement homogène** si pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \geq 0$, on a $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

2. On dit que f est **sous-additive** si pour tout $x, y \in E$, on a $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Remarque 7.6.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Toute semi-norme sur E est une application positivement homogène et sous-additive.

2. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application positivement homogène et sous-additive, alors pour tout $r > 0$, les ensembles $\{x \in E \; ; \; f(x) < r\}$ et $\{x \in E \; ; \; f(x) \leq r\}$ sont convexes.

Proposition 7.6.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application positivement homogène. Pour que f soit sous-additive, il faut et il suffit que l'ensemble $C_f = \{x \in E \; ; \; f(x) \leq 1\}$ soit convexe.*

Démonstration. Il est clair que si f est positivement homogène et sous-additive, alors C_f est convexe. Réciproquement, supposons C_f convexe, et déduisons la sous-additivité de f. Soient $x, y \in E$. Pour tout $n \geq 1$, soient $t_n = f(x) + \frac{1}{n}$ et $s_n = f(y) + \frac{1}{n}$. Alors on a $f\left(\frac{x}{t_n}\right) = \frac{f(x)}{t_n}$ et $f\left(\frac{y}{t_n}\right) = \frac{f(y)}{t_n}$, donc $\frac{x}{t_n}, \frac{y}{t_n} \in C_f$. Comme C_f est convexe, on en déduit que l'on a $z_n = \frac{t_n}{t_n+s_n}\frac{x}{t_n} + \frac{s_n}{t_n+s_n}\frac{y}{s_n} \in C_f$. Or $z_n = \frac{x+y}{t_n+s_n}$, donc on a $\frac{f(x+y)}{t_n+s_n} = f(z_n) \leq 1$, d'où $f(x+y) \leq t_n + s_n$. On fait tendre n vers $+\infty$, on obtient $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. Par conséquent, f est sous-additive ■

Corollaire 7.6.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) p est une semi-norme.

(ii) Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ et l'ensemble $\{x \in E \; ; \; p(x) \leq 1\}$ est convexe.

Définition 7.6.2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie non vide de E.

1. On dit que A est **absorbante** si pour tout $x \in E$, il existe $\lambda > 0$ tel que $x \in \lambda A$.

2. On dit que A est **équilibrée** si $\lambda A \subset A$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq 1$.

Exemple 7.6.1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p une semi-norme sur E. Alors pour tout $r > 0$, les ensembles $\{x \in E \; ; \; p(x) < r\}$ et $\{x \in E \; ; \; p(x) \leq r\}$ sont convexes, absorbants et équilibrés.

Définition 7.6.3. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie convexe et absorbante de E. Pour tout $x \in E$, on pose :

$$\mu_A(x) = \inf \left\{\lambda > 0 \; ; \; x \in \lambda A\right\}.$$

La fonction μ_A est appelée **la jauge** ou **la fonctionnelle de Minkowski** de A.

Remarque 7.6.2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie non vide de E.

1. Si A est absorbante ou équilibrée, alors on a $0 \in A$.

2. Si A est un convexe contenant 0, alors pour tous $s \geq t \geq 0$, on a $tA \subset sA$.

3. Si A est convexe et absorbante, alors pour tous $x \in E$ et $\lambda > 0$ tels que : $\mu_A(x) < \lambda$, on ait $x \in \lambda A$.

Dans le deux théorèmes qui vont suivre, on utilise beaucoup la remarque précédente.

Théorème 7.6.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une semi-norme sur E. Soit A un sous-ensemble convexe absorbant de E tel que :*

$$B = \{x \in E \; ; \; p(x) < 1\} \subset A \subset B' = \{x \in E \; ; \; p(x) \leq 1\} .$$

Alors on a $\mu_A = p$. En particulier, on a $\mu_B = \mu_{B'} = p$. Ainsi, on retrouve la semi-norme p comme la jauge d'un ensemble convexe absorbant.

Démonstration. Soient $x \in E$, $\varepsilon > 0$ et $t = p(x) + \varepsilon > p(x)$. Alors on a $p\left(\frac{x}{t}\right) = \dfrac{p(x)}{p(x)+\varepsilon} < 1$, d'où $\frac{x}{t} \in B$. Donc on a $\frac{x}{t} \in A$, et alors $\mu_A(x) \leq t = p(x)+\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que l'on a $\mu_A(x) \leq p(x)$. Réciproquement, si $t \in]0, p(x)[$, on a $p\left(\frac{x}{t}\right) = \dfrac{p(x)}{t} > 1$, donc $\frac{x}{t} \notin A$, d'où on a $t \leq \mu_A(x)$, voir remarque précédente. Par conséquent, on a $p(x) \leq \mu_A(x)$. Ainsi, pour tout $x \in E$, on a $\mu_A(x) = p(x)$. Autrement dit, on a $\mu_A = p$. ∎

Théorème 7.6.2. *Soit A une partie convexe et absorbante d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.*

1. *La fonction μ_A est sous-additive et positivement homogène.*
2. *Si A est de plus équilibrée, alors μ_A est une semi-norme sur E.*
3. *Si A est de plus équilibrée et ne contient aucune droite vectorielle, alors μ_A est une norme sur E.*
4. *Si $B = \{x \in E \; ; \; \mu_A(x) < 1\}$ et $C = \{x \in E \; ; \; \mu_A(x) \leq 1\}$, alors B et C sont convexes, absorbants, et on a $B \subset A \subset C$. De plus, on a $\mu_A = \mu_B = \mu_C$.*

Démonstration. 1. Le fait que μ_A est positivement homogène est trivial. Montrons la sous-additivité. Soient $x, y \in E$ et $\varepsilon > 0$. Soient $t = \mu_A(x) + \varepsilon$ et $s = \mu_A(y) + \varepsilon$, alors on a $\frac{x}{t}, \frac{y}{s} \in A$. Puisque A est convexe, on a $\frac{x+y}{t+s} = \frac{t}{t+s}\frac{x}{t} + \frac{s}{t+s}\frac{y}{s} \in A$. Donc on a $\mu_A(x+y) \leq t + s = \mu_A(x) + \mu_A(y) + 2\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que l'on a $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$. Donc μ_A est sous-additive.
2. Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda = |\lambda| e^{i\theta}$ et $\mu_A(\lambda x) = |\lambda| \mu_A(e^{i\theta} x)$. Puisque A est équilibrée, alors on a $\frac{x}{t} \in A \iff e^{i\theta}\frac{x}{t} \in A$, donc on a $\mu_A(x) = \mu_A(e^{i\theta}x)$. On en déduit que l'on a $\mu_A(\lambda x) = |\lambda| \mu_A(x)$. Par conséquent, μ_A est une semi-norme sur E.
3. Soit $x \in E$ tel que $\mu_A(x) = 0$. Alors pour tout $t > 0$, on a $\frac{x}{t} \in A$. Puisque A est équilibrée, on en déduit que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda x \in A$, donc A contient la droite vectorielle engendrée par x, ce qui est impossible. Donc on a $\mu_A(x) \neq 0$. Par conséquent, μ_A est une norme sur E.
4. Il est clair que les ensembles B et C sont convexes et absorbants et que l'on a les inclusions $B \subset A \subset C$. On en déduit $\mu_C \leq \mu_A \leq \mu_B$. Soient $x \in E$ et $s, t \in \mathbb{R}_+$ tels que $\mu_C(x) < s < t$. Alors on a $\frac{x}{s} \in C$, $\mu_A\left(\frac{x}{s}\right) \leq 1$ et $\mu_A\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{s}{t}\mu_A\left(\frac{x}{s}\right) < 1$. Donc $\frac{x}{t} \in B$, d'où on a $\mu_B(x) \leq t$. On en déduit $\mu_B(x) \leq \mu_C(x)$. Par conséquent, on a $\mu_A = \mu_B = \mu_C$. ∎

Proposition 7.6.2. *Soient $(E, \| \,\|)$ un espace normé et A une partie à la fois convexe et voisinage de 0. Alors A est absorbante et la jauge μ_A de A vérifie les propriétés suivantes :*

1. *La fonction μ_A est sous-additive et positivement homogène.*
2. *Il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in E$, on ait $0 \leq \mu_A(x) \leq M \|x\|$.*

3. *Si A est ouverte, on a $A = \{x \in E \,;\, \mu_A(x) < 1\}$.*

4. *Si A est fermée, on a $A = \{x \in E \,;\, \mu_A(x) \leq 1\}$.*

Démonstration. Puisque A est un voisinage de 0, il existe $r > 0$ tel que $B'(0, r) \subset A$. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$, alors on a $r\dfrac{x}{\|x\|} \in B'(0, r) \subset A$, d'où $x \in \dfrac{\|x\|}{r}A$. Donc A est absorbante.
1. Ceci résulte du théorème précédent.
2. On a vu ci-dessus que pour tout $x \in E$ tel que $x \neq 0$, on ait $x \in \dfrac{\|x\|}{r}A$, d'où $\mu_A(x) \leq \frac{1}{r}\,\|x\|$.
3. D'après le théorème précédent, on a $\{x \in E \,;\, \mu_A(x) < 1\} \subset A$. Supposons A ouverte, et soit $x \in A$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(1 + \varepsilon)x \in A$, d'où $\mu_A(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Par conséquent, on a $A = \{x \in E \,;\, \mu_A(x) < 1\}$.
4. D'après le théorème précédent, on a $A \subset \{x \in E \,;\, \mu_A(x) \leq 1\}$. Supposons A fermée, et soit $x \in E$ tel que $\mu_A(x) \leq 1$. Alors pour tout $n \geq 1$, il existe $a_n \in A$ tel que $\dfrac{x}{1 + \frac{1}{n}} = a_n$, car $\mu_A(x) < 1 + \frac{1}{n}$, voir remarque 7.6.2. Donc la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ converge vers x, d'où $x \in A$. Par conséquent, on a $A = \{x \in E \,;\, \mu_A(x) \leq 1\}$. ■

Proposition 7.6.3. *Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé, B une boule ouverte non vide de E et A un ensemble convexe borné d'intérieur non vide dans E. Alors $\overset{\circ}{A}$ est homéomorphe à B, $\overline{A}$ est homéomorphe à $\overline{B}$ et Fr(A) est homéomorphe à Fr(B).*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 7 du supplément.

7.7 Prolongement des formes linéaires

On se donne E, F deux espaces normés, H un sous-espace vectoriel de E et $f : H \longrightarrow F$ une application linéaire. Il y a deux questions naturelles qui se posent.

Question 1. Peut-on prolonger f en une application linéaire $\tilde{f}$ de E dans F ?
La réponse est oui. On écrit $E = H + N$, où N est un supplémentaire algébrique de H dans E et on prend $\tilde{f} = f \circ p$, où p est la projection sur H parallèlement à N (pour tout $x \in E$, il existe un unique $(a, b) \in H \times N$ tel que $x = a + b$, on pose alors $\tilde{f}(x) = f(a)$).

Question 2. Si maintenant on suppose de plus f continue, peut-on prolonger f en une application linéaire continue $\tilde{f}$ de E dans F ?
La réponse est en général non. La raison est que la projection sur H n'est pas toujours continue. En effet, si $E = \ell^\infty$ et $H = c_0$, on peut montrer (c'est un peu difficile) qu'il n'existe pas de sous-espace vectoriel N de E tel que $E = H + N$ et $H \cap N = \{0\}$ et tel que la projection naturelle $p : E \longrightarrow H$ soit continue.
Dans ce paragraphe, on s'occupe essentiellement du problème de prolongement des formes linéaires continues. Rappelons d'abord le résultat positif suivant :
Soient E un espace normé, F un espace de Banach, H un sous-espace vectoriel dense dans E et $f \in \mathscr{L}(H; F)$. Alors f se prolonge de manière unique en $g \in \mathscr{L}(E; F)$. De plus, on a $\|g\| = \|f\|$. (Voir proposition 6.3.5).

Théorème 7.7.1 (Hahn-Banach). *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application positivement homogène et sous-additive. Soient H un sous-espace vectoriel de E et f une forme linéaire sur H telle que pour tout $x \in H$, on ait $f(x) \leq p(x)$. Alors il existe une forme linéaire $\tilde{f}$ sur E prolongeant f, i.e. $\tilde{f}(y) = f(y)$ pour tout $y \in H$, et telle que $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. *étape 1.* Montrons d'abord que si $a \in E \setminus H$, alors il une application linéaire $g : H \oplus \mathbb{R}\, a \longrightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge f et telle que pour tout $z \in H \oplus \mathbb{R}\, a$, on ait $g(z) \leq p(z)$. Soit $z \in H \oplus \mathbb{R}\, a$, il existe un unique $(x,t) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $z = x + ta$. On veut g linéaire, donc nécessairement $g(z) = g(x) + tg(a)$. On veut aussi que g prolonge f, donc nécessairement $g(x) = f(x)$, d'où $g(z) = f(x) + tg(a)$. On a $g(a) = \alpha \in \mathbb{R}$ et on veut de plus $g(z) \leq p(z)$, *i.e.* $f(x) + t\alpha \leq p(x + ta)$. On cherche à déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in H$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait $f(x) + t\alpha \leq p(x + ta)$.
Vérifions qu'il suffit de trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x, y \in H$, on ait :

$$\begin{cases} f(x) - \alpha \leq p(x - a) \\ \\ f(y) + \alpha \leq p(y + a) \end{cases}$$

qui est équivalent à : pour tout $x, y \in H$, on a :

$$f(x) - p(x - a) \leq \alpha \leq p(y + a) - f(y)\,.$$

En effet, supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x, y \in H$, on ait
$f(x) - p(x - a) \leq \alpha \leq p(y + a) - f(y)$. Soit $t > 0$, alors on a :

$$f(x) + t\alpha = t\big(f\big(\tfrac{x}{t}\big) + \alpha\big) \leq tp\big(\tfrac{x}{t} + a\big) = p(x + ta)\,,$$

$$f(x) - t\alpha = t\big(f\big(\tfrac{x}{t}\big) - \alpha\big) \leq tp\big(\tfrac{x}{t} - a\big) = p(x - ta)\,.$$

Existence de α. Pour tout $x, y \in H$, on a :
$f(x)+f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x-a)+p(y+a)$, d'où $f(x)-p(x-a) \leq p(y+a)-f(y)$.
Donc on a :

$$\sup_{x\in H} \big\{f(x) - p(x - a)\big\} \leq \inf_{y\in H} \big\{p(y + a) - f(y)\big\}\,.$$

Pour avoir le résultat de l'étape 1, il suffit de prendre :

$$\alpha \in \big[\sup_{x\in H}\{f(x) - p(x - a)\},\ \inf_{y\in H}\{p(y + a) - f(y)\}\big]\,.$$

étape 2. On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des couples $(N,\, g)$ où N est sous-espace vectoriel de E contenant H, $g : N \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire qui prolonge f et pour tout $x \in N$, $g(x) \leq p(x)$. L'ensemble $\mathscr{E} \neq \emptyset$ car $(H,\, f) \in \mathscr{E}$. On ordonne $\mathscr{E}$ de la manière suivante :

$$(N,\, g) \leq (N',\, g') \iff N \subset N' \ \text{ et } \ g'_{|_N} = g\,.$$

On vérifie que $\leq$ est bien une relation d'ordre sur $\mathscr{E}$. Montrons que $\mathscr{E}$ est inductif, *i.e.* toute partie totalement ordonnée de $\mathscr{E}$ possède un majorant. Soit $(N_i,\, g_i)_{i\in I}$ une partie, indexée par I, totalement ordonnée de $\mathscr{E}$. Alors pour tout $i, j \in I$, soit on a $(N_i,\, g_i) \leq (N_j,\, g_j)$, soit on a $(N_j,\, g_j) \leq (N_i,\, g_i)$. Soit $N = \bigcup\limits_{i\in I} N_i$, alors pour tout $x \in N$, il existe $i \in I$ tel que $x \in N_i$, et on pose $g(x) = g_i(x)$. Alors on a :

– N est un sous-espace vectoriel de E.

– g est bien définie.

– $(N,\, g) \in \mathscr{E}$.

– $(N_i,\, g_i) \leq (N, g)$ pour tout $i \in I$.

Ainsi $(N,\, g)$ est un majorant dans $\mathscr{E}$ de $(N_i,\, g_i)_{i\in I}$, donc $\mathscr{E}$ est inductif. Par le lemme de Zorn, voir Appendice A, $\mathscr{E}$ possède un élément maximal $(\tilde{N},\, \tilde{f})$. Par l'étape 1, on a $\tilde{N} = E$. ■

Théorème 7.7.2 (Hahn-Banach). *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, H un sous-espace vectoriel de E, $p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une semi-norme sur E et $f : H \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire sur H telle que pour tout $x \in H$, on ait $|f(x)| \leq p(x)$. Alors il existe une forme linéaire $\tilde{f}$ sur E prolongeant f telle que pour tout $x \in E$, on ait $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$.*

Démonstration. *Premier cas :* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour tout $x \in H$, on a $f(x) \leq |f(x)| \leq p(x)$. Par le théorème précédent, il existe une forme linéaire $\tilde{f}$ sur E qui prolonge f telle que pour tout $x \in E$, on ait $\tilde{f}(x) \leq p(x)$. D'où on a $-p(x) = -p(-x) \leq -\tilde{f}(-x) = \tilde{f}(x) \leq p(x)$. Par conséquent, on a $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$, pour tout $x \in E$.
Deuxième cas : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Par la proposition 7.4.5, il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire $g : H \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in H$, on ait $f(x) = g(x) - ig(ix)$. On a aussi $|g(x)| \leq |f(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in H$. Par le premier cas, il existe $\tilde{g} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire qui prolonge g telle que pour tout $x \in E$, on ait $|\tilde{g}(x)| \leq p(x)$. Pour tout $x \in E$, soit $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) - i\tilde{g}(ix)$, alors $\tilde{f}$ est une forme linéaire sur E qui prolonge f. Il reste à montrer que pour tout $x \in E$, on a $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$. Soit $x \in E$. Si $\tilde{f}(x) = 0$, alors l'inégalité est trivialement vérifiée. Si $\tilde{f}(x) \neq 0$, alors on a $\tilde{f}(x) = |\tilde{f}(x)|\, e^{i\theta}$, d'où $\tilde{f}(e^{-i\theta}x) = |\tilde{f}(x)| \geq 0$. Donc on a $|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(e^{-i\theta}x) = \tilde{g}(e^{-i\theta}x)$. On en déduit que $|\tilde{f}(x)| = \tilde{g}(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = p(x)$. ■

Théorème 7.7.3 (Hahn-Banach). *Soient $(E,\, \|\ \|)$ un espace normé et H un sous-espace vectoriel de E muni de la norme induite. Pour tout $f \in H^*$, il existe $\tilde{f} \in E^*$ dont la restriction à H soit f et telle que $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. Bien entendu, si H est dense dans E, $\tilde{f}$ est unique.*

Démonstration. Pour tout $x \in E$, on pose $p(x) = \|f\|\,\|x\|$. Alors p est une semi-norme sur E et pour tout $x \in H$, on a $|f(x)| \leq \|f\|\,\|x\| = p(x)$. Par le théorème précédent, il existe une forme linéaire $\tilde{f}$ sur E prolongeant f et telle que pour tout $x \in E$, on ait $|\tilde{f}(x)| \leq p(x) = \|f\|\,\|x\|$. Donc $\tilde{f}$ est continue et on a $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$. D'autre part, pour tout $x \in H$, on a $|f(x)| = |\tilde{f}(x)| \leq \|\tilde{f}\|\|x\|$, d'où $\|f\| \leq \|\tilde{f}\|$. Donc on a $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. ■

Corollaire 7.7.1. *Soit $(E,\, \|\ \|)$ un espace normé. Alors on a :*

1. *Pour tout $x \in E$ tel que $x \neq 0$, il existe une forme linéaire continue f sur E telle que $\|f\| = 1$ et $f(x) = \|x\|$. En particulier, si $E \neq \{0\}$, alors on a $E^* \neq \{0\}$.*

2. *Soient $x, y \in E$. Si pour tout $g \in E^*$, on a $g(x) = g(y)$, alors $x = y$.*

Démonstration. 1. Soient $x \in E$ tel que $x \neq 0$ et $H = \mathbb{K}x$ le sous-espace vectoriel engendré par x. On définit $f(\lambda x) = \lambda\|x\|$, alors f est une forme linéaire continue sur H telle que $\|f\| = 1$ et $f(x) = \|x\|$. Pour avoir le résultat, on applique le théorème précédent.
2. Soient $x, y \in E$ tels que pour tout $g \in E^*$, on ait $g(x) = g(y)$. Si $x \neq y$, d'après 1, il existe $f \in E^*$ telle que $f(x)-f(y) = f(x-y) = \|x-y\| \neq 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc on a bien $x = y$. ■

Remarque 7.7.1. Soient $(E, \| \|)$ un espace normé et $x \in E$ tel que $x \neq 0$. D'après le corollaire précédent, il existe une forme linéaire continue f sur E telle que $\|f\| = 1$ et $f(x) = \|x\|$. Une telle f n'est pas en général unique. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$ et $h(x, y) = \frac{x+y}{2}$. Alors f, g et h sont des formes linéaires continues sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\|f\| = \|g\| = \|h\| = \|(1, 1)\|_\infty = 1$ et $f \neq g \neq h$.
De même, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x$, $g(x, y) = x + y$ et $h(x, y) = x - y$. Alors f, g et h sont des formes linéaires continues sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\|f\| = \|g\| = \|h\| = \|(1, 0)\|_1 = 1$ et $f \neq g \neq h$.

Remarque 7.7.2. On verra, exercice 8.35, que si $(H, \langle, \rangle)$ est un espace de Hilbert et si $\| \|$ est la norme sur H associée au produit scalaire $\langle, \rangle$, alors pour tout $x \in H$ tel que $x \neq 0$, il existe une unique $f \in H^*$ telle que $f(x) = \|x\|$ et $\|f\| = 1$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \neq 0$, il existe une unique $f \in \mathbb{R}^{n*}$ telle que $f(x) = \|x\|_2$ et $\|f\| = 1$.

Remarque 7.7.3. On verra, au chapitre 10, théorème 10.3.1, qu'étant donné un espace normé $(E, \| \|)$ et un $x \in E$ tel que $x \neq 0$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une unique forme linéaire continue f sur E telle que $f(x) = \|x\|$ et $\|f\| = 1$.

Corollaire 7.7.2. *Soient $(E, \| \|)$ un espace normé, H un sous-espace vectoriel de E et $x \in E \setminus \overline{H}$. Alors il existe une forme linéaire continue f sur E telle que $\|f\| = 1$, $f(x) = d(x, H) \neq 0$ et $f(H) = 0$.*

Démonstration. Soit $\pi : E \longrightarrow E/\overline{H}$ l'application quotient. En appliquant le corollaire précédent à $\pi(x)$, on trouve une forme linéaire continue g sur $E/\overline{H}$ telle que $\|g\| = 1$ et $g(\pi(x)) = \|\pi(x)\| = d(x, \overline{H}) = d(x, H)$. Soit $f = g \circ \pi$, alors f est une forme linéaire continue sur E telle que $f(x) = d(x, H) \neq 0$ et $f(H) = 0$. D'après la proposition 6.4.3, on a $\pi(B_E(0, 1)) = B_{E/\overline{H}}(0, 1)$, on en déduit que l'on a $\|f\| = 1$. ■

Corollaire 7.7.3. *Soient $(E, \| \|)$ un espace normé et H un sous-espace vectoriel de E. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) H est dense dans E.

(ii) Toute $f \in E^*$ nulle sur H est identiquement nulle.

Démonstration. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte de la proposition 1.5.5, mais donnons une preuve directement. Soit $f \in E^*$ telle que $f(H) = 0$. Soit $x \in E$, comme H est dense dans E, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans H telle que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Puisque f est continue, alors $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$. Par conséquent, on a $f = 0$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Si H n'est pas dense , alors $\overline{H} \neq E$. Soit $x \in E \setminus \overline{H}$, d'après le corollaire précédent, il existe $f \in E^*$ telle que $f(x) = d(x, H) > 0$ et $f(H) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc H est dense dans E. ■

Corollaire 7.7.4. *Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé, $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille (finie) de vecteurs linéairement indépendants dans E et $(c_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille dans $\mathbb{K}$. Alors il existe $f \in E^*$ telle que $f(x_i) = c_i$ pour tout i.*

Démonstration. Soient H le sous-espace vectoriel de E engendré par les x_i, et g une forme linéaire sur H définie par $g(x_i) = c_i$. Comme H est de dimension finie, g est continue. Par le théorème de Hahn-Banach 7.7.3, on prolonge g en $f \in E^*$. ■

Proposition 7.7.1. *Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé, A une partie de E, $(c_x)_{x\in A}$ une famille dans $\mathbb{K}$, indexée par A et $M > 0$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe $f \in E^*$ telle que $\|f\| \leq M$ et $f(x) = c_x$ pour tout $x \in A$.

(ii) Pour tout $n \geq 1$, pour tout $x_1, \dots, x_n \in A$ et pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on a :

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_{x_i}\Big| \leq M \Big\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big\|.$$

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 7 du supplément.

Proposition 7.7.2. *Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé. Si le dual topologique $(E^*, \| \ \|)$ est séparable, alors $(E, \| \ \|)$ est séparable.*

Démonstration. Soit $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ une suite dense dans E^*. Pour tout $n \geq 0$, il existe $x_n \in E$ tel que $\|x_n\| \leq 1$ et $\dfrac{\|\varphi_n\|}{2} \leq \varphi_n(x_n)$. Montrons que l'ensemble $A = \{x_n \ ; \ n \geq 0\}$ est une partie totale de E. Pour cela, il suffit de montrer que tout $\varphi \in E^*$, qui s'annule sur A est nul. Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(x_n) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Soit $(\varphi_{n_k})_{k\geq 0}$ une sous-suite de $(\varphi_n)_{n\geq 0}$, qui converge vers φ dans l'espace de Banach $(E^*, \| \ \|)$. On a $\|\varphi_{n_k}\| \leq 2\,|\varphi_{n_k}(x_{n_k})| = 2\,|\varphi_{n_k}(x_{n_k}) - \varphi(x_{n_k})| \leq 2\,\|\varphi_{n_k} - \varphi\|$. Comme on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \|\varphi_{n_k}\| = \|\varphi\|$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \|\varphi_{n_k} - \varphi\| = 0$, on en déduit que l'on a $\|\varphi\| = 0$, d'où $\varphi = 0$. Donc E est séparable. ■

Remarque 7.7.4. La réciproque dans la proposition précédente n'est pas toujours vraie. En effet, l'espace de Banach $(\ell^1, \| \ \|_1)$ est séparable, mais son dual topologique $(\ell^\infty, \| \ \|_\infty)$ n'est le pas.

7.8 Séparation des ensembles convexes

Rappelons, lemme 6.3.1, que si H est un hyperplan affine d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, alors il existe une forme linéaire non nulle f sur E et il existe un élément $z \in E$ tels que $H = \ker(f) + z$. Posons $f(z) = \alpha$, alors on a $H = \{x \in E \ ; \ f(x) = \alpha\}$. On dit que $f(x) = \alpha$ est l'équation de H. Rappelons aussi, proposition 6.3.6, que si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, alors H est fermé si et seulement si f est continue. Dans ce cas, les ensembles

$$\{x \in E \ ; \ f(x) \leq \alpha\} \quad \big(\textit{resp.}\ \{x \in E \ ; \ f(x) < \alpha\}\big)$$

$$\{x \in E \; ; \; f(x) \geq \alpha\} \quad \big(resp. \, \{x \in E \; ; \; f(x) > \alpha\}\big)$$

sont convexes fermés (*resp.* ouverts). On dit que ce sont les **demi-espaces** fermés (*resp.* ouverts) déterminés par H. Notons aussi, voir exercice 6.20, que les demi-espaces ouverts déterminés par H sont les composantes connexes de $E \setminus H$.

Définition 7.8.1. Soient A et B deux sous-ensembles non vides d'un $\mathbb{R}$-espace normé $(E, \| \, \|)$.

1. On dit que A et B sont **séparés par un hyperplan affine fermé** H si A est contenu dans l'un des demi-espaces fermés déterminés par H et B dans l'autre. Autrement dit, s'il existe $f \in E^*$, non nulle, et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $H = \{x \in E \; ; \; f(x) = \alpha\}$ et pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$.

2. On dit que A et B sont **strictement séparés par un hyperplan affine fermé** H si A est contenu dans l'un des demi-espaces ouverts déterminés par H et B dans l'autre. Autrement dit, s'il existe $f \in E^*$, non nulle, et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $H = \{x \in E \; ; \; f(x) = \alpha\}$ et pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait $f(a) < \alpha < f(b)$.

Lemme 7.8.1. *Soient $(E, \| \, \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, C un convexe ouvert non vide de E et $b \in E$ avec $b \notin C$. Alors il existe $f \in E^*$ tel que $f(x) < f(b)$ pour tout $x \in C$.*

Démonstration. Quitte à faire une translation, on peut supposer $0 \in C$. Soit μ_C la jauge de C. D'après la proposition 7.6.2, μ_C est positivement homogène, sous-additive, $C = \{x \in E \; ; \; \mu_C(x) < 1\}$ et il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in E$, on ait $\mu_C(x) \leq M \|x\|$. On a aussi $\mu_C(b) \geq 1$ car $b \notin C$. Posons :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\, b & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ tb & \longmapsto & t \end{array}$$

alors f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}\, b$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(tb) \leq \mu_C(tb)$. En effet, si $t \leq 0$, on a $f(tb) = t \leq 0 \leq \mu_C(tb)$. Si $t > 0$, on a $\mu_C(tb) = t\mu_C(b) \geq t = f(tb)$ car $\mu_C(b) \geq 1$. D'après le théorème 7.7.1, on peut prolonger f en une forme linéaire sur E encore notée f telle que pour tout $x \in E$, on ait $f(x) \leq \mu_C(x) \leq M \|x\|$. D'où on a $-M \|x\| = -M \|-x\| \leq -f(-x) = f(x) \leq M \|x\|$. Par conséquent, on a $|f(x)| \leq M \|x\|$, donc f est continue. De plus, pour tout $x \in C$, on a $f(x) \leq \mu_C(x) < 1 = f(b)$. ■

Théorème 7.8.1 (Hahn-Banach). *Soient A et B deux ensembles convexes non vides et disjoints d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.*

1. *Si A est ouvert, il existe $f \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait $f(a) < \alpha \leq f(b)$. En particulier, A et B sont séparés par l'hyperplan affine fermé $H = \{x \in E \; ; \; f(x) = \alpha\}$.*

2. *Si A est compact et B est fermé, il existe $f \in E^*$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait $f(a) < \alpha_1 < \alpha_2 < f(b)$. En particulier, A et B sont strictement séparés par l'hyperplan affine fermé $H = \{x \in E \; ; \; f(x) = \alpha_1\}$.*

Démonstration. 1. Soit $C = A - B = \{a - b \; ; \; a \in A, \; b \in B\}$, alors C est un ouvert convexe non vide de E et $0 \notin C$. Par le lemme précédent, il existe $f \in E^*$ tel que $f(a - b) < 0 = f(0)$ pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, d'où on a $f(a) < f(b)$. Soit

$\alpha = \inf\limits_{b\in B} f(b)$, alors $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on a $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$. S'il existe $a \in A$ tel que $f(a) = \alpha$, puisque A est ouvert, il existe $h \in E$ tel que $a + h \in A$ et $f(a + h) > \alpha$ ce qui est impossible. Donc pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on a $f(a) < \alpha \leq f(b)$.
2. Puisque A est compact et B est fermé tels que $A \cap B = \emptyset$, alors $r = d(A, B) > 0$, d'où on a $\big(A + B(0, r)\big) \cap B = \emptyset$. L'ensemble $A + B(0, r)$ est ouvert convexe non vide de E, et on a $A \subset A + B(0, r)$. D'après 1, il existe $f \in E^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait $f(a) < \beta \leq f(b)$. Puisque A est compact, il existe $a_0 \in A$ tel que pour tout $a \in A$, on ait $f(a) \leq f(a_0) < \beta$. Pour avoir le résultat, il suffit de prendre $\alpha_1, \alpha_2 \in]f(a_0), \beta[$ tels que $\alpha_1 < \alpha_2$. ■

Corollaire 7.8.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A, B des ensembles convexes non vides et disjoints de E.*

1. *Si A est ouvert, il existe $f \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait $Re(f(a)) < \alpha \leq Re(f(b))$.*

2. *Si A est compact et B est fermé, il existe $f \in E^*$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait $Re(f(a)) < \alpha_1 < \alpha_2 < Re(f(b))$.*

Démonstration. On combine le théorème précédent et la proposition 7.4.5. ■

Corollaire 7.8.2. *Soient $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé, C un convexe et équilibré de E et $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin C$.*

1. *Si C est ouvert, il existe $f \in E^*$ tel que $f(x_0) = 1$ et pour tout $x \in C$, on ait $|f(x)| < 1$.*

2. *Si C est fermé, il existe $f \in E^*$ tel que pour tout $x \in C$, on ait $|f(x)| < 1 < f(x_0)$.*

Démonstration. 1. D'après le corollaire précédent, il existe $g \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in C$, on ait $\mathrm{Re}(g(x)) < \alpha \leq \mathrm{Re}(g(x_0))$. Soit $x \in C$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = e^{i\theta}|g(x)|$, d'où on a $g(e^{-i\theta}x) = |g(x)| = \mathrm{Re}(g(e^{-i\theta}x))$. Puisque C est équilibré, on a $e^{-i\theta}x \in C$. Donc on a $|g(x)| < \alpha \leq \mathrm{Re}(g(x_0)) \leq |g(x_0)|$. Soit $f = \dfrac{g}{g(x_0)}$, alors $f \in E^*$, $f(x_0) = 1$ et pour tout $x \in C$, on a $|f(x)| < 1$.
2. On applique le corollaire précédent au compact $A = \{x_0\}$. Alors il existe $g \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in C$, on ait $\mathrm{Re}(g(x)) < \alpha < \mathrm{Re}(g(x_0))$. Comme ci-dessus, on montre que pour tout $x \in C$, on a $|g(x)| < \alpha < \mathrm{Re}(g(x_0)) \leq |g(x_0)|$. Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = e^{i\theta_0}|g(x_0)|$. Soit $f = \dfrac{e^{-i\theta_0}g}{\alpha}$, alors $f \in E^*$ et pour tout $x \in C$, on a $|f(x)| < 1 < f(x_0)$. ■

Lemme 7.8.2. *Soient $f, f_1, \ldots, f_n$ des formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tels que $f = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$.

(ii) Il existe $\alpha > 0, \beta > 0$ tels que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{x \in E \,;\, |f_i(x)| < \alpha\} \subset \{x \in E \,;\, |f(x)| < \beta\}$.

(iii) *Il existe* $b > 0$ *tel que pour tout* $x \in E$, *on ait* $|f(x)| \leq b \max\limits_{1\leq i\leq n} |f_i(x)|$.

(iv) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker(f_i) \subset \ker(f)$.

Pour une preuve du lemme précédent, voir chapitre 7 du supplément.

Théorème 7.8.2 (Helly). *Soient* $(E, \| \ \|)$ *un espace normé et* $f_1, \ldots, f_n$ *des formes linéaires continues sur* E, $M > 0$, *et* $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $x \in E$ *tel que* $\|x\| \leq M + \varepsilon$ *et pour tout* i, $f_i(x) = c_i$.

(ii) *Pour tout* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, *on a* $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i c_i\right| \leq M \left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right\|$.

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 7 du supplément.

7.9 Bidual d'un espace normé et espaces de Banach réflexifs

Définition 7.9.1. Soit $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace normé. Le dual topologique de l'espace de Banach E^* s'appelle le **bidual topologique** de E et se note E^{**}.

Proposition 7.9.1. *Soit* $(E, \| \ \|)$ *un espace normé. Alors on a :*

1. *Pour tout* $x \in E$, *l'application*

$$J(x) : \begin{array}{ccc} E^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est linéaire continue. Ainsi, on a $J(x) \in E^{**}$.

2. *L'application*

$$J : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^{**} \\ x & \longmapsto & J(x) \end{array}$$

est linéaire et isométrique, appelée ***l'application canonique*** *de* E *dans son bidual* E^{**}. *Ainsi, on identifie* E *à un sous-espace normé de son bidual* E^{**}.

Démonstration. 1. Il est clair que $J(x)$ est linéaire. Pour tout $f \in E^*$, on a $|J(x)(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|$. Donc l'application $J(x)$ est continue et on a $\|J(x)\| \leq \|x\|$.
2. Pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, et pour tout $f \in E^*$, on a :

$$J(x + \lambda y)(f) = f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) = J(x)(f) + \lambda J(y)(f) = (J(x) + \lambda J(y))(f)\,.$$

D'où on a $J(x + \lambda y) = J(x) + \lambda J(y)$. Ainsi, J est une application linéaire. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$, par le corollaire 7.7.1, il existe $f \in E^*$ tel que $\|f\| = 1$ et $f(x) = \|x\|$. Alors on a $\|x\| = |f(x)| = |J(x)(f)| \leq \|J(x)\| \, \|f\| = \|J(x)\| \leq \|x\|$, d'où on a $\|J(x)\| = \|x\|$. Donc J est isométrique. ■

Corollaire 7.9.1. *Soit* $(E, \| \|)$ *un espace normé. Alors pour tout* $x \in E$*, on a :*

$$\|x\| = \sup_{f\in E^*,\, \|f\|<1} |f(x)| = \sup_{f\in E^*,\, \|f\|\leq 1} |f(x)| = \sup_{f\in E^*,\, \|f\|=1} |f(x)| = \sup_{f\in E^*,\, f\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|} .$$

De plus, la borne supérieure est atteinte dans l'égalité $\|x\| = \sup\limits_{f\in E^*,\, \|f\|=1} |f(x)|$.

Démonstration. Ceci résulte de la proposition précédente, de la proposition 6.3.1 et du corollaire 7.7.1. ∎

Remarque 7.9.1 (une autre construction du complété d'un espace normé). Soient $(E, \| \|)$ un espace normé et E^{**} son bidual topologique. On vient de voir que l'application canonique $J : E \longrightarrow E^{**}$ est linéaire et isométrique. Ainsi, on identifie l'espace normé $(E, \| \|)$ à son image $J(E)$ qui est un sous-espace vectoriel de l'espace de Banach E^{**}. Posons $\widehat{E} = \overline{J(E)}$ l'adhérence de $J(E)$ dans E^{**}, alors $\widehat{E}$ est un espace de Banach et $(E, \| \|)$ est un sous-espace vectoriel dense dans $\widehat{E}$. On obtient ainsi une description du complété de l'espace normé E.

Remarque 7.9.2. L'application canonique $J : E \longrightarrow E^{**}$ n'est pas toujours surjective. En effet, si $E = c_0$ muni de la norme $\| \|_\infty$, on a $E^* = \ell^1$, $E^{**} = \ell^\infty$ et l'application canonique $J : E \longrightarrow E^{**}$ correspond à l'injection canonique $c_0 \hookrightarrow \ell^\infty$. Donc J n'est pas surjective.

Définition 7.9.2. Un espace de Banach E est dit **réflexif** si l'application canonique

$$\begin{array}{cccc} J: & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & x & \longmapsto & J(x) \end{array}$$

est bijective.

Notons que si E est un espace normé et si l'application canonique $J : E \longrightarrow E^{**}$ est bijective, alors nécessairement E est un espace de Banach, car E^{**} est un espace de Banach et J est une application linéaire bijective et isométrique.

Exemple 7.9.1. 1. Les espaces normés de dimension finies sont réflexifs.

2. Pour tout $p \in]1, +\infty[$, ℓ^p est réflexif.

Proposition 7.9.2. *Soit* $(E, \| \|)$ *un espace de Banach réflexif. Alors pour tout* $f \in E^*$*, il existe* $x \in E$ *tel que* $\|x\| = 1$ *et* $\|f\| = |f(x)|$.

Démonstration. Soit $f \in E^*$. On peut supposer $f \neq 0$. En appliquant le corollaire 7.7.1 à f et à E^*, on obtient un élément $\Gamma \in E^{**}$ tel que $\|\Gamma\| = 1$ et $\Gamma(f) = \|f\|$. Comme E est réflexif, alors il existe $x \in E$ tel que $\Gamma = J(x)$. D'où on a $\|x\| = 1$ et $\|f\| = f(x) = |f(x)|$. ∎

On verra, théorème 10.2.10, que la réciproque de la proposition précédente est aussi vraie. Autrement dit, si $(E, \| \|)$ est un espace de Banach tel que pour tout $f \in E^*$, il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $\|f\| = |f(x)|$, alors $(E, \| \|)$ est réflexif.

Proposition 7.9.3. *Soient* E *un espace de Banach et* F *un sous-espace vectoriel fermé de* E*. On a :*

1. *Si E est réflexif, alors F est réflexif.*

2. *E est réflexif si et seulement si E^* est réflexif.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 7 du supplément.

Remarque 7.9.3. Puisque le dual topologique de $(c_0, , \| \|_\infty)$ est $(\ell^1, \| \|_1)$ et le dual topologique de $(\ell^1, \| \|_1)$ est $(\ell^\infty, \| \|_\infty)$, on déduit de la proposition précédente que les espaces c_0, ℓ^1 et ℓ^∞ ne sont pas réflexifs.

On déduit de la proposition 7.7.2 le corollaire suivant :

Corollaire 7.9.2. *Soit $(E, \| \|)$ un espace de Banach réflexif. Alors E est séparable si et seulement si E^* est séparable*

On reviendra sur cette notion d'espaces de Banach réflexifs au chapitre 10.

7.10 Applications transposées ou adjoints

Définition 7.10.1. Soient E, F deux espaces normés et $T \in \mathscr{L}(E; F)$. L'application

$$\begin{array}{ccc} F^* & \longrightarrow & E^* \\ f & \longmapsto & f \circ T\,. \end{array}$$

est appelée la **transposée** ou **l'adjoint** de T et on la note ${}^{\mathrm{t}}T$ ou T^*.

Pour mieux retenir la définition ci-dessus, il suffit de mémoriser le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "f\circ T"'] & F \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Exemple 7.10.1. Soient E un espace normé, H un sous-espace vectoriel de E et $\imath : H \hookrightarrow E$ l'injection canonique. Alors $\imath^* : E^* \longrightarrow H^*$ est l'application de restriction. Autrement dit, pour tout $f \in E^*$, on a $\imath^*(f) = f_{|_H}$.

Remarque 7.10.1. Soient E un espace normé et $J : E \longrightarrow E^{**}$ l'application canonique. Alors l'application transposée $J^* : E^{***} \longrightarrow E^*$ est surjective. En effet, notons d'abord que pour tout $\Lambda \in E^{***}$, on a $J^*(\Lambda) = \Lambda \circ J$. Soit $g \in E^*$, alors $g \circ J^{-1} : J(E) \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire continue sur $J(E)$. Par le théorème de Hahn-Banach, théorème 7.7.3, il existe $\Lambda \in E^{***}$ qui prolonge $g \circ J^{-1}$. D'où on a $J^*(\Lambda) = \Lambda \circ J = g$.

Notation. Soit $(E \| \|)$ un espace normé. Pour tout $x \in E$ et tout $g \in E^*$, on note :

$$\langle x, g \rangle = g(x)\,.$$

L'application

$$\begin{array}{ccc} E \times E^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, g) & \longmapsto & \langle x, g \rangle \end{array}$$

est clairement bilinéaire et continue car on a $|\langle x, g\rangle| \leq \|g\|\|x\|$.
Soient E, F deux espaces normés et $T \in \mathscr{L}(E;\, F)$, alors pour tout $x \in E$ et tout $f \in F^*$, on a :

$$\langle T(x), f\rangle = \langle x, T^*(f)\rangle\,.$$

Remarque 7.10.2. Soient $(E\|\ \|)$, $(F\|\ \|')$ deux espaces normés et $T \in \mathscr{L}(E;\, F)$. Soit G un sous-espace vectoriel de F tel que $T(E) \subset G$. Soit $S \in \mathscr{L}(E;\, G)$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $S(x) = T(x)$. Alors on a $\mathrm{Im}(S^*) = \mathrm{Im}(T^*)$. En effet, Soient $f \in G^*$ et $\tilde{f} \in F^*$ tels que $\tilde{f}_{|G} = f$. Pour tout $x \in E$, on a $S^*(f)(x) = f\circ S(x) = \tilde{f}\circ T(x) = T^*(\tilde{f})(x)$. Donc on a $S^*(f) = T^*(\tilde{f})$, d'où $\mathrm{Im}(S^*) = \mathrm{Im}(T^*)$.

Proposition 7.10.1. *Soient E, F et G trois espaces normés.*

1. *Pour tout $T \in \mathscr{L}(E;\, F)$, on a $T^* \in \mathscr{L}(F^*;\, E^*)$ et $\|T^*\| = \|T\|$.*

2. *L'application suivante est linéaire.*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E;\, F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(F^*;\, E^*) \\ T & \longmapsto & T^* \end{array}$$

3. *Pour tout $T \in \mathscr{L}(E;\, F)$ et tout $S \in \mathscr{L}(F;\, G)$, on a $(S\circ T)^* = T^*\circ S^*$.*

Démonstration. 1. Il est clair que T^* est linéaire de F^* dans E^*. Soit $f \in F^*$, on a $\|T^*(f)\| = \|f\circ T\| \leq \|f\|\,\|T\|$. Donc $\|T^*\|$ est continue et on a $\|T^*\| \leq \|T\|$. Soit $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$ et $T(x) \neq 0$. D'après le corollaire 7.7.1, il existe $f \in F^*$ tel que $\|f\| = 1$ et $f(T(x)) = \|T(x)\|$, d'où on a $\|T^*(f)\| \geq |T^*(f)(x)| = |f(T(x))| = \|T(x)\|$. Par conséquent, on a $\|T^*(f)\| \geq \|T\|$. Or on a $\|f\| = 1$, on en déduit $\|T^*\| \geq \|T\|$. Donc on a $\|T^*\| = \|T\|$.
Les autres propriétés 2 et 3 sont triviales. ■

Remarque 7.10.3. Soient E, F deux espaces normés et $T \in \mathscr{L}(E;\, F)$. Alors le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J_E"'] & F \arrow[d, "J_F"] \\ E^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & F^{**} \end{tikzcd}$$

Autrement dit, pour tout $x \in E$, on a $T^{**}(J_E(x)) = J_F(T(x))$.

Définition 7.10.2. Soient E un espace normé, M un sous-ensemble non vide de E et N un sous-ensemble non vide de E^*. On pose :

$$M^{\perp} = \big\{f \in E^*\ ;\ f(x) = 0\,,\ \text{pour tout } x \in M\big\}\,,$$

$$^{\perp}N = \big\{x \in E\ ;\ f(x) = 0\,,\ \text{pour tout } f \in N\big\}\,.$$

On dit que $M^{\perp}$ (*resp.* $^{\perp}N$) est **l'orthogonal** de M (*resp.* N).

Notons que l'on a :

$$M^{\perp}=\{f\in E^*\;;\;M\subset \ker(f)\}=\bigcap_{x\in M}\ker(J_E(x))\quad \text{et}\quad {}^{\perp}N=\bigcap_{f\in N}\ker(f)\,.$$

Remarquons aussi que $M^{\perp}$ (*resp.* ${}^{\perp}N$) est un sous-espace vectoriel fermé de E^* (*resp.* E).

Proposition 7.10.2. *Soit E un espace normé.*

1. *Si M est sous-espace vectoriel de E, on a $\overline{M}={}^{\perp}(M^{\perp})$. Autrement dit, on a $\overline{M}=\bigcap_{f\in M^{\perp}}\ker(f)$, où $M^{\perp}=\{f\in E^*\;;\;M\subset\ker(f)\}$. Donc l'adhérence de M dans E est l'intersection des hyperplans fermés de E contenant M.*

2. *Si N est sous-espace vectoriel de E^*, on a $\overline{N}\subset({}^{\perp}N)^{\perp}$.*

Démonstration. 1. Soit $x\in M$. Pour tout $f\in M^{\perp}$, on a $f(x)=0$, donc $x\in{}^{\perp}(M^{\perp})$. Par conséquent, on a $M\subset{}^{\perp}(M^{\perp})$. Comme ${}^{\perp}(M^{\perp})$ est fermé, on en déduit $\overline{M}\subset{}^{\perp}(M^{\perp})$. Si $\overline{M}$ est inclus strictement dans ${}^{\perp}(M^{\perp})$, d'après le corollaire 7.7.2, il existe $x\in{}^{\perp}(M^{\perp})$ et $f\in E^*$ tel que $f_{|M}=0$ et $f(x)\neq 0$. D'où on a $f\in M^{\perp}$ et $f(x)\neq 0$, donc $x\notin{}^{\perp}(M^{\perp})$, ce qui est impossible. Donc on a $\overline{M}={}^{\perp}(M^{\perp})$.
2. Soit $f\in N$, alors pour tout $x\in{}^{\perp}N$, on a $f(x)=0$, d'où $f\in({}^{\perp}N)^{\perp}$. Donc on a $N\subset({}^{\perp}N)^{\perp}$. Comme $({}^{\perp}N)^{\perp}$ est fermé, on en déduit $\overline{N}\subset({}^{\perp}N)^{\perp}$. ■

Proposition 7.10.3. *Soient E, F deux espaces normés et $T\in\mathscr{L}(E;F)$. Alors on a :*

$$\ker(T)={}^{\perp}\mathit{Im}(T^*)\quad \textit{et}\quad \ker(T^*)=\mathit{Im}(T)^{\perp}\,.$$

Démonstration. Soit $x\in E$, on a :

$$\begin{aligned} x\in\ker(T)\quad\Longleftrightarrow\quad T(x)=0\quad&\Longleftrightarrow\quad \forall f\in F^*,\ \text{on a } f(T(x))=0\ \ \text{(voir corollaire 7.7.1)}\\ &\Longleftrightarrow\quad \forall f\in F^*,\ \text{on a } T^*(f)(x)=0\\ &\Longleftrightarrow\quad x\in{}^{\perp}\mathrm{Im}(T^*)\,. \end{aligned}$$

Soit $f\in F^*$, on a :

$$\begin{aligned} f\in\ker(T^*)\quad&\Longleftrightarrow\quad T^*(f)=0\\ &\Longleftrightarrow\quad f\circ T=0\\ &\Longleftrightarrow\quad \forall x\in E,\ \text{on a } f(T(x))=0\\ &\Longleftrightarrow\quad f\in\mathrm{Im}(T)^{\perp}\,. \end{aligned}$$

■

Théorème 7.10.1. *Soient $(E,\|\ \|)$ un espace normé, H un sous-espace vectoriel de E et $\imath : H\hookrightarrow E$ l'injection canonique.*

1. *Il existe une application linéaire bijective et isométrique σ de $E^*/H^{\perp}$ sur H^* tel que le diagramme suivant soit commutatif.*

$$\begin{tikzcd} E^* \arrow[rr, "\imath^*"] \arrow[dr, "\pi"'] & & H^* \\ & E^*/H^{\perp} \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

L'inverse de σ est donné par : si $f\in H^*$ et $\tilde{f}\in E^*$ prolongeant f, on a $\sigma^{-1}(f)=\pi(\tilde{f})$.

2. *Supposons en outre H fermé dans E. Soit $\pi : E \longrightarrow E/H$ l'application quotient. Alors l'application adjoint $\pi^* : (E/H)^* \longrightarrow H^\perp \subset E^*$ est une isométrie isomorphisme de $(E/H)^*$ sur $H^\perp$.*

Démonstration. 1. Soit $f \in H^\perp$, alors on a $f_{|_H} = 0$, donc $\imath^*(f) = 0$. Par conséquent, on a $H^\perp \subset \ker(\imath^*)$. D'après la proposition 6.4.4, il existe une unique application linéaire $\sigma : E^*/H^\perp \longrightarrow H^*$ telle que $\sigma \circ \pi = \imath^*$. D'après le théorème 7.7.3, l'application $\imath^*$ est surjective, donc σ est surjective. Il reste à montrer que σ est isométrique. Fixons $f \in E^*$, on a $\|\pi(f)\| = \inf\limits_{g \in H^\perp} \|f - g\|$. Comme pour tout $g \in H^\perp$, on a :

$$\|f - g\| \geq \|(f-g)_{|_H}\| = \|f_{|_H}\| = \|\imath^*(f)\| = \|\sigma(\pi(f))\|,$$

on en déduit que $\|\sigma(\pi(f))\| \leq \|\pi(f)\|$. D'après le théorème 7.7.3, il existe $\tilde{f} \in E^*$ tel que $\tilde{f}_{|_H} = f_{|_H}$ et $\|\tilde{f}\| = \|f_{|_H}\| = \|\sigma(\pi(f))\|$. On a $\pi(f) = \pi(\tilde{f})$, d'où $\|\pi(f)\| = \|\pi(\tilde{f})\| \leq \|\tilde{f}\| = \|\sigma(\pi(f))\|$. Par conséquent, on a $\|\sigma(\pi(f))\| = \|\pi(f)\|$, donc σ est une isométrie de $E^*/H^\perp$ sur H^*.
2. Pour tout $f \in (E/H)^*$, on a $\pi^*(f) = f \circ \pi$, donc $\pi^*(f) \in H^\perp$. Soit $g \in H^\perp$, alors on a $g_{|_H} = 0$, donc $H \subset \ker(g)$. D'après la proposition 6.4.4, il existe $\overline{f} \in (E/H)^*$ tel que $g = \overline{f} \circ \pi$. Donc on a $\pi^*(\overline{f}) = g$, on en déduit que π^* est une application surjective de $(E/H)^*$ sur $H^\perp$. Il reste à montrer que π^* est une isométrie. D'après la proposition 6.4.3, on a $\pi(B_E(0,1)) = B_{E/H}(0,1)$, donc pour tout $f \in (E/H)^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\|\pi^*(f)\| &= \|f \circ \pi\| = \sup\big\{|f \circ \pi(x)| \; ; \; x \in E, \; \|x\| < 1\big\} \\
&= \sup\big\{|f(y)| \; ; \; y \in E/H, \; \|y\| < 1\big\} \\
&= \|f\|.
\end{aligned}$$

Donc π^* est une isométrie de $(E/H)^*$ sur $H^\perp$. ■

Remarque 7.10.4. Soient E un espace de Banach et F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que E soit la somme directe topologique des F et G. D'après le théorème précédent, $(E/F)^*$ est identifié à $F^\perp = \{f \in E^* \; ; \; f_{|_F} = 0\}$. Soit $\imath : G \hookrightarrow E$ l'injection canonique. Alors $\imath^* : E^* \longrightarrow G^*$ est l'application de restriction. Autrement dit, pour tout $f \in E^*$, on a $\imath^*(f) = f_{|_G}$. Soit $T = {\imath^*}_{|_{F^\perp}} : F^\perp \longrightarrow G^*$, définie par $T(f) = f_{|_G}$. Alors T est linéaire bijective continue, donc c'est un homéomorphisme, mais en général, T n'est pas isométrique. En effet, soient $E = \mathbb{R}^2$, muni de la norme $\| \; \|_\infty$, $F = \{(x,x) \; ; \; x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x,0) \; ; \; x \in \mathbb{R}\}$. Alors E est la somme directe topologique des F et G. Soit $f \in E^*$, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on ait $f(x,y) = ax + by$. De plus, on a $\|f\| = |a| + |b|$. Soient $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \neq 0$ et $f(x,y) = ax - ay$. Alors on a $f \in F^\perp$, $\|f\| = 2|a|$ et $\|f_{|_G}\| = |a|$.

Corollaire 7.10.1. *Soient E un espace normé et H un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) E est réflexif.

(ii) H et E/H sont réflexifs.

Démonstration. Notons d'abord que d'après la proposition 6.4.5, E est de Banach si et seulement si H et E/H sont de Banach. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte immédiatement de la proposition 7.9.3 et du théorème précédent.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). D'après la remarque 7.10.3, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, "J_H"'] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "J_E"'] & E/H \arrow[d, "J_{E/H}"] \\
H^{**} \arrow[r, "\imath^{**}"] & E^{**} \arrow[r, "\pi^{**}"] & (E/H)^{**}
\end{tikzcd}$$

On déduit de la proposition 7.10.3 et du théorème précédent que l'on a de plus $\imath^{**}(H^{**}) = \ker(\pi^{**})$. Par hypothèse, H et E/H sont réflexifs, donc J_H et $J_{E/H}$ sont surjectives. Montrons qu'alors J_E est surjective. Soit $b \in E^{**}$. Alors on a $\pi^{**}(b) \in (E/H)^{**}$. Comme π et $J_{E/H}$ sont surjectives, alors il existe $x \in E$ tel que $\pi^{**}(b) = J_{E/H} \circ \pi(x) = \pi^{**}(J_E(x))$. D'où on a $b - J_E(x) \in \ker(\pi^{**}) = \imath^{**}(H^{**})$. Comme J_H est aussi surjective, alors il existe $a \in H$ tel que $b - J_E(x) = \imath^{**} \circ J_H(a) = J_E \circ \imath(a)$. Donc on a $b = J_E(x + \imath(a))$. Par conséquent, J_E est surjective. Autrement dit, E est réflexif. ■

Corollaire 7.10.2. *Soit H un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach E. Alors E est réflexif si et seulement si H et $H^\perp$ sont réflexifs.*

Remarque 7.10.5. Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé et H un sous-espace vectoriel de E. Le corollaire 7.7.3 nous dit que H est dense dans E si et seulement si $H^\perp = \{0\}$.

Proposition 7.10.4. *Soient $(E, \| \ \|)$, $(F, \| \ \|')$ deux espaces normés et $T \in \mathscr{L}(E; F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) T^* est injective.

(ii) $T(E)$ est dense dans F.

Démonstration. D'après la proposition 7.10.3, on a $\ker(T^*) = T(E)^\perp$. Donc T^* est injective si et seulement si $T(E)^\perp = \{0\}$. On déduit de la remarque précédente que T^* est injective si et seulement si $T(E)$ est dense dans F. ■

Remarque 7.10.6. Il résulte de la proposition 7.10.3 que si E et F sont des espaces normés et si $T \in \mathscr{L}(E; F)$ telle que $T^*(F^*)$ soit dense dans E^*, alors T est injective. Mais la réciproque n'est pas toujours vraie. En effet, on a vu que l'on a $c_c \subset \ell^1 \subset \ell^2 \subset c_0 \subset \ell^\infty$ et que le dual topologique de ℓ^1 est ℓ^∞ et le dual topologique de ℓ^2 est ℓ^2. Soit T l'application identité de ℓ^1 dans ℓ^2, alors T est injective et $T^*(\ell^2) = \ell^2 \subset \ell^\infty$, donc $T^*(\ell^2)$ n'est pas dense dans ℓ^∞. En fait, d'adhérence de ℓ^2 dans $(\ell^\infty, \| \ \|_\infty)$ est c_0.

Proposition 7.10.5. *Soient $(E, \| \ \|)$, $(F, \| \ \|')$ deux espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}(E; F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) T^* est surjective.

(ii) T est injective et $T(E)$ est fermé dans F.

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 7 du supplément.

Proposition 7.10.6. *Soient* $(E, \|\ \|)$, $(F, \|\ \|')$ *deux espaces de Banach et* $T \in \mathscr{L}(E; F)$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) T *est surjective.*

(ii) T^* *est injective et* $T^*(F^*)$ *est fermé dans* E^*.

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 7 du supplément.

Proposition 7.10.7. *Soient* $(E, \|\ \|)$, $(F, \|\ \|')$ *deux espaces de Banach et* $T \in \mathscr{L}(E; F)$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $T(E)$ *est fermé dans* F.

(ii) $T^*(F^*)$ *est fermé dans* E^*.

Démonstration. Montrons d'abord l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). D'après la proposition 6.4.4, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \\ & E/\ker(T) \arrow[ur, "\widetilde{T}"'] & \end{tikzcd}$$

où $\widetilde{T}$ est une application linéaire continue injective. Comme on a $\widetilde{T} \circ \pi = T$ et π est surjective, alors on a $\widetilde{T}\big(E/\ker(T)\big) = T(E)$. Puisque $T(E)$ est fermé dans F, il résulte de la proposition 7.10.5 que $\big(\widetilde{T}\big)^*$ est surjective. Comme on a $T^* = \pi^* \circ \big(\widetilde{T}\big)^*$, alors $T^*(F^*) = \mathrm{Im}(\pi^*)$. D'après le théorème 7.10.1, on a $\mathrm{Im}(\pi^*) = \ker(T)^\perp$, d'où $T^*(F^*) = \ker(T)^\perp$. Par conséquent, $T^*(F^*)$ est fermé dans E^*.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). L'espace $\overline{T(E)}$ est de Banach. Soit $S \in \mathscr{L}(E; \overline{T(E)}\,)$, définie par : pour tout $x \in E$, on a $S(x) = T(x)$. Alors on a $\mathrm{Im}(S^*) = \mathrm{Im}(T^*)$, voir remarque 7.10.2. Donc $\mathrm{Im}(S^*)$ est fermé dans E^*. Comme S est d'image dense, il résulte des propositions 7.10.4 et 7.10.6 que S est surjective. Autrement dit, on a $S(E) = \overline{T(E)}$. Or on a $S(E) = T(E)$, d'où $T(E) = \overline{T(E)}$. Donc $T(E)$ est fermé dans F. ∎

7.11 Exercices

Exercice 7.1. En utilisant le théorème de Baire, montrer qu'un espace de Banach E n'admet pas de base algébrique dénombrable.
Solution. Supposons que E possède une base algébrique dénombrable $\mathcal{B} = (e_n)_{n\geq 0}$. Pour tout $n \geq 0$, notons F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{e_0, \dots, e_n\}$. Alors on a $E = \bigcup\limits_{n\geq 0} F_n$. Comme F_n est de dimension finie, alors F_n est fermé. Comme E est de Banach, c'est un espace de Baire, donc il existe $n \geq 0$ tel que $\overset{\circ}{F_n} \neq \emptyset$, d'où on a $E = F_n$, voir exercice 6.9. C'est une contradiction, car E est de dimension infinie.

Exercice 7.2. Montrer que tout espace de Banach de dimension infinie n'est pas σ-compact, mais il pourrait être séparable.

Solution. Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Si E était σ-compact, alors il existerait une suite $(K_n)_{n\geq 0}$ de compacts dans E telle que $E = \underset{n\geq 0}{\cup} K_n$. Comme E est un espace de Baire, alors il existe $n \geq 0$ tel que $\overset{\circ}{K_n} \neq \emptyset$. Donc il existe $x \in K_n$ et $r > 0$ tels que $B'(x,r) \subset K_n$. On en déduit que $B'(x,r)$ est compact, et donc E est de dimension finie, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc tout espace de Banach de dimension infinie n'est pas σ-compact. On a vu, exercice 6.34, que pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace ℓ^p est de Banach séparable de dimension infinie.

Exercice 7.3. Soient E, F deux espaces normés et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue et ouverte. Montrer que si E est de Banach, alors F est de Banach.
Solution. D'après le théorème 6.7.1, F est de Banach si toute série d'éléments de F normalement convergente est convergente dans F. Soit $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite dans F telle que $\sum\limits_{n\geq 0} \|y_n\|' < +\infty$. D'après la proposition 7.1.1, il existe $M > 0$ tel que pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $T(x) = y$ et $\|x\| \leq M\,\|y\|'$. Pour tout $n \geq 0$, soit $x_n \in E$ tel que $T(x_n) = y_n$ et $\|x_n\| \leq M\,\|y_n\|'$. On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \|x_n\|$ est convergente, donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ est convergente dans E car E est de Banach. Comme T est continue, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} y_n$ est convergente dans F.

Exercice 7.4. Soient E et F deux espaces de Banach. Soient T une application de E dans F et S une une application de F^* dans E^* telles que pour tout $x \in E$ et tout $f \in F^*$, on ait $\langle T(x), f\rangle = \langle x, S(f)\rangle$. Montrer que l'on a $T \in \mathscr{L}(E;\, F)$ et $S = T^*$.
Solution. Vérifions d'abord que T est linéaire. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $f \in F^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle T(x+\lambda y), f\rangle &= \langle x+\lambda y, S(f)\rangle \\
&= \langle x, S(f)\rangle + \lambda\langle y, S(f)\rangle \\
&= \langle T(x), f\rangle + \lambda\langle T(y), f\rangle \;=\; \langle T(x)+\lambda T(y), f\rangle\,.
\end{aligned}$$

On déduit du corollaire 7.7.1 que l'on a $T(x+\lambda y) = T(x)+\lambda T(y)$, donc T est linéaire. Pour vérifier la continuité de T, il suffit de montrer que $G(T)$, le graphe de T, est fermé dans $E\times F$. Soit $(x,z) \in \overline{G(T)}$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T(x_n) = z$. Pour tout $n \geq 0$ et tout $f \in F^*$, on a $\langle T(x_n), f\rangle = \langle x_n, S(f)\rangle$, d'où :

$$\langle z, f\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle T(x_n), f\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle x_n, S(f)\rangle = \langle x, S(f)\rangle = \langle T(x), f\rangle\,.$$

Par conséquent, on a $T(x) = z$. Donc le graphe de T est fermé, d'où $T \in \mathscr{L}(E;\, F)$. Pour tout $f \in F^*$ et tout $x \in E$, on a $\langle x, T^*(f)\rangle = \langle T(x), f\rangle = \langle x, S(f)\rangle$, d'où $T^*(f) = S(f)$. Donc on a $S = T^*$.

Exercice 7.5. Soient E, F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On suppose que pour tout $f \in F^*$, la forme linéaire $f\circ T : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue. Montrer que T est continue [†].

Solution. Pour montrer que T est continue, il suffit de montrer que le graphe de T est fermé dans $E \times F$. Soient $(x, y) \in E \times F$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans E telle que $(x_n, T(x_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (x, y)$. D'où on a $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ et $T(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Puisque, pour tout $f \in F^*$, on a $f \circ T \in E^*$, on en déduit que $f(T(x_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(y)$ et $f \circ T(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \circ T(x)$. Donc on a $f \circ T(x) = f(y)$. Il résulte du corollaire 7.7.1 que l'on a $T(x) = y$. Par conséquent, le graphe de T est fermé.

Exercice 7.6. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels d'une variable muni de la norme $\|f\| = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$. Posons $B(f, g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$. Montrer que B est une forme bilinéaire sur $E \times E$, séparément continue, mais non continue.

Solution. Il est clair que B est une forme bilinéaire sur $E \times E$. On a $|B(f, g)| \leq \big(\max\limits_{0\leq t\leq 1} |f(t)|\big) \|g\|$ et $|B(f, g)| \leq \big(\max\limits_{0\leq t\leq 1} |g(t)|\big) \|f\|$, donc B est séparément continue. Supposons que B est continue, d'après la proposition 6.5.1, il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $f, g \in E$, on ait $|B(f, g)| \leq M\|f\| \, \|g\|$. Pour tout $n \geq 1$, soit $f_n = t^n$, on a $\|f_n\| = \frac{1}{n+1}$ et $B(f_n, f_n) = \frac{1}{2n+1}$, d'où pour tout $n \geq 1$, on a $\frac{1}{2n+1} \leq M\frac{1}{(n+1)^2}$, ce qui est impossible. Donc B n'est pas continue.

Exercice 7.7. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, on pose $B(x, y, z) = (xy, xz)$. Montrer que B est une application bilinéaire continue surjective de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, mais B n'est pas une application ouverte.

Solution. Il est clair que B est une application bilinéaire continue surjective de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \ ; \ -1 < x < 1, \ y > 0, \ z > 0, \text{ et } y + z < 1\}$, alors U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. On vérifie facilement que l'on a $B(U) = \{(0, 0)\} \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ a > 0, \ b > 0, \text{ et } a + b < 1\} \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ a < 0, \ b < 0, \text{ et } -1 < a + b\}$, donc $B(U)$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, B n'est pas une application ouverte.

Exercice 7.8. Soit E un espace normé et D un sous-ensemble de E. On suppose que pour tout $f \in E^*$, l'ensemble $f(D)$ est borné dans $\mathbb{K}$. Montrer que D est borné dans E.

Solution. Soit $J : E \longrightarrow E^{**} = \mathscr{L}(E^*; \mathbb{K})$ l'application canonique. Pour tout $x \in E$ et tout $f \in E^*$, on a $J(x)(f) = f(x)$. Par hypothèse, pour tout $f \in E^*$, l'ensemble $\{J(x)(f) \ ; \ x \in D\}$ est borné dans $\mathbb{K}$. Alors on déduit, par le théorème de Banach-Steinhaus, que $J(D)$ est borné dans E^{**}, donc D est borné dans E car J est une application isométrique.

Exercice 7.9. Soient $E = \big\{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}) \, ; \, f(0) = 0\big\}$ et $F = C([0, 1], \mathbb{R})$. On munit E et F de la norme $\| f \|_\infty = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$. Considérons l'application dérivée

$$\begin{array}{rccc} D : & E & \longrightarrow & F \\ & f & \longmapsto & f' \end{array}$$

1. Montrer que D est linéaire bijective non continue, mais D^{-1} est continue.
2. Montrer que $G(D)$, le graphe de D, est fermé dans $E \times F$.

[†] On verra, théorème 10.2.2, que ce résultat est encore valable sans supposer E et F de Banach.

Solution. 1. Il est clair que D est linéaire et bijective. L'application D^{-1} associe à toute application $f \in F$ sa primitive nulle en 0. Autrement dit, on a $D^{-1}(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, d'où $\left|D^{-1}(f)(x)\right| \leq \int_0^x |f(t)|\,dt \leq \int_0^x \|f\|_\infty\,dt \leq x\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, donc on a $\|D^{-1}(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Par conséquent, D^{-1} est continue. Pour tout $n \geq 1$, soit $f_n(t) = t^n$, alors on a $\| f_n \|_\infty = 1$, mais $\| D(f_n) \|_\infty = n$, donc D n'est pas continue.
2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans E telle que la suite $(f_n, f_n')_{n\geq 0}$ converge vers (f, g) dans l'espace normé produit $E \times F$. Pour tout $x \in [0,\, 1]$ et pour tout $n \geq 0$, on a :

$$f_n(x) = f_n(x) - f_n(0) = \int_0^x f_n'(t)\,dt\,.$$

Comme $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans $(E,\, \|\ \|_\infty)$, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. Comme $(f_n')_{n\geq 0}$ converge vers g dans $(F,\, \|\ \|_\infty)$, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^x f_n'(t)\,dt = \int_0^x g(t)\,dt$, voir proposition 5.2.5. Par conséquent, on a $f(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$, d'où $f'(x) = g(x)$. Donc on a $(f, g) \in G(D)$. Ainsi, $G(D)$ est fermé dans $E \times F$.

Exercice 7.10. On considère l'espace vectoriel c_c muni de la norme $\|\ \|_\infty$.

1. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in c_c$, on pose $S(x) = \big((n+1)x_n\big)_{n\geq 0}$. Montrer que S est une application linéaire non continue de c_c dans c_c et que le graphe de S est fermé.

2. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in c_c$, on pose $T(x) = \big(\frac{x_n}{n+1}\big)_{n\geq 0}$. Montrer que T est une application linéaire continue bijective non ouverte de c_c dans c_c.

Solution. 1. Il est clair que S est linéaire. L'application S n'est pas continue car pour tout $n \geq 0$, on a $\|\mathbf{e}_n\|_\infty = 1$ et $\|S(\mathbf{e}_n)\|_\infty = n + 1$. Montrons que le graphe G de S est fermé. Soient $(x, y) \in \overline{G}$ et $(\xi_k)_{k\geq 0}$ une suite dans c_c telle que $(\xi_k, S(\xi_k)) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (x, y)$. On a $\xi_k = (x_{k,n})_{n\geq 0}$ et $x = (x_n)_{n\geq 0}$. Puisque pour tout $n, k \geq 0$, on a $|x_{k,n} - x_n| \leq \|\xi_k - x\|_\infty$ et $|(n+1)x_{k,n} - y_n| \leq \|S(\xi_k) - y\|_\infty$, alors on a $x_{k,n} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x_n$ et $(n+1)x_{k,n} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} y_n$. On en déduit que pour tout $n \geq 0$, on a $y_n = (n+1)x_n$, donc $y = S(x)$. Par conséquent, G est fermé.
2. Il est clair que T est linéaire. Pour tout $x \in c_c$, on a $\|T(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty$, donc T est continue. On a $T \circ S = \mathrm{id}_{c_c}$ et $S \circ T = \mathrm{id}_{c_c}$, donc T est bijective et on a $T^{-1} = S$. Puisque T est bijective, alors T est ouverte si et seulement si T^{-1} est continue. Or $T^{-1} = S$ n'est pas continue, donc T n'est pas ouverte.

Exercice 7.11. On considère l'espace vectoriel c_0 muni de la norme $\|\ \|_\infty$. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in c_0$, on pose $T(x) = \big(\frac{x_n}{n+1}\big)_{n\geq 0}$. Montrer que T est une application linéaire continue non ouverte de c_0 dans c_0 et que $T(c_0)$ est dense dans c_0.
Solution. Il est clair que T est linéaire. Pour tout $x \in c_0$, on a $\|T(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty$, donc T est continue. On a $c_c = T(c_c) \subset T(c_0)$ et c_c est dense dans c_0, on en déduit que $T(c_0)$ est dense dans c_0. Montrons que T n'est pas ouverte. L'application T est ouverte si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset T(B(0, 1))$, voir proposition 7.1.1. Soit $r > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $(N+1)\frac{r}{2} > 1$. Soient $y = \frac{r}{2}\mathbf{e}_N$ et $x = (x_n)_{n\geq 0} \in c_0$

tel que $T(x) = y$, alors on a $x_N = (N+1)\frac{r}{2} > 1$, d'où $x \notin B(0,1)$. Par conséquent, $B(0,r) \not\subset T(B(0,1))$, donc T n'est pas ouverte.
Une autre méthode pour montrer que T n'est pas ouverte. Si T est ouverte, alors T est surjective, donc pour montrer que T n'est pas ouverte, il suffit de montrer que T n'est pas surjective. Soit $y = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geq 0} \in c_0$. S'il existe $x = (x_n)_{n\geq 0} \in c_0$ tel que $T(x) = y$, alors pour tout $n \geq 0$, on a $x_n = 1$, ce qui est impossible. Donc T n'est pas surjective.

Exercice 7.12. On considère l'espace vectoriel c_c muni de la norme $\| \|_\infty$.

1. Pour tout entier $n \geq 0$ et tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in c_c$, on pose $\varphi_n(x) = (n+1)x_n$. Montrer que $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ est une suite non bornée dans c_c^* mais que, pour tout $x \in c_c$, la suite $(\varphi_n(x))_{n\geq 0}$ est bornée dans $\mathbb{K}$.
2. Pour tout entier $n \geq 0$ et tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in c_c$, on pose $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$. Montrer que f_n est une forme linéaire continue sur c_c.
3. Montrer que l'application $f : x = (x_n)_{n\geq 0} \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est une forme linéaire non continue sur c_c, et pourtant pour tout $x \in c_c$, on a $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Solution. 1. Pour tous $x = (x_n)_{n\geq 0}$, $y = (y_n)_{n\geq 0} \in c_c$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $x + \lambda y = (x_n + \lambda y_n)_{n\geq 0}$. Soit $n \geq 0$, on a :

$$\varphi_n(x+\lambda y) = (n+1)[x_n + \lambda y_n] = (n+1)x_n + \lambda(n+1)y_n = \varphi_n(x) + \lambda\varphi_n(y)$$

donc φ_n est linéaire. On a $|\varphi_n(x)| = |(n+1)x_n| \leq (n+1)\|x\|_\infty$, donc φ_n est continue et on a $\|\varphi_n\| \leq n+1$. Or on a $\varphi_n(\mathbf{e}_n) = n+1$, d'où $\|\varphi_n\| = n+1$. Par conséquent, $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ est une suite non bornée dans c_c^*. Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in c_c$, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p+1$, on ait $x_n = 0$. Alors on a $\{\varphi_n(x)\ ;\ n \geq 0\} = \{x_0, 2x_1, \ldots, (p+1)x_p, 0\}$ qui est un ensemble fini, donc la suite $(\varphi_n(x))_{n\geq 0}$ est bornée dans $\mathbb{K}$.
2. Il est clair que f_n est linéaire. On a $|f_n(x)| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |x_k| \leq (n+1)\|x\|_\infty$, donc f_n est continue et on a $\|f_n\| \leq n+1$. Si $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbf{e}_k$, alors on a $\|x\|_\infty = 1$ et $f_n(x) = n+1$, donc $\|f_n\| = n+1$.
3. Il est clair que f est linéaire. Il reste à vérifier que f n'est pas continue. Pour tout $n \geq 0$, soit $\xi_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbf{e}_k$, alors on a $\|\xi_n\|_\infty = 1$ et $f(\xi_n) = n+1$. Donc il n'existe aucune constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in E$, on ait $|f(x)| \leq M\|x\|_\infty$. Par conséquent, f n'est pas continue.

Exercice 7.13. Soient $(E, \| \|)$ et $(F, \| \|')$ deux espaces normés. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathscr{L}(E; F)$. On suppose que pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge dans $(F, \| \|')$ et on pose $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

1. Montrer que f est une forme linéaire, mais que f n'est pas toujours continue.

2. On suppose en outre que la suite $(\|f_n\|)_{n\geq 0}$ est bornée. Montrer que f est continue. Donner un exemple montrant que l'on n'a pas nécessairement $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$.

Solution. 1. Pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x+\lambda y) &= \lim_{n\to+\infty} f_n(x+\lambda y) \\ &= \lim_{n\to+\infty} f_n(x) + \lambda f_n(y) \\ &= \lim_{n\to+\infty} f_n(x) + \lambda \lim_{n\to+\infty} f_n(y) \;=\; f(x) + \lambda f(y)\,. \end{aligned}$$

Donc f est linéaire. L'application n'est pas toujours continue, ceci résulte de l'exercice précédent.
2. On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|f_n\| \leq M$. Alors pour tout $x \in E$, on a $\|f_n(x)\|' \leq \|f_n\|\,\|x\| \leq M\|x\|$. On passe à la limite, on trouve $\|f(x)\|' \leq M\|x\|$, donc f est continue. Si $E = c_c$, $F = \mathbb{K}$ et pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in c_c$, on pose $f_n(x) = x_n$, alors $f_n \in E^*$, $\|f_n\| = 1$ et pour tout $x \in c_c$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, donc $f = 0$, mais on a $\|f_n - f\| = \|f_n\| = 1$.

Exercice 7.14. Soient $(E, \|\ \|)$, $(F, \|\ \|')$ deux espaces normés, $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée dans $\mathscr{L}(E; F)$ et $f \in \mathscr{L}(E; F)$. Soit D une partie totale dans E. Montrer que si la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in D$, alors il en est de même pour tout $x \in E$.
Solution. Soit $M > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|f_n\| \leq M$. Soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par D. Alors G est dense dans E, et pour tout $a \in G$, on a $f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$. Soient $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe $a \in G$ tel que $\|x - a\| < \varepsilon$. On a $f_n(x) - f(x) = f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a) + f(a) - f(x)$ d'où $\|f_n(x) - f(x)\|' \leq M\|x - a\| + \|f_n(a) - f(a)\|' + \|f\|\,\|x - a\|$. Comme on a $f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\|f_n(a) - f(a)\|' < \varepsilon$. Donc, pour tout $n \geq N$, on a $\|f_n(x) - f(x)\|' \leq (M + 1 + \|f\|)\,\varepsilon$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

Exercice 7.15. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé, D une partie totale de E et F un espace de Banach. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée dans $\mathscr{L}(E; F)$. Montrer que si pour tout $x \in D$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est convergente dans F, alors il existe $f \in \mathscr{L}(E; F)$ tel que, pour tout $x \in E$, on ait $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
Solution. Soit $M > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|f_n\| \leq M$. Soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par D. Alors G est dense dans E, et pour tout $a \in G$, la suite $(f_n(a))_{n\geq 0}$ est convergente dans F. Montrons d'abord que pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est convergente dans F. Soient $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe $a \in G$ tel que $\|x - a\| < \varepsilon$. Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \|f_n(x) - f_m(x)\|' &\leq \|f_n(x) - f_n(a)\|' + \|f_n(a) - f_m(a)\|' + \|f_m(a) - f_m(x)\|' \\ &\leq M\,\|x - a\| + \|f_n(a) - f_m(a)\|' + M\,\|x - a\|\,. \end{aligned}$$

Or la suite $(f_n(a))_{n\geq 0}$ est convergente, donc elle est de Cauchy. Par conséquent, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$, on ait $\|f_n(a) - f_m(a)\|' < \varepsilon$. On en déduit que pour tout $n, m \geq N$, on a $\|f_n(x) - f_m(x)\|' \leq (2M+1)\,\varepsilon$. Donc la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est de Cauchy, donc elle est convergente car F est un espace de Banach. Pour tout $x \in E$, on pose $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. Alors, d'après l'exercice 7.13, on a $f \in \mathscr{L}(E; F)$.

Exercice 7.16. Soient E un espace normé, F un espace normé de dimension finie et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire surjective. Montrer que T est une application ouverte.
Solution. Soit G un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim(G) = \dim(F)$ et tel que E soit la somme directe algébrique des $\ker(T)$ et G. D'après la remarque 7.3.1, la projection naturelle $\pi_2 : E \longrightarrow G$ est une application linéaire surjective et ouverte. Pour tout $x \in E$, on a $T(x) = T(\pi_2(x))$ et on pose $S(\pi_2(x)) = T(x)$. Alors S est une application linéaire bijective de G sur F et le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & F \\ & G \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

Comme on a $\dim(G) = \dim(F) < +\infty$, alors S est un homéomorphisme. Or on a $T = S \circ \pi_2$, donc T est une application ouverte.

Exercice 7.17. Soient E un espace normé et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire non continue. Montrer que pour tout ouvert non vide U de E, on a $f(U) = \mathbb{K}$.
Solution. D'après l'exercice précédent, f est une application ouverte. Comme f n'est pas continue, alors pour tout $r > 0$, $f(B(0,r))$ est un ouvert convexe non borné de $\mathbb{K}$. En plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq 1$, on a $\lambda f(B(0,r)) = f(\lambda B(0,r)) \subset f(B(0,r))$. On en déduit que $f(B(0,r)) = \mathbb{K}$. Soit U un ouvert non vide de E. Alors il existe $x \in U$ et $r > 0$ tels que $x + B(0,r) \subset U$. D'où on a $f(x) + f(B(0,r)) \subset f(U)$. Or on a $f(B(0,r)) = \mathbb{K}$, il en résulte que $f(U) = \mathbb{K}$.

Exercice 7.18. Soient E, F deux espaces normés et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire non nulle et non injective. Montrer que T n'est pas une application fermée.
Solution. Puisque T est non nulle et non injective, alors il existe deux vecteurs non nuls e_1 et e_2 dans E tels que $T(e_1) = 0$ et $T(e_2) \neq 0$. Soit $A = \big\{te_1 + se_2 \; ; \; st = 1 \text{ et } t, s \in \mathbb{R}\big\}$, alors A est un fermé de E car $A \subset H = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et H muni de la topologie induite par E est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; xy = 1\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$. Mais l'ensemble $T(A) = \big\{\lambda T(e_2) \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}\big\} \setminus \{0\}$ n'est pas fermé dans F.

Exercice 7.19. Soient E un espace de Banach et $T : E \longrightarrow \ell^\infty$ une application linéaire. Pour tout $n \geq 0$, soit $f_n : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{K}$ la forme linéaire continue définie par $f_n(x) = x_n$, pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$. Montrer que T est continue si et seulement si pour tout $n \geq 0$, $f_n \circ T$ est continue de E dans $\mathbb{K}$.
Solution. Comme pour tout $n \geq 0$, f_n est une forme linéaire continue sur ℓ^∞, il en résulte que si T est continue, alors pour tout $n \geq 0$, $f_n \circ T$ est continue.
Réciproquement, supposons que pour tout $n \geq 0$, $f_n \circ T$ est continue. Pour tout $x \in E$, on a $|f_n \circ T(x)| = |f_n(T(x))| \leq \|T(x)\|_\infty$. Par le théorème de Banach-Steinhaus, corollaire 7.2.1, il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in E$, on ait $|f_n \circ T(x)| \leq M\,\|x\|$. D'où pour tout $x \in E$, on a $\|T(x)\|_\infty = \sup\limits_{n\geq 0} |f_n \circ T(x)| \leq M\,\|x\|$.

Donc T est continue.

Exercice 7.20. Soient $(E, \| \ \|)$, F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue et surjective. Montrer que pour toute suite $(y_n)_{n\geq 0}$ dans F, convergente vers un $y \in F$, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans E, convergente vers un $x \in E$ telle que $T(x) = y$ et $T(x_n) = y_n$, pour tout $n \geq 0$.
Solution. D'après la proposition 6.4.4, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \\ & E/\ker(T) \arrow[ur, "\widetilde{T}"'] & \end{tikzcd}$$

En plus, $\widetilde{T}$ est une application linéaire continue et bijective. Comme $E/\ker(T)$ est un espace de Banach, il résulte du théorème de l'application ouverte que $\widetilde{T}$ est un homéomorphisme. Par conséquent, il suffit de montrer l'exercice pour l'application π. Soient H un sous-espace vectoriel fermé de E et $\pi : E \longrightarrow E/H$ l'application quotient. Soit $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite dans l'espace normé quotient E/H, convergente vers un $y \in E/H$. Comme π est surjective, il existe une suite $(z_n)_{n\geq 0}$ dans E et $x \in E$ telle que $\pi(x) = y$ et $\pi(z_n) = y_n$, pour tout $n \geq 0$. Par définition de la norme quotient $\| \ \|'$ sur E/H, pour tout $n \geq 0$, il existe $h_n \in H$ tel que $\|x - z_n - h_n\| < \|y - y_n\|' + \frac{1}{n+1}$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $x_n = z_n + h_n$, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans E, convergente vers x telle que $\pi(x) = y$ et $\pi(x_n) = y_n$, pour tout $n \geq 0$.

Exercice 7.21. Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé et E^* son dual topologique. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans E telle que pour tout $f \in E^*$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(x_n)$ soit convergente dans $\mathbb{K}$.

Montrer que $S : f \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)$ est une forme linéaire continue sur E^*.

Solution. Pour tout ≥ 0 et pour tout $f \in E^*$, soit $S_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$. Il est clair que S_n est une forme linéaire sur E^*. On a $|S_n(f)| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |f(x_k)| \leq \|f\| \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|$. Donc S_n est aussi continue. Pour tout $f \in E^*$, la suite $(S_n(f))_{n\geq 0}$ est convergente vers $S(f)$. Comme E^* est un espace de Banach, il résulte du corollaire 7.2.3 que S est une forme linéaire continue sur E^*.

Exercice 7.22. Soient E, F deux espaces normés, M un sous-espace vectoriel de E et $T : M \longrightarrow F$ une application linéaire continue telle que $T(M)$ soit de dimension finie. Montrer qu'il existe une application linéaire continue $S : E \longrightarrow F$ prolongeant T telle que $S(E) = T(M)$.
Solution. Puisque tout espace normé de dimension finie est linéairement homéomorphe à un certain $\mathbb{K}^n$, voir corollaire 6.6.1, on peut considérer que l'on a $T(M) = F = \mathbb{K}^n$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $p_i : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ la projection canonique. Alors $f_i = p_i \circ T$ est une forme linéaire continue sur M. D'après le théorème de Hahn-Banach, théorème 7.7.3, il existe une forme linéaire continue g_i sur E prolongeant f_i. Soit $S = (g_1, \ldots, g_n)$,

alors S est une application linéaire continue de E dans $\mathbb{K}^n$ prolongeant T.

Exercice 7.23. Soient E un espace normé et M un sous-espace vectoriel fermé de E tel que l'espace vectoriel quotient E/M soit de dimension finie.

1. Montrer que M admet un supplémentaire topologique dans E.

2. Soient F un espace normé et $T : M \longrightarrow F$ une application linéaire continue. En déduire qu'il existe une application linéaire continue $S : E \longrightarrow F$ prolongeant T.

Solution. 1. Soit H un sous-espace vectoriel de dimension finie de E tel que E soit la somme directe algébrique de M et H. Soit $\pi_2 : E \longrightarrow H$ la projection naturelle. Puisque H est de dimension finie et puisque $\ker(\pi_2) = M$ est fermé dans E, il résulte de la proposition 6.6.1 que π_2 est continue. Par conséquent, la projection naturelle $\pi_1 : E \longrightarrow M$ est continue. On déduit de la proposition 7.3.2 que E est la somme directe topologique de M et H.
2. Soit $S = T\circ\pi_1$, alors S est une application linéaire continue de E dans F prolongeant T.

Exercice 7.24. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé et $T : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E^*. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que pour tout $f \in F$, on ait $T(f) = f(x_0)$. Montrer que si T est de plus continue et si $\varepsilon > 0$, on peut choisir x_0 tel que $\|x_0\| \leq \|T\| + \varepsilon$.
Solution. Si $F = \{0\}$, le résultat est évident. Supposons donc F non nul et soit $f_1, \dots, f_n$ une base algébrique de F. Comme F est de dimension finie, alors $T_{|_F}$ est linéaire continue. Donc il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $\lambda_i \in \mathbb{K}$, on ait $\|\lambda_1 T(f_1) + \cdots + \lambda_n T(f_n)\| = \|T(\lambda_1 f_1) + \cdots + \lambda_n f_n)\| \leq M\, \|\lambda_1 f_1) + \cdots + \lambda_n f_n\|$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Helly, il existe $x_0 \in E$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on ait $f_i(x_0) = T(f_i)$ et $\|x_0\| \leq M + \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $f \in F$, on a $T(f) = f(x_0)$ et on a $\|x_0\| \leq M + \varepsilon$. Si T est déjà continue, il suffit de prendre $M = \|T\|$.

Exercice 7.25. Soient $(E, \|\ \|)$ et $(F, \|\ \|)$ deux espaces normés.

1. Soient $f \in E^*$ et $y \in F$. On définit $T_{f,y} : E \longrightarrow F$ par $T_{f,y}(x) = f(x)y$. Montrer que $T_{f,y} \in \mathscr{L}(E;\, F)$ et que l'on a $\|T_{f,y}\| = \|f\|\, \|y\|$.

2. On suppose $F \neq 0$. Montrer que E^* est isométriquement isomorphe à un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{L}(E;\, F)$.

3. On suppose $E \neq 0$. Montrer que F est isométriquement isomorphe à un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{L}(E;\, F)$.

4. On suppose $E \neq 0$. Montrer que F est de Banach si et seulement si $\mathscr{L}(E;\, F)$ est de Banach.

Solution. 1. Comme l'application $\lambda \longmapsto \lambda y$ est linéaire continue de $\mathbb{K}$ dans F, alors $T_{f,y}$

est linéaire continue de E dans F. Autrement dit, on a $T_{f,y} \in \mathscr{L}(E; F)$. On a :

$$\begin{aligned} \|T_{f,y}\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)y\| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)|\,\|y\| \\ &= \|y\| \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)| = \|y\|\,\|f\|. \end{aligned}$$

2. On suppose $F \neq 0$. Soit $y_0 \in F$ tel que $\|y_0\| = 1$. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} T: & E^* & \longrightarrow & \mathscr{L}(E; F) \\ & f & \longmapsto & T_{f,y_0} \end{array}$$

est linéaire continue et isométrique. Comme E^* est de Banach, alors $T(E^*)$ est fermé dans $\mathscr{L}(E; F)$.
3. On suppose $E \neq 0$. Alors on a $E^* \neq 0$, et soit $f_0 \in E^*$ telle que $\|f_0\| = 1$. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} S: & F & \longrightarrow & \mathscr{L}(E; F) \\ & y & \longmapsto & T_{f_0,y} \end{array}$$

est linéaire continue et isométrique. Vérifions que $S(F)$ est fermé dans $\mathscr{L}(E; F)$. Soit $g \in \overline{S(F)}$. Alors il existe une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ dans F telle que la suite $(S(y_n))_{n\geq 0}$ converge vers g dans $\mathscr{L}(E; F)$. Soit $a \in E$ tel que $f_0(a) \neq 0$. On a $g(a) = \lim_{n\to+\infty} f_0(a)y_n$, donc la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers $y = \frac{g(a)}{f_0(a)}$ dans F. Pour tout $x \in E$, on a $g(x) = \lim_{n\to+\infty} f_0(x)y_n = f_0(x)y$, d'où $g = S(y)$. Donc $S(F)$ est fermé dans $\mathscr{L}(E; F)$.
4. Si F est de Banach, il résulte de la proposition 6.3.3 que $\mathscr{L}(E; F)$ est de Banach. Réciproquement, si $\mathscr{L}(E; F)$ est de Banach, alors $S(F)$ est de Banach, et donc F est de Banach.

Exercice 7.26. Soient $(E, \|\ \|)$ et $(F, \|\ \|)$ deux espaces normés. Montrer que $\mathscr{L}(E; F^*)$ est isométriquement isomorphe à $\mathscr{L}(F; E^*)$.
Solution. Soit $J_F : F \longrightarrow F^{**}$ l'application canonique, voir proposition 7.9.1. On vérifie alors facilement que l'application

$$\begin{array}{lcl} \mathscr{L}(E; F^*) & \longrightarrow & \mathscr{L}(F; E^*) \\ T & \longmapsto & T^* \circ J_F \end{array}$$

est linéaire bijective et isométrique.

Exercice 7.27. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace de Banach et $T : E \longrightarrow \ell^1$ une application linéaire continue et surjective.

1. Montrer qu'il existe une suite bornée $(a_n)_{n\geq 0}$ dans E telle que $T(a_n) = \mathbf{e}_n$ pour tout $n \geq 0$.

2. Montrer que ℓ^1 est linéairement homéomorphe à un sous-espace de E.

Solution. 1. D'après le théorème de l'application ouverte, T est une application ouverte. Par conséquent, il existe $r > 0$ tel que $B_{\ell^1} \subset T(B_E(0,r))$. Or, pour tout $n \geq 0$, on a $\mathbf{e}_n \in B_{\ell^1}$, donc il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans $B_E(0,r)$ telle que $T(a_n) = \mathbf{e}_n$ pour tout $n \geq 0$.
2. Considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} S : & \ell^1 & \longrightarrow & E \\ & (\lambda_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \, a_n \end{array}$$

Alors S est linéaire continue. En plus, on a $T \circ S = \mathrm{id}_{\ell^1}$. Soit $F = S(E)$, alors F est un sous-espace vectoriel de E et S est linéaire et c'est un homéomorphisme de ℓ^1 sur F.

Exercice 7.28. Soit $(E, \| \, \|)$ un espace normé séparable. Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ dans S_{E^*}, séparante pour E. Autrement dit, montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ dans E^* telle que :

(a) Pour tout $n \geq 0$, on ait $\|f_n\| = 1$.

(b) Pour tout $x, y \in E$ tels que $x \neq y$, il existe $n \geq 0$ tel que $f_n(x) \neq f_n(y)$. Autrement dit, on a $\underset{n\geq 0}{\cap} \ker(f_n) = \{0\}$.

Solution. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dense dans $S_E = \{x \in E \; ; \; \|x\| = 1\}$. Par le théorème de Hahn-Banach, corollaire 7.7.1, il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ dans E^* telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $f_n(x_n) = \|x_n\| = 1$ et $\|f_n\| = 1$. Pour montrer (b), il suffit de montrer que pour tout $x \in S$, il existe $n \geq 0$ tel que $f_n(x) \neq 0$. Soit $x \in S$, il existe $n \geq 0$ tel que $\|x_n - x\| < \frac{1}{2}$. D'où on a :

$$|1 - f_n(x)| = |f_n(x_n) - f_n(x)| \leq \|f_n\| \, \|x_n - x\| = \|x_n - x\| < \tfrac{1}{2}\,.$$

Donc on a $f_n(x) \neq 0$.

Exercice 7.29. Soient $(E, \| \, \|)$ un espace normé séparable et $(f_i)_{i\in I}$ une famille dans S_{E^*} telle que $\underset{i\in I}{\cap} \ker(f_i) = \{0\}$. Montrer qu'il existe un sous-ensemble au plus dénombrable J de I tel que $\underset{i\in J}{\cap} \ker(f_i) = \{0\}$.

Solution. Soit $A = \underset{i\in I}{\cap} \{x \in E \; ; \; |f_i(x)| \leq 1\}$. Alors A est une partie non vide, convexe, équilibrée, fermée et on a $B_E \subset A$. Soit μ_A la jauge de A. D'après le théorème 7.6.2 et la proposition 7.6.2, μ_A est une semi-norme sur E telle que $A = \{x \in E \; ; \; \mu_A(x) \leq 1\}$ et il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in E$, on ait $0 \leq \mu_A(x) \leq M \, \|x\|$. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$. Alors il existe $i \in I$ tel que $f_i(x) \neq 0$. Par conséquent, on a $x \, \mathbb{K} \not\subset A$. Il résulte aussi du théorème 7.6.2 qu'en fait μ_A est une norme sur E. Puisque l'application identité $\mathrm{id}_E \, : x \longmapsto x$ est continue de $(E, \| \, \|)$ dans (E, μ_A), alors l'espace normé (E, μ_A) est aussi séparable. Puisque pour tout $x \in A$ et pour tout $i \in I$, on a $|f_i(x)| \leq 1$, alors f_i est aussi continue pour la norme μ_A. Quitte à remplacer la norme $\| \, \|$ par la norme μ_A, on peut supposer que l'on a $B_E = \underset{i\in I}{\cap} \{x \in E \; ; \; |f_i(x)| \leq 1\}$. On en déduit que pour tout $r > 0$, on a $B'(0,r) = \underset{i\in I}{\cap} \{x \in E \; ; \; |f_i(x)| \leq r\}$. Comme $(E, \| \, \|)$ est séparable, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dense dans S_E. On a $B'(0, \frac{1}{2}) = \underset{i\in I}{\cap} \{x \in E \; ; \; |f_i(x)| \leq \frac{1}{2}\}$, donc pour tout $n \geq 0$, il existe $i_n \in I$ tel que $|f_{i_n}(x_n)| > \frac{1}{2}$. Soit $J = \{i_n \; ; \; n \geq 0\}$, alors J est un sous-ensemble au plus dénombrable de I. Vérifions que l'on a $\bigcap\limits_{i \in J} \ker(f_i) = \{0\}$. Soit $x \in S_E$. Alors il existe $n \geq 0$ tel que $\|x - x_n\| < \frac{1}{4}$. On a :

$\frac{1}{2} - |f_{i_n}(x)| < |f_{i_n}(x_n)| - |f_{i_n}(x)| \leq |f_{i_n}(x_n) - f_{i_n}(x)| \leq \|f_{i_n}\| \, \|x_n - x\| = \|x_n - x\| < \frac{1}{4}$.

Donc on a $\frac{1}{4} < |f_{i_n}(x)|$. En particulier, on a $f_{i_n}(x) \neq 0$, d'où $x \notin \bigcap\limits_{i \in J} \ker(f_i) = \{0\}$. Par conséquent, on a $\bigcap\limits_{i \in J} \ker(f_i) = \{0\}$.

Exercice 7.30. Pour $0 < \alpha < 1$, soit u_α la suite, $u_\alpha = (\alpha^n)_{n \geq 0}$. Montrer que le sous-espace V de c_0 engendré par $(u_\alpha)_{0<\alpha<1}$ est dense dans c_0.
Solution. D'après le corollaire 7.7.3, le sous-espace vectoriel V est dense dans $(c_0, \| \; \|_\infty)$ si et seulement si toute forme linéaire continue sur c_0 dont la restriction à V est nulle est nulle. Soit $f \in {c_0}^*$, alors il existe un unique $(a_n)_{n \geq 0} \in \ell^1$ tel que pour tout $x = (x_n)_{n \geq 0} \in c_0$, on ait $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$, voir proposition 7.4.3. On suppose que $f_{|V} = 0$. Alors pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \alpha^n = 0$. Il s'agit de montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $a_n = 0$. S'il existe $n \geq 0$ tel que $a_n \neq 0$, alors $N = \inf\{n \geq 0 \; ; \; a_n \neq 0\}$ existe dans $\mathbb{N}$ et on a $a_N \neq 0$. Donc, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on a $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} a_n \alpha^n = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N_0 > N$ tel que $\sum\limits_{n=N_0+1}^{+\infty} |a_n| < \varepsilon$. On en déduit que pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on a $\sum\limits_{n=N_0+1}^{+\infty} |\alpha^{n-N} a_n| < \varepsilon$. Comme on a :

$$a_N + a_{N+1}\alpha + \cdots + a_{N_0}\alpha^{N_0 - N} + \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \alpha^{n-N} a_n = 0$$

alors, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on a $\left| a_N + a_{N+1}\alpha + \cdots + a_{N_0}\alpha^{N_0-N} \right| < \varepsilon$. On fait tendre α vers 0, on obtient $|a_N| \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc on a $a_N = 0$, c'est une contradiction. Donc, pour tout $n \geq 0$, on a $a_n = 0$, d'où $f = 0$.

Exercice 7.31. Soit H un sous-espace vectoriel d'un espace normé E. Montrer que si H et $H^\perp$ sont séparables, alors E est séparable.
Solution. Puisque H est séparable si et seulement si $\overline{H}$ est séparable, et puisque l'on a $H^\perp = \overline{H}^\perp$, on peut considérer que H est fermé dans E. Supposons que H et $H^\perp$ sont séparables. D'après le théorème 7.10.1, $H^\perp$ est isométriquement isomorphe à $(E/H)^*$, donc $(E/H)^*$ est séparable. D'après la proposition 7.7.2, l'espace E/H est alors séparable. Donc H et E/H sont séparables. Il résulte de la proposition 6.8.4 que E est séparable.

Remarque 7.11.1. Si E est un espace normé séparable et si H est un sous-espace vectoriel de E, alors $H^\perp$ n'est pas toujours séparable. Par exemple, si $E = \ell^1$ et $H = \{0\}$, alors E est séparable mais $H^\perp = \ell^\infty$ ne l'est pas.

Exercice 7.32. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé. Pour $t \in \mathbb{R}$ et pour $f \in E^*$, on pose $H(f,t) = \{x \in E \ ; \ \mathrm{Re}(f(x)) \leq t\}$. Soit B un sous-ensemble non vide convexe fermé dans E. Montrer qu'il existe une famille $(t_i)_{i\in I}$ dans $\mathbb{R}$ et une famille $(f_i)_{i\in I}$ dans E^* telles que $B = \bigcap\limits_{i\in I} H(f_i, t_i)$.

Solution. D'après le corollaire 7.8.1, pour tout $x \in E \setminus B$, il existe $f_x \in E^*$ et un réel t_x tels que $\mathrm{Re}(f_x(b)) < t_x < \mathrm{Re}(f_x(x))$, pour tout $b \in B$. Alors on a $B \subset H(f_x, t_x)$ et $x \notin H(f_x, t_x)$. Par conséquent, on a $B = \bigcap\limits_{x\in E\setminus B} H(f_x, t_x)$.

Exercice 7.33. Soit $f : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire telle que pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, avec $x_n \geq 0$, pour tout $n \geq 0$, on ait $f(x) \geq 0$. Montrer que f est continue.

Solution. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on identifie λ à la suite constante égale à λ. On a $f(1) = a \geq 0$. Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, avec $x_n \in \mathbb{R}$, pour tout $n \geq 0$. Alors, pour tout $n \geq 0$, on a $\|x\|_\infty - x_n \geq 0$, d'où $0 \leq f(\|x\|_\infty - x) = a\|x\|_\infty - f(x)$. Donc on a $f(x) \leq a\|x\|_\infty$. On a aussi $-f(x) = f(-x) \leq a\|-x\|_\infty = a\|x\|_\infty$, d'où $|f(x)| \leq a\|x\|_\infty$. Soit $z = (z_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, alors il existe $x = (x_n)_{n\geq 0}, y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$ tels que $z = x + iy$ et pour tout $n \geq 0$, on a $z_n = x_n + iy_n$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Donc on a $\|x\|_\infty \leq \|z\|_\infty$, $\|y\|_\infty \leq \|z\|_\infty$ et $f(z) = f(x) + if(y)$, d'où $|f(z)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq a\|x\|_\infty + a\|y\|_\infty \leq 2a\|z\|_\infty$. Par conséquent, f est continue.

Exercice 7.34. Soit H le sous-espace vectoriel de ℓ^∞, défini par :

$$H = \left\{x = (y_n - y_{n+1})_{n\geq 0} \ ; \ (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty\right\}.$$

1. Soient d la distance sur ℓ^∞ associée à la norme $\| \ \|_\infty$ et 1 la suite constante égale à 1. Montrer que l'on a $d(1, H) = 1$.
2. Montrer que l'on a $c_0 \subset \overline{H}$.

Solution. 1. On a $0 \in H$ et $d(1, 0) = \|1\|_\infty = 1$, d'où $d(1, H) \leq 1$. Soit : $z = (y_n - y_{n+1})_{n\geq 0} \in H$, avec $(y_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$. Pour tout $n \geq 0$, soit t_n la partie réelle de y_n, alors $(t_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, $x = (t_n - t_{n+1})_{n\geq 0} \in H$ et on a $d(1, z) = \|1 - z\|_\infty \geq \|1 - x\|_\infty$. S'il existe $n \geq 0$ tel que $t_n - t_{n+1} \leq 0$, alors on a $\|1 - x\|_\infty \geq 1$. Si pour tout $n \geq 0$, on a $t_n - t_{n+1} \geq 0$, alors $(t_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante et minorée dans $\mathbb{R}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n$ existe dans $\mathbb{R}$, d'où on a $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n - t_{n+1} = 0$. On en déduit que l'on a $\|1 - x\|_\infty \geq 1$, d'où $d(1, H) \geq 1$. Par conséquent, on a $d(1, H) = 1$.

Une autre méthode pour montrer que l'on a $d(1, H) \geq 1$. Soit $z = (y_n - y_{n+1})_{n\geq 0} \in H$, avec $(y_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$. Alors on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} [z_k - 1] = \Big[\sum_{k=0}^{n-1} z_k\Big] - n = y_0 - y_n - n$. Donc on a $\big|n - |y_0 - y_n|\big| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |z_k - 1| \leq n\|z - 1\|_\infty$, d'où $\big|1 - \frac{1}{n}|y_0 - y_n|\big| \leq \|z - 1\|_\infty$. Par conséquent, on a $d(1, H) \geq 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}|y_0 - y_n| = 0$.

2. Soit $y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$. Pour tout $p \geq 0$, soit $\xi_p = (y_{n+p})_{n\geq 0}$, alors $\xi_p \in \ell^\infty$ et on a $\xi_p - \xi_{p+1} \in H$. On a $y - \xi_p = \xi_0 - \xi_p = \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} [\xi_j - \xi_{j+1}]$, d'où $y - \xi_p \in H$. Si $y = (y_n)_{n\geq 0} \in c_0$, alors on a $\lim\limits_{p\to+\infty} \|\xi_p\|_\infty = 0$, d'où $y \in \overline{H}$. Par conséquent, on a $c_0 \subset \overline{H}$.

Exercice 7.35.

1. Montrer l'existence de $f \in (\ell^\infty)^*$ satisfaisant aux propriétés suivantes :
   - $\|f\| = 1$ et $f(1) = 1$.
   - Si $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lambda$ existe dans $\mathbb{K}$, alors on a $f(x) = \lambda$.
   - Pour toute élément $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, on a $f((x_{n+1})_{n\geq 0}) = f((x_n)_{n\geq 0})$.
2. Montrer que f ne provient pas d'un élément de ℓ^1. En déduire que ℓ^1 n'est pas réflexif.

Solution. 1. Soit H le sous-espace vectoriel de ℓ^∞, défini comme dans l'exercice précédent. D'après le corollaire 7.7.2, il existe $f \in (\ell^\infty)^*$ telle que $f(1) = d(1, H) = 1$, $f(H) = 0$ et $\|f\| = 1$. Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lambda$, existe dans $\mathbb{K}$, alors on a $x - \lambda \in c_0 \subset \overline{H}$, d'où $f(x) - \lambda = f(x - \lambda) = 0$. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, $(x_n)_{n\geq 0} - (x_{n+1})_{n\geq 0} \in H$, d'où on a $f((x_{n+1})_{n\geq 0}) = f((x_n)_{n\geq 0})$.

2. Soit $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^1$ et $T_a \in (\ell^\infty)^*$ définie par $T_a(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$. Il s'agit de montrer que $f \neq T_a$, voir proposition 7.4.3. Pour tout $p \geq 0$, soit $\xi_p = (t_{p,n})_{n\geq 0} \in \ell^\infty$ défini par : $t_{p,n} = 0$ si $0 \leq n \leq p$ et $t_{p,n} = 1$ si $n > p$. Alors on a $f(\xi_p) = 1$ et $T_a(\xi_p) = \sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} a_n$. D'où on a $\lim\limits_{p\to+\infty} T_a(\xi_p) = 0$, donc $f \neq T_a$. Autrement dit f ne provient pas d'un élément de ℓ^1. Par conséquent, ℓ^1 est inclus strictement dans $(\ell^\infty)^*$. Donc ℓ^1 n'est pas réflexif.

Exercice 7.36. Montrer l'existence d'un élément non nul $f \in (\ell^\infty)^*$ tel que la restriction de f à c_0 est nulle. En déduire que f ne provient pas d'un élément de ℓ^1 et que ℓ^1 n'est pas réflexif.
Solution. Puisque c_0 est un sous-espace vectoriel fermé dans ℓ^∞ et $c_0 \neq \ell^\infty$, d'après le corollaire 7.7.2, il existe $f \in (\ell^\infty)^*$ telle que $f \neq 0$ et la restriction de f à c_0 soit nulle. Si f provenait d'un élément de ℓ^1, d'après la proposition 7.4.3, on aurait $f = 0$, ce qui est impossible. Par conséquent, ℓ^1 est inclus strictement dans $(\ell^\infty)^*$. Donc ℓ^1 n'est pas réflexif.

Exercice 7.37. Soient $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et A, B des sous-ensembles convexes disjoints non vides de E.

1. Montrer que si A et B sont ouverts ils peuvent être séparés strictement par un hyperplan affine fermé.
2. On suppose $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$. Montrer que A et B peuvent être séparés par un hyperplan affine fermé.

Solution. 1. D'après le théorème de Hahn-Banach 7.8.1, il existe $f \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$, on ait $f(a) < \alpha \leq f(b)$. Supposons qu'il existe $b_0 \in B$ tel que $f(b_0) = \alpha$. Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 1$. Comme B est un ouvert de E, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $b_0 - \varepsilon x \in B$. D'où on a $f(b_0 - \varepsilon x) = \alpha - \varepsilon < \alpha$, ce qui est impossible. Donc, pour tout $b \in B$, on a $\alpha < f(b)$.

2. On suppose que $\overset{\circ}{A}$ est non vide. On a déjà vu, exercice 6.11, que dans ce cas, on a $\overline{A} = \overline{\overset{\circ}{A}}$. Comme $\overset{\circ}{A}$ est ouvert convexe et $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, il existe $f \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in \overset{\circ}{A}$ et pour tout $b \in B$, on ait $f(a) < \alpha \leq f(b)$. D'où pour pour tout $a \in \overline{\overset{\circ}{A}}$ et pour tout $b \in B$, on a $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$. Par conséquent, pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$, on a $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$.

Exercice 7.38. Donner un exemple dans $\mathbb{R}^2$ de deux convexes fermés disjoints non vides qui ne peuvent pas être séparés strictement par un hyperplan affine fermé.

Solution. Soient $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \in \mathbb{R} \text{ et } y \leq 0\big\}$ et $B = \big\{(x, y) \ ; \ x \in \mathbb{R} \text{ et } y \geq e^x\big\}$. Alors A et B sont des convexes fermés disjoints non vides de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire (continue) non nulle sur $\mathbb{R}^2$. Alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on ait $f(x, y) = \alpha x + \beta y$. Supposons que A et B peuvent être séparés strictement par un hyperplan affine fermé, alors il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \leq 0$, on ait $\alpha x + \beta y < \gamma < \alpha x + \beta e^x$. En prenant $x = y = 0$, on obtient $0 < \gamma$. Si $\alpha \geq 0$, alors on a $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha x + \beta e^x \leq 0$, d'où $\gamma \leq 0$, ce qui est impossible. Si $\alpha < 0$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha x = +\infty$, d'où $\gamma = +\infty$, ce qui est impossible. Dans tous les cas, on arrive à une contradiction. Donc A et B ne peuvent pas être séparés strictement par un hyperplan affine fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Remarque 7.11.2. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y < 0\} \cup \{(x, 0) \ ; \ 1 \leq x \leq 2\}$, alors A est un sous-ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^2$ tel que $(0, 0) \notin A$, mais A et $(0, 0)$ ne peuvent pas être séparés strictement par un hyperplan affine fermé.

Exercice 7.39. Soient $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et A, B des sous-ensembles convexes disjoints non vides de E. On se propose de montrer que A et B peuvent être séparés par un hyperplan affine fermé. Soit C un sous-ensemble convexe non vide de E tel que $0 \notin C$.

1. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de C qui est dense dans C. Pour tout $n \geq 1$, soit $C_n = \Big\{ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i x_i \ ; \ t_1 \geq 0, \ldots, t_n \geq 0, \ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1 \Big\}$. Montrer que C_n est convexe et compact.

2. Montrer qu'il existe $f_n \in E^*$ tel que $\|f_n\| = 1$ et $f_n(x) < 0$, pour tout $x \in C_n$.

3. En déduire qu'il existe $f \in E^*$ tel que $\|f\| = 1$ et $f(x) \leq 0$, pour tout $x \in C$.

4. En déduire que A et B peuvent être séparés par un hyperplan affine fermé.

Solution. 1. Il est clair que C_n est convexe. D'après la proposition 6.1.3, on a $C_n \subset C$. Puisque $[0,\, 1]^n$ est compact et l'application

$$\begin{array}{ccc} [0,\, 1]^n & \longrightarrow & E \\ (t_1, \ldots, t_n) & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i x_i \end{array}$$

est continue, alors C_n est compact.
2. D'après le théorème 7.8.1, pour tout $n \geq 1$, il existe $f_n \in E^*$ tel que pour tout $x \in C_n$, on ait $f_n(x) < f_n(0) = 0$. De plus, on peut supposer $\|f_n\| = 1$.
3. Comme E^* est de dimension finie, alors la sphère unité dans $(E^*, \|\ \|)$ est compacte. Donc, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$, qui converge vers $f \in E^*$, d'où on a $\|f\| = 1$. Soit $x \in \bigcup\limits_{n\geq 1} C_n$, alors il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $p \geq N$, on ait $x \in C_p$. Alors pour tout $k \geq N$, on a $n_k \geq k \geq N$, d'où $x \in C_{n_k}$ et alors on a $f_{n_k}(x) < 0$. Comme on a $f(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} f_{n_k}(x)$, alors $f(x) \leq 0$. Comme $\bigcup\limits_{n\geq 1} C_n$ est dense dans C et f est continue, on en déduit que pour tout $x \in C$, on a $f(x) \leq 0$.
4. Soit $C = A - B$, alors C est un convexe non vide de E tel que $0 \notin C$. D'après 3, il existe $f \in E^*$ tel que $f \neq 0$ et pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$, on ait $f(a-b) \leq 0$. Soit $\alpha = \inf\limits_{b\in B} f(b)$, alors $\alpha \in \mathbb{R}$ et on a $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$, pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$.

Exercice 7.40.

1. Soient $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et A, B des sous-ensembles convexes de E tels que $A - B$ soit dense dans E. Montrer que A et B ne peuvent pas être séparés par un hyperplan affine fermé.

2. Soit $E = \big\{x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^1\ ;\ x_n \in \mathbb{R},\ \text{pour tout } n \geq 0\big\}$ alors E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On munit E de la norme $\|\ \|_1$. Soient A et B les parties de E définies par $A = \big\{x = (x_n)_{n\geq 0} \in E\ ;\ x_n = 0,\ \text{pour tout } n \geq 1\big\}$, $B = \big\{x = (x_n)_{n\geq 0} \in E\ ;\ |n^3 x_n + n| \leq x_0,\ \text{pour tout } n \geq 1\big\}$. Montrer que A et B sont des convexes fermés disjoints qui ne peuvent pas être séparés par un hyperplan affine fermé. (On pourra approcher $x \in E$ par $a - b$ où $a \in A$, $b \in B$ et $b_n = -\frac{1}{n^2}$ à partir d'un certain rang).

Solution. 1. Supposons le contraire et soient $f \in E^*$, non nulle, et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$, on ait $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$. Alors pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$, on a $f(a-b) \leq 0$. Comme $A - B$ est dense dans E, alors $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in E$, d'où $f = 0$, ce qui est impossible.
2. On a $A = \mathbb{R}\mathbf{e}_0$, donc A est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de dimension 1 de E. Par conséquent, A est convexe et fermé dans E. Il est clair que l'on a $A \cap B = \emptyset$.
Vérifions que B est fermé dans E. Soit $(\xi_k)_{k\geq 0}$ une suite dans B, qui converge vers un élément $x = (x_n)_{n\geq 0} \in E$. Pour tout $k \geq 0$, on a $\xi_k = (x_{k,n})_{n\geq 0} \in E$. Alors, pour tout $n \geq 0$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{k,n} = x_n$. Or pour tout $k \geq 0$ et pour tout $n \geq 1$, on a $|n^3 x_{k,n} + n| \leq x_{k,0}$. On fait tendre k vers l'infini, on obtient $|n^3 x_n + n| \leq x_0$, pour tout $n \geq 1$, donc $x \in B$. Par conséquent, B est fermé dans E.
Vérifions que B est convexe. Soient $x = (x_n)_{n\geq 0}, y = (y_n)_{n\geq 0} \in B$ et $t \in]0, 1[$. On a $tx + (1-t)y = (tx_n + (1-t)y_n)_{n\geq 0}$. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} |n^3(tx_n + (1-t)y_n) + n| &= |n^3(tx_n + (1-t)y_n) + tn + (1-t)n| \\ &= |t(n^3x_n + n) + (1-t)(n^3y_n + n)| \\ &\leq t|n^3x_n + n| + (1-t)|n^3y_n + n| \leq tx_0 + (1-t)y_0\,. \end{aligned}$$

Donc on a $tx+(1-t)y \in B$. Par conséquent, B est convexe.
Pour montrer que A et B ne peuvent pas être séparés par un hyperplan affine fermé, il suffit de montrer que $A-B$ est dense dans E. Soient $x=(x_n)_{n\geq 0} \in E$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Soient $b_0 = \max\big\{1+|-n^3 x_n + n| \ ; \ 1 \leq n \leq N\big\}$, $b_1 = -x_1, \dots, b_N = -x_N$ et $b_n = -\frac{1}{n^2}$, pour tout $n \geq N+1$. Soient $a_0 = b_0 + x_0$ et $a_n = 0$, pour tout $n \geq 1$. Alors $a \in A$, $b \in B$ et on a :

$$\|a-b-x\|_1 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \tfrac{1}{n^2} < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,.$$

Donc $A-B$ est dense dans E.

Exercice 7.41. Soit N un hyperplan fermé d'un espace de Banach $(E, \|\ \|)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une projection continue $P : E \longrightarrow E$ telle que $\|P\| \leq 2+\varepsilon$ et $\mathrm{Im}(P) = N$.
Solution. Il existe $f \in E^*$ telle que $\|f\| = 1$ et $\ker(f) = N$, et il existe $a \in E$ tel que $f(a) = 1$ et $\|a\| \leq 1+\varepsilon$, voir propositions 6.3.6 et 6.4.4. Pour tout $x \in E$, on pose $P(x) = x - f(x)a$. Alors P est une projection continue de E dans E telle que $\|P\| \leq 2+\varepsilon$ et $\mathrm{Im}(P) = N$.

Exercice 7.42. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que F admet un supplémentaire topologique.
Solution. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de F. Pour tout $x \in F$, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \, e_i$. On pose $\varphi_i(x) = \lambda_i$, alors φ_i est une forme linéaire sur F. Puisque F est de dimension finie, les φ_i sont continues. Par le théorème de Hahn-Banach, on prolonge chaque φ_i en une forme linéaire continue $\widetilde{\varphi}_i$ sur E. On pose $G = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker(\widetilde{\varphi}_i)$. Alors G est un sous-espace vectoriel fermé de E. Pour montrer que G est un supplémentaire topologique de F, d'après la proposition 7.3.2, il suffit de montrer que G est un supplémentaire algébrique de F. Soit $x \in F \cap G$, alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \, e_i$, et pour tout i, on a $0 = \widetilde{\varphi}_i(x) = \varphi_i(x) = \lambda_i$, d'où $x = 0$. Donc on a $F \cap G = \{0\}$. Soit $x \in E$, alors on a $x = x - \sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{\varphi}_i(x)\, e_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{\varphi}_i(x)\, e_i$, avec $\sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{\varphi}_i(x)\, e_i \in F$ et $x - \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{\varphi}_i(x)\, e_i \in G$. Donc on a $E = F + G$. Par conséquent, E est la somme directe algébrique des F et G.

Exercice 7.43. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace de Banach $(E, \|\ \|)$.

1. Montrer que si F est fermé dans E et de codimension finie, alors tout supplémentaire algébrique de F est aussi un supplémentaire topologique.
2. Soit N un sous-espace vectoriel de dimension finie de E^*. Montrer que ${}^{\perp}N$ est un sous-espace vectoriel de codimension finie de E.

Solution. 1. Puisque F est de codimension finie, alors tout supplémentaire algébrique de F est de dimension finie, donc il est fermé dans E. Par conséquent, tout supplémentaire algébrique de F est aussi un supplémentaire topologique, voir proposition 7.3.2.
2. Soit $\{f_1, \cdots, f_n\}$ une base de N et considérons l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big) \end{array}$$

Si φ n'est pas surjective, alors il existe une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{K}^n$ qui s'annule sur $\varphi(E)$, donc il existe un élément non nul $(a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{K}^n$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) = 0$, d'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i f_i = 0$, ce qui est impossible car la famille $\{f_1, \cdots, f_n\}$ est libre. Donc φ est surjective. Par conséquent, il existe $e_1, \cdots, e_n \in E$ tels que pour tout i, j, on ait $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. On en déduit que les $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont linéairement indépendants. On vérifie facilement que l'espace vectoriel engendré par les $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un supplémentaire algébrique de ${}^{\perp}N$.

Exercice 7.44. Montrer qu'il n'existe aucun $T \in \mathscr{L}(\ell^2; \ell^1)$ surjective.
Solution. S'il existe $T \in \mathscr{L}(\ell^2; \ell^1)$ surjective, d'après les propositions 7.1.4 et 7.10.6, alors $T^* : {\ell^1}^* \longrightarrow {\ell^2}^*$ est un homéomorphisme sur son image. Or on a ${\ell^1}^* = \ell^\infty$, ${\ell^2}^* = \ell^2$ et ℓ^2 est séparable, ceci implique que ℓ^∞ est séparable, ce qui est impossible. Donc il n'existe aucun $T \in \mathscr{L}(\ell^2; \ell^1)$ surjective.

Exercice 7.45. Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire continue bijective de c_0 sur ℓ^1.
Solution. Supposons qu'il existe une application linéaire continue bijective $T : c_0 \longrightarrow \ell^1$. Alors l'adjoint $T^* : (\ell^1)^* = \ell^\infty \longrightarrow (c_0)^* = \ell^1$ est linéaire continue et bijective, ce qui est impossible car ℓ^1 est séparable mais ℓ^∞ ne l'est pas.

Pour plus d'exercices, voir le supplément associé à ce livre.

Chapitre 8

ESPACES DE HILBERT

On s'intéresse dans ce chapitre aux $\mathbb{K}$-espaces de Banach, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dont la norme est définie par un produit scalaire. Ceci généralise immédiatement le cas de l'espace de dimension finie $\mathbb{K}^n$, muni de la norme $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

8.1 Formes sesquilinéaires et formes hermitiennes

Définition 8.1.1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite **semi-linéaire** ou **antilinéaire** lorsque, pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)\,.$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, semi-linéaire coïncide avec linéaire. Si $F = \mathbb{K}$, f est dite **forme semi-linéaire**.

Définition 8.1.2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **forme sesquilinéaire** sur E est une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$, vérifiant, pour tout $x, x', y, y' \in E$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, les propriétés suivantes :

i) $\varphi(x + x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y) \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)\,;$

ii) $\varphi(x, y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y') \quad \text{et} \quad \varphi(x, \mu y) = \overline{\mu}\varphi(x, y).$

Autrement dit, une forme sesquilinéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :

i) pour tout $y \in E$, l'application $x \longmapsto \varphi(x, y)$ soit linéaire ;

ii) pour tout $x \in E$, l'application $y \longmapsto \varphi(x, y)$ soit semi-linéaire.

Définition 8.1.3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **forme hermitienne** sur E est une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que, pour tout $x, x', y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on ait :

$$\varphi(x + x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y) \quad , \quad \varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y) \quad \text{et} \quad \varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}\,.$$

Remarque 8.1.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Toute forme hermitienne sur E est aussi une forme sesquilinéaire sur E.
2. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme hermitienne sur E est tout simplement une forme bilinéaire symétrique sur E.
3. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme sesquilinéaire sur E est simplement une forme bilinéaire sur E.
4. Si φ est une forme sesquilinéaire sur E, alors pour tout $x, y \in E$, on a $\varphi(x, 0) = \varphi(0, y) = 0$.

On vérifie facilement la proposition suivante :

Proposition 8.1.1 (identité de polarisation). *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x, y \in E$.*

1. Si $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire symétrique sur E, on a :

$$\varphi(x,y) = \tfrac{1}{4}\big[\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y)\big] .$$

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et si $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire sur E, on a :

$$\varphi(x,y) = \tfrac{1}{4}\big[\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) + i\varphi(x+iy, x+iy) - i\varphi(x-iy, x-iy)\big] .$$

La proposition précédente nous dit que si φ est une forme bilinéaire symétrique ou une forme sesquilinéaire sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, pour connaître φ, il suffit de connaître $\varphi(x, x)$ pour tout x.

Corollaire 8.1.1. *Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) φ est une forme hermitienne sur E.

(ii) φ est une forme sesquilinéaire sur E, et pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$.

Démonstration. L'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$ est triviale. Montrons l'implication $(ii) \Longrightarrow (i)$. Soit $\psi(x, y) = \varphi(x, y) - \overline{\varphi(y, x)}$. Alors ψ est une forme sesquilinéaire sur E et pour tout $x \in E$, on a $\psi(x, x) = 0$. Par l'identité de polarisation, $\psi = 0$, donc pour tout $x, y \in E$, on a $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$. Par conséquent, φ est une forme hermitienne sur E. ■

Définition 8.1.4. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme hermitienne sur E.

1. Le **noyau** de φ est l'ensemble $\ker(\varphi) = \{x \in E \ ; \ \varphi(x, y) = 0\,, \text{ pour tout } y \in E\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E.
2. On dit que φ est **non dégénérée** lorsque $\ker(\varphi) = \{0\}$.
3. On dit que φ est **positive** si $\varphi(x, x) \geq 0$ quel que soit $x \in E$.
4. On dit que φ est **définie positive** si φ est positive et non dégénérée.

Théorème 8.1.1 (inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit φ une forme hermitienne positive sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors pour tout $x, y \in E$, on a :*

$$|\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\,\varphi(y,y)\,.$$

On en déduit que φ est définie positive si et seulement si pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a $\varphi(x,x) > 0$.

Démonstration. Soient $x, y \in E$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$0 \leq \varphi(x+\lambda y, x+\lambda y) = \varphi(x,x) + \lambda\overline{\lambda}\varphi(y,y) + \lambda\varphi(y,x) + \overline{\lambda}\varphi(x,y)\,.$$

En prenant $\lambda = t\varphi(x,y)$, avec $t \in \mathbb{R}$, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'inégalité

$$0 \leq \varphi(x,x) + t^2|\varphi(x,y)|^2\varphi(y,y) + 2t|\varphi(x,y)|^2\,.$$

Si $\varphi(y,y) = 0$, en faisant tendre t vers $-\infty$, on obtient que $|\varphi(x,y)| = 0$, donc on a $|\varphi(x,y)|^2 = \varphi(x,x)\varphi(y,y)$. Si $\varphi(y,y) \neq 0$, on prend $t = \dfrac{-1}{\varphi(y,y)}$, on obtient alors $0 \leq \varphi(x,x) + \dfrac{|\varphi(x,y)|^2}{\varphi(y,y)} - 2\dfrac{|\varphi(x,y)|^2}{\varphi(y,y)}$, d'où on a $|\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\,\varphi(y,y)$. ■

Proposition 8.1.2. *Soit φ une forme hermitienne positive sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors l'application $x \longmapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$ est une semi-norme sur E. Si φ est définie positive, alors $x \longmapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$ est une norme sur E.*

Démonstration. Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\sqrt{\varphi(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\varphi(x,x)} = |\lambda|\sqrt{\varphi(x,x)}\,.$$

Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y, x+y) &= \varphi(x,x) + \varphi(y,y) + 2\mathrm{Re}(\varphi(x,y)) \\
&\leq \varphi(x,x) + \varphi(y,y) + 2|\varphi(x,y)| \\
&\leq \varphi(x,x) + \varphi(y,y) + 2\sqrt{\varphi(x,x)}\,\sqrt{\varphi(y,y)} \\
&= \left(\sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)}\right)^2.
\end{aligned}$$

D'où on a $\sqrt{\varphi(x+y,x+y)} \leq \sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)}$. Donc l'application $x \longmapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$ est une semi-norme sur E. Si φ est définie positive, alors on a $\sqrt{\varphi(x,x)} = 0 \iff x = 0$, donc $x \longmapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$ est bien une norme sur E. ■

8.2 Produits scalaires et espaces de Hilbert

Définition 8.2.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un **produit scalaire** sur E est une forme hermitienne définie positive sur E. Autrement dit, un produit scalaire sur E est une application :

$$\begin{array}{cccc}
\langle\ ,\ \rangle : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\
 & (x,y) & \longmapsto & \langle x, y\rangle
\end{array}$$

vérifiant, pour tous $x, x', y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les propriétés suivantes :

1. $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$ et $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.
2. $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$.
3. $\langle x, x\rangle \geq 0$.
4. $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$.

Le nombre $\langle x, y\rangle$ est appelé le produit scalaire des x et y.

D'après la proposition précédente, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle$ est donc un espace normé pour la norme définie par $x \longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, y\rangle}$ et, naturellement, un tel espace est toujours considéré comme un espace métrique pour la distance correspondante $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}$.

Définition 8.2.2. 1. Un **espace préhilbertien** est un couple $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. Un **espace euclidien** est un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien de dimension finie.
3. Un **espace hermitien** est un $\mathbb{C}$-espace préhilbertien de dimension finie.
4. Un **espace de Hilbert** ou **espace hilbertien** est un espace préhilbertien qui est aussi de Banach pour la norme associée au produit scalaire.

Remarque 8.2.1. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $y, z \in E$ tels que pour tout $x \in E$, on ait $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$, alors on a $y = z$. En effet, pour tout $x \in E$, on a $\langle x, y - z\rangle = 0$. En prenant $x = y - z$, on obtient $\|y - z\|^2 = 0$, d'où $y = z$.

Exemple 8.2.1. 1. Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ est défini par :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

2. Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^n$ est défini par :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.

3. Sur $\mathbb{K}^n$, tout produit scalaire définit une structure d'espace de Hilbert.
4. Rappelons que ℓ^2 est l'espace vectoriel des suites de scalaires $(x_n)_{n\geq 0}$ pour lesquelles la série $\sum_{n\geq 0} |x_n|^2$ converge. Alors ℓ^2 est un espace de Banach pour la norme $\|\ \|_2$ définie par : pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, on a $\|x\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Soient

$x = (x_n)_{n\geq 0}$, $y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$. Pour tout $n \geq 0$, on a $2|x_n\overline{y_n}| \leq |x_n|^2 + |y_n|^2$, donc la série de terme général $x_n\overline{y_n}$ est convergente dans $\mathbb{K}$. On pose :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\overline{y_n}\,.$$

Alors l'application $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur ℓ^2 et pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, on a $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Donc $(\ell^2, \|\ \|_2)$ est un espace de Hilbert.

5. Soit I un ensemble non vide quelconque. Rappelons, voir exercice 6.37, que $\ell^2(I)$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des familles $(x_i)_{i\in I}$ dans $\mathbb{K}$ telles que la famille de nombres réels positifs $\left(|x_i|^2\right)_{i\in I}$ soit sommable. Alors $\ell^2(I)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\ \|_2$ définie par : pour tout $x = (x_i)_{i\in I} \in \ell^2(I)$, on a :

$$\|x\|_2 = \Big(\sum_{i\in I} |x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Soient $x = (x_i)_{i\in I}$, $y = (y_i)_{i\in I} \in \ell^2(I)$. Pour tout $i \in I$, on a $2|x_i\overline{y_i}| \leq |x_i|^2 + |y_i|^2$, donc la famille $(x_i\overline{y_i})_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{K}$. On pose :

$$\langle (x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\rangle = \sum_{i\in I} x_i\overline{y_i}\,.$$

Alors l'application $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\ell^2(I)$ et pour tout $x = (x_i)_{i\in I} \in \ell^2(I)$, on a $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Donc $(\ell^2(I), \|\ \|_2)$ est un espace de Hilbert.

6. Soit $C([0,\,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,\,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour tout $f, g \in C([0,\,1])$, on pose :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt\,.$$

On définit ainsi un produit scalaire sur $C([0,\,1])$. Muni de ce produit scalaire, $C([0,\,1])$ est un espace préhilbertien, mais non un espace de Hilbert, voir exercice 2.32.

7. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. La restriction du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ à $F \times F$ confère à F une structure d'espace préhilbertien. De plus, si E est un espace de Hilbert, alors F est un espace de Hilbert si et seulement si F est fermé dans E.

8. Si $(E_1, \langle\ ,\ \rangle_1), \ldots, (E_n, \langle\ ,\ \rangle_n)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces préhilbertiens, on définit sur l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ le produit scalaire

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x_j, y_j\rangle_j$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in E$. Muni de ce produit scalaire, E est dit un espace de Hilbert si et seulement si pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $(E_j, \langle\ ,\ \rangle_j)$ est un espace de Hilbert. Dans ce cas, on dit que E est l'**espace de Hilbert produit** des espaces de Hilbert $(E_j, \langle\ ,\ \rangle_j)$.

Remarque 8.2.2. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien et $E_{\mathbb{C}}$ le complexifié de l'espace vectoriel réel E. Rappelons que $E_{\mathbb{C}}$ est obtenu en munissant le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E \times E$ de la structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel donnée par $(a+ib)(x,y) = (ax-by, ay+bx)$ (pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $x, y \in E$). On plonge E dans $E_{\mathbb{C}}$ par l'application $u : x \longmapsto (x, 0)$, de sorte que (x, y) s'écrit $u(x) + iu(y)$. Pour tout (x, y), $(x', y') \in E_{\mathbb{C}}$, on pose :

$$\langle (x,y), (x',y') \rangle_c = \langle x, x' \rangle - i\langle x, y' \rangle + i\langle y, x' \rangle + \langle y, y' \rangle\,.$$

Alors $\langle\ ,\ \rangle_c$ est un produit scalaire sur $E_{\mathbb{C}}$ qui en fasse un $\mathbb{C}$-espace préhilbertien et tel que pour tout x, $y \in E$, on ait $\langle u(x), u(y) \rangle_c = \langle x, y \rangle$. Autrement dit, $E_{\mathbb{C}}$ a une structure de $\mathbb{C}$-espace préhilbertien dont la restriction à E induit sa structure de $\mathbb{R}$-espace préhilbertien.

Proposition 8.2.1. *Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien. Pour tout $x, y \in E$, on a :*

1. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2$.
2. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ (**inégalité de Cauchy-Schwarz**).

   L'égalité est réalisée si et seulement si x et y ne sont pas linéairement indépendants.
3. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$ (**identité du parallélogramme**).
4. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$.
5. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big)$.

Démonstration. 1. Soient $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
&= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2\,.
\end{aligned}$$

2. On a déjà montré l'inégalité de Cauchy-Schwarz, théorème 8.1.1, il reste à montrer que l'égalité est réalisée si et seulement si x et y ne sont pas linéairement indépendants. Supposons d'abord que x et y ne sont pas linéairement indépendants. Comme l'égalité est symétrique en x et y, on peut supposer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda y$.
Alors on a :

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle y, y \rangle = |\lambda|^2\,\|y\|^2$$

et

$$|\langle x, y \rangle|^2 = |\lambda\langle y, y \rangle|^2 = |\lambda|^2\,\|y\|^4 = |\lambda|^2\,\|y\|^2\,\|y\|^2 = \|x\|^2\,\|y\|^2\,,$$

d'où $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\,\|y\|$.
Réciproquement, supposons que l'on a $|\langle x, y \rangle| = \|x\|\,\|y\|$. Si $y = 0$, alors x et y ne sont

pas linéairement indépendants. Supposons donc $y \neq 0$, alors on a $\|y\| \neq 0$. En s'inspirant du théorème 8.1.1, on calcule $\left\|x - \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2} y\right\|^2$, on trouve :

$$\left\|x - \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2} y\right\|^2 = \frac{\|x\|^2 \|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} = 0\,.$$

Par conséquent, on a $x = \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2} y$. Donc x et y ne sont pas linéairement indépendants.

3. Soient $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)\,. \end{aligned}$$

Les propriétés 4 et 5 sont des cas particuliers de la proposition 8.1.1. ■

Proposition 8.2.2. *Soit* $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace préhilbertien, muni de la norme associée au produit scalaire, alors* $(x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle$ *est une application continue de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{K}$.

Démonstration. Soit $(x_0, y_0) \in E \times E$. Pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a :

$$\langle x, y\rangle = \langle x_0 + x - x_0, y_0 + y - y_0\rangle = \langle x_0, y_0\rangle + \langle x_0, y - y_0\rangle + \langle x - x_0, y_0\rangle + \langle x - x_0, y - y_0\rangle\,.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\big|\langle x, y\rangle - \langle x_0, y_0\rangle\big| \leq \|x_0\|\,\|y - y_0\| + \|y_0\|\,\|x - x_0\| + \|x - x_0\|\,\|y - y_0\|\,.$$

Par conséquent, l'application $(x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle$ est continue en (x_0, y_0). ■

Proposition 8.2.3. *Le complété d'un espace préhilbertien est un espace de Hilbert.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 8 du supplément.

Remarque 8.2.3. Soit φ une forme hermitienne positive sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$F = \ker(\varphi) = \big\{x \in E\ ;\ \varphi(x, x) = 0\big\} = \big\{x \in E\ ;\ \varphi(x, y) = 0\,,\ \text{pour tout } y \in E\big\}$$

est un sous-espace vectoriel de E. Voir également propositions 7.5.1 et 8.1.2. Soit $\pi : E \longrightarrow E/F$ l'application quotient. Pour tout $x, y \in E$ et pour tout $a, b \in F$, on a :

$$\varphi(x + a, y + b) = \varphi(x, y) + \varphi(x, b) + \varphi(a, y) + \varphi(a, b) = \varphi(x, y)\,.$$

Par conséquent, si pour tout $x, y \in E$, on pose $\langle \pi(x), \pi(y)\rangle = \varphi(x, y)$, alors $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel quotient E/F, et donc $(E/F, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace préhilbertien, appelé **l'espace préhilbertien séparé** de l'espace vectoriel E muni de la forme hermitienne positive φ. Le complété de l'espace préhilbertien $(E/F, \langle\ ,\ \rangle)$ est appelé **l'espace de Hilbert complété séparé** de l'espace vectoriel E muni de la forme hermitienne positive φ.

8.3 Orthogonalité et théorème de projection

Définition 8.3.1. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien.

1. On dit que deux éléments x et y de E sont **orthogonaux** si l'on a $\langle x, y\rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

2. On dit que deux parties non vides A et B de E sont **orthogonales** si pour tout $x \in A$ et pour tout $y \in B$, on a $\langle x, y\rangle = 0$. Dans ce cas, on note $A \perp B$.

3. Si A est une partie non vide de E, on appelle **orthogonal** de A et l'on note $A^{\perp}$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A, *i.e.*

$$A^{\perp} = \big\{x \in E\ ;\ \langle x, a\rangle = 0\,,\ \text{pour tout } a \in A\big\}\,.$$

Proposition 8.3.1 (théorème de Pythagore). *Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien. Si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille finie d'éléments deux à deux orthogonaux dans E, alors on a :*

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i\Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\,.$$

Démonstration. On a :

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i\Big\|^2 = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{j=1}^{n} x_j\Big\rangle = \sum_{i=1}^{n}\Big\langle x_i, \sum_{j=1}^{n} x_j\Big\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle x_i, x_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle x_i, x_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\,.$$

■

Proposition 8.3.2. *Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$.*

1. *$A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de E, et on a $A \cap A^{\perp} \subset \{0\}$.*

2. *On a $\overline{A} \subset (A^{\perp})^{\perp}$.*

3. *On a $\overline{A}^{\perp} = A^{\perp} = Vect(A)^{\perp}$.*

4. *Si A est dense dans E, alors on a $A^{\perp} = \{0\}$.*

5. *Si B est une partie non vide de E, on a $(A \cap B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$. Si $A \subset B$, alors on a $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.*

Démonstration. 1. Soient $a \in A$, $x, y \in A^{\perp}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $\langle x + \lambda y, a\rangle = \langle x, a\rangle + \lambda\langle y, a\rangle = 0$, donc $x + \lambda y \in A^{\perp}$. Par conséquent, $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E. Montrons que $A^{\perp}$ est fermé dans E. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $A^{\perp}$ qui converge vers un élément $z \in E$. D'après la proposition 8.2.2, l'application $(x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle$ est continue, donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle x_n, a\rangle = \langle z, a\rangle$. Or pour tout $n \geq 0$, on a $\langle x_n, a\rangle = 0$, d'où $\langle z, a\rangle = 0$. Donc on a $z \in A^{\perp}$. Par conséquent, $A^{\perp}$ est fermé dans E. Soit $x \in A \cap A^{\perp}$, alors on a $\langle x, x\rangle = 0$, d'où $x = 0$. Donc on a $A \cap A^{\perp} \subset \{0\}$.
2. Soit $x \in A$. Pour tout $y \in A^{\perp}$, on a $\langle x, y\rangle = 0$, donc $x \in (A^{\perp})^{\perp}$. Par conséquent, on a $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$. Comme $(A^{\perp})^{\perp}$ est fermé dans E, alors on a $\overline{A} \subset (A^{\perp})^{\perp}$.

3. Puisque l'on a $A \subset \mathrm{Vect}(A)$, alors $\mathrm{Vect}(A)^{\perp} \subset A^{\perp}$. Réciproquement, soit $x \in A^{\perp}$, alors pour tout $a \in A$, on a $\langle a, x\rangle = 0$. Soit $y \in \mathrm{Vect}(A)$, alors il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$, d'où on a $\langle y, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle a_i, x\rangle = 0$. Donc on a $x \in \mathrm{Vect}(A)^{\perp}$. Par conséquent, on a $A^{\perp} = \mathrm{Vect}(A)^{\perp}$. On a $A \subset \overline{A}$, alors $\overline{A}^{\perp} \subset A^{\perp}$. Réciproquement, soit $x \in A^{\perp}$. Soit $y \in \overline{A}$, alors il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans A telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = y$. Donc on a $\langle y, x\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle a_n, x\rangle = 0$, d'où $x \in \overline{A}^{\perp}$. Par conséquent, on a $A^{\perp} = \overline{A}^{\perp}$.
4. Soit $x \in A^{\perp}$. Comme A est dense dans E, il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans A telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = x$. Alors on a $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle a_n, x\rangle = 0$, d'où $x = 0$. Par conséquent, on a $A^{\perp} = \{0\}$.
La propriété 5 est triviale. ∎

Définition 8.3.2. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments non nuls de E.

1. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une **famille orthogonale** ou **système orthogonal** si les x_i sont deux à deux orthogonaux. Autrement dit, si pour tout $i, j \in I$ tels que $i \neq j$, on ait $\langle x_i, x_j\rangle = 0$.
2. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une **famille orthonormale** ou **système orthonormal** ou encore **système orthonormé** si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille orthogonale et si de plus, pour tout $i \in I$, on a $\langle x_i, x_i\rangle = 1$.

Remarque 8.3.1. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.

1. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est orthonormale si pour tout $i, j \in I$, on a :
$$\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j\,, \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j\,. \end{cases}$$
2. Il est immédiat que si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille orthogonale, alors la famille $\left(\frac{x_i}{\|x_i\|}\right)_{i\in I}$ est orthonormale.
3. Toute famille orthogonale est algébriquement libre. En effet, soient J une partie finie de I et $(\lambda_j)_{j\in J}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que $\sum_{j\in J} \lambda_j x_j = 0$. D'après le théorème de Pythagore, on a $0 = \left\| \sum_{j\in J} \lambda_j x_j \right\|^2 = \sum_{j\in J} |\lambda_j|^2 \|x_j\|^2$, donc on a $\lambda_j = 0$, pour tout $j \in J$.

Proposition 8.3.3. *Soit $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert.*

1. *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale dans $(H, \langle\ ,\ \rangle)$. Alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable dans H si et seulement si la famille $\left(\|x_i\|^2\right)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}_+$. Dans ce cas, on a :*
$$\left\| \sum_{i\in I} x_i \right\|^2 = \sum_{i\in I} \|x_i\|^2\,.$$

2. *Soient $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale dans $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ et $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments dans $\mathbb{K}$. Alors la famille $(\lambda_i e_i)_{i\in I}$ est sommable dans H si et seulement si la famille $\left(|\lambda_i|^2\right)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}_+$. Dans ce cas, on a :*
$$\Big\|\sum_{i\in I}\lambda_i e_i\Big\|^2 = \sum_{i\in I}|\lambda_i|^2 .$$
En plus, si on note $x = \sum_{i\in I}\lambda_i e_i$, alors pour tout $i\in I$, on a $\langle x, e_i\rangle = \lambda_i$.

Démonstration. 1. Puisque H est un espace de Banach, d'après la proposition 6.7.2, alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable dans H si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy. Soit J une partie finie de I. Puisque $(x_i)_{i\in I}$ est une famille orthogonale, d'après le théorème de Pythagore, on a $\Big\|\sum_{i\in J}x_i\Big\|^2 = \sum_{i\in J}\|x_i\|^2$. Donc la famille $(x_i)_{i\in I}$ vérifie le critère de Cauchy si et seulement si la famille $\left(\|x_i\|^2\right)_{i\in I}$ vérifie le critère de Cauchy. Par conséquent, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable dans H si et seulement si la famille $\left(\|x_i\|^2\right)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}_+$. Supposons que $(x_i)_{i\in I}$ est sommable dans H et soit $x = \sum_{i\in I}x_i$. D'après la proposition 6.7.3, il existe une suite croissante $(I_n)_{n\geq 1}$ de parties finies de I telles que $x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i\in I_n}x_i$ et $\sum_{i\in I}\|x_i\|^2 = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i\in I_n}\|x_i\|^2$. D'après le théorème de Pythagore, pour tout $n\geq 1$, on a $\Big\|\sum_{i\in I_n}x_i\Big\|^2 = \sum_{i\in I_n}\|x_i\|^2$, on en déduit que l'on a $\Big\|\sum_{i\in I}x_i\Big\|^2 = \sum_{i\in I}\|x_i\|^2$.
2. Pour tout $i\in I$, on pose $x_i = \lambda_i e_i$, alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est orthogonale dans H. Pour avoir le résultat, il suffit d'appliquer 1. Supposons maintenant que $(\lambda_i e_i)_{i\in I}$ est sommable dans H, et soit $x = \sum_{i\in I}\lambda_i e_i$. Soit $i\in I$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'application $y\longmapsto\langle y, e_i\rangle$ est une forme linéaire continue de E dans $\mathbb{K}$. Il résulte alors de la proposition 6.7.6 que pour tout $i\in I$, on a $\langle x, e_i\rangle = \lambda_i$. ■

Proposition 8.3.4. *Soit $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert.*

1. *Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de vecteurs deux à deux orthogonaux dans H. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   - *(i) La famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable dans H.*
   - *(ii) La série $\sum x_n$ est convergente dans H.*
   - *(iii) La série $\sum\|x_n\|^2$ est convergente.*
   - *(iv) La famille $\left(\|x_n\|^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.*

   Dans ce cas, on a $\Big\|\sum_{n\in\mathbb{N}}x_n\Big\|^2 = \Big\|\sum_{n=0}^{\infty}x_n\Big\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\|x_n\|^2$.

2. *Soient* $(e_n)_{n\geq 0}$ *une suite orthonormale dans* $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *et* $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ *une suite d'éléments dans* $\mathbb{K}$. *Alors la série* $\sum \lambda_n e_n$ *est convergente dans* H *si et seulement si la série* $\sum |\lambda_n|^2$ *est convergente dans* $\mathbb{R}_+$. *Dans ce cas, on a :*

$$\Big\| \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n e_n \Big\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_n|^2 .$$

En plus, si on note $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n e_n$, *alors pour tout* $n \geq 0$, *on a* $\langle x, e_n\rangle = \lambda_n$.

Démonstration. 1. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est triviale, voir remarque 6.7.4.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii). D'après le théorème de Pythagore, pour tout $m \geq n \geq 0$, on a $\Big\| \sum_{k=n}^{m} x_k \Big\|^2 = \sum_{k=n}^{m} \|x_k\|^2$. Donc la série $\sum x_n$ vérifie le critère de Cauchy si et seulement si la série $\sum \|x_n\|^2$ vérifie le critère de Cauchy. Par conséquent, la série $\sum \|x_n\|^2$ est convergente.
L'implication (iii) $\Longrightarrow$ (iv) résulte du corollaire 6.7.1. Enfin, l'implication (iv) $\Longrightarrow$ (i) résulte de la proposition précédente.
Supposons maintenant que la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable dans H, alors on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$. D'après le théorème de Pythagore, pour tout $n \geq 0$, on a $\Big\| \sum_{k=0}^{n} x_k \Big\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|^2$.
Par conséquent, on a $\Big\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \Big\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2$.
2. On applique 1 à la suite $(\lambda_n e_n)_{n\geq 0}$. Supposons à présent que la série $\sum \lambda_n e_n$ est convergente dans H, et soit $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n e_n$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $n \geq 0$, l'application $y \longmapsto \langle y, e_n\rangle$ est une forme linéaire continue de E dans $\mathbb{K}$. Par conséquent, pour tout $n \geq 0$, on a $\langle x, e_n\rangle = \lambda_n$. ■

Proposition 8.3.5. *Soient* $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace préhilbertien et* A *une partie convexe non vide de* E. *Soient* $x \in E$ *et* $a \in A$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $\|x - a\| = d(x, A)$.

(ii) Pour tout $z \in A$, *on a* $Re(\langle x - a, z - a\rangle) \leq 0$.

Démonstration. Montrons l'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$. Soit $z \in A$. Puisque A est convexe, alors pour tout $t \in]0, 1]$, on a $(1-t)a + tz \in A$, d'où $\|x - (1-t)a - tz\|^2 \geq \|x - a\|^2$. Comme on a :

$$\begin{aligned} \|x - (1-t)a - tz\|^2 &= \|x - a - t(z-a)\|^2 \\ &= \|x - a\|^2 + t^2\|a - z\|^2 - 2t\mathrm{Re}(\langle x - a, z - a\rangle) . \end{aligned}$$

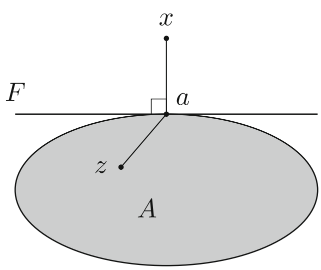
On en déduit que pour tout $t \in]0,\, 1]$, on a $2\mathrm{Re}(\langle x-a, z-a\rangle) \leq t\|a-z\|^2$. On fait tendre t vers 0, on obtient $\mathrm{Re}(\langle x-a, z-a\rangle) \leq 0$.
Montrons l'implication $(ii) \Longrightarrow (i)$. Soit $a \in A$ tel que pour tout $z \in A$, on ait $\mathrm{Re}(\langle x-a, z-a\rangle) \leq 0$. Alors on a :

$$\begin{aligned}\|x-z\|^2 &= \|x-a-(z-a)\|^2\\ &= \|x-a\|^2 + \|a-z\|^2 - 2\mathrm{Re}(\langle x-a, z-a\rangle)\\ &\geq \|x-a\|^2\,.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\|x-a\| = d(x, A)$. ■

Remarque 8.3.2. Notez que dans la proposition précédente, on n'a pas besoin de la convexité de A pour montrer l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i).

Remarque 8.3.3. Pour comprendre la signification de la propriété (ii) dans la proposition précédente, considérons E comme un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien. Pour tout $y \in E$, soit $\varphi(y) = \mathrm{Re}(\langle x-a, y\rangle)$. Alors φ est une forme $\mathbb{R}$-linéaire sur E, et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, φ est continue. Supposons que $x \notin A$. On a $\varphi(x-a) = \|x-a\|^2 > 0$, d'où $\varphi(x) > \varphi(a)$. D'autre part, pour tout $z \in A$, on a $\varphi(z-a) = \mathrm{Re}(\langle x-a, z-a\rangle) \leq 0$, d'où $\varphi(z) \leq \varphi(a)$. La propriété (ii) signifie que l'hyperplan affine fermé $F = \ker(\varphi) + a$ sépare le point x et l'ensemble convexe A, voir définition 7.8.1.



Proposition 8.3.6. *Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et A une partie non vide convexe de E. Soient $x, y \in E$ et $a, b \in A$ tels que $\|x-a\| = d(x, A)$ et $\|y-b\| = d(x, A)$. Alors on a $\|a-b\| \leq \|x-y\|$. En particulier, pour tout $z \in E$, il existe au plus un point $a \in A$ tel que $d(z, A) = \|z-a\|$.*

Démonstration. Soit $z = x - y - (a-b)$. Alors on a :

$$\|x-y\|^2 = \|z+(a-b)\|^2 = \|z\|^2 + \|a-b\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle z, a-b\rangle)\,.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\langle z, a-b\rangle) &= \mathrm{Re}(\langle x-y-(a-b), a-b\rangle)\\ &= -\mathrm{Re}(\langle x-a, b-a\rangle) - \mathrm{Re}(\langle y-b, a-b\rangle) \geq 0\,.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\|x-y\| \geq \|a-b\|$. ■

Proposition 8.3.7. *Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E. Soient $x \in E$ et $x_0 \in F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $\|x-x_0\| = d(x, F)$.

(ii) $x - x_0 \in F^{\perp}$. *Autrement dit, pour tout $y \in F$, on a $\langle x-x_0, y\rangle = 0$.*

Démonstration. Montrons l'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$. Soient $y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $|\lambda| = 1$ et $\langle x - x_0, \lambda y\rangle = -|\langle x - x_0, y\rangle|$. Pour tout $t > 0$, on a $x_0 - t\lambda y \in F$, d'où :

$$\|x - x_0\|^2 = (d(x, F))^2 \leq \|x - x_0 + t\lambda y\|^2 = \|x - x_0\|^2 - 2t|\langle x - x_0, y\rangle| + t^2\|y\|^2 .$$

Par conséquent, pour tout $t > 0$, on a $2|\langle x - x_0, y\rangle| \leq t\|y\|^2$, d'où $\langle x - x_0, y\rangle = 0$. Autrement dit, on a $x - x_0 \in F^\perp$.
Montrons l'implication $(ii) \Longrightarrow (i)$. Soit $y \in F$, alors on a $x_0 - y \in F$. Par le théorème de Pythagore, on a $\|x - y\|^2 = \|x - x_0 + x_0 - y\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0 - y\|^2 \geq \|x - x_0\|^2$, d'où $\|x - x_0\| = d(x, F)$. ■

Théorème 8.3.1 (théorème de projection). *Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et A une partie non vide convexe de E. On suppose de plus que A est complète quand elle est munie de la distance induite par la norme sur E (ce sera notamment le cas lorsque E est un espace de Hilbert et A est une partie non vide convexe et fermée de E). Pour tout $x \in H$, il existe un unique point $a \in A$ tel que :*

$$\|x - a\| = d(x, A) .$$

*Ce point est appelé la **projection de** x **sur** A et noté $P_A(x)$.*

Démonstration. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite dans A telle que $\|x - a_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(x, A)$. On applique l'identité du parallélogramme aux points $x - a_n$ et $x - a_m$, on obtient :

$$\|2x - a_n - a_m\|^2 + \|a_m - a_n\|^2 = 2\Big(\|x - a_n\|^2 + \|x - a_m\|^2\Big) .$$

D'où on a $\|a_m - a_n\|^2 = 2\Big(\|x - a_n\|^2 + \|x - a_m\|^2\Big) - 4\Big\|x - \dfrac{a_n + a_m}{2}\Big\|^2$. Puisque A est convexe, on a $\dfrac{a_n + a_m}{2} \in A$, d'où $d(x, A) \leq \Big\|x - \dfrac{a_n + a_m}{2}\Big\|$. Donc on a :

$$\|a_m - a_n\|^2 \leq 2\Big(\|x - a_n\|^2 + \|x - a_m\|^2\Big) - 4(d(x, A))^2 .$$

Par conséquent, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans A, donc elle converge vers un élément $a \in A$. D'où on a $\|x - a\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \|x - a_n\| = d(x, A)$. L'unicité du point a résulte de la proposition 8.3.6. ■

Remarque 8.3.4. La conclusion du théorème précédent est en particulier vraie si l'on suppose que $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace préhilbertien et que A est une partie non vide convexe fermée dans E et que A est contenue dans un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Théorème 8.3.2. *Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est de Banach pour la norme induite par E (ce sera notamment le cas lorsque E est un espace de Hilbert et F est un sous-espace vectoriel fermé de E). Alors on a :*

1. *L'application $x \longmapsto P_F(x)$ est linéaire continue de E sur F. De plus, pour tout $x \in F$, on a $P_F(x) = x$ et on a $\|P_F\| = 1$ si $F \neq \{0\}$. En particulier, on a $P_F \circ P_F = P_F$.*

2. *On a* $\ker(P_F) = F^\perp$.

3. *E est la somme directe topologique de F et $F^\perp$. En particulier, pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ et un unique $z \in F^\perp$ tels que $x = y + z$. En fait, on a $y = P_F(x)$ et $z = x - P_F(x)$.*

4. *L'espace normé quotient E/F est isométriquement isomorphe à $F^\perp$.*

Démonstration. 1. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on a $P_F(x) + \lambda P_F(y) \in F$ et pour tout $z \in F$, on a $\langle x + \lambda y - P_F(x) - \lambda P_F(y), z\rangle = \langle x - P_F(x), z\rangle + \lambda\langle y - P_F(y), z\rangle = 0$. Donc on a $x + \lambda y - (P_F(x) + \lambda P_F(y)) \in F^\perp$. Il résulte de la proposition 8.3.7 et du théorème 8.3.1 que l'on a $P_F(x) + \lambda P_F(y) = P_F(x + \lambda y)$. Donc P_F est linéaire. D'après la proposition 8.3.6, pour tout $x, y \in E$, on a $\|P_F(x) - P_F(y)\| \leq \|x - y\|$, donc P_F est continue et on a $\|P_F\| \leq 1$. Pour tout $x \in F$, on a $x - x = 0 \in F^\perp$, donc $P_F(x) = x$. Par conséquent, P_F est surjective de E sur F, et si $F \neq \{0\}$, on a $\|P_F\| \geq 1$, d'où $\|P_F\| = 1$. Pour tout $x \in E$, on a $P_F(x) \in F$, d'où $P_F(P_F(x)) = P_F(x)$. Autrement dit, on a $P_F \circ P_F = P_F$.
2. Soit $x \in E$, on a $x \in \ker(P_F) \iff P_F(x) = 0 \iff x - 0 \in F^\perp \iff x \in F^\perp$. Donc on a $\ker(P_F) = F^\perp$.
3. Pour tout $x \in E$, on a $x = x - P_F(x) + P_F(x)$, avec $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^\perp$, donc on a $E = F + F^\perp$. Soit $x \in F \cap F^\perp$, alors on a $\langle x, x\rangle = 0$, d'où $x = 0$. Donc on a $F \cap F^\perp = 0$. Par conséquent, E est la somme directe algébrique de F et $F^\perp$. Comme les applications $x \longmapsto P_F(x)$ et $x \longmapsto x - P_F(x)$ sont continues de E dans F et $F^\perp$ respectivement, alors par la proposition 7.3.2, E est la somme directe topologique de F et $F^\perp$.
4. Soit $\pi_{|_{F^\perp}} : F^\perp \longrightarrow E/F$ la restriction de l'application quotient à $F^\perp$. Alors $\pi_{|_{F^\perp}}$ est linéaire et surjective. Pour tout $x \in F^\perp$, on a $P_F(x) = 0$, d'où $\|x\| = \|x - P_F(x)\| = d(x, F) = \|\pi(x)\|$. Par conséquent, $\pi_{|_{F^\perp}}$ est isométrique et bijective, donc E/F et $F^\perp$ sont isométriquement isomorphes. ■

Corollaire 8.3.1. *Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors on a :*

1. *L'espace H est la somme directe topologique de F et $F^\perp$. En particulier, tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert admet un supplémentaire topologique*[†].

2. *Pour tout $x \in H$, on a $x = P_F(x) + P_{F^\perp}(x)$.*

3. *L'espace de Banach quotient H/F est un espace de Hilbert.*

Définition 8.3.3. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de H. L'application linéaire P_F est appelée le **projecteur orthogonal** ou la **projection orthogonale de H sur F**. Pour tout $x \in H$, $P_F(x)$ est appelée la **projection orthogonale de x sur F**.

Notation. Si H est un espace de Hilbert et si F et G sont des sous-espace vectoriels de H tels que H soit la somme directe topologique des F et G, on note ceci $H = F \oplus G$.

[†]Lindenstrauss et Tzafriri ont montré en 1971 que si E est un espace de Banach tel que tout sous-espace vectoriel fermé de E possède un supplémentaire topologique, alors E est linéairement homéomorphe à un espace de Hilbert.

Corollaire 8.3.2. *Soient* $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace de Hilbert et* F *un sous-espace vectoriel de* H.

1. *On a* $\overline{F}^{\perp} = F^{\perp}$, $(F^{\perp})^{\perp} = \overline{F}$ *et* $H = \overline{F} \oplus F^{\perp}$.

2. F *est dense dans* H *si et seulement si* $F^{\perp} = \{0\}$.

Démonstration. 1. D'après le théorème précédent et la proposition 8.3.2, on a $\overline{F}^{\perp} = F^{\perp}$, $H = \overline{F} \oplus F^{\perp}$ et $\overline{F} \subset (F^{\perp})^{\perp}$. Il reste à montrer que l'on a $(F^{\perp})^{\perp} \subset \overline{F}$. Soit $x \in (F^{\perp})^{\perp}$, alors il existe $y \in \overline{F}$ et $z \in F^{\perp} = \overline{F}^{\perp}$ tels que $x = y + z$, d'où on a $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle + \langle z, z\rangle$. Or on a $\langle x, z\rangle = 0$ et $\langle y, z\rangle = 0$, d'où $\langle z, z\rangle$, donc on a $z = 0$. Par conséquent, on a $x = y \in \overline{F}$. Donc on a $(F^{\perp})^{\perp} \subset \overline{F}$.
2. Comme on a $H = \overline{F} \oplus F^{\perp}$, alors F est dense dans H si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$. ■

Corollaire 8.3.3. *Soient* $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace de Hilbert et* A *une partie non vide de* H.

1. *On a* $(A^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathit{Vect}(A)}$.

2. A *est totale si et seulement si* $A^{\perp} = \{0\}$.

Remarque 8.3.5. On verra, exemple 8.6.3, que si A est une partie d'un espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ telle que $A^{\perp} = \{0\}$, alors A n'est pas forcément totale dans E.

8.4 Théorème de représentation de Riesz

Proposition 8.4.1. *Soient* $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace préhilbertien, muni de la norme* $\|\ \|$ *associée au produit scalaire, et* H^* *le dual topologique de* H.

1. *Soit* $y \in H$, *alors l'application* $\varphi_y : x \longmapsto \langle x, y\rangle$ *de* H *dans* $\mathbb{K}$ *est une forme linéaire continue sur* H *et on a* $\|\varphi_y\| = \|y\|$.

2. *L'application suivante est semi-linéaire et isométrique.*

$$\begin{array}{rccc} \phi_H : & H & \longrightarrow & H^* \\ & y & \longmapsto & \varphi_y \end{array}$$

Démonstration. D'après la définition du produit scalaire, φ_y est une forme linéaire sur H. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\varphi_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$. Donc φ_y est continue et on a $\|\varphi_y\| \leq \|y\|$. Si $y \neq 0$, on a $\varphi_y\Big(\dfrac{y}{\|y\|}\Big) = \|y\|$, d'où $\|\varphi_y\| \geq \|y\|$. Donc on a $\|\varphi_y\| = \|y\|$.
2. On vient de voir que ϕ_H est isométrique. Soient $y, z \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $x \in H$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \phi_H(y + \lambda z)(x) & = & \langle x, y + \lambda z\rangle \\ & = & \langle x, y\rangle + \overline{\lambda}\langle x, z\rangle \\ & = & \phi_H(y)(x) + \overline{\lambda}\phi_H(z)(x) \\ & = & (\phi_H(y) + \overline{\lambda}\phi_H(z))(x)\,. \end{array}$$

Par conséquent, on a $\phi_H(y + \lambda z) = \phi_H(y) + \overline{\lambda}\phi_H(z)$, donc ϕ_H est semi-linéaire. ■

Corollaire 8.4.1. *Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $T \in \mathscr{L}(E)$.*

1. *Pour tout $x \in E$, on a :*

$$\|x\| = \sup_{y \neq 0} \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|y\|} = \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle x, y\rangle| = \sup_{\|y\| < 1} |\langle x, y\rangle| = \sup_{\|y\| = 1} |\langle x, y\rangle| .$$

2. *On a $\|T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle x, T(y)\rangle| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle T(x), y\rangle|$.*

Démonstration. Il suffit de combiner la proposition précédente et la proposition 6.3.1. ■

Le théorème de Riesz suivant nous dit qu'en fait l'application ϕ_H est aussi surjective si H est un espace de Hilbert.

Théorème 8.4.1 (théorème de représentation de Riesz). *Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert, muni de la norme $\|\ \|$ associée au produit scalaire, et H^* le dual topologique de H. Alors pour tout $\varphi \in H^*$, il existe un unique $y_\varphi \in H$ tel que pour tout $x \in H$, on ait $\varphi(x) = \langle x, y_\varphi\rangle$. Évidemment, dans ce cas, on a $\|\varphi\| = \|y_\varphi\|$. Autrement dit, l'application ϕ_H est bijective.*

Démonstration. Si $\varphi = 0$, il suffit de prendre $y_\varphi = 0$. Supposons donc $\varphi \neq 0$. Alors $F = \ker(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel fermé de H tel que $F \neq H$. Par le corollaire 8.3.2, on a $F^\perp \neq \{0\}$. Soit $z \in F^\perp$ tel que $\varphi(z) = 1$. Alors pour tout $x \in H$, on a $x = x - \varphi(x)z + \varphi(x)z$, avec $x - \varphi(x)z \in F$. Donc on a $\langle x, z\rangle = \langle x - \varphi(x)z, z\rangle + \langle \varphi(x)z, z\rangle = 0 + \varphi(x)\,\|z\|^2$. D'où on a $\varphi(x) = \left\langle x, \frac{z}{\|z\|^2}\right\rangle$. Alors il suffit de prendre $y_\varphi = \frac{z}{\|z\|^2}$. L'unicité résulte de la remarque 8.2.1. ■

Remarque 8.4.1. Soit $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert. Alors le dual topologique H^* est un espace de Hilbert pour le produit scalaire suivant :
Pour tout $y, z \in H$, on pose $\langle \varphi_y, \varphi_z\rangle^* = \langle z, y\rangle$. Notons que ce produit scalaire sur H^* induit la norme déjà existant sur H^*.

Corollaire 8.4.2. *Tout espace de Hilbert est réflexif.*

Démonstration. Soit H un espace de Hilbert. D'après le théorème précédent, on sait que l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi_H : & H & \longrightarrow & H^* \\ & y & \longmapsto & \varphi_y \end{array}$$

où $\varphi_y(x) = \langle x, y\rangle$, est semi-linéaire, bijective et isométrique. Soient $J : H \longrightarrow H^{**}$ l'application canonique et $h \in H^{**}$, alors l'application $y \mapsto \overline{h(\varphi_y)}$ est une forme linéaire continue sur H. Donc il existe $x \in H$ tel que pour tout $y \in H$, on ait $\overline{h(\varphi_y)} = \langle y, x\rangle$, d'où on a $h(\varphi_y) = \overline{\langle y, x\rangle} = \langle x, y\rangle = \varphi_y(x) = J(x)(\varphi_y)$. Par conséquent, on a $h = J(x)$. Autrement dit, J est surjective, donc H est réflexif. ■

Soient E et F deux espaces de Hilbert. Pour alléger les notations, on note par le même symbole les produits scalaires sur E et F. On note aussi par le même symbole les normes sur E, F et $\mathscr{L}(E; F)$.

Proposition 8.4.2. *Soient $(H_1, \langle\ ,\ \rangle)$ et $(H_2, \langle\ ,\ \rangle)$ deux espaces de Hilbert. Pour tout $T \in \mathscr{L}(H_1;\, H_2)$, il existe un unique $T^* \in \mathscr{L}(H_2;\, H_1)$ tel que pour tout $x \in H_1$ et tout $y \in H_2$, on ait :*

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle\,.$$

*L'application linéaire continue T^* est appelé l'**adjoint** de T.*

Démonstration. Soit $y \in H_2$, l'application $\varphi_y \circ T\ :\ x \longmapsto \langle T(x), y\rangle$ est une forme linéaire continue sur H_1. Donc, par le théorème de Riesz, il existe un unique élément $T^*(y) \in H_1$ tel que, pour tout $x \in H_1$, on ait $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$. De plus, on a :

$$\|T^*(y)\| = \|\varphi_y \circ T\| \le \|\varphi_y\|\,\|T\| = \|y\|\,\|T\|\,.$$

Soient $y, z \in H_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $x \in H_1$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle x, T^*(y+\lambda z)\rangle &= \langle T(x), y+\lambda z\rangle\\
&= \langle T(x), y\rangle + \overline{\lambda}\,\langle T(x), z\rangle\\
&= \langle x, T^*(y)\rangle + \langle x, \lambda T^*(z)\rangle\\
&= \langle x, T^*(y) + \lambda T^*(z)\rangle\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $T^*(y+\lambda z) = T^*(y) + \lambda T^*(z)$, donc $T^*\ :\ H_2 \longrightarrow H_1$ est linéaire. Pour tout $y \in H_2$, on a $\|T^*(y)\| \le \|y\|\,\|T\|$, donc T^* est continue et on a $\|T^*\| \le \|T\|$. ■

Remarque 8.4.2. Soient H_1, H_2 des espaces de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H_1;\, H_2)$. On vient de voir qu'il existe un unique $T^* \in \mathscr{L}(H_2;\, H_1)$ tel que pour tout $x \in H_1$ et tout $y \in H_2$, on ait $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$. Par ailleurs, on a déjà vu, paragraphe 7.10, la notion de l'adjoint dans le cadre des espaces normés. En fait, on peut identifier les deux notions parce que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[d, "\phi_{H_1}"'] & H_2 \arrow[l, "T^*"'] \arrow[d, "\phi_{H_2}"] \\
H_1^* & H_2^* \arrow[l, "T^*"']
\end{tikzcd}$$

La seule différence entre les deux notions est que dans le cadre des espaces normés, l'application $T \longmapsto T^*$ est linéaire, par contre elle est semi-linéaire dans le cadre des espaces de Hilbert, ceci provient du fait que ϕ_H est semi-linéaire.

Proposition 8.4.3. *Soient E, F et H des espaces de Hilbert.*

1. *Pour tout $T \in \mathscr{L}(E;\, F)$, on a :*

$$(T^*)^* = T,\quad \|T^*\| = \|T\| \ \text{ et } \ \|T^* \circ T\| = \|T \circ T^*\| = \|T\|^2\,.$$

2. *L'application suivante est semi-linéaire, bijective et isométrique.*

$$\begin{array}{rccc}
A\ : & \mathscr{L}(E;\, F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(F;\, E)\\
 & T & \longmapsto & T^*
\end{array}$$

3. *On a* $\mathrm{id}_E{}^* = \mathrm{id}_E$, *où* id_E *désigne l'application identité de* E.
4. *Pour tout* $T \in \mathscr{L}(E;\, F)$ *et tout* $S \in \mathscr{L}(F;\, H)$, *on a* $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.
5. *Si* $T \in \mathscr{L}(E;\, F)$ *est un homéomorphisme, alors* T^* *est un homéomorphisme et on a* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 8 du supplément.

Exemple 8.4.1. Soient $(H, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace de Hilbert et E un sous-espace vectoriel fermé de H. Soient $\imath : E \hookrightarrow H$ l'injection canonique et $p : H \longrightarrow E$ la projection orthogonale sur E. Alors on a $\imath^* = p$. En effet, soient $x \in E$ et $y \in H$. On a $y = p(y) + z$, avec $z \in E^\perp$, et $\langle \imath(x), y\rangle = \langle x, y\rangle = \langle x, p(y) + z\rangle = \langle x, p(y)\rangle$. Donc on a $\imath^* = p$.

Exemple 8.4.2.
1. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de la structure euclidienne canonique. L'espace $\mathscr{L}(E)$ s'identifie à l'espace $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{R}$. Si $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, alors T^* est la matrice transposée de T. Autrement dit, si $T = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, alors on a $T^* = [b_{ij}]$, avec $b_{ij} = a_{ji}$.
2. Soit $E = \mathbb{C}^n$ muni de la structure hermitienne canonique. L'espace $\mathscr{L}(E)$ s'identifie à l'espace $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{C}$. Si $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, alors T^* est la matrice transconjuguée de T. Autrement dit, si $T = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, alors on a $T^* = [b_{ij}]$, avec $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

Proposition 8.4.4. *Soient* E, F *des espaces de Hilbert et* $T \in \mathscr{L}(E;\, F)$. *Alors on a :*

$$\ker(T^*) = \mathit{Im}(T)^\perp \quad \mathit{et} \quad \ker(T) = \mathit{Im}(T^*)^\perp\,.$$

Démonstration. Pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$, d'où :

$$\begin{aligned} x \in \ker(T) \quad &\Longleftrightarrow \quad T(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{pour tout } \ y \in F,\ \langle T(x), y\rangle \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{pour tout } \ y \in F,\ \langle x, T^*(y)\rangle \ \Longleftrightarrow \ x \in \mathrm{Im}(T^*)^\perp\,. \end{aligned}$$

Donc on a $\ker(T) = \mathrm{Im}(T^*)^\perp$. On en déduit que l'on a $\ker(T^*) = \mathrm{Im}((T^*)^*)^\perp = \mathrm{Im}(T)^\perp$. ■

Corollaire 8.4.3. *Soient* E, F *des espaces de Hilbert et* $T \in \mathscr{L}(E;\, F)$. *Alors on a :*

1. $T(E)$ *est dense dans* F *si et seulement si* T^* *est injective.*
2. $T^*(F)$ *est dense dans* E *si et seulement si* T *est injective.*

Démonstration. Ceci résulte de la proposition précédente et du corollaire 8.3.2. ■

Soient $(H, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace de Hilbert et $f : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire sur H. On montre, comme dans la proposition 6.5.1, que f est continue si et seulement si il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $(x, y) \in H \times H$, on ait $|f(x, y)| \leq M\|x\|\,\|y\|$.

Proposition 8.4.5. *Soit* $(H, \langle\, ,\, \rangle)$ *un espace de Hilbert.*

1. *Soit $T \in \mathscr{L}(H)$. Pour tout $x, y \in H$, on pose $f(x,y) = \langle T(x), y\rangle$. Alors f est une forme sesquilinéaire continue sur H.*

2. *Réciproquement, soit $f : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire continue sur H. Alors il existe une unique application $T \in \mathscr{L}(H)$ telle que $f(x,y) = \langle T(x), y\rangle$ pour tout $x, y \in H$.*

De plus, on a $\|T\| = \sup\{|f(x,y)| \; ; \; \|x\| = \|y\| = 1\}$.

Démonstration. 1. Il est clair que f est une forme sesquilinéaire continue sur H.
2. Soit $M > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in H \times H$, on ait $|f(x,y)| \leq M\|x\| \, \|y\|$. Soit $y \in H$. L'application $x \longmapsto f(x,y)$ est une forme linéaire continue sur H. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $S(y) \in H$ tel que pour tout $x \in H$, on ait $f(x,y) = \langle x, S(y)\rangle$. Ainsi, on a une application $S : H \longrightarrow H$ telle que pour tout $(x,y) \in H \times H$, on ait $f(x,y) = \langle x, S(y)\rangle$. Pour tous $x, y, z \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle x, S(y+\lambda z)\rangle &= f(x, y+\lambda z) \\ &= f(x,y) + \overline{\lambda} f(x,z) \\ &= \langle x, S(y)\rangle + \overline{\lambda}\langle x, S(z)\rangle = \langle x, S(y) + \lambda S(z)\rangle \, . \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $S(y+\lambda z) = S(y) + \lambda S(z)$. Donc S est linéaire. D'après le corollaire 8.4.1, on a $\|S(y)\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle S(y), x\rangle| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle x, S(y)\rangle| = \sup\limits_{\|x\|=1} |f(x,y)| \leq M \, \|y\|$. Donc S est continue. On pose $T = S^*$. Alors $T \in \mathscr{L}(H)$ telle que $f(x,y) = \langle T(x), y\rangle$ pour tout $x, y \in H$. De plus, on a :

$$\|T\| = \|S\| = \sup_{\|y\|=1} \|S(y)\| = \sup_{\|y\|=1} \sup_{\|x\|=1} |f(x,y)| = \sup\big\{|f(x,y)| \; ; \; \|x\| = \|y\| = 1\big\} \, .$$

L'unicité de T résulte de la remarque 8.2.1. ■

Proposition 8.4.6. *Soient $(H, \langle \; , \; \rangle)$ un espace de Hilbert et $P \in \mathscr{L}(H)$ tel que $P \circ P = P$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) P est un projecteur orthogonal. Autrement dit, il existe un sous-espace vectoriel fermé F de H tel que $P = P_F$ soit le projecteur orthogonal sur F.

(ii) On a $P^* = P$.

(iii) On a $P \circ P^* = P^* \circ P$.

(iv) On a $Im(P) = \ker(P)^\perp$.

(v) Pour tout $x \in H$, on a $\langle P(x), x\rangle = \|P(x)\|^2$.

(vi) On a $\|P\| \leq 1$.

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 8 du supplément.

Définition 8.4.1. Soient $(H, \langle \; , \; \rangle)$ un espace de Hilbert et $P \in \mathscr{L}(H)$. On dit que P est un **projecteur orthogonal** si l'on a $P = P^*$ et $P \circ P = P$.

Proposition 8.4.7. *Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, $(F, \langle\ ,\ \rangle)$ des espaces de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(E; F)$.*

1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   - *(i)* $T^* \circ T = id_E$.
   - *(ii) Pour tout $x, y \in E$, on a $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.*
   - *(iii) Pour tout $x \in E$, on a $\|T(x)\| = \|x\|$. Autrement dit, T est isométrique.*
2. *On suppose que T est isométrique. Alors on a :*
   - *(a) L'image d'un sous-espace vectoriel fermé de E par T, est un sous-espace fermé de F.*
   - *(b) Si G un sous-espace vectoriel de E, alors on a $T(G^\perp) \subset T(G)^\perp$.*
   - *(c) Soit $P = T \circ T^*$, alors P est le projecteur orthogonal sur $T(E)$.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 8 du supplément.

Remarque 8.4.3. Considérons l'application

$$T : \begin{array}{ccc} \ell^2 & \longrightarrow & \ell^2 \\ (x_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & (y_n)_{n\geq 0} \end{array}$$

où $y_0 = 0$ et $y_n = x_{n-1}$, pour tout $n \geq 1$. Alors ℓ^2 est un espace de Hilbert et T est linéaire isométrique non surjective.

8.5 Somme hilbertienne d'espaces de Hilbert

Soit $(H_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces de Hilbert. Pour alléger les notations, on note par le même symbole $\langle\ ,\ \rangle$ les produits scalaires sur les espaces H_i. On note aussi par le même symbole $\|\ \|$ les normes sur les espaces H_i.

Soit $\underset{i\in I}{\oplus} H_i$ l'ensemble des familles $(x_i)_{i\in I}$ telles que pour tout $i \in I$, $x_i \in H_i$ et telles que la famille de nombres réels positifs $\big(\|x_i\|^2\big)_{i\in I}$ soit sommable ; autrement dit, $(\|x_i\|)_{i\in I} \in \ell^2(I)$. Notons que $\underset{i\in I}{\oplus} H_i$ est un sous-ensemble de l'espace vectoriel produit $\prod\limits_{i\in I} H_i$.

Soient $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I} \in \underset{i\in I}{\oplus} H_i$. Il est clair que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda(x_i)_{i\in I} = (\lambda x_i)_{i\in I} \in \underset{i\in I}{\oplus} H_i$. On a :

$$\Big(\sum_{i\in I} \|x_i + y_i\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\sum_{i\in I} \big(\|x_i\| + \|y_i\|\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\sum_{i\in I} \|x_i\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{i\in I} \|y_i\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

d'où $(x_i + y_i)_{i\in I} \in \underset{i\in I}{\oplus} H_i$. Par conséquent, $\underset{i\in I}{\oplus} H_i$ est un sous-espace vectoriel de $\prod\limits_{i\in I} H_i$. On a aussi :

$$\sum_{i\in I} |\langle x_i, y_i\rangle| \leq \sum_{i\in I} \|x_i\|\|y_i\| \leq \Big(\sum_{i\in I} \|x_i\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i\in I} \|y_i\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty\,.$$

On vérifie alors que la formule

$$\big\langle (x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\big\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i, y_i\rangle$$

définit un produit scalaire sur $\underset{i\in I}{\oplus} H_i$.

Proposition 8.5.1. *L'espace $\underset{i\in I}{\oplus} H_i$ muni du produit scalaire défini ci-dessus est un espace de Hilbert, appelé **somme hilbertienne** de la famille d'espaces de Hilbert $(H_i)_{i\in I}$.*

Démonstration. Soit $(\xi_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\underset{i\in I}{\oplus} H_i$. Pour tout $n \geq 0$, on a $\xi_n = (x_{n,i})_{i\in I}$, avec $x_{n,i} \in H_i$ et $\displaystyle\sum_{i\in I} \|x_{n,i}\|^2 < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$, on ait :

$$\sum_{i\in I} \|x_{n,i} - x_{m,i}\|^2 = \|\xi_n - \xi_m\|^2 < \varepsilon\,.$$

Soit $i \in I$, fixé. Pour tout n, m, on a $\|x_{n,i} - x_{m,i}\| \leq \|\xi_n - \xi_m\|$, donc la suite $(x_{n,i})_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans H_i qui est de Banach, donc il existe $x_i \in H_i$ tel que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_{n,i} = x_i$. Soit J une partie finie de I. Pour tout $n, m \geq N$, on a $\displaystyle\sum_{i\in J} \|x_{n,i} - x_{m,i}\|^2 \leq \|\xi_n - \xi_m\|^2 < \varepsilon$. On fait tendre m vers l'infini, on obtient que $\displaystyle\sum_{i\in J} \|x_{n,i} - x_i\|^2 \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai pour toute partie finie J de I, donc on a $\displaystyle\sum_{i\in I} \|x_{n,i} - x_i\|^2 \leq \varepsilon$. Soit $x = (x_i)_{i\in I}$, alors on a $x - \xi_n \in \underset{i\in I}{\oplus} H_i$. Comme $\underset{i\in I}{\oplus} H_i$ est un espace vectoriel, alors $x = x - \xi_n + \xi_n \in \underset{i\in I}{\oplus} H_i$. De plus l'inégalité précédente montre que $(\xi_n)_{n\geq 0}$ converge vers x dans $\big(\underset{i\in I}{\oplus} H_i, \langle\, ,\, \rangle\big)$. Donc l'espace $\big(\underset{i\in I}{\oplus} H_i, \langle\, ,\, \rangle\big)$ est de Hilbert. ■

Pour tout $j \in I$ et pour tout $x_j \in H_j$, on pose $W_j(x_j) = (x_i)_{i\in I}$, où $x_i = x_j$ si $i = j$ et $x_i = 0$ si $i \neq j$. Alors W_j est une application linéaire isométrique de H_j dans $\underset{i\in I}{\oplus} H_i$. Donc $F_j = W_j(H_j)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\underset{i\in I}{\oplus} H_i$. De plus, pour tout $i, j \in I$ tels que $i \neq j$, on ait $F_i \perp F_j$. Pour tout $x = (x_i)_{i\in I} \in \underset{i\in I}{\oplus} H_i$, la famille $(W_j(x_j))_{j\in I}$ est sommable dans $\underset{i\in I}{\oplus} H_i$, et de somme x. En particulier, l'espace vectoriel engendré par les sous-espaces vectoriels F_i est dense dans $\underset{i\in I}{\oplus} H_i$.
Réciproquement, on va montrer ci-dessous le résultat suivant :
Soient H un espace de Hilbert et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels fermés de H telle que :

1. Pour tout $i, j \in I$ tels que $i \neq j$, on ait $F_i \perp F_j$.

2. L'espace vectoriel engendré par les sous-espaces vectoriels F_i est dense dans H.

Alors H est la somme hilbertienne de la famille d'espaces de Hilbert $(F_i)_{i\in I}$. Autrement dit, il existe une unique application linéaire, bijective et isométrique de H sur $\bigoplus_{i\in I} F_i$, qui sur chaque F_i coïncide avec l'injection naturelle W_i de F_i dans $\bigoplus_{i\in I} F_i$.

Commençons par un lemme de décomposition en somme orthogonale finie.

Lemme 8.5.1. *Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels fermés deux à deux orthogonaux d'un espace de Hilbert $(H, \langle\, ,\, \rangle)$. Alors $F = F_1 + \cdots + F_n$ est un sous-espace vectoriel fermé de H et on a $P_F = \sum_{i=1}^{n} P_{F_i}$.*

Démonstration. Soit $Q = \mathrm{id}_H - \sum_{i=1}^{n} P_{F_i}$, alors Q est une application linéaire continue de H dans H et on a $\ker(Q) \subset F$. Soit $x \in F$, alors $x = x_1 + \cdots + x_n$, avec $x_i \in F_i$. Pour tout $i \in I$, on a $P_{F_i}(x_i) = x_i$ et $P_{F_i}(x_j) = 0$ si $j \neq i$, car on a $\ker(P_{F_i}) = F_i^{\perp}$ et $F_j \subset F_i^{\perp}$. Donc on a $P_{F_i}(x) = x_i$, d'où $x = \sum_{i=1}^{n} P_{F_i}(x)$. Par conséquent, on a $x \in \ker(Q)$, d'où $\ker(Q) = F$. Donc F est un sous-espace vectoriel fermé de H. Pour tout $x \in H$ et pour tout $y \in F$, on a :

$$\begin{aligned}
\Big\langle x - \sum_{i=1}^{n} P_{F_i}(x), y \Big\rangle &= \langle x, y\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle P_{F_i}(x), y\rangle \\
&= \langle x, y\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, P_{F_i}(y)\rangle \\
&= \langle x, y - \sum_{i=1}^{n} P_{F_i}(y)\rangle \;=\; \langle x, 0\rangle \;=\; 0\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $x - \sum_{i=1}^{n} P_{F_i}(x) \in F^{\perp}$, d'où $\sum_{i=1}^{n} P_{F_i}(x) = P_F(x)$, donc on a $P_F = \sum_{i=1}^{n} P_{F_i}$. ■

Proposition 8.5.2. *Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels fermés deux à deux orthogonaux d'un espace de Hilbert $(H, \langle\, ,\, \rangle)$. Pour tout $i \in I$, on note P_i la projection orthogonale de H sur F_i. Pour tout $x \in H$, la famille $\big(\|P_i(x)\|^2\big)_{i\in I}$ est sommable et on a :*

$$\sum_{i\in I} \|P_i(x)\|^2 \leq \|x\|^2\,.$$

Démonstration. D'après la proposition 6.7.1, il suffit de montrer que pour toute partie finie J de I, on a $\sum_{i\in J} \|P_i(x)\|^2 \leq \|x\|^2$. Soit J une partie finie de I, et soit $F = \sum_{i\in J} F_i$. D'après le lemme précédent, F est sous-espace vectoriel fermé de H et pour tout $x \in H$, on a $P_F(x) = \sum_{i\in J} P_i(x)$. D'après le théorème de Pythagore, on a $\sum_{i\in J} \|P_i(x)\|^2 = \|P_F(x)\|^2 \leq \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2 = \|x\|^2$. D'où le résultat. ■

Théorème 8.5.1. *Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Hilbert $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ telle que :*

(a) Pour tout $i, j \in I$ tels que $i \neq j$, on ait $F_i \perp F_j$.

(b) L'espace vectoriel engendré par les sous-espaces vectoriels F_i soit dense dans H.

Pour tout $i \in I$, on note P_i la projection orthogonale de H sur F_i. Alors on a :

1. *Pour tout $x \in H$, les familles $(P_i(x))_{i\in I}$ et $\big(\|P_i(x)\|^2\big)_{i\in I}$ sont sommables, et leurs sommes vérifient :*

$$x = \sum_{i\in I} P_i(x) \quad et \quad \|x\|^2 = \sum_{i\in I} \|P_i(x)\|^2 .$$

2. *Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de H telle que pour tout $i \in I$, $x_i \in F_i$ et si la famille $\big(\|x_i\|^2\big)_{i\in I}$ est sommable, alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, et sa somme x vérifie $P_i(x) = x_i$ pour tout $i \in I$.*

Démonstration. 1. Soit $x \in H$. D'après la proposition précédente, la famille $\big(\|P_i(x)\|^2\big)_{i\in I}$ est sommable et on a $\sum_{i\in I} \|P_i(x)\|^2 \leq \|x\|^2$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme l'espace vectoriel engendré par les sous-espaces vectoriels F_i, est dense dans H, alors il existe une partie finie J de I et $x_i \in F_i$, avec $i \in J$, telle que $\Big\|x - \sum_{i\in J} x_i\Big\|^2 < \varepsilon$. Soit $F = \sum_{i\in J} F_i$. D'après le lemme précédent, F est sous-espace vectoriel fermé de H et pour tout $x \in H$, on a $P_F(x) = \sum_{i\in J} P_i(x)$. Comme on a $\|x - P_F(x)\| \leq \|x - \sum_{i\in J} x_i\|$, d'où $\|x - P_F(x)\|^2 < \varepsilon$. D'après le théorème de Pythagore, on a $\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2$ et $\sum_{i\in J} \|P_i(x)\|^2 = \|P_F(x)\|^2$. Par conséquent, on a $\|x\|^2 < \varepsilon + \sum_{i\in J} \|P_i(x)\|^2 \leq \varepsilon + \sum_{i\in I} \|P_i(x)\|^2$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc on a $\|x\|^2 \leq \sum_{i\in I} \|P_i(x)\|^2$. Par conséquent, on a $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} \|P_i(x)\|^2$.

Soit K une partie finie de I et soit $F_K = \sum_{i\in K} F_i$. D'après le lemme précédent, F_K est sous-espace vectoriel fermé de H et pour tout $x \in H$, on a $P_{F_K}(x) = \sum_{i\in K} P_i(x)$. D'après le théorème de Pythagore, on a $\|P_{F_K}(x)\|^2 = \sum_{i\in K} \|P_i(x)\|^2$ et $\|x\|^2 = \|P_{F_K}(x)\|^2 + \|x - P_{F_K}(x)\|^2$. Par conséquent, on a $\Big\|x - \sum_{i\in K} P_i(x)\Big\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i\in K} \|P_i(x)\|^2$. Donc la famille $(P_i(x))_{i\in I}$ est sommable et on a $x = \sum_{i\in I} P_i(x)$.

2. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de H telle que pour tout $i \in I$, $x_i \in F_i$ et telle que la famille $\left(\|x_i\|^2\right)_{i\in I}$ soit sommable. D'après la proposition 8.3.3, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable. Soit $x = \sum_{i\in I} x_i$. Pour tout $i \in I$, on a $P_i(x_i) = x_i$ et $P_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$, car $\ker(P_i) = F_i^{\perp}$ et on a $F_j \subset F_i^{\perp}$. Comme P_i est linéaire continue, il résulte de la proposition 6.7.6 que l'on a $P_i(x) = \sum_{j\in I} P_i(x_j) = P_i(x_i) = x_i$. ∎

Corollaire 8.5.1. *Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Hilbert $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ telle que :*

1. *Pour tout $i, j \in I$ tels que $i \neq j$, on ait $F_i \perp F_j$.*
2. *L'espace vectoriel engendré par les sous-espaces vectoriels F_i soit dense dans H.*

Alors l'application

$$\begin{array}{cccc} T : & H & \longrightarrow & \underset{i\in I}{\oplus} F_i \\ & x & \longmapsto & (P_i(x))_{i\in I} \end{array}$$

est linéaire bijective et isométrique. De plus, pour tout $x_i \in F_i$, on a $T(x_i) = W_i(x_i)$. Dans ce cas, on dit aussi que H est la somme hilbertienne des sous-espaces vectoriels fermés F_i, $i \in I$.

8.6 Bases hilbertiennes

Définition 8.6.1. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien. Une famille orthonormale totale de E est appelée **base hilbertienne** de $(E, \langle\ ,\ \rangle)$.

Proposition 8.6.1. *Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale de E.*

1. *On suppose que $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de E. Soient $x, z \in E$. Si pour tout $i \in I$, on a $\langle z, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle$, alors $z = x$.*
2. *On suppose que $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace de Hilbert. Si on a $\{e_i\ ;\ i \in I\}^{\perp} = \{0\}$, alors $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de E.*

Démonstration. 1. Par hypothèse, pour tout $i \in I$, on a $\langle z, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle$. Soit $y \in F = \mathrm{Vect}(\{e_i\ ;\ i \in I\})$, alors il existe une partie finie J de I telle que $y = \sum_{i\in J} \lambda_i e_i$, avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$. D'où on a $\langle z, y\rangle = \sum_{i\in J} \overline{\lambda_i}\langle z, e_i\rangle = \sum_{i\in J} \overline{\lambda_i}\langle x, e_i\rangle = \langle x, y\rangle$, donc $\langle z - x, y\rangle = 0$. Comme F est dense dans E, alors pour tout $y \in E$, on a $\langle z - x, y\rangle = 0$. En prenant $y = z - x$, on obtient $z - x = 0$.
2. Ceci résulte du corollaire 8.3.3. ∎

On verra, exemple 8.6.3, que la propriété 2 dans la proposition précédente n'est pas vraie dans un espace préhilbertien.

Exemple 8.6.1. Considérons l'espace de Hilbert ℓ^2. Rappelons que pour tout $n \geq 0$, $\mathbf{e}_n \in \ell^2$, où $\mathbf{e}_n = (\delta_{n,k})_{k\geq 0}$, avec :

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = n\,, \\ 0 & \text{si} \quad k \neq n\,. \end{cases}$$

Alors $(\mathbf{e}_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de ℓ^2. En effet, il est clair que $(\mathbf{e}_n)_{n\geq 0}$ est une famille orthonormale dans ℓ^2. Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \geq 0$ tel que $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n|^2 < \varepsilon^2$. Soit $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} x_n\mathbf{e}_n$, alors $y \in \mathrm{Vect}(\{\mathbf{e}_n \ ;\ n \geq 0\})$ et on a $\|x - y\|_2 = \Big(\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$. Donc $\mathrm{Vect}(\{\mathbf{e}_n \ ;\ n \geq 0\})$ est dense dans ℓ^2. Par conséquent, $(\mathbf{e}_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de ℓ^2.
On aurait pu utiliser la proposition précédente pour montrer que $(\mathbf{e}_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de ℓ^2. En effet, soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$ tel que $x \in \{\mathbf{e}_n \ ;\ n \geq 0\}^\perp$, alors pour tout $n \geq 0$, on a $0 = \langle x, \mathbf{e}_n\rangle = x_n$, donc $x = 0$.

Exemple 8.6.2. Soit I un ensemble non vide quelconque. Considérons l'espace de Hilbert $\ell^2(I)$. Pour tout $j \in I$, soit $\mathbf{e}_j \in \ell^2(I)$, défini par $\mathbf{e}_j = (\delta_{j,i})_{i\in I}$, où :

$$\delta_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j\,, \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j\,. \end{cases}$$

Alors $(\mathbf{e}_j)_{j\in I}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(I)$. En effet, il est clair que $(\mathbf{e}_j)_{j\in I}$ est une famille orthonormale dans $\ell^2(I)$. Soient $x = (x_i)_{i\in I} \in \ell^2(I)$ et $\varepsilon > 0$. Puisque la famille $\big(|x_i|^2\big)_{i\in I}$ est sommable, elle vérifie le critère de Cauchy, donc il existe une partie finie I_ε de I telle que pour toute partie finie J de I vérifiant $J \cap I_\varepsilon = \emptyset$, on ait $\displaystyle\sum_{i\in J} |x_i|^2 < \varepsilon^2$. D'où on a $\sup\Big\{\Big(\displaystyle\sum_{i\in J} |x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \ ;\ J \text{ partie finie de } I \text{ telle que } J \cap I_\varepsilon = \emptyset\Big\} \leq \varepsilon$. Soit $y = \displaystyle\sum_{i\in I_\varepsilon} x_i\mathbf{e}_i$, alors $y \in \mathrm{Vect}(\{\mathbf{e}_j \ ;\ j \in I\})$ et on a $\|x - y\|_2 = \sup\Big\{\Big(\displaystyle\sum_{i\in J} |x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \ ;\ J \text{ partie finie de } I \text{ telle que } J \cap I_\varepsilon = \emptyset\Big\}$, d'où $\|x - y\|_2 \leq \varepsilon$. Donc $\mathrm{Vect}(\{\mathbf{e}_j \ ;\ j \in I\})$ est dense dans $\ell^2(I)$. Par conséquent, $(\mathbf{e}_j)_{j\in I}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(I)$.
On aurait pu utiliser la proposition précédente pour montrer que $(\mathbf{e}_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(I)$. En effet, soit $x = (x_i)_{i\in I} \in \ell^2(I)$ tel que $x \in \{\mathbf{e}_i \ ;\ i \in I\}^\perp$, alors pour tout $i \in I$, on a $0 = \langle x, \mathbf{e}_i\rangle = x_i$, donc $x = 0$.

Exemple 8.6.3. Soient $x = \big(\frac{1}{n+1}\big)_{n\geq 0} \in \ell^2$ et E le sous-espace vectoriel de ℓ^2 engendré par x et les $\mathbf{e}_n$, avec $n \geq 1$. Alors E est un espace préhilbertien et $(\mathbf{e}_n)_{n\geq 1}$ est une famille orthonormale dans E. On a $\{\mathbf{e}_n \ ;\ n \geq 1\}^\perp = \{0\}$ dans E, mais $(\mathbf{e}_n)_{n\geq 1}$ n'est pas une base hilbertienne de E.

Proposition 8.6.2. *Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in J}$ une famille orthonormale finie dans E. Soit $F = \mathrm{Vect}(\{e_i \ ;\ i \in J\})$, F est de dimension finie, donc* *de Banach. Pour tout $x \in E$, soit $P_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F, alors on a $P_F(x) = \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i$ et $\left\|x - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i\in J}\left|\langle x, e_i\rangle\right|^2$.*

Démonstration. Soit $x \in E$. Pour tout $j \in J$, on a :

$$\left\langle x - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i, e_j\right\rangle = \langle x, e_j\rangle - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle\,\langle e_i, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle = 0\,.$$

Par conséquent, on a $x - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i \in F^\perp$. Il résulte de la proposition 8.3.7 et du théorème 8.3.1 que l'on a $P_F(x) = \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i$. D'après le théorème de Pythagore, on a $\|x\|^2 = \left\|x - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\right\|^2 + \left\|\sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\right\|^2$ et $\left\|\sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\right\|^2 = \sum_{i\in J}\left|\langle x, e_i\rangle\right|^2\|e_i\|^2 = \sum_{i\in J}\left|\langle x, e_i\rangle\right|^2$. Par conséquent, on a $\left\|x - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i\in J}\left|\langle x, e_i\rangle\right|^2$. ■

Proposition 8.6.3 (inégalité de Bessel). *Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale dans E. Pour tout $x \in E$, la famille $\left(|\langle x, e_i\rangle|^2\right)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}_+$ et on a $\sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.*

Démonstration. D'après la proposition 6.7.1, il suffit de montrer que pour toute partie finie J de I, on a $\sum_{i\in J}|\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$. Ceci résulte immédiatement de la proposition précédente.
Donnons une autre démonstration sans utiliser la proposition précédente.
Soit J une partie finie de I. Alors on a :

$$\sum_{i\in J}|\langle x, e_i\rangle|^2 = \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle\,\overline{\langle x, e_i\rangle} = \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle\,\langle e_i, x\rangle = \left\langle\sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i, x\right\rangle.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\left|\left\langle\sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i, x\right\rangle\right| \leq \|x\|\left\|\sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\right\|$, et d'après le théorème de Pythagore, on a $\left\|\sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\right\|^2 = \sum_{i\in J}|\langle x, e_i\rangle|^2$. Par conséquent, on a $\sum_{i\in J}|\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$. ■

Théorème 8.6.1 (égalité de Parseval). *Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale dans E. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(a) $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de E.

(b) Pour tout $x \in E$, la famille $\left(|\langle x, e_i\rangle|^2\right)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2\,.$$

(c) Pour tout $x \in E$, la famille $\big(\langle x, e_i\rangle e_i\big)_{i\in I}$ est sommable dans E et on a :

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i \,.$$

(d) Pour tout $x, y \in E$, la famille $\big(\langle x, e_i\rangle\, \overline{\langle y, e_i\rangle}\,\big)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{K}$ et on a :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle\, \overline{\langle y, e_i\rangle}\,.$$

Démonstration. Montrons l'implication (a) $\Longrightarrow$ (b). Soit $x \in E$. D'après l'inégalité de Bessel, la famille $\big(|\langle x, e_i\rangle|^2\big)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}_+$ et on a $\displaystyle\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de E, alors il existe une partie finie J de I telle que $\displaystyle\Big\|x - \sum_{i\in J} \lambda_i e_i\Big\|^2 < \varepsilon$, où $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Soit $F = \mathrm{Vect}(\{e_i \ ;\ i \in J\})$, d'après la proposition 8.6.2, la projection orthogonale $P_F(x)$ de x sur F est donnée par $\displaystyle P_F(x) = \sum_{i\in J} \langle x, e_i\rangle e_i$ et on a $\displaystyle\Big\|x - \sum_{i\in J} \langle x, e_i\rangle e_i\Big\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i\in J} \big|\langle x, e_i\rangle\big|^2$. Comme on a $\displaystyle\sum_{i\in J} \lambda_i e_i \in F$, alors $\displaystyle\Big\|x - \sum_{i\in J} \langle x, e_i\rangle e_i\Big\|^2 \leq \Big\|x - \sum_{i\in J} \lambda_i e_i\Big\|^2 < \varepsilon$. Par conséquent, on a $\displaystyle\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 < \varepsilon + \sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 < \varepsilon + \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc on a $\displaystyle\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$.
L'équivalence (b) $\Longleftrightarrow$ (c) résulte de la proposition 8.6.2, car pour tout $x \in E$ et pour toute partie finie J de I, on a $\displaystyle\Big\|x - \sum_{i\in J} \langle x, e_i\rangle e_i\Big\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i\in J} \big|\langle x, e_i\rangle\big|^2$.
L'implication (c) $\Longrightarrow$ (a) est triviale. Ainsi, on a montré les équivalences (a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c).
L'implication (d) $\Longrightarrow$ (b) est triviale. L'implication (c) $\Longrightarrow$ (d) résulte des proposition 8.4.1 et 6.7.6. ■

Remarque 8.6.1. Si $I = \mathbb{N}$ est dénombrable dans le théorème précédent, dans les propriétés (b), (c) et (d), on peut remplacer le mot famille par le mot série et le mot sommable par le mot convergente, voir proposition 8.3.4.

Corollaire 8.6.1. *Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert, F un sous-espace vectoriel fermé de H et $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de F. Soit P_F le projecteur orthogonal de H sur F. Alors pour tout $x \in H$, la famille $(\langle x, e_i\rangle e_i)_{i\in I}$ est sommable dans F et on a :*

$$P_F(x) = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i \,.$$

Démonstration. Comme $x - P_F(x) \in F^{\perp}$, alors on a $\langle x, e_i\rangle = \langle P_F(x), e_i\rangle$, pour tout $i \in I$. On applique alors le théorème précédent à l'élément $P_F(x)$ de l'espace hilbertien F. ■

Théorème 8.6.2. *Soit $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert. Alors toute famille orthonormale dans H est contenue dans une base hilbertienne de H. En particulier, Tout espace de Hilbert non nul admet une base hilbertienne.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 8 du supplément.
Il est souvent commode de montrer le théorème précédent par une méthode constructive.

Proposition 8.6.4 (procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt). *Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite finie ou infinie de vecteurs linéairement indépendants de E. Pour tout $n \geq 0$, soit $F_n = \text{Vect}(\{x_0, \dots, x_n\})$ le sous-espace vectoriel engendré par $x_0, \dots, x_n$. On pose :*

$$y_0 = x_0 \quad , \quad y_{n+1} = x_{n+1} - P_{F_n}(x_{n+1}) \quad , \quad e_0 = \frac{y_0}{\|y_0\|} \quad , \quad e_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{\|y_{n+1}\|} \,.$$

Alors la suite $(e_n)_{n\geq 0}$ est orthonormale et pour tout $n \geq 0$, on a $\text{Vect}(\{e_0, \dots, e_n\}) = F_n$.

Démonstration. On a $y_0 = x_0 \neq 0$. Soit $n \geq 0$, comme $x_{n+1} \notin F_n$, alors $y_{n+1} \neq 0$. Par ailleurs, on a $y_{n+1} \in F_{n+1} \cap F_n^{\perp}$. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq m$, par exemple $n < m$. Alors on a $n \leq m - 1$. On a $y_n \in F_n$ et $y_m \in F_{m-1}^{\perp} \subset F_n^{\perp}$, car $F_n \subset F_{m-1}$, donc on a $\langle y_n, y_m \rangle = 0$. Par conséquent, $(y_n)_{n\geq 0}$ est une famille orthogonale. Donc $(e_n)_{n\geq 0}$ est une famille orthonormale. On a $\text{Vect}(\{e_0\}) = \text{Vect}(\{y_0\}) = \text{Vect}(\{x_0\})$. Supposons que l'on a $\text{Vect}(\{e_0, \dots, e_n\}) = F_n$. On a $y_{n+1} \in F_{n+1}$, d'où $e_{n+1} \in F_{n+1}$, donc on a $\text{Vect}(\{e_0, \dots, e_n, e_{n+1}\}) \subset F_{n+1}$. On a :

$$x_{n+1} = y_{n+1} + P_{F_n}(x_{n+1}) \in \text{Vect}(\{e_0, \dots, e_n, e_{n+1}\}) \,,$$

d'où $F_{n+1} \subset \text{Vect}(\{e_0, \dots, e_n, e_{n+1}\})$. Donc on a $F_{n+1} = \text{Vect}(\{e_0, \dots, e_n, e_{n+1}\})$. Par conséquent, pour tout $n \geq 0$, on a $\text{Vect}(\{e_0, \dots, e_n\}) = F_n$. ∎

Théorème 8.6.3. *Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien de dimension infinie. Considérons les propriétés suivantes.*

(a) E est séparable.

(b) E possède une base hilbertienne dénombrable.

(c) Toute famille orthonormale de E est au plus dénombrable.

Alors on a (a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c). Si de plus E est un espace de Hilbert, alors (c) $\Longrightarrow$ (a).

Démonstration. Montrons l'implication (a) $\Longrightarrow$ (b). Par hypothèse, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ totale dans E. Autrement dit, $\text{Vect}(\{x_n\ ;\ n \geq 0\})$ est dense dans E. Pour tout $n \geq 0$, soit $F_n = \text{Vect}(\{x_0, \dots, x_n\})$. On pose $y_0 = x_0$ et pour tout $n \geq 0$, soit $y_{n+1} = x_{n+1} - P_{F_n}(x_{n+1})$. On montre, comme dans la proposition précédente, que pour tout $n \geq 0$, on a $\text{Vect}(\{y_0, \dots, y_n\}) = F_n$ et que pour tous $n, m \geq 0$ tels que $n \neq m$, on a $\langle y_n, y_m \rangle = 0$. Soit $D = \{n \geq 0\ ;\ y_n \neq 0\}$, alors on a $\text{Vect}(\{y_n\ ;\ n \in D\}) = \text{Vect}(\{y_n\ ;\ n \geq 0\}) = \text{Vect}(\{x_n\ ;\ n \geq 0\})$, donc $\text{Vect}(\{y_n\ ;\ n \in D\})$ est dense dans E. Comme E est de dimension infinie, alors D est dénombrable. Pour tout $n \in D$, soit $e_n = \dfrac{y_n}{\|y_n\|}$, alors $(e_n)_{n\in D}$ est une base hilbertienne dénombrable de E.
L'implication (b) $\Longrightarrow$ (a) résulte de la proposition 6.8.2.

Preuve de (b) $\Longrightarrow$ (c). Par hypothèse, E possède une base hilbertienne dénombrable $(e_n)_{n\geq 0}$. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale de E. Soit $n \geq 0$, d'après l'inégalité de Bessel, la famille $\big(|\langle e_n, x_i\rangle|^2\big)_{i\in I}$ est sommable. D'après la proposition 6.7.3, l'ensemble $I_n = \{i \in I \ ; \ \langle e_n, x_i\rangle \neq 0\}$ est au plus dénombrable. Comme $(e_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de E, d'après le théorème 8.6.1, pour tout $i \in I$, on a $0 \neq \|x_i\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x_i, e_n\rangle|^2$. Donc, pour tout $i \in I$, il existe $n \geq 0$ tel que $\langle e_n, x_i\rangle \neq 0$. Par conséquent, on a $I = \bigcup_{n\geq 0} I_n$. Donc I est au plus dénombrable.
Supposons de plus que E est un espace de Hilbert et montrons l'implication (c) $\Longrightarrow$ (a). D'après le théorème précédent, E possède une base hilbertienne. Par hypothèse, toute famille orthonormale de E est au plus dénombrable, donc E possède une base hilbertienne au plus dénombrable. Il résulte de la proposition 6.8.2 que E est séparable. ■

Théorème 8.6.4. *Soit* $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace de Hilbert. Deux bases hilbertiennes de* H *ont même cardinal.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 8 du supplément.

Définition 8.6.2. On appelle **dimension hilbertienne** d'un espace de Hilbert le cardinal d'une base hilbertienne.

Remarque 8.6.2. Soient E et F deux espaces préhilbertiens et $T : E \longrightarrow F$ application linéaire et isométrique. Il résulte de la proposition 8.4.7 que T conserve le produit scalaire. Autrement dit, pour tout $x, y \in E$, on a $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. Notons aussi que si T est linéaire, bijective et isométrique et si $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de E, alors $(T(e_i))_{i\in I}$ est une base hilbertienne de F.

Théorème 8.6.5. *Soit* $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace de Hilbert.*

1. *Si* H *est de dimension finie* n *et si* $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ *est une base hilbertienne de* H*, alors l'application*
$$\begin{array}{rccc} U : & H & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & x & \longmapsto & (\langle x, e_i\rangle)_{1\leq i\leq n} \end{array}$$
est linéaire, bijective et isométrique. On a $U^{-1}((\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i$*. Autrement dit, on identifie* $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *à* $\mathbb{K}^n$ *muni de son produit scalaire usuel.*

2. *Si* H *est séparable et de dimension infinie et si* $(e_n)_{n\geq 0}$ *est une base hilbertienne de* H*, alors l'application*
$$\begin{array}{rccc} U : & H & \longrightarrow & \ell^2 \\ & x & \longmapsto & (\langle x, e_n\rangle)_{n\geq 0} \end{array}$$
est linéaire, bijective et isométrique. On a $U^{-1}((\lambda_n)_{n\geq 0}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n e_n$*. Autrement dit, on identifie* $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *à* ℓ^2 *muni de son produit scalaire usuel.*

3. *Si H est de dimension infinie et non séparable et si $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H, alors l'application*

$$U: \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \ell^2(I) \\ x & \longmapsto & (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I} \end{array}$$

est linéaire, bijective et isométrique. On a $U^{-1}((\lambda_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$. Autrement dit, on identifie $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ à $\ell^2(I)$ muni de son produit scalaire usuel.

Démonstration. La propriété 1 est une simple vérification. Le fait que U est linéaire dans 2 et 3 est trivial. Le fait que U est isométrique dans 2 et 3 résulte du théorème 8.6.1. La surjectivité de U dans 2 et 3 résulte des propositions 8.3.3 et 8.3.4. ■

Corollaire 8.6.2. *Soient E et F des espaces de Hilbert, $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de E et $(f_j)_{j\in J}$ une base hilbertienne de F. S'il existe une application bijective σ de I sur J, alors il existe une application linéaire, bijective et isométrique V de E sur F telle que, pour tout $i \in I$, on ait $V(e_i) = f_{\sigma(i)}$. En particulier, deux espaces hilbertiens sont isométriquement isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension hilbertienne.*

Démonstration. Notons d'abord que $(f_{\sigma(i)})_{i\in I}$ une base hilbertienne de F. Soient $U_1 : E \longrightarrow \ell^2(I)$ l'application $x \longmapsto (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$ et $U_2 : F \longrightarrow \ell^2(I)$ l'application $y \longmapsto (\langle y, f_{\sigma(i)}\rangle)_{i\in I}$. Alors U_1 et U_2 sont des applications linéaires, bijectives et isométriques. Il suffit de prendre $V = U_2^{-1} \circ U_1$. ■

Exemple 8.6.4. L'espace de Hilbert $\ell^2 \oplus \ell^2$ est isométriquement isomorphe à ℓ^2.

8.7 Introduction aux opérateurs dans les espaces de Hilbert

Soient E et F deux espaces de Hilbert. Pour alléger les notations, on note par le même symbole les produits scalaires sur E et F. On note aussi par le même symbole les normes sur E, F et $\mathscr{L}(E;\, F)$. Une application linéaire continue entre espaces hilbertiens s'appelle aussi un **opérateur**.

Définition 8.7.1. Soient E et F des espaces de Hilbert.

1. Un opérateur $U \in \mathscr{L}(E;\, F)$ est dit **unitaire** si l'on a $U^* \circ U = \mathrm{id}_E$ et $U \circ U^* = \mathrm{id}_F$.

2. Un opérateur $T \in \mathscr{L}(E)$ est dit **normal** si l'on a $T^* \circ T = T \circ T^*$.

3. Un opérateur $T \in \mathscr{L}(E)$ est dit **auto-adjoint** si l'on a $T^* = T$. On dit aussi **symétrique** si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou **hermitien** si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

4. Un opérateur $T \in \mathscr{L}(E)$ est dit **positif** s'il est auto-adjoint et si pour tout $x \in E$, on a $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}_+$.

Exemple 8.7.1. Soient I un ensemble non vide et $\lambda = (\lambda_i)_{i\in I} \in \ell^\infty(I)$. Pour tout $x = (x_i)_{i\in I} \in \ell^2(I)$, on pose $M_\lambda(x) = (\lambda_i x_i)_{i\in I}$. Alors $M_\lambda \in \mathscr{L}(\ell^2(I))$ et on a les propriétés suivantes :

1. On a $M_\lambda^* = M_{\overline{\lambda}}$, où $\overline{\lambda} = (\,\overline{\lambda_i}\,)_{i\in I}$, et $\|M_\lambda\| = \|\lambda\|_\infty$.

2. Pour tout λ, $\mu \in \ell^\infty(I)$ et pour tout a, $b \in \mathbb{K}$, on a $M_{a\lambda+b\mu} = aM_\lambda + bM_\mu$ et $M_\lambda \circ M_\mu = M_\mu \circ M_\lambda$. Donc on a $M_\lambda \circ M_\lambda^* = M_\lambda^* \circ M_\lambda$, *i.e.* M_λ est un opérateur normal.

3. On a $M_\lambda = M_\lambda^*$ si et seulement si pour tout $i \in I$, on a $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

4. M_λ est positif si et seulement si pour tout $i \in I$, on a $\lambda_i \geq 0$.

5. M_λ est unitaire si et seulement si pour tout $i \in I$, on a $|\lambda_i| = 1$.

Exemple 8.7.2. Soient E, F deux espaces de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(E;\, F)$, alors l'opérateur $T^*\circ T \in \mathscr{L}(E)$ est positif. De même, l'opérateur $T\circ T^* \in \mathscr{L}(F)$ est positif. En particulier, si $P \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur orthogonal, alors P est positif.

Proposition 8.7.1. *Soient E, F deux espaces hilbertiens et $U \in \mathscr{L}(E;\, F)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *U est unitaire.*

(ii) *U est surjective et pour tout $x, y \in H$, on a $\langle U(x), U(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.*

(iii) *Pour toute base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ de E, $(U(e_i))_{i\in I}$ est une base hilbertienne de F.*

(iv) *Il existe une base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ de E telle que $(U(e_i))_{i\in I}$ soit une base hilbertienne de F.*

(v) *U est surjective et pour tout $x \in H$, on a $\|U(x)\| = \|x\|$.*

(vi) *U est surjective et on a $U^* \circ U = id_E$.*

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Si U est unitaire, on a $U\circ U^* = \mathrm{id}_F$, d'où $U(U^*(F)) = \mathrm{id}_F(F) = F$. Donc U est surjective. On a aussi $U^* \circ U = \mathrm{id}_E$, d'où pour tout $x, y \in E$, on a $\langle U(x), U(y)\rangle = \langle U^* \circ U(x), y\rangle = \langle x, y\rangle$.
Les implications (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) sont triviales. L'implication (iv) $\Longrightarrow$ (v) résulte du théorème 8.6.1. L'implication (v) $\Longrightarrow$ (vi) résulte de la proposition 8.4.7.
Preuve de (vi) $\Longrightarrow$ (i). Puisque l'on a $U^* \circ U = \mathrm{id}_E$, alors U est injective. Comme U est aussi surjective, alors U est bijective. D'après le théorème de l'application ouverte, il existe $U^{-1} \in \mathscr{L}(F;\, E)$ tel que $U^{-1}\circ U = \mathrm{id}_E$ et $U\circ U^{-1} = \mathrm{id}_F$. On a aussi $U^*\circ U = \mathrm{id}_E$, d'où $U^{-1} = U^*$. Par conséquent, on a $U^* \circ U = \mathrm{id}_E$ et $U \circ U^* = \mathrm{id}_F$. Autrement dit, U est unitaire. ■

Proposition 8.7.2. *Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *Pour tout $x, y \in H$, on a $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle T^*(x), T^*(y)\rangle$.*

(ii) *Pour tout $x \in H$, on a $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$.*

(iii) *L'opérateur T est normal.*

Démonstration. Pour tout $x, y \in H$, on a $\langle T^* \circ T(x), y\rangle = \langle T(x), T(y)\rangle$ et $\langle T \circ T^*(x), y\rangle = \langle T^*(x), T^*(y)\rangle$. Donc T est normal si et seulement si pour tout $x, y \in H$, on a $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle T^*(x), T^*(y)\rangle$. Autrement dit, on a l'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (iii).
Pour tout $x, y \in H$, on pose $f(x, y) = \langle T \circ T^*(x), y\rangle$ et $g(x, y) = \langle T^* \circ T(x), y\rangle$. Alors f et g sont des formes hermitiennes sur H. De plus, on a $f(x, x) = \langle T \circ T^*(x), x\rangle = \langle T^*(x), T^*(x)\rangle = \|T^*(x)\|^2$ et $g(x, x) = \langle T^* \circ T(x), x\rangle = \langle T(x), T(x)\rangle = \|T(x)\|^2$. L'opérateur T est normal si et seulement si $f = g$. D'après la proposition 8.1.1, $f = g$ si et seulement si pour tout $x \in H$, on a $f(x, x) = g(x, x)$. Par conséquent, T est normal si et seulement si pour tout $x \in H$, on a $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$. Autrement dit, on a l'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). ■

Proposition 8.7.3. *Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur normal. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. *$T(H)$ est dense dans H si et seulement si T est injective.*
2. *$T(H)$ est dense dans H si et seulement si $T^*(H)$ est dense dans H.*
3. *T est bijectif si et seulement si il existe une constante $c > 0$ telle que $c\|x\| \leq \|T(x)\|$, pour tout $x \in H$.*

Démonstration. 1. Puisque T est normal, il résulte de la proposition précédente que l'on a $\ker(T) = \ker(T^*)$. On déduit alors du corollaire 8.4.3 que $T(H)$ est dense dans H si et seulement si T est injective.
2. Ceci résulte de 1 et du corollaire 8.4.3.
3. Ceci résulte de la proposition 7.1.4 et de 1. ■

Corollaire 8.7.1. *Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur normal. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *T n'est pas bijectif.*

(ii) *On a $\inf\left\{\|T(x)\|\ ;\ x \in H \text{ et } \|x\| = 1\right\} = 0$.*

(iii) *Il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans H telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|x_n\| = 1$ et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T(x_n)\| = 0$.*

Démonstration. Soit $c = \inf\left\{\|T(x)\|\ ;\ x \in H \text{ et } \|x\| = 1\right\}$. Alors pour tout $x \in H$, on a $c\|x\| \leq \|T(x)\|$. On déduit de la proposition précédente que T n'est pas bijectif si et seulement si $c = 0$. Autrement dit, on a l'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii).
L'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) est triviale. ■

Proposition 8.7.4. *Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$. Pour tout $x, y \in H$, on pose $f(x, y) = \langle T(x), y\rangle$.*

1. *Si $T = T^*$, alors pour tout $x \in H$, on a $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$.*
2. *On a $T = T^*$ si et seulement si f est une forme hermitienne.*
3. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $T = T^*$ si et seulement si f est une forme bilinéaire symétrique.*
4. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $T = T^*$ si et seulement si pour tout $x \in H$, on a $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$.*

5. *On suppose que $T = T^*$. Alors $T(H)$ est dense dans H si et seulement si f est non dégénérée.*

Démonstration. 1. Supposons que l'on a $T = T^*$, alors pour tout $x \in H$, on a $\langle T(x), x\rangle = \langle x, T(x)\rangle = \overline{\langle T(x), x\rangle}$, d'où $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$.
2. Notons d'abord que d'après la proposition 8.4.5, f est une forme sesquilinéaire continue sur H. Supposons d'abord $T = T^*$. Alors pour tout $x, y \in H$, on a :

$$f(x, y) = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle = \langle x, T(y)\rangle = \overline{\langle T(y), x\rangle} = \overline{f(y, x)}\,.$$

Donc f est hermitienne.
Réciproquement, supposons f hermitienne. Alors pour tout $x, y \in H$, on a :

$$\langle T(x), y\rangle = f(x, y) = \overline{f(y, x)} = \overline{\langle T(y), x\rangle} = \langle x, T(y)\rangle = \langle T^*(x), y\rangle\,.$$

D'où on a $\langle (T - T^*)(x), y\rangle = 0$, pour tout $x, y \in H$. Par conséquent, on a $T - T^* = 0$.
La propriété 3 est une conséquence immédiate de 2.
La propriété 4 est une conséquence des 1, 2 et du corollaire 8.1.1.
5. On suppose $T = T^*$. Alors on a $\ker(T) = \mathrm{Im}(T^*)^\perp = \mathrm{Im}(T)^\perp$. D'après le corollaire 8.3.2, $\mathrm{Im}(T)$ est dense dans H si et seulement si $\mathrm{Im}(T)^\perp = \{0\}$. Supposons que $\mathrm{Im}(T)$ est dense dans H. Soit $x \in H$ tel que pour tout $y \in H$, on ait $f(x, y) = 0$. Alors, pour tout $y \in H$, on a $\langle T(x), y\rangle = 0$. On en déduit que l'on a $T(x) = 0$, d'où $x \in \ker(T) = \mathrm{Im}(T)^\perp$. Donc on a $x = 0$. Par conséquent, f est non dégénérée.
Réciproquement, supposons que f est non dégénérée. Soit $x \in \mathrm{Im}(T)^\perp$. Alors pour tout $y \in H$, on a $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle = 0$, d'où $f(x, y) = 0$. Donc on a $x = 0$. Par conséquent, on a $\mathrm{Im}(T)^\perp = \{0\}$. Autrement dit, $\mathrm{Im}(T)$ est dense dans H. ■

Proposition 8.7.5. *Soit $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert non nul. Pour tout opérateur auto-adjoint $T \in \mathscr{L}(H)$, on a $\|T\| = \sup\big\{|\langle T(x), x\rangle|\ ;\ x \in E$ et $\|x\| = 1\big\}$.*

Démonstration. D'après le corollaire 8.4.1, on a :

$$\|T\| = \sup\big\{|\langle T(x), y\rangle|\ ;\ x, y \in H \text{ et } \|x\| = \|y\| = 1\big\}\,.$$

Soit $\alpha = \sup\big\{|\langle T(x), x\rangle|\ ;\ x \in E \text{ et } \|x\| = 1\big\}$, alors on a $\alpha \leq \|T\|$. Pour tout $x, y \in H$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\langle T(x), y\rangle = e^{i\theta}|\langle T(x), y\rangle|$, d'où on a $\langle T(e^{-i\theta}x), y\rangle = |\langle T(x), y\rangle| \in \mathbb{R}$ avec $\|e^{-i\theta}x\| = \|x\|$. Par conséquent, on a :

$$\|T\| = \sup\big\{|\mathrm{Re}(\langle T(x), y\rangle)|\ ;\ x, y \in H \text{ et } \|x\| = \|y\| = 1\big\}\,.$$

Puisque T est auto-adjoint, on vérifie facilement que pour tout $x, y \in H$, on a :

$$4\mathrm{Re}(\langle T(x), y\rangle) = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle$$

d'où $4|\mathrm{Re}(\langle T(x), y\rangle)| \leq \alpha\|x+y\|^2 + \alpha\|x-y\|^2 = \alpha\big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\big)$. D'après l'identité du parallélogramme, on a $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$. Donc on a $|\mathrm{Re}(\langle T(x), y\rangle)| \leq \frac{\alpha}{2}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$, d'où $\|T\| \leq \alpha$. Par conséquent, on a $\|T\| = \alpha$. ■

Remarque 8.7.1. Les $\mathbb{C}$-espaces hilbertiens et les $\mathbb{R}$-espaces hilbertiens possèdent les mêmes propriétés, mais la différence entre ces deux structures apparaît seulement sur les opérateurs associés aux ces deux structures, comme cela est montré dans la proposition suivante.

Proposition 8.7.6. *Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert et $S, T \in \mathscr{L}(H)$.*

1. *Si pour tout $x \in H$, on a $\langle T(x), x\rangle = 0$, alors $T = 0$.*
2. *Si pour tout $x \in H$, on a $\langle S(x), x\rangle = \langle T(x), x\rangle$, alors $S = T$.*

Démonstration. 1. Pour tout $x, y \in H$, on a :

$$\langle T(x+y), x+y\rangle = \langle T(x), x\rangle + \langle T(x), y\rangle + \langle T(y), x\rangle + \langle T(y), y\rangle .$$

Comme pour tout $z \in H$, on a $\langle T(z), z\rangle = 0$, on en déduit que pour tout $x, y \in H$, on a $\langle T(x), y\rangle + \langle T(y), x\rangle = 0$. En remplaçant y par iy, on obtient aussi $-i\langle T(x), y\rangle + i\langle T(y), x\rangle = 0$. En multipliant par i, on obtient $\langle T(x), y\rangle - \langle T(y), x\rangle = 0$. Par conséquent, on a $\langle T(x), y\rangle = 0$, pour tout $x, y \in H$, d'où $T = 0$.
2. Supposons que pour tout $x \in H$, on a $\langle S(x), x\rangle = \langle T(x), x\rangle$, d'où $\langle (T-S)(x), x\rangle = 0$, pour tout $x \in H$. On applique 1, on obtient $S - T = 0$, donc $S = T$. ∎

Remarque 8.7.2. Soit $H = \mathbb{R}^2$, muni de son produit scalaire canonique, alors H est un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert. Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, soit $T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$. Alors pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $\langle T(x), x\rangle = 0$, mais $T \neq 0$.

Remarque 8.7.3. Soient H un $\mathbb{C}$-espace hilbertien et $T \in \mathscr{L}(H)$. Alors il existe deux opérateurs auto-adjoints $T_1, T_2 \in \mathscr{L}(H)$ tels que $T = T_1 + i\,T_2$. De plus, on a $\|T_1\| \leq \|T\|$ et $\|T_2\| \leq \|T\|$. En effet, il suffit de poser $T_1 = \dfrac{T + T^*}{2}$ et $T_2 = \dfrac{T - T^*}{2i}$.

Définition 8.7.2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $T : E \longrightarrow E$ une application linéaire et $\lambda \in \mathbb{K}$. S'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $T(x) = \lambda x$, on dit que :

1. λ est une **valeur propre** de T.
2. x est un **vecteur propre** de T associé à la valeur propre λ.

Dans ce cas, on appelle **sous-espace propre** associé à λ le sous-espace vectoriel $\ker(T - \lambda\,\mathrm{id}_H) = \{x \in H\ ;\ T(x) = \lambda x\}$. Autrement dit, le sous-espace propre associé à λ est l'ensemble de tous les vecteurs propres associés à λ et du vecteur nul.

Remarque 8.7.4. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $T : E \longrightarrow E$ une application linéaire et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) λ est une valeur propre de T.

(ii) $\ker(T - \lambda\,\mathrm{id}_E) \neq \{0\}$.

(iii) L'application linéaire $T - \lambda\,\mathrm{id}_E$ n'est pas injective.

Si E est de dimension finie, les conditions ci-dessus sont équivalentes à la condition suivante :

(iv) $\det(T - \lambda\,\mathrm{id}_E) = 0$. Autrement dit, λ est une racine du polynôme $p(\lambda) = \det(T - \lambda\,\mathrm{id}_E)$, appelé **polynôme caractéristique** de T. Dans ce cas, la multiplicité de la racine λ du polynôme p, est appelée **multiplicité de la valeur propre** λ.

Exemple 8.7.3. Soit $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire.

1. Si $T(x, y) = (x, 2y)$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors T admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. En effet, si $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$ et $T(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_2$.

2. Si $T(x, y) = (0, x)$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors T admet une seule valeur propre $\lambda = 0$.

3. Si $T(x, y) = (-y, x)$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors T n'admet aucune valeur propre.

Remarque 8.7.5. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et $T : E \longrightarrow E$ une application linéaire. Comme $p(\lambda) = \det(T - \lambda\, \mathrm{id}_E)$ est un polynôme de degré n, on déduit de la remarque 8.7.4 et du théorème de d'Alembert, théorème 3.3.5, que T possède n valeurs propres, comptées avec leurs multiplicités.

Proposition 8.7.7. *Soient $(H, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$.*

1. *Si T est unitaire, alors toutes les valeurs propres de T sont de module 1.*

2. *Si T est auto-adjoint, alors toutes les valeurs propres de T sont réelles.*

3. *Si T est positif, alors toutes les valeurs propres de T sont réelles positives.*

Démonstration. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de T et $x \in H \setminus \{0\}$ un vecteur propre de T associé à λ.
1. Supposons T unitaire, alors on a $|\lambda|\,\|x\| = \|\lambda x\| = \|T(x)\| = \|x\|$, donc $|\lambda| = 1$, car $x \neq 0$.
2. Supposons T auto-adjoint, alors on a $\lambda\,\|x\|^2 = \langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$, donc $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Supposons T positif, alors on a $\lambda\,\|x\|^2 = \langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}_+$, donc $\lambda \in \mathbb{R}_+$. ∎

Proposition 8.7.8. *Soient $(H, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur normal. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. *On a $\ker(T) = \ker(T^*)$.*

2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\ker(T - \lambda\, id_H) = \ker(T^* - \overline{\lambda}\, id_H)$. Autrement dit, soient $x \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on a $T(x) = \lambda x$ si et seulement si $T^*(x) = \overline{\lambda} x$.*

3. *Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de T, alors leurs sous-espaces propres associés sont orthogonaux. Autrement dit, on a $\ker(T - \lambda\, id_H) \perp \ker(T - \mu\, id_H)$.*

Démonstration. 1. Ceci résulte de la proposition 8.7.2.
2. Comme l'opérateur $T - \lambda\, \mathrm{id}_H$ est normal et on a $(T - \lambda\, \mathrm{id}_H)^* = T^* - \overline{\lambda}\, \mathrm{id}_H$, il résulte de 1 que l'on a $\ker(T - \lambda\, \mathrm{id}_H) = \ker(T^* - \overline{\lambda}\, \mathrm{id}_H)$.
3. Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de T et soient $x, y \in H$ tels que $T(x) = \lambda x$ et $T(y) = \mu y$. Alors on a $\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle = \langle x, \overline{\mu} y\rangle = \mu\langle x, y\rangle$. Comme on a $\lambda \neq \mu$, alors on a $\langle x, y\rangle = 0$. Autrement dit, on a $x \perp y$. ∎

Proposition 8.7.9. *Soient $(H, \langle\, ,\, \rangle)$ un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert de dimension finie et $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur normal. Alors il existe une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T. Autrement dit, soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de T, étant deux à deux distinctes, alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_k} = \ker(T - \lambda_k\, id_H)$ sont deux à deux* *orthogonaux et on a* $H = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$. *En particulier, si* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *telle que* $AA^* = A^*A$, *alors il existe une matrice unitaire* U *de* $M_n(\mathbb{C})$ *et une matrice diagonale* D *de* $M_n(\mathbb{C})$, *formée de valeurs propres de* A, *telles que* $A = UDU^*$.

Démonstration. On démontre ce résultat par récurrence sur la dimension de H. Si $\dim(H) = 1$, alors tout vecteur non nul de H est un vecteur propre de T, donc toute base hilbertienne de H est formée de vecteurs propres.
Supposons que le résultat est démontré pour tout $\mathbb{C}$-espace hilbertien de dimension $n \geq 1$. Soit H un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert de dimension $n+1$. On identifie H à $\mathbb{C}^{n+1}$ et $\mathscr{L}(H)$ à l'espace des matrices $M_{n+1}(\mathbb{C})$. En utilisant le théorème de d'Alembert, théorème 3.3.5, et en utilisant la notion de déterminant d'une matrice, on montre que T admet au moins une valeur propre λ. Soit x un vecteur propre, non nul, de T associé à la valeur propre λ. Soit $e_1 = \dfrac{x}{\|x\|}$, alors e_1 est un vecteur propre de T associé à λ et on a $\|e_1\| = 1$. Puisque T est normal, d'après la proposition précédente, e_1 est un vecteur propre de T^* associé à la valeur propre $\overline{\lambda}$. Autrement dit, on a $T^*(e_1) = \overline{\lambda} e_1$. Soit $E = \{e_1\}^{\perp}$, alors E est un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert de dimension n. Soit $x \in E$, alors on a $\langle T(x), e_1\rangle = \langle x, T^*(e_1)\rangle = \langle x, \overline{\lambda} e_1\rangle = \lambda\langle x, e_1\rangle = 0$. De même, on a $\langle T^*(x), e_1\rangle = \langle x, T(e_1)\rangle = 0$. Autrement dit, on a $T(x), T^*(x) \in E$. Soit $S \in \mathscr{L}(E)$, défini par $S(x) = T(x)$, pour tout $x \in E$. Pour tout $x, y \in E$, on a $\langle S(x), y\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$. Par conséquent, pour tout $y \in E$, on a $S^*(y) = T^*(y)$. Donc S est un opérateur normal. Par l'hypothèse de récurrence, il existe une base hilbertienne $(e_2, \ldots, e_{n+1})$ de E formée de vecteurs propres pour S. Par conséquent, $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ est une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres pour T. ■

Lemme 8.7.1. *Soient* $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *un* $\mathbb{R}$*-espace de Hilbert de dimension finie* $n \geq 1$ *et* $T \in \mathscr{L}(H)$ *un opérateur auto-adjoint, i.e.* $T^* = T$. *Alors* T *possède* n *valeurs propres réelles, comptées avec leurs multiplicités.*

Démonstration. On identifie H à $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{L}(H)$ à l'espace vectoriel des matrices $M_n(\mathbb{R})$. L'opérateur T est identifié à une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^t\!A$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λ est une valeur propre de A si et seulement si $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Considérons A comme une matrice sur $\mathbb{C}$, *i.e.* $A \in M_n(\mathbb{C})$. En utilisant le théorème de d'Alembert, théorème 3.3.5, on montre que A possède n valeurs propres, comptées avec leurs multiplicités, dans $\mathbb{C}$. Soit λ une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$ et montrons qu'alors $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $V \in \mathbb{C}^n$ tel que $V \neq 0$ et $A(V) = \lambda V$. Alors on a :

$$\lambda\langle V, V\rangle = \langle \lambda V, V\rangle = \langle A(V), V\rangle = \langle V, A^*(V)\rangle = \langle V, A(V)\rangle = \langle V, \lambda V\rangle = \overline{\lambda}\langle V, V\rangle\,.$$

D'où on a $\lambda = \overline{\lambda}$. Autrement dit, λ est réel. ■

Proposition 8.7.10. *Soient* $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ *un* $\mathbb{R}$*-espace de Hilbert de dimension finie et* $T \in \mathscr{L}(H)$ *un opérateur auto-adjoint, i.e.* $T^* = T$. *Alors il existe une base hilbertienne de* H *formée de vecteurs propres de* T. *Autrement dit, soient* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *les valeurs propres de* T, *étant deux à deux distinctes, alors les sous-espaces propres* $E_{\lambda_k} = \ker(T - \lambda_k\, id_H)$ *sont deux à deux orthogonaux et on a* $H = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$. *En particulier, si* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A = {}^t\!A$, *alors il existe une matrice* P *de* $M_n(\mathbb{R})$ *telle que* $P\,{}^t\!P = {}^t\!P P = I_n$ *et une matrice diagonale* D *de* $M_n(\mathbb{R})$, *formée de valeurs propres de* A, *telles que* $A = PD\,{}^t\!P$.

Démonstration. On utilise le lemme précédent et on calque la démonstration de la proposition 8.7.9. ■

Proposition 8.7.11 (Lax-Milgram). *Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in H$, on ait $c\|x\|^2 \leq |\langle T(x), x\rangle|$. Alors T est bijectif et on a $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$.*

Démonstration. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$c\|x\|^2 \leq |\langle T(x), x\rangle| \leq \|x\| \, \|T(x)\| \, .$$

D'où on a $c\|x\| \leq \|T(x)\|$. Il résulte de la proposition 7.1.4 que T est injective et $T(H)$ est fermé dans H. Soit $x \in T(H)^{\perp}$, alors $\langle T(x), x\rangle = 0$, d'où on a $x = 0$. Autrement dit, on a $T(H)^{\perp} = \{0\}$. Il résulte du corollaire 8.3.2 que $T(H)$ est dense dans H, d'où on a $T(H) = H$, donc T est bijective. Soit $y \in H$, alors il existe $x \in H$ tel que $T(x) = y$. D'où on a $c\|T^{-1}(y)\| \leq \|y\|$, donc $\|T^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{c}\|y\|$. Par conséquent, on a $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$. ■

Corollaire 8.7.2. *Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$.*

1. *Si $\|T\| < 1$, alors l'opérateur $T - id_H$ est bijectif.*

2. *Si T est unitaire, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \neq 1$, l'opérateur $T - \lambda\, id_H$ est bijectif.*

3. *Si $T^* = -T$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ de partie réelle non nulle, l'opérateur $T - \lambda\, id_H$ est bijectif.*

4. *On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si T est auto-adjoint, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, l'opérateur $T - \lambda\, id_H$ est bijectif.*

5. *Si T est positif, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}_+$, l'opérateur $T - \lambda\, id_H$ est bijectif.*

Démonstration. 1. Soit $c = 1 - \|T\| > 0$. Pour tout $x \in H$, on a $\langle (T - \mathrm{id}_H)(x), x\rangle = \langle T(x), x\rangle - \langle x, x\rangle$, donc on a :

$$|\langle (T - \mathrm{id}_H)(x), x\rangle| \geq \|x\|^2 - |\langle T(x), x\rangle| \geq \|x\|^2 - \|T\| \, \|x\|^2 = c\|x\|^2 \, .$$

D'après la proposition précédente, $T - \mathrm{id}_H$ est alors bijectif.
2. Puisque T est unitaire, alors on a $\|T\| = \|T^{-1}\| \leq 1$, avec égalité si H n'est pas l'espace nul. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $|\lambda| < 1$, alors $\lambda T^{-1} - \mathrm{id}_H$ est bijectif par 1. Donc $T - \lambda\, \mathrm{id}_H = T \circ (\mathrm{id}_H - \lambda T^{-1})$ est bijectif. Si $|\lambda| > 1$, alors $\frac{1}{\lambda}T - \mathrm{id}_H$ est bijectif par 1. Donc $T - \lambda\, \mathrm{id}_H = \lambda\big(\frac{1}{\lambda}T - \mathrm{id}_H\big)$ est bijectif.
3. Pour tout $x \in H$, on a $\langle T(x), x\rangle = \langle x, T^*(x)\rangle = -\langle x, T(x)\rangle = -\overline{\langle T(x), x\rangle}$, donc $\mathrm{Re}(\langle T(x), x\rangle) = 0$. Par conséquent, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$, on a :

$$|\langle (T - \lambda\, \mathrm{id}_H)(x), x\rangle| \geq |\mathrm{Re}(\langle (T - \lambda\, \mathrm{id}_H)(x), x\rangle)| = |\mathrm{Re}(\lambda)| \|x\|^2 \, .$$

D'après la proposition précédente, $T - \lambda\, \mathrm{id}_H$ est alors bijectif.
4. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Posons $S = iT$, alors on a $S^* = -S$. D'après 3, pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, l'opérateur $S - i\lambda\, \mathrm{id}_H$ es bijectif. Donc $T - \lambda\, \mathrm{id}_H = \frac{1}{i}(S - i\lambda\, \mathrm{id}_H)$ est bijectif.
5. Comme T est positif, alors pour tout $x \in H$, on a $\langle T(x), x\rangle \geq 0$. Donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda < 0$ et pour tout $x \in H$, on a :

$$\langle (T - \lambda\, \mathrm{id}_H)(x), x\rangle = \langle T(x), x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle \geq -\lambda\|x\|^2 \, .$$

Alors on déduit de la proposition précédente que si $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda < 0$, alors $T - \lambda\, \mathrm{id}_H$ est bijectif. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on déduit de 4 que $T - \lambda\, \mathrm{id}_H$ est bijectif. ■

8.8 Exercices

Exercice 8.1. Soient $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé dont la norme vérifie pour tout x, $y \in E$ l'identité du parallélogramme

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2 \big) .$$

Il s'agit de montrer que E est un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien. Autrement dit, il s'agit de montrer qu'il existe un produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$ sur E dont la norme associée est $\| \ \|$.

1. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x,y) = \tfrac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \big) .$$

   (i) Montrer que pour tout x, y de E, on a $f(2x,y) = 2f(x,y)$.

   (ii) Montrer que pour tout x_1, x_2, y de E, on a $f(x_1+x_2, y) = f(x_1,y) + f(x_2,y)$.

   (iii) Montrer que pour tout x, y de E et pour tout $q \in \mathbb{Q}$, on a $f(qx,y) = qf(x,y)$.

   (iv) Montrer que pour tout x, y de E, on a $|f(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\|$.

   (v) En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout x, y de E, on a $f(\lambda x, y) = \lambda f(x,y)$.

   (vi) En déduire que f est un produit scalaire sur E dont la norme associée est $\| \ \|$.

2. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et soit $g : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$, définie par :

$$g(x,y) = f(x,y) + if(x,iy) .$$

   Montrer que g est un produit scalaire sur E dont la norme associée est $\| \ \|$.

Solution. 1(i). D'après l'identité du parallélogramme, on a :

$$\|2x+y\|^2 + \|y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|x+y\|^2 \big) \quad \text{et} \quad \|2x-y\|^2 + \|y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|x-y\|^2 \big) .$$

Donc on a $\|2x+y\|^2 - \|2x-y\|^2 = 2\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \big)$. Par conséquent, on a :

$$f(2x,y) = \tfrac{1}{4}\big(\|2x+y\|^2 - \|2x-y\|^2 \big) = \tfrac{1}{4}\big(2\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \big) \big) = 2f(x,y) .$$

1(ii). Soient $x_1, x_2, y \in E$. Posons $s = f(x_1,y)$ et $t = f(x_2,y)$, alors on a :

$$\begin{aligned}
t+s &= \tfrac{1}{4}\big(\|x_1+y\|^2 - \|x_1-y\|^2 + \|x_2+y\|^2 - \|x_2-y\|^2 \big) \\
&= \tfrac{1}{4}\big(\|x_1+y\|^2 + \|x_2+y\|^2 - \big(\|x_1-y\|^2 + \|x_2-y\|^2 \big)\big) \\
&= \tfrac{1}{8}\big(\|x_1+x_2+2y\|^2 + \|x_1-x_2\|^2 - \big(\|x_1+x_2-2y\|^2 + \|x_1-x_2\|^2 \big)\big) \\
&= \tfrac{1}{8}\big(\|x_1+x_2+2y\|^2 - \|x_1+x_2-2y\|^2 \big) \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\Big\|\frac{x_1+x_2}{2} + y\Big\|^2 - \Big\|\frac{x_1+x_2}{2} - y\Big\|^2 \Big) \\
&= 2f\Big(\frac{x_1+x_2}{2}, y\Big) = f(x_1+x_2, y) .
\end{aligned}$$

1(iii). Montrons d'abord, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x, y \in E$, on a $f(nx, y) = nf(x, y)$. On a $f(0x, y) = f(0, y) = 0 = 0f(x, y)$. Supposons que l'on a $f(n_0 x, y) = n_0 f(x, y)$. Alors on a :

$$f((n_0+1)x, y) = f(n_0x+x, y) = f(n_0x, y)+f(x, y) = n_0f(x, y)+f(x, y) = (n_0+1)f(x, y)\,.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x, y \in E$, on a $f(nx, y) = nf(x, y)$.
On a $0 = f(0, y) = f(x - x, y) = f(x, y) + f(-x, y)$, d'où $f(-x, y) = -f(x, y)$. Donc on a $f(-nx, y) = nf(-x, y) = -nf(x, y)$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x, y \in E$, on a $f(nx, y) = nf(x, y)$.
Soit $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, avec $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, alors on a $f(qx, y) = f(n\frac{x}{m}, y) = nf(\frac{x}{m}, y)$. On a aussi $f(x, y) = f(m\frac{x}{m}, y) = mf(\frac{x}{m}, y)$, d'où $f(\frac{x}{m}, y) = \frac{1}{m}f(x, y)$. Par conséquent, on a $f(qx, y) = \frac{n}{m}f(x, y) = qf(x, y)$.
1(iv). On a $\|x + y\|^2 \leq \big(\|x\|+\|y\|\big)^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\,\|y\|$. On a $\big|\|x\|-\|y\|\big| \leq \|x-y\|$, d'où $-\|x - y\|^2 \leq -(\|x\| - \|y\|)^2 = -\|x\|^2 - \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\|$. Par conséquent, on a $f(x, y) \leq \|x\|\,\|y\|$. On a aussi $-f(x, y) = f(-x, y) \leq \|-x\|\,\|y\| = \|x\|\,\|y\|$. Donc on a $|f(x, y)| \leq \|x\|\,\|y\|$.
1(v). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors il existe une suite $(q_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{Q}$ telle que $\lambda = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n$. On a $|f(q_nx, y) - f(\lambda x, y)| = |f(q_nx - \lambda x, y)| \leq \|q_nx - \lambda x\|\,\|y\|$. Or on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|q_nx - \lambda x\| = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f(q_nx, y) = f(\lambda x, y)$. D'autre part, pour tout $n \geq 0$, on a $f(q_nx, y) = q_nf(x, y)$, et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q_nf(x, y) = \lambda f(x, y)$. Par conséquent, on a $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$.
1(vi). Pour tout $x, y \in E$, on a $f(x, y) = f(y, x)$ et $f(x, x) = \|x\|^2$. Par conséquent, f est un produit scalaire sur E dont la norme associée est $\|\ \|$.
2. On a $g(x, x) = f(x, x) + if(x, ix)$ et $f(x, ix) = \frac{1}{4}\big(\|x + ix\|^2 - \|x - ix\|^2\big) = \frac{\|x\|^2}{4}\big(|1 + i|^2 - |1 - i|^2\big) = 0$. Donc on a $g(x, x) = f(x, x) = \|x\|^2$.
On a $g(y, x) = f(y, x)+if(y, ix) = f(x, y)+if(ix, y)$, d'où $\overline{g(y, x)} = f(x, y)-if(ix, y) = f(x, y) + if(ix, -y)$. On a :

$$\begin{aligned} f(ix, -y) &= f(ix, i^2y) \\ &= \tfrac{1}{4}\big(\|ix + i^2y\|^2 - \|ix - i^2y\|^2\big) \\ &= \tfrac{1}{4}\big(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\big) = f(x, iy)\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\overline{g(y, x)} = g(x, y)$.
On a :

$$\begin{aligned} g(x_1 + x_2, y) &= f(x_1 + x_2, y) + if(x_1 + x_2, iy) \\ &= f(x_1, y) + f(x_2, y) + if(x_1, iy) + if(x_2, iy) \\ &= f(x_1, y) + if(x_1, iy) + f(x_2, y) + if(x_2, iy) \\ &= g(x_1, y) + g(x_2, y)\,. \end{aligned}$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $g(ax, y) = f(ax, y) + if(ax, iy) = af(x, y) + af(x, iy) = ag(x, y)$.
On a $g(ix, y) = f(ix, y) + if(ix, iy)$, $f(ix, y) = -f(ix, -y) = -f(x, iy)$ et

$$f(ix, iy) = \tfrac{1}{4}\big(\|ix + iy\|^2 - \|ix - iy\|^2\big) = \tfrac{1}{4}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\big) = f(x, y)\,.$$

D'où on a $g(ix, y) = -f(x, iy) + if(x, y) = i(f(x, y) + if(x, iy)) = ig(x, y)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors on a $g(\lambda x, y) = g(ax + ibx, y) = g(ax, iy) + ig(bx, y) = ag(x, y) + ibg(x, y) = (a + ib)g(x, y) = \lambda g(x, y)$. Par conséquent, g est un produit scalaire sur E dont la norme associée est $\| \ \|$.

Remarque 8.8.1. Pour tout $x \in \ell^2$, on pose $\|x\| = \|x\|_2 + \|x\|_\infty$. Alors $\| \ \|$ est une norme sur ℓ^2 équivalent à $\| \ \|_2$. En fait, pour tout $x \in \ell^2$, on a $\|x\|_2 \leq \|x\| \leq 2\|x\|_2$. Mais la norme $\| \ \|$ ne provient pas d'un produit scalaire. (On n'a pas l'identité du parallélogramme pour la norme $\| \ \|$, vérifier pour $\mathbf{e}_0$ et $\mathbf{e}_1$). Autrement dit, l'espace de Banach $(\ell^2, \| \ \|)$ est linéairement homéomorphe à $(\ell^2, \| \ \|_2)$ et pourtant $(\ell^2, \| \ \|)$ n'est pas de Hilbert.

Exercice 8.2. Montrer qu'il n'existe aucun produit scalaire sur $C([0, 1])$ dont la norme associée est la norme $\| \ \|_1$ ou la norme $\| \ \|_\infty$.
Solution. Pour tout $x \in [0, 1]$, soit $f(x) = x$ et $g(x) = -x + 1$. Alors on a $\|f + g\|_\infty = \|f - g\|_\infty = \|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$, donc la norme $\| \ \|_\infty$ ne vérifie pas l'identité du parallélogramme. Par conséquent, la norme $\| \ \|_\infty$ sur $C([0, 1])$ ne provient pas d'un produit scalaire.
On a $\|f + g\|_1 = 1$ et $\|f - g\|_1 = \|f\|_1 = \|g\|_1 = \frac{1}{2}$, donc la norme $\| \ \|_1$ ne vérifie pas l'identité du parallélogramme. Par conséquent, la norme $\| \ \|_1$ sur $C([0, 1])$ ne provient pas d'un produit scalaire.

Exercice 8.3. Rappelons que $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si $B = [b_{ij}] \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on note B^* la matrice transconjuguée de B. Autrement dit, on a $B^* = [\beta_{ij}] \in M_{p,n}(\mathbb{K})$, avec $\beta_{ij} = \overline{b_{ji}}$. Pour tout $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^*)$, où Tr est la trace.

1. Montrer que l'application $(A, B) \longmapsto \langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^*)$ est un produit scalaire sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
2. En déduire que si f est une forme linéaire sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$, alors il existe une unique matrice $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que pour tout $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on ait $f(A) = \mathrm{Tr}(AB^*)$.

Solution. 1. Notons d'abord que si $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, alors on a $AB^* \in M_n(\mathbb{K})$ et rappelons que si $D = [d_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Tr}(D) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii}$.
Pour tout $A, B, C \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle A + \lambda C, B\rangle &= \mathrm{Tr}((A + \lambda C)B^*) \\
&= \mathrm{Tr}(AB^* + \lambda CB^*) \\
&= \mathrm{Tr}(AB^*) + \lambda \mathrm{Tr}(CB^*) \\
&= \langle A, B\rangle + \lambda\langle C, B\rangle .
\end{aligned}$$

On a $\mathrm{Tr}(AB^*) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\overline{b_{ik}}\Big)$, d'où $\overline{\mathrm{Tr}(AB^*)} = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{p} \overline{a_{ik}}b_{ik}\Big) = \mathrm{Tr}(BA^*)$. Par conséquent, on a $\overline{\langle A, B\rangle} = \langle B, A\rangle$. On a $\mathrm{Tr}(AA^*) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{p} |a_{ik}|^2\Big)$, donc $\langle A, A\rangle \geq 0$ et

$\langle A, A\rangle = 0$ si et seulement si $A = 0$. Par conséquent, l'application $(A, B) \longmapsto \langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^*)$ est un produit scalaire sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
2. Soit f une forme linéaire sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Comme $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie, alors f est continue. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique matrice $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que pour tout $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on ait $f(A) = \langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^*)$.

Exercice 8.4. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien et $x, y \in E$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.

(ii) $\langle x, y\rangle = \|x\|\,\|y\|$.

(iii) Il existe $a \geq 0$ et $b \geq 0$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $ax = by$.

Solution. Il est clair que si $x = 0$ ou $y = 0$, alors on a (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). On suppose donc $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Par hypothèse, on a $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, d'où $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\|$. D'après la proposition 8.2.1, on a $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)$. Donc on a $\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) = \|x\|\,\|y\|$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$. On en déduit que l'on a $\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) = \|x\|\,\|y\|$.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Par hypothèse, on a $\langle x, y\rangle = \|x\|\,\|y\|$. D'après la proposition 8.2.1, x et y ne sont pas linéairement indépendants. Puisque $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda y$. D'où on a $\|x\|\,\|y\| = \langle x, y\rangle = \lambda\|y\|^2$, donc $\lambda > 0$.
Montrons l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i). Par hypothèse, il existe $a \geq 0$ et $b \geq 0$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $ax = by$. Comme on a supposé, $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors $a > 0$ et $b > 0$, d'où on a $x = \frac{b}{a}y$. Par conséquent, on a $\|x+y\| = \big\|\frac{b}{a}y+y\big\| = \big(1+\frac{b}{a}\big)\|y\| = \frac{b}{a}\|y\|+\|y\| = \|x\|+\|y\|$.

Exercice 8.5. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $x, y \in E$.

1. Montrer que $x \perp y$ si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\|x\| \leq \|x - \lambda y\|$.

2. Montrer que $x \perp y$ si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$.

Solution. 1. Soit $F = \mathrm{Vect}(\{y\}) = \big\{\lambda y\ ;\ \lambda \in \mathbb{K}\big\}$. Alors $x \perp y$ si et seulement si $x \in F^\perp$. D'après la proposition 8.3.7, on a $x \in F^\perp$ si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\|x\| \leq \|x - \lambda y\|$.
2. Supposons d'abord que l'on a $x \perp y$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + |\lambda|^2\,\|y\|^2 = \|x - \lambda y\|^2$, d'où $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$.
Réciproquement, supposons que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\|x\|^2+|\lambda|^2\,\|y\|^2+2\mathrm{Re}(\overline{\lambda}\langle x, y\rangle) = \|x+\lambda y\|^2 = \|x-\lambda y\|^2 = \|x\|^2+|\lambda|^2\,\|y\|^2-2\mathrm{Re}(\overline{\lambda}\langle x, y\rangle)\,.$$

Donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\mathrm{Re}\big(\overline{\lambda}\langle x, y\rangle\big) = 0$. En prenant $\lambda = \langle x, y\rangle$, on obtient $\langle x, y\rangle = 0$. Autrement dit, on a $x \perp y$.

Exercice 8.6. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{R}$–espace préhilbertien et $x, y \in E$.

1. Montrer que $\|x\| = \|y\|$ si et seulement si on a $\langle x + y, x - y\rangle = 0$.

2. Montrer que si $\|x\| = \|y\|$, alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\|ax + by\| = \|bx + ay\|$.
3. Soit $z \in E$. Montrer que si $\|x\| = \|y\|$ et si $x+y+z = 0$, alors on a $\|x-z\| = \|y-z\|$.
4. Montrer que si $\|x+y\| = \|x-y\|$, alors il existe $c \in \mathbb{R}\setminus\{0, -1, 1\}$ tel que $\|x+cy\| = \|x - cy\|$.

Solution. 1. On a $\langle x + y, x - y\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$. Donc $\|x\| = \|y\|$ si et seulement si on a $\langle x + y, x - y\rangle = 0$.
2. On a $\|ax + by\|^2 = a^2\|x\|^2 + b^2\|y\|^2 + 2ab\langle x, y\rangle$ et $\|bx + ay\|^2 = b^2\|x\|^2 + a^2\|y\|^2 + 2ab\langle x, y\rangle$. Donc, si $\|x\| = \|y\|$, alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\|ax + by\|^2 = \|bx + ay\|^2$, d'où $\|ax + by\| = \|bx + ay\|$.
3. On a $x+y+z = 0$, d'où $-z = x+y$. Donc on a $\|x-z\| = \|2x+y\|$ et $\|y-z\| = \|x+2y\|$. Comme on a $\|x\| = \|y\|$, d'après 2, on a $\|2x + y\| = \|x + 2y\|$, donc $\|x - z\| = \|y - z\|$.
4. Par hypothèse, on a $\|x + y\| = \|x - y\|$. D'après 2, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\|a(x+y)+b(x-y)\| = \|b(x+y)+a(x-y)\|$, d'où $\|(a+b)x+(a-b)y\| = \|(a+b)x-(a-b)y\|$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$ et $a \neq -b$, par exemple, $a = 1$ et $b = 2$. Soit $c = \frac{a-b}{a+b}$, alors $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$ et on a $\|x + cy\| = \|x - cy\|$.

Exercice 8.7. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien. Montrer que pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \geq 4\|x\|\,\|y\| .$$

Solution. D'après l'identité du parallélogramme, on a $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\,\|x\|^2 + \|y\|^2\,\big)$. Comme on a $\|x\|^2+\|y\|^2-2\|x\|\,\|y\| = \big(\|x\|-\|y\|\big)^2 \geq 0$, alors on a $\|x\|^2+\|y\|^2 \geq 2\|x\|\,\|y\|$. Par conséquent, on a $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \geq 4\|x\|\,\|y\|$.

Exercice 8.8. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien. Montrer que pour tout $x, y, z \in E$, on a l'égalité $\|x + y + z\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x + y\|^2 + \|y + z\|^2 + \|z + x\|^2$.
Solution. On a :

$$\begin{aligned}
\|x + y + z\|^2 &= \langle x + y + z, x + y + z\rangle \\
&= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 + \langle y, z\rangle + \langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle + \|z\|^2 \\
&= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 + \langle y, z\rangle + \langle z, y\rangle + \|z\|^2 + \langle z, x\rangle + \langle x, z\rangle .
\end{aligned}$$

On en déduit $\|x + y + z\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x + y\|^2 + \|y + z\|^2 + \|z + x\|^2$.

Exercice 8.9. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien.

1. Montrer que pour tout $x, y \in E$ tels que $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on a :
$$\Big\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \Big\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\|\,\|y\|} .$$
Autrement dit, on a $\Big\| \frac{\|y\|}{\|x\|}x - \frac{\|x\|}{\|y\|}y \Big\| = \|x - y\|$.
2. En déduire que pour tout $x, y, z \in E$, on a :
$$\|y\|\,\|x - z\| \leq \|x\|\,\|y - z\| + \|z\|\,\|x - y\| .$$

3. En déduire que pour tout x, y, z, $t \in E$, on a :

$$\|x-z\|\,\|y-t\| \leq \|x-y\|\,\|z-t\| + \|y-z\|\,\|x-t\| .$$

Solution. 1. On a :

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2}\right\|^2 &= \left\langle \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2}, \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2}\right\rangle \\
&= \frac{\langle x,x\rangle}{\|x\|^4} - \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^2\,\|y\|^2} - \frac{\langle y,x\rangle}{\|x\|^2\,\|y\|^2} + \frac{\langle y,y\rangle}{\|y\|^4} \\
&= \frac{1}{\|x\|^2} - \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^2\,\|y\|^2} - \frac{\langle y,x\rangle}{\|x\|^2\,\|y\|^2} + \frac{1}{\|y\|^2} \\
&= \frac{\|y\|^2 - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \|x\|^2}{\|x\|^2\,\|y\|^2} = \frac{\|x-y\|^2}{\|x\|^2\,\|y\|^2} .
\end{aligned}$$

Donc on a $\left\|\frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2}\right\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\|\,\|y\|}$, d'où l'égalité $\left\|\frac{\|y\|}{\|x\|}x - \frac{\|x\|}{\|y\|}y\right\| = \|x-y\|$.
2. L'inégalité est triviale si $x = 0$ ou $y = 0$ ou $z = 0$. Donc, on peut supposer $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z \neq 0$.
On a :

$$\begin{aligned}
\|x-z\| &= \left\|\frac{\|z\|}{\|x\|}x - \frac{\|x\|}{\|z\|}z\right\| \\
&\leq \left\|\frac{\|z\|}{\|x\|}x - \frac{\|z\|\,\|x\|}{\|y\|^2}y\right\| + \left\|\frac{\|z\|\,\|x\|}{\|y\|^2}y - \frac{\|x\|}{\|z\|}z\right\| \\
&= \|z\|\left\|\frac{1}{\|x\|}x - \frac{\|x\|}{\|y\|^2}y\right\| + \|x\|\left\|\frac{\|z\|}{\|y\|^2}y - \frac{1}{\|z\|}z\right\| .
\end{aligned}$$

D'où on a :

$$\begin{aligned}
\|y\|\,\|x-z\| &\leq \|z\|\left\|\frac{\|y\|}{\|x\|}x - \frac{\|x\|}{\|y\|}y\right\| + \|x\|\left\|\frac{\|z\|}{\|y\|}y - \frac{\|y\|}{\|z\|}z\right\| \\
&= \|z\|\,\|x-y\| + \|x\|\,\|y-z\| .
\end{aligned}$$

3. Soient $x' = x-y$, $y' = x-z$ et $z' = x-t$. D'après 2, on a :

$$\|y'\|\,\|x'-z'\| \leq \|x'\|\,\|y'-z'\| + \|z'\|\,\|x'-y'\|$$

Or on a $x'-z' = t-y$, $y'-z' = t-z$ et $x'-y' = y-z$, d'où :

$$\|x-z\|\,\|y-t\| \leq \|x-y\|\,\|z-t\| + \|y-z\|\,\|x-t\| .$$

Exercice 8.10. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace normé. Pour tout $x \in E$, on pose :

$$T(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad \|x\| \leq 1 , \\ \dfrac{x}{\|x\|} & \text{si} \quad \|x\| \geq 1 . \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $x, y \in E$, on a $\|T(x) - T(y)\| \leq 2\|x - y\|$.
2. Donner un exemple d'espace normé où la constante 2 ne peut être améliorée.
3. Montrer que si $(E, \| \ \|)$ est un espace préhilbertien, alors pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|\,.$$

Solution. 1. Soient $x, y \in E$. Si on a $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$, alors $T(x) = x$ et $T(y) = y$, d'où $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| \leq 2\|x - y\|$. Supposons maintenant $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \geq 1$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\|T(x) - T(y)\| &= \left\| x - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\
&\leq \|x - y\| + \left\| y - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\
&= \|x - y\| + \|y\| - 1 \\
&\leq \|x - y\| + \|y\| - \|x\| \\
&\leq \|x - y\| + \|x - y\| \ = \ 2\|x - y\|\,.
\end{aligned}$$

On suppose maintenant $\|x\| \geq 1$ et $\|y\| \geq 1$. D'après l'exercice 6.13, on a :

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{2}{\max(\|x\|, \|y\|)} \|x - y\|\,.$$

On en déduit que l'on a $\|T(x) - T(y)\| \leq 2\|x - y\|$.
2. Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|(t, s)\| = |t| + |s|$, où $(t, s) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \geq 1$, soit $x_n = \big(1 - \frac{1}{n^2}, 0\big), y_n = \big(1 - \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\big) \in \mathbb{R}^2$. Alors on a $\|x_n - y_n\| = \frac{1}{n}$, $\|y_n\| = \frac{n^2+n-1}{n^2}$, $\dfrac{y_n}{\|y_n\|} = \frac{1}{n^2+n-1}(n^2 - 1, n)$, $\|T(x_n) - T(y_n)\| = \left\| x_n - \dfrac{y_n}{\|y_n\|} \right\| = \dfrac{2n^3 - n^2 - n + 1}{n^4 + n^3 - n^2}$, d'où on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\|T(x_n) - T(y_n)\|}{\|x_n - y_n\|} = 2$. Par conséquent, on ne peut pas améliorer la constante 2 dans l'inégalité dans 1.
3. On suppose que $(E, \| \ \|)$ est un espace préhilbertien et que la norme $\| \ \|$ est associée au produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$. Soient $x, y \in E$, il s'agit de montrer que l'on a $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$. Supposons d'abord que l'on a $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$, alors $T(x) = x$ et $T(y) = y$, d'où $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$. Supposons maintenant $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \geq 1$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\|T(x) - T(y)\|^2 &= \left\| x - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \\
&= \left\langle x - \frac{y}{\|y\|}, x - \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \frac{1}{\|y\|} \big[\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle\big] + 1 \\
&= \langle x, x\rangle - \frac{1}{\|y\|} \big(2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)\big) + 1\,.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a $\|x-y\|^2 = \langle x, x\rangle - 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2$, d'où :

$$\begin{aligned}
\|T(x)-T(y)\|^2 - \|x-y\|^2 &= \Big(1 - \frac{1}{\|y\|}\Big)2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) + 1 - \|y\|^2 \\
&\leq \Big(1 - \frac{1}{\|y\|}\Big)2\|x\|\,\|y\| + 1 - \|y\|^2 \\
&\leq 2\|y\| - 1 - \|y\|^2 \;=\; -\big(\|y\|+1\big)^2 \leq 0\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\|T(x)-T(y)\| \leq \|x-y\|$.
On suppose maintenant $\|x\| \geq 1$ et $\|y\| \geq 1$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\|T(x)-T(y)\|^2 &= \Big\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\Big\|^2 \\
&= \Big\langle \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\Big\rangle \\
&= 2 - \frac{1}{\|x\|\,\|y\|}\big(\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle\big) \\
&= 2 - \frac{2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)}{\|x\|\,\|y\|}\,.
\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
\|T(x)-T(y)\|^2 - \|x-y\|^2 &= 2 - \big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) + \big(1 - \frac{1}{\|x\|\,\|y\|}\big)2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) \\
&\leq 2 - \big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) + \big(1 - \frac{1}{\|x\|\,\|y\|}\big)2\|x\|\,\|y\| \\
&= -\|x\|^2 - \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| \;=\; -\big(\|x\| + \|x\|\big)^2 \leq 0\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\|T(x)-T(y)\| \leq \|x-y\|$.

Exercice 8.11. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite finie d'éléments de E.

1. Montrer que l'on a :

$$\sum_{i<j\leq n} \|x_i - x_j\|^2 = n\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \;-\; \Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i\Big\|^2\,. \tag{8.1}$$

2. En déduire que si $\|x_i - x_j\| \geq 2$ pour $i \neq j$, alors le rayon d'une boule contenant ces n points est au moins $\geq \sqrt{\frac{2(n-1)}{n}}$.

Solution. 1. Notons d'abord que pour $n = 2$, l'équation (8.1) n'est autre que l'identité du parallélogramme. On montre l'équation (8.1) par récurrence sur n. Supposons que l'équation (8.1) est vraie à l'ordre $n \geq 2$. Soient $(x_i)_{1\leq i\leq n+1}$ une suite finie d'éléments de E. Alors on a :

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n+1} x_i \Big\|^2 = \Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \big(\langle x_i, x_{n+1}\rangle + \langle x_{n+1}, x_i\rangle\big)\,.$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{i<j\leq n+1} \|x_i - x_j\|^2 &= \sum_{i<j\leq n} \|x_i - x_j\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \|x_i - x_{n+1}\|^2 \\ &= n\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \|x_i - x_{n+1}\|^2\,. \end{aligned}$$

Comme on a aussi :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \|x_i - x_{n+1}\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \langle x_i - x_{n+1}, x_i - x_{n+1}\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(\langle x_i, x_i\rangle + \langle x_{n+1}, x_{n+1}\rangle - \langle x_i, x_{n+1}\rangle - \langle x_{n+1}, x_i\rangle\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + n\,\|x_{n+1}\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \big(\langle x_i, x_{n+1}\rangle + \langle x_{n+1}, x_i\rangle\big)\,. \end{aligned}$$

Alors on en déduit que l'on a $\displaystyle\sum_{i<j\leq n+1} \|x_i - x_j\|^2 + \Big\| \sum_{i=1}^{n+1} x_i \Big\|^2 = (n+1)\sum_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^2$. Donc l'équation (8.1) est vraie à l'ordre $n+1$. Par conséquent, l'équation (8.1) est vraie pour tout $n \geq 2$.

2. Soient $a \in E$ et $r > 0$ tels que $x_1, \ldots, x_n \in B'(a, r)$. On suppose de plus que si $i \neq j$, on a $\|x_i - x_j\| \geq 2$. D'après ce qui précède, on a :

$$\sum_{i<j\leq n} \|x_i - a - (x_j - a)\|^2 = n\sum_{i=1}^{n} \|x_i - a\|^2 - \Big\| \sum_{i=1}^{n} (x_i - a) \Big\|^2\,.$$

D'où on a :

$$\sum_{i<j\leq n} \|x_i - x_j\|^2 + \Big\| \sum_{i=1}^{n} (x_i - a) \Big\|^2 = n\sum_{i=1}^{n} \|x_i - a\|^2 \leq n(nr^2)\,.$$

Comme on a $\displaystyle\sum_{i<j\leq n} \|x_i - x_j\|^2 \geq 4\frac{n^2-n}{2}$, alors on a $2n(n-1) \leq n^2r^2$. Par conséquent, on a $\sqrt{\frac{2(n-1)}{n}} \leq r$.

Exercice 8.12. Soit $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert.

1. Soient A et B des parties convexes, fermées et non vides de H telles que $A \subset B$. Montrer que pour tout $x \in H$, on a $\|P_A(x) - P_B(x)\|^2 \leq 2\big(d(x,A)^2 - d(x,B)^2\big)$.

2. Soient $(C_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de convexes fermés et non vides de H et C l'adhérence de leur réunion. Montrer que C est convexe et fermé dans H et que pour tout $x \in H$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{C_n}(x) = P_C(x)$.

3. Soient $(C_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de convexes fermés et non vides de H et C leur intersection.

   (a) Montrer que si C est non vide, alors pour tout $x \in H$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{C_n}(x) = P_C(x)$.

   (b) Montrer que si C est vide, alors pour tout $x \in H$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x, C_n) = +\infty$. Ceci démontre en particulier que si l'un des C_n est borné, alors C n'est pas vide.

Solution. 1. D'après l'identité du parallélogramme, on a :

$$\begin{aligned}\|P_A(x) - P_B(x)\|^2 + \|2x - P_A(x) - P_B(x)\|^2 &= 2\big(\|x - P_A(x)\|^2 + \|x - P_B(x)\|^2\big) \\ &= 2\big(d(x,A)^2 + d(x,B)^2\big)\end{aligned}$$

d'où $\|P_A(x) - P_B(x)\|^2 = 2\big(d(x,A)^2 + d(x,B)^2\big) - 4\Big\|x - \dfrac{P_A(x)+P_B(x)}{2}\Big\|^2$. Comme on a $P_A(x), P_B(x) \in B$, et B est convexe, alors on a $\dfrac{P_A(x)+P_B(x)}{2} \in B$, d'où :

$$d(x,B) \leq \Big\|x - \frac{P_A(x)+P_B(x)}{2}\Big\|.$$

Par conséquent, on a $\|P_A(x) - P_B(x)\|^2 \leq 2\big(d(x,A)^2 - d(x,B)^2\big)$.
2. Il est clair que $\bigcup\limits_{n\geq 0} C_n$ est convexe. D'après l'exercice 6.10, $C = \overline{\bigcup\limits_{n\geq 0} C_n}$ est convexe. Par ailleurs, l'adhérence d'une partie est toujours fermée dans un espace topologique. Soit $x \in H$. Pour tout $n \geq 0$, on a $C_n \subset C$, donc on a $d(x,C) \leq d(x,C_n)$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $y \in C$ tel que $d(x,y) < d(x,C) + \frac{\varepsilon}{2}$. Il existe aussi $n_0 \geq 0$ et $y_{n_0} \in C_{n_0}$ tel que $d(y, y_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc on a $d(x, y_{n_0}) \leq d(x,y) + d(y, y_{n_0}) < d(x,C) + \varepsilon$. Comme, pour tout $n \geq n_0$, on a $d(x,C_n) \leq d(x, C_{n_0})$, alors pour tout $n \geq n_0$, on a $d(x,C_n) < d(x,C) + \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $n \geq n_0$, on a $|d(x,C) - d(x,C_n)| < \varepsilon$. Autrement dit, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x,C_n) = d(x,C)$. D'après 1, pour tout $n \geq 0$, on a $\|P_{C_n}(x) - P_C(x)\|^2 \leq 2\big(d(x,C_n)^2 - d(x,C)^2\big)$. On en déduit que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{C_n}(x) = P_C(x)$.
3. On suppose maintenant que $(C_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de convexes fermés et non vides de H et soit $C = \bigcap\limits_{n\geq 0} C_n$.
3(a). On suppose C non vide. Notons aussi que C est convexe et fermé dans H. Soit $x \in H$. Alors $(d(x,C_n))_{n\geq 0}$ est une suite croissante positive et majorée par $d(x,C)$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x,C_n)$ existe dans $\mathbb{R}_+$ et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x,C_n) \leq d(x,C)$. Pour tout $n \geq 0$, soit $x_n = P_{C_n}(x)$. D'après 1, pour tout $m \geq n$, on a $\|x_m - x_n\|^2 \leq 2\big(d(x,C_m)^2 - d(x,C_n)^2\big)$,

donc la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy, donc $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers un élément $y \in H$. Soit $p \geq 0$. Comme pour tout $n \geq p$, on a $x_n \in C_p$, alors $y \in C_p$, donc on a $y \in C$. D'où on a $d(x, C) \leq d(x, y) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(x, P_{C_n}(x)) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(x, C_n)$. Par conséquent, on a $d(x, C) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(x, C_n)$. Or pour tout $n \geq 0$, on a $\|P_{C_n}(x) - P_C(x)\|^2 \leq 2\big(d(x, C)^2 - d(x, C_n)^2\big)$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{C_n}(x) = P_C(x)$.
3(b). On a vu ci-dessus que si $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x, C_n)$ existe dans $\mathbb{R}_+$, alors C est non vide, donc si C est vide, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x, C_n) = +\infty$.

Remarque 8.8.2. Soit $E = C([0,\, 1])$ munit de la norme $\|\ \|_\infty$. On sait que $(E, \|\ \|_\infty)$ est un espace de Banach. Soit $C_n = \big\{f \in E\ ;\ \|f\|_\infty \leq 1,\ f(0) = 1 \text{ et } f(x) = 0 \text{ pour tout } x \geq \frac{1}{n}\big\}$. Alors $(C_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de convexes fermés bornés et non vides de E telle que $\bigcap\limits_{n\geq 1} C_n = \emptyset$.

Exercice 8.13.[**Lemme du centre**] Soit A un sous-ensemble non vide borné d'un espace de Hilbert $(H, \langle\ ,\ \rangle)$.

1. Pour tout $t \geq 0$, soit $C_t = \big\{x \in H\ ;\ A \subset B'(x, t)\big\}$. Montrer que C_t est une partie fermée, bornée et convexe de H.

2. Montrer qu'il existe une unique boule fermée de rayon minimum contenant A.

Solution. 1. Notons d'abord que puisque A est borné, alors il existe $z \in H$ et $t \geq 0$ tels que $A \subset B'(z, t)$. Soit $t \geq 0$. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans C_t et $x \in H$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Soit $a \in A$. Alors pour tout $n \geq 0$, on a $\|x_n - a\| \leq t$. Comme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - a = x - a$, alors on a $\|x - a\| \leq t$. Par conséquent, on a $A \subset B'(x, t)$, d'où $x \in C_t$. Donc C_t est une partie fermée de H. Soient $x, y \in C_t$ et $s \in [0,\, 1]$. Pour tout $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned}
\|sx + (1-s)y - a\| &= \|sx + (1-s)y - sa - (1-s)a\| \\
&\leq \|x - a\| + (1-s)\|y - a\| \\
&\leq st + (1-s)t = t\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $sx + (1-s)y \in C_t$, donc C_t est convexe. Soient $x, y \in C_t$. Comme A est non vide, alors il existe $a \in A$ et on a $\|x - y\| \leq \|x - a\| + \|a - y\| \leq 2t$, donc on a $\delta(C_t) \leq 2t$. En particulier, C_t est bornée.
2. Soit $r = \inf\big\{t \geq 0\ ;\ C_t \neq \emptyset\big\}$. Comme pour tout $0 \leq t \leq s$, on a $C_t \subset C_s$, alors on a $C_r = \bigcap\limits_{n\geq 1} C_{\frac{1}{n}+r}$. D'après l'exercice précédent, l'intersection de toute suite décroissante de parties bornées, fermées convexes et non vides d'un espace de Hilbert est non vide, donc $C_r \neq \emptyset$. Soit $x \in C_r$. Alors $B'(x, r)$ est une boule fermée de rayon minimum contenant A. Montrons l'unicité. Supposons qu'il existe $x, y \in H$ tels que $x \neq y$ et $A \subset B'(x, r) \cap B'(y, r)$. On a vu ci-dessus que l'on a alors $\|x - y\| \leq 2r$, d'où

$\dfrac{\|x-y\|^2}{4} \le r^2$. Soit $r' = \sqrt{r^2 - \dfrac{\|x-y\|^2}{4}}$, alors on a $0 \le r' < r$. Pour tout $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned} \left\|a - \tfrac{x+y}{2}\right\| \le r' \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\|a - \tfrac{x+y}{2}\right\|^2 \le r^2 - \frac{\|x-y\|^2}{4} \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\|a - \tfrac{x+y}{2}\right\|^2 + \frac{\|x-y\|^2}{4} \le r^2\,. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après l'identité du parallélogramme, on a :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\big(\|a-x\|^2 + \|a-y\|^2\big) &= \tfrac{1}{4}\big(\|2a-(x+y)\|^2 + \|x-y\|^2\big) \\ &= \tfrac{1}{4}\big(4\left\|a - \tfrac{x+y}{2}\right\|^2 + \|x-y\|^2\big) \\ &= \left\|a - \tfrac{x+y}{2}\right\|^2 + \frac{\|x-y\|^2}{4}\,. \end{aligned}$$

Or on a $\|a-x\|^2 \le r^2$ et $\|a-y\|^2 \le r^2$, d'où $\left\|a - \tfrac{x+y}{2}\right\|^2 + \dfrac{\|x-y\|^2}{4} \le r^2$. Par conséquent, on a $A \subset B'\Big(\tfrac{x+y}{2}, r'\Big)$, ce qui est impossible car $r' < r$. Donc on a bien $x = y$.

Exercice 8.14. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien. Soient $(x_n)_{n\ge 0}$ et $(y_n)_{n\ge 0}$ deux suites dans $B_E = \{x \in E\ ;\ \|x\| \le 1\}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle x_n, y_n\rangle = 1$. Montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = 0\,.$$

Solution. Pour tout $n \ge 0$, on a $\|x_n - y_n\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x_n, y_n\rangle) = \|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 \le 2$, d'où $0 \le \|x_n - y_n\|^2 \le 2 - 2\mathrm{Re}(\langle x_n, y_n\rangle)$. Or on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\mathrm{Re}(\langle x_n, y_n\rangle) = 2$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

Exercice 8.15. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien, $x \in E$ et $(x_n)_{n\ge 0}$ une suite dans E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle x_n, x\rangle = \langle x, x\rangle$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$. Montrer que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
Solution. Pour tout $n \ge 0$, on a $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - \langle x_n, x\rangle - \langle x, x_n\rangle$. Comme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle x_n, x\rangle = \lim\limits_{n\to+\infty} \langle x, x_n\rangle = \lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\|^2 = \|x\|^2$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$. Autrement dit, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

Exercice 8.16. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert ou même préhilbertien, $x \in H$ et $(x_n)_{n\ge 0}$ une suite dans H. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) La suite $(x_n)_{n\ge 0}$ converge vers x dans H.

(ii) La suite $\big(\|x_n\|\big)_{n\ge 0}$ converge vers $\|x\|$ et pour tout $y \in H$, la suite $\big(\langle x_n, y\rangle\big)_{n\ge 0}$ converge vers $\langle x, y\rangle$ dans $\mathbb{K}$.

Solution. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est triviale. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) résulte de l'égalité suivante $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}(\langle x_n, x\rangle)$.

Remarque 8.8.3. Au chapitre 10, on va donner un résultat, théorème 10.4.1, généralisant l'exercice précédent.

Exercice 8.17. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de vecteurs deux à deux orthogonaux dans H. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) La série $\sum x_n$ est convergente dans H.

(ii) Pour tout $y \in H$, la série $\sum \langle x_n, y\rangle$ est convergente dans $\mathbb{K}$.

Solution. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $y \in H$. Pour tout $m \geq n \geq 0$, on a :

$$\Big|\sum_{k=n}^{m}\langle x_k, y\rangle\Big| = \Big|\Big\langle \sum_{k=n}^{m} x_k, y\Big\rangle\Big| \leq \Big\|\sum_{k=n}^{m} x_k\Big\|\, \|y\|\,.$$

Donc la série $\sum\langle x_n, y\rangle$ vérifie le critère de Cauchy, donc elle est convergente dans $\mathbb{K}$.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Pour tout $n \geq 0$ et pour tout $y \in H$, soit $S_n(y) = \sum_{k=0}^{n}\langle y, x_k\rangle = \big\langle y, \sum_{k=0}^{n} x_k\big\rangle$. D'après la proposition 8.4.1, S_n est une forme linéaire continue sur H et on a $\|S_n\|^2 = \Big\|\sum_{k=0}^{n} x_k\Big\|^2 = \sum_{k=0}^{n}\|x_k\|^2$. Comme pour tout $y \in H$, $\lim_{n\to+\infty} S_n(y)$ existe dans $\mathbb{K}$, d'après le théorème de Banach-Steinhaus, il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|S_n\| \leq M$. D'où, pour tout $n \geq 0$, on a $\sum_{k=0}^{n}\|x_k\|^2 \leq M^2$. Donc la série $\sum \|x_n\|^2$ est convergente. Il résulte alors de la proposition 8.3.4 que la série $\sum x_n$ est convergente dans H.

Exercice 8.18. Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'éléments d'un espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Montrer que la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre si et seulement si la matrice $M = \Big[\langle x_i, x_j\rangle\Big]_{1\leq i,j\leq n}$ est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$.
Solution. On identifie $M_n(\mathbb{K})$ à $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$. Notons d'abord que M est inversible si et seulement si $\ker(M) = \{0\}$. Supposons que M est inversible. Soit $\lambda_j \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j = 0$. Alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $0 = \langle x_i, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j\rangle = \sum_{j=1}^{n}\overline{\lambda_j}\langle x_i, x_j\rangle$, donc $\big(\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n}\big) \in \ker(M) = \{0\}$, d'où on a $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Autrement dit, la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre.
Réciproquement, supposons que la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre. Soit $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \ker(M)$. Alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\sum_{j=1}^{n}\langle x_i, x_j\rangle\mu_j = 0$, donc pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\big\langle x_i, \sum_{j=1}^{n}\overline{\mu_j}x_j\big\rangle = 0$, d'où $\big\langle \sum_{j=1}^{n}\overline{\mu_j}x_j, \sum_{j=1}^{n}\overline{\mu_j}x_j\big\rangle = \sum_{i=1}^{n}\overline{\mu_i}\big\langle x_i, \sum_{j=1}^{n}\overline{\mu_j}x_j\big\rangle = 0$. Par conséquent, on a $\sum_{j=1}^{n}\overline{\mu_j}x_j = 0$. Comme la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre, alors on a $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$, d'où $\ker(M) = \{0\}$. Donc M est inversible.

Exercice 8.19. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une base hilbertienne de H. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $f_n = e_n - e_{n-1}$ et soit $A = \big\{f_n\ ;\ n \in \mathbb{Z}\big\}$.

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $A \setminus \{f_p\}$ est une partie totale de H.

2. Montrer que si p, $q \in \mathbb{Z}$ tels que $p \neq q$, alors $A \setminus \{f_p, f_q\}$ n'est pas totale dans H.

Solution. 1. D'après le corollaire 8.3.3, une partie B de H est totale si et seulement si $B^{\perp} = 0$. Soit $x \in H$ tel que $\langle x, f_n\rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}\setminus\{p\}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}\setminus\{p\}$, on a $\langle x, e_n\rangle = \langle x, e_{n-1}\rangle$. Par conséquent, pour tout $n \geq p$, on a $\langle x, e_n\rangle = \langle x, e_p\rangle$ et pour tout $n \leq p-1$, on a $\langle x, e_n\rangle = \langle x, e_{p-1}\rangle$. Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une base hilbertienne de H, d'après l'égalité de Parseval, on a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2 < +\infty$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\langle x, e_n\rangle = 0$, d'où $x = 0$. Donc $A \setminus \{f_p\}$ est une partie totale de H.
2. Soient p, $q \in \mathbb{Z}$ tels que $p \neq q$, par exemple, $p < q$. Soit $x = e_p + \cdots + e_{q-1}$, alors $x \in H$ tel que $x \neq 0$ et on a $\langle x, f_n\rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{p, q\}$. Donc $A \setminus \{f_p, f_q\}$ n'est pas totale dans H.

Exercice 8.20. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale dans H telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \|e_n - f_n\|^2 < +\infty$.

1. Vérifier que pour tout n, $m \in \mathbb{N}$, on a $|\langle e_m - f_m, e_n\rangle| = |\langle e_n - f_n, f_m\rangle|$.

2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.

Solution. 1. On a :

$$\langle e_m - f_m, e_n\rangle = \begin{cases} 1 - \langle f_m, e_m\rangle & \text{si} \quad n = m\,, \\[2ex] -\langle f_m, e_n\rangle & \text{si} \quad n \neq m\,. \end{cases}$$

$$\langle e_n - f_n, f_m\rangle = \begin{cases} \langle e_m, f_m\rangle - 1 & \text{si} \quad n = m\,, \\[2ex] \langle e_n, f_m\rangle & \text{si} \quad n \neq m\,. \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout n, $m \in \mathbb{N}$, on a $|\langle e_m - f_m, e_n\rangle| = |\langle e_n - f_n, f_m\rangle|$.
2. Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale dans H, il reste à montrer que $\{f_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie totale de H. Autrement dit, $\mathrm{Vect}(\{f_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\})$ est dense dans H. D'après l'égalité de Parseval, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\|e_m - f_m\|^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle e_m - f_m, e_n\rangle|^2$, d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{+\infty} \|e_m - f_m\|^2 &= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle e_m - f_m, e_n\rangle|^2 \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle e_n - f_n, f_m\rangle|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} |\langle e_n - f_n, f_m\rangle|^2\,. \end{aligned}$$

Autrement dit, on a $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}|\langle e_n - f_n, f_m\rangle|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\|e_n - f_n\|^2$. D'après l'inégalité de Bessel, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{m=0}^{+\infty}|\langle e_n - f_n, f_m\rangle|^2 \le \|e_n - f_n\|^2$. Comme on a aussi $\sum_{n=0}^{+\infty}\|e_n - f_n\|^2 < +\infty$, on en déduit que pour tout $n \ge 0$, on a $\sum_{m=0}^{+\infty}|\langle e_n - f_n, f_m\rangle|^2 = \|e_n - f_n\|^2$. Soit F le sous-espace vectoriel fermé de H engendré par les f_m, $m \in \mathbb{N}$. D'après le corollaire 8.6.1, pour tout $x \in H$, on a $P_F(x) = \sum_{m=0}^{+\infty}\langle x, f_m\rangle f_m$, $\|P_F(x)\|^2 = \sum_{m=0}^{+\infty}|\langle x, f_m\rangle|^2$ et $\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2$. On en déduit que pour tout $n \ge 0$, on a $\sum_{m=0}^{+\infty}\langle e_n - f_n, f_m\rangle f_m = P_F(e_n - f_n) = e_n - f_n$. Donc, pour tout $n \ge 0$, on a $\sum_{m=0}^{+\infty}\langle e_n, f_m\rangle f_m = e_n$. En particulier, pour tout $n \ge 0$, on a $e_n \in \overline{\mathrm{Vect}(\{f_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\})}$. Par conséquent, $\mathrm{Vect}(\{f_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\})$ est dense dans H. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.

Exercice 8.21. [Cube de Hilbert] Soient $c = (c_n)_{n\ge 0} \in \ell^2$ et C l'ensemble des éléments $x = (x_n)_{n\ge 0}$ de ℓ^2 tels que $|x_n| \le |c_n|$, pour tout $n \ge 0$. Montrer que C est compact.

Solution. Pour tout $n \ge 0$, soit $X_n = \{z \in \mathbb{K}\ ;\ |z| \le |c_n|\}$. Alors X_n est un espace métrique compact. D'après le théorème 3.3.2, l'espace topologique produit $\prod_{n\ge 0} X_n$ est métrique compact. D'après la proposition 2.4.4, la distance sur $\prod_{n\ge 0} X_n$ induisant la topologie produit est définie par $D_2(x,y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n - y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, où $x = (x_n)_{n\ge 0}$, $y = (y_n)_{n\ge 0} \in \prod_{n\ge 0} X_n$. Par conséquent, l'application $x \longmapsto x$ de $\prod_{n\ge 0} X_n$ dans C est bijective et isométrique, donc continue. On en déduit que C est compact.

Exercice 8.22. Soient $\beta > 0$ et $a = (a_n)_{n\ge 0}$ une suite à valeurs dans $]0, \beta]$. Pour tout $x = (x_n)_{n\ge 0}$, $y = (y_n)_{n\ge 0} \in \ell^2$, on pose $\langle x, y\rangle_a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n \overline{y_n}$.

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle_a$ est un produit scalaire sur ℓ^2. On note H_a l'espace ℓ^2 muni du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_a$.

2. On suppose que pour tout $n \ge 0$, on a $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$. Montrer que l'espace préhilbertien $(H_a, \langle\ ,\ \rangle_a)$ n'est pas de Hilbert.

3. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \ge 0$, on ait $a_n \in [\alpha, \beta]$. Montrer

que l'application

$$\begin{array}{rccc} T: & (H_a, \langle\ ,\ \rangle_a) & \longrightarrow & (\ell^2, \langle\ ,\ \rangle) \\ & x = (x_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & (\sqrt{a_n}x_n)_{n\geq 0} \end{array}$$

est linéaire, isométrique et bijective de H_a sur ℓ^2. En déduire que $(H_a, \langle\ ,\ \rangle_a)$ est de Hilbert.

Solution. 1. Puisque $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite bornée, alors $(a_n x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, et donc $\langle x, y\rangle_a$ est bien défini. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0}$, $y = (y_n)_{n\geq 0}$, $z = (z_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle x + \lambda z, y\rangle_a &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_n + \lambda z_n)\overline{y_n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n \overline{y_n} + \lambda a_n z_n \overline{y_n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n \overline{y_n} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n \overline{y_n} \\ &= \langle x, y\rangle_a + \lambda \langle z, y\rangle_a\,. \end{aligned}$$

On a $\overline{\langle x, y\rangle_a} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n \overline{y_n}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n \overline{x_n} = \langle y, x\rangle_a$. On a $\langle x, x\rangle_a \geq 0$, et $\langle x, x\rangle_a = 0 \iff x = 0$. Donc $\langle\ ,\ \rangle_a$ est bien un produit scalaire sur ℓ^2.

2. Pour tout $n \geq 0$, soit $\xi_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{e}_k = (1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots) \in \ell^2$. Pour $m > n$, on a :

$$\langle \xi_m - \xi_n, \xi_m - \xi_n\rangle_a = \sum_{k=n+1}^{m} a_k = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2}\,.$$

Donc la suite $(\xi_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $(H_a, \langle\ ,\ \rangle_a)$. Montrons que $(\xi_n)_{n\geq 0}$ n'est pas convergente pour la norme $\|\ \|$ associée au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_a$. Supposons que la suite $(\xi_n)_{n\geq 0}$ converge vers un élément $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$. On a :

$$\|\xi_n - x\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}|1 - x_k|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}|x_k|^2\,.$$

Soit $p \geq 0$. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\varepsilon' = \frac{1}{(p+1)^2}\varepsilon > 0$. Comme on a supposé que $(\xi_n)_{n\geq 0}$ converge vers x, alors il existe $n > p$ tel que $\|\xi_n - x\|^2 < \varepsilon'$, d'où on a $\frac{1}{(p+1)^2}|1 - x_p|^2 < \varepsilon' = \frac{1}{(p+1)^2}\varepsilon$. Donc on a $|1 - x_p|^2 < \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que l'on a $x_p = 1$. Par conséquent, pour tout $p \geq 0$, on a $x_p = 1$, d'où $x \notin \ell^2$, ce qui est impossible. Donc la suite $(\xi_n)_{n\geq 0}$ n'est pas convergente, et donc $(H_a, \langle\ ,\ \rangle_a)$ n'est pas de Hilbert.
Une autre façon de montrer que $(H_a, \langle\ ,\ \rangle_a)$ n'est pas de Hilbert. Considérons l'application $x \longmapsto x$ de ℓ^2 dans H_a. Cette application est linéaire continue et bijective. Si $(H_a, \langle\ ,\ \rangle_a)$

était de Hilbert, on déduit du théorème de l'application ouverte qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in \ell^2$, on ait $\|x\|_2 \leq M\|x\|$. En prenant $x = \mathbf{e}_n$, on obtient $1 \leq M\frac{1}{n+1}$, pour tout $n \geq 0$, ce qui est impossible. Donc $(H_a, \langle\ ,\ \rangle_a)$ n'est pas de Hilbert.
3. Il est claire que T est linéaire et isométrique. Il reste à vérifier que T est surjective. Soit $y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$. Comme la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)_{n\geq 0}$ est bornée, alors $x = \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}y_n\right)_{n\geq 0} \in \ell^2 = H_a$ et on a $T(x) = y$. Donc T est surjective. Comme $(\ell^2, \langle\ ,\ \rangle)$ est de Hilbert et T est linéaire isométrique et bijective, alors $(H_a, \langle\ ,\ \rangle_a)$ est de Hilbert.

Exercice 8.23. On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Calculer la projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur le sous-espace vectoriel suivant

$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\ ;\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\}.$$

2. Calculer la distance du vecteur $(1, 1, 1, 1)$ à F et celle du vecteur $(1, 1, -1, -1)$ à F.

Solution. 1. Les vecteurs $X_1 = (1, 0, -1, 0)$ et $X_2 = (0, 1, 0, -1)$ forment une base algébrique de l'espace vectoriel F. Soient $V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)$ et $V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)$, alors (V_1, V_2) est une base orthonormale de F. Soit $P : \mathbb{R}^4 \longrightarrow F$ la projection orthogonale, alors pour tout $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, on a $P(X) = \langle X, V_1\rangle V_1 + \langle X, V_2\rangle V_2$. Or on a $\langle X, V_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_3)$ et $\langle X, V_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_4)$, d'où $P(X) = \frac{1}{2}(x_1 - x_3, x_2 - x_4, x_3 - x_1, x_4 - x_2)$.
2. Soit $X = (1, 1, 1, 1)$, on a $P(X) = (0, 0, 0, 0)$. On a $d(X, F) = \|X - P(X)\| = \|X\| = 2$. Soit $X = (1, 1, -1, -1)$, on a $X \in F$, d'où $d(X, F) = 0$.

Exercice 8.24. Soit $E = C([0,\ 1], \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$, muni du produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, pour tout $f, g \in E$.

1. Soient $f_1,\ f_2 \in E$ définies par $f_1(t) = 1,\ f_2(t) = t$ pour tout $t \in [0,\ 1]$. Déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel F de E engendré par f_1 et f_2.

2. Soit $f \in E$ définie par $f(t) = e^{2t}$ pour tout $t \in [0,\ 1]$. Déterminer la projection orthogonale de f sur F.

3. Déterminer la distance de f à F.

Solution. 1. On a $\langle f_1, f_1\rangle = 1$, on pose $g_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|} = f_1$. Soit $h_2 = f_2 - \langle f_2, g_1\rangle g_1$, on a $h_2(t) = t - \frac{1}{2}$ pour tout $t \in [0,\ 1]$, d'où $\langle h_2, h_2\rangle = \displaystyle\int_0^1 \left(t - \tfrac{1}{2}\right)^2 dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2\,dx = \tfrac{1}{12}$. On pose $g_2 = \dfrac{h_2}{\|h_2\|}$, alors $g_2(t) = \sqrt{3}(2t - 1)$, pour tout $t \in [0,\ 1]$. Alors (g_1, g_2) est une base orthonormale de F.
2. On a $P(f) = \langle f, g_1\rangle g_1 + \langle f, g_2\rangle g_2$, avec $\langle f, g_1\rangle = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$ et $\langle f, g_2\rangle = \sqrt{3}$, d'où pour tout $t \in [0,\ 1]$, on a $P(f)(t) = 3(2t - 1) + \frac{1}{2}(e^2 - 1)$.
3. On a $d(f, F) = \|f - P(f)\|$ et $\|f - P(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|P(f)\|^2 = \langle f, f\rangle - (\langle f, g_1\rangle)^2 - (\langle f, g_2\rangle)^2 = \frac{1}{2}(e^2 - 7)$, d'où $d(f, F) = \sqrt{\frac{1}{2}(e^2 - 7)}$.

Exercice 8.25. On définit sur $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, le produit scalaire suivant : pour tout $P,\ Q \in E$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle \ = \int_{-1}^{1} P(x)\, Q(x)\, dx.$$

1. Soit $F = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer $\alpha = \inf\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^4 - ax^2 - bx - c\right)^2 dx.$

Solution. 1. On a $\langle 1, 1\rangle = 2$, on pose $P_0 = \dfrac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Soit $Z_1 = X - \langle X, P_0\rangle P_0$, on a $Z_1 = X$ et $\langle Z_1, Z_1\rangle = \frac{2}{3}$, on pose $P_1 = \dfrac{Z_1}{\|Z_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}X$. Soit $Z_2 = X^2 - \langle X^2, P_0\rangle P_0 - \langle X^2, P_1\rangle P_1$. On a $\langle X^2, P_0\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et $\langle X^2, P_1\rangle = 0$, d'où $Z_2 = X^2 - \frac{1}{3}$ et $\langle Z_2, Z_2\rangle = \frac{8}{45}$. On pose $P_2 = \dfrac{Z_2}{\|Z_2\|} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2 - 1)$. Alors (P_0, P_1, P_2) est une base orthonormale de F.
2. On a $\alpha = \big(d(X^4, F)\big)^2$. Soit P le projecteur orthogonal sur F, on a $P(X^4) = \langle X^4, P_0\rangle P_0 + \langle X^4, P_1\rangle P_1 + \langle X^4, P_2\rangle P_2$. On a $\langle X^4, P_0\rangle = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$, $\langle X^4, P_1\rangle = 0$ et $\langle X^4, P_2\rangle = \dfrac{8}{7\sqrt{10}}$, d'où $P(X^4) = \frac{3}{7}(2X^2 - \frac{1}{5})$. On a $\alpha = \big(d(X^4, F)\big)^2 = \|X^4 - P(X^4)\|^2 = \langle X^4 - P(X^4), X^4 - P(X^4)\rangle = \frac{128}{11025}$.

Exercice 8.26. Soit a un élément non nul d'un espace de Hilbert $(H, \langle\ ,\ \rangle)$. Montrer que pour tout $x \in H$, on a $d(x, \{a\}^{\perp}) = \dfrac{|\langle x, a\rangle|}{\|a\|}$.
Solution. On donne deux démonstrations.
Première démonstration. Pour tout $x \in H$, soit $f(x) = \langle x, a\rangle$, alors f est une forme linéaire continue sur H telle que $\ker(f) = \{a\}^{\perp}$ et $\|f\| = \|a\|$. D'après l'exercice 6.43, pour tout $x \in H$, on a $d(x, \ker(f)) = \dfrac{|f(x)|}{\|f\|}$. D'où on a $d(x, \{a\}^{\perp}) = \dfrac{|\langle x, a\rangle|}{\|a\|}$.
Deuxième démonstration. Soit $F = \{a\}^{\perp}$, alors F est un sous-espace vectoriel fermé de H et on a $F^{\perp} = \mathrm{Vect}(\{a\}) = \{\lambda a\ ;\ \lambda \in \mathbb{K}\}$. Soit $x \in H$, alors on a $x = P_F(x) + \lambda a$ et on a $d(x, \{a\}^{\perp}) = d(x, F) = \|x - P_F(x)\| = \|\lambda a\| = |\lambda|\,\|a\|$. On a $\langle x, a\rangle = \lambda\langle a, a\rangle$, d'où $|\lambda| = \dfrac{|\langle x, a\rangle|}{\|a\|^2}$. Par conséquent, on a $d(x, \{a\}^{\perp}) = \dfrac{|\langle x, a\rangle|}{\|a\|}$.

Exercice 8.27. On munit ℓ^2 de son produit scalaire usuelle $\langle\ ,\ \rangle$. Soit :

$$B = \Big\{x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2\ ;\ \sum_{n=0}^{+\infty} \big(1 + \tfrac{1}{n+1}\big)^2 |x_n|^2 \leq 1\Big\}.$$

1. Montrer que B est borné, fermé et convexe
2. Montrer qu'il n'existe aucun $b \in B$ tel que pour tout $x \in B$, on ait $\|x\|_2 \leq \|b\|_2$. (Rappelons que d'après le théorème 8.3.1, il existe un unique $a \in B$ tel que pour tout $x \in B$, on ait $\|a\|_2 \leq \|x\|_2$. En fait, ici $a = 0$, et on n'a pas besoin d'appliquer le théorème 8.3.1).

Solution. 1. Pour tout $n \geq 0$, soit $a_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2$. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0}$, $y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, on pose, $\langle x, y\rangle_a = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_n \overline{y_n}$. D'après l'exercice 8.22, $\langle\ ,\ \rangle_a$ est un produit scalaire sur ℓ^2 et la norme $\|\ \|$ associée à $\langle\ ,\ \rangle_a$ est équivalente à la norme $\|\ \|_2$ associée au produit scalaire usuel $\langle\ ,\ \rangle$. Comme $B = \{x \in \ell^2\ ;\ \|x\| \leq 1\}$, alors B est convexe, borné et fermé pour la norme $\|\ \|_2$.
2. Notons d'abord qu'il existe $x \in B$ tel que $x \neq 0$. Soit $b = (b_n)_{n\geq 0} \in B$ tel que $b \neq 0$. Montrons qu'il existe $x \in B$ tel que $\|x\|_2 > \|b\|_2$. Comme $b \neq 0$, il existe $p \geq 0$ tel que $b_p \neq 0$. Pour tout $n \geq 0$, soit $t_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)|b_p|$. Alors on a $t_n(t_n + 2|b_n|) = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2|b_p|^2 + 2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)|b_p||b_n| > |b_p|^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2 t_n(t_n+2|b_n|) = |b_p|^2$. Donc il existe $q > p$ tel que $t_q(t_q + 2|b_q|) > |b_p|^2$ et $\left(1+\frac{1}{q+1}\right)^2 t_q(t_q+2|b_q|) < \left(1+\frac{1}{p+1}\right)^2|b_p|^2$. Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, où $x_p = 0$, $x_q = t_q + |b_q|$ et $x_n = b_n$ si $n \notin \{p, q\}$. Alors on a $\|x\|_2 > \|b\|_2$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2|x_n|^2 < \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2|b_n|^2 \leq 1$, donc $x \in B$.

Exercice 8.28. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert, A une partie convexe, fermée non vide de H et $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Montrer que la fonction $x \longmapsto \|x\|^2 - f(x)$ est minorée sur A et atteint son minimum en un point de A et un seul.
Solution. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe $y \in H$ tel que pour tout $x \in H$, on ait $f(x) = \langle x, y\rangle$. Comme A est convexe, fermée non vide de H, d'après le théorème de la projection, il existe un unique $a \in A$ tel que pour tout $x \in A$, on ait $\left\|\frac{y}{2} - a\right\| \leq \left\|\frac{y}{2} - x\right\|$. D'où on a :

$$\tfrac{1}{4}\|y\|^2 - \langle a, y\rangle + \|a\|^2 = \left\|\tfrac{y}{2} - a\right\|^2 \leq \left\|\tfrac{y}{2} - x\right\|^2 = \tfrac{1}{4}\|y\|^2 - \langle x, y\rangle + \|x\|^2 .$$

Par conséquent, on a $\|a\|^2 - \langle a, y\rangle \leq \|x\|^2 - \langle x, y\rangle$. Autrement dit, on a $\|a\|^2 - f(a) \leq \|x\|^2 - f(x)$. Il reste à vérifier l'unicité du point a. Soit $b \in A$ tel que pour tout $x \in A$, on ait $\|b\|^2 - f(b) \leq \|x\|^2 - f(x)$. Alors pour tout $x \in A$, on a :

$$\left\|\tfrac{y}{2} - b\right\|^2 = \tfrac{1}{4}\|y\|^2 - \langle b, y\rangle + \|b\|^2 \leq \tfrac{1}{4}\|y\|^2 - \langle x, y\rangle + \|x\|^2 = \left\|\tfrac{y}{2} - x\right\|^2$$

d'où, pour tout $x \in A$, on a $\|\frac{y}{2} - b\| \leq \|\frac{y}{2} - x\|$. D'après l'unicité dans le théorème de la projection, on a $b = a$.

Exercice 8.29. On munit l'espace ℓ^2 de son produit scalaire usuel.

1. Montrer que $E = \left\{x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2\ ;\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel dense dans ℓ^2.
2. Soit $N \in \mathbb{N}$, fixé. Montrer que $F_N = \left\{x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2\ ;\ \sum\limits_{n=0}^{N} x_n = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel fermé dans ℓ^2. Déterminer $F_N^{\perp}$.

Solution. 1. Il est clair que E est un sous-espace vectoriel de ℓ^2. D'après l'exercice 6.34, l'espace c_c est dense dans ℓ^2. L'application $(x_n)_{n\geq 0} \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ est une forme linéaire non nulle et non continue sur c_c, donc $c_c \cap E$ est dense dans c_c. Par conséquent, $c_c \cap E$ est dans ℓ^2, donc E est dense dans ℓ^2.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$, fixé. L'application $f : (x_n)_{n\geq 0} \longmapsto \sum_{n=0}^{N} x_n$ est une forme linéaire continue non nulle sur ℓ^2 et on a $F_N = \ker(f)$. Donc F_N est un sous-espace vectoriel fermé dans ℓ^2, de codimension 1. Donc on a $\dim(F_N^\perp) = 1$, car $\ell^2 = F_N \oplus F_N^\perp$. Soient $\mathbf{e} = \sum_{n=0}^{N} \mathbf{e}_n \in \ell^2$ et $G = \mathrm{Vect}(\{\mathbf{e}\}) = \{\lambda \mathbf{e}\ ;\ \lambda \in \mathbb{K}\}$. Alors G est de dimension 1 et on a $G \subset F_N^\perp$, donc on a $F_N^\perp = G$.

Exercice 8.30. On munit c_c du produit scalaire induit par celui de l'espace ℓ^2. Autrement dit, pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0}, y = (y_n)_{n\geq 0} \in c_c$, on a $\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \overline{y_n}$. Soit :

$$\begin{array}{rccc} f : & c_c & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{n+1} \end{array}$$

1. Montrer que f est une forme linéaire continue.
2. Montrer que $F = \ker(f)$ est un sous-espace vectoriel fermé de c_c tel que $F \neq c_c$ et que l'on a $F^\perp = \{0\}$.

Solution. 1. Soit $y = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geq 0}$, alors $y \in \ell^2$ et pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in c_c$, on a $f(x) = \langle x, y\rangle$. Donc f est une forme linéaire sur c_c et on a $|f(x)| \leq \|x\|_2\, \|y\|_2$, donc f est continue.
2. Comme f est une forme linéaire continue non nulle, alors $F = \ker(f)$ est un sous-espace vectoriel fermé de c_c tel que $F \neq c_c$. Soit $y = (y_n)_{n\geq 0} \in c_c$ tel que $f \in F^\perp$. Pour tout $n \geq 0$, soit $\xi_n = \mathbf{e}_0 - (n+1)\mathbf{e}_n$, alors $\xi_n \in F$. Comme on a $0 = \langle \xi_n, y\rangle = \overline{y_0} - (n+1)\overline{y_n}$, alors pour tout $n \geq 0$, on a $y_n = \frac{1}{n+1} y_0$. Or on a $y = (y_n)_{n\geq 0} \in c_c$, donc $y_0 = 0$, d'où on a $y = 0$. Autrement dit, on a $F^\perp = \{0\}$.

Exercice 8.31. On munit $E = C([-1, 1])$ du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\, dx$. Alors $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace préhilbertien, mais $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ n'est pas un espace de Hilbert. Soient $G = \big\{f \in E\ ;\ f(0) = 0\big\}$ et $F = \big\{f \in E\ ;\ f(x) = 0\,,\ \text{pour tout } x \in [-1, 0]\big\}$

1. Déterminer $G^\perp$, et montrer que E n'est pas la somme directe algébrique de G et $G^\perp$.
2. Déterminer $F^\perp$, et montrer que E n'est pas la somme directe algébrique de F et $F^\perp$.

Solution. 1. L'application $f \longmapsto f(0)$ est une forme linéaire non nulle et non continue sur E, donc G est un sous-espace vectoriel dense de E et on a $G \neq E$ et $G^\perp = \{0\}$. Par conséquent, E n'est pas la somme directe algébrique de G et $G^\perp$.

2. Soit $g \in E$ tel que $g \in F^\perp$. Alors pour tout $f \in F$, on a $\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx =$

$\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx = 0$. Soit $D = \{h \in C([0,\,1])\ ;\ h(0) = 0\}$, alors D est sous-espace vectoriel dense dans $(C([0,\,1]),\, \|\ \|_2)$. Soit $\widetilde{g}$ la restriction de g à $[0,\,1]$, alors on a $\widetilde{g} \in D^{\perp}$, d'où $\widetilde{g} = 0$. Autrement dit, pour tout $x \in [0,\,1]$, on a $g(x) = 0$. Réciproquement, si $g \in E$ tel que pour tout $x \in [0,\,1]$, on ait $g(x) = 0$, alors $g \in F^{\perp}$. Par conséquent, on a $F^{\perp} = \{f \in E\ ;\ f(x) = 0\,,\ \text{pour tout } x \in [0,\,1]\}$. Soit $f = 1$, la fonction constante égale à 1, alors $f \notin F + F^{\perp}$, donc E n'est pas la somme directe algébrique de F et $F^{\perp}$.

Exercice 8.32. Soit $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^{\infty}$. Montrer que l'application L_a qui à $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$ associe la suite $(a_n x_n)_{n\geq 0}$ est une application linéaire continue de ℓ^2 dans lui-même. Déterminer sa norme. Quel est son adjoint ?

Solution. Il est clair que pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, $L_a(x) = (a_n x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$ et que l'on a $\|L_a(x)\|_2 \leq \|a\|_{\infty}\,\|x\|_2$. Il est clair aussi que L_a est linéaire, donc L_a est continue et on a $\|L_a\| \leq \|a\|_{\infty}$. Pour tout $n \geq 0$, on a $L_a(\mathbf{e}_n) = a_n \mathbf{e}_n$ et $\|\mathbf{e}_n\|_2 = 1$, d'où $\|L_a\| \geq |a_n|$. Par conséquent, on a $\|L_a\| \geq \|a\|_{\infty}$, donc $\|L_a\| = \|a\|_{\infty}$. Soit $\overline{a} = (\overline{a_n})_{n\geq 0} \in \ell^{\infty}$. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0}, y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, on a $\langle L_a(x), y\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \overline{\overline{a_n} y_n} = \langle x, L_{\overline{a}}(y)\rangle$. Par conséquent, on a $L_a^* = L_{\overline{a}}$.

Exercice 8.33. Soit $(H,\, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert de dimension infinie. Montrer que l'espace de Banach $\mathscr{L}(H)$ n'est pas séparable.

Solution. Comme H est de dimension infinie, d'après le théorème 8.6.2, il existe une famille dénombrable orthonormale $(e_n)_{n\geq 0}$ dans H. Soit F l'espace vectoriel fermé engendré par les e_n, alors F est un espace de Hilbert isométriquement isomorphe à l'espace de Hilbert ℓ^2, voir théorème 8.6.5. Soient P la projection orthogonale de H sur F et $\imath : F \longrightarrow H$ l'injection canonique. Alors l'application $T \longmapsto \imath \circ T \circ P$ est linéaire et isométrique de $\mathscr{L}(F)$ dans $\mathscr{L}(H)$. Donc on peut identifier $\mathscr{L}(F)$ à un sous-espace de $\mathscr{L}(H)$. Par conséquent, pour montrer le résultat, il suffit de montrer que $\mathscr{L}(\ell^2)$ n'est pas séparable. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} L: & \ell^{\infty} & \longrightarrow & \mathscr{L}(\ell^2) \\ & a = (a_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & L_a \end{array}$$

où L_a est défini comme dans l'exercice précédent. Alors L est linéaire continue et isométrique. D'après l'exercice 6.35, l'espace de Banach ℓ^{∞} n'est pas séparable, donc $\mathscr{L}(\ell^2)$ n'est pas séparable.

Exercice 8.34. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, on pose $T(x) = \left(\frac{x_n}{2^n}\right)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que $T \in \mathscr{L}(\ell^2)$, T non surjective et que $T(\ell^2)$ est dense dans ℓ^2.

2. Soient $H = \ell^2 \oplus \ell^2$, $F = \ell^2 \oplus \{0\}$ et G le graphe de T. Montrer que l'on a $F \cap G = \{0\}$, $F + G$ est dense dans H et $F + G \neq H$. Ainsi, on a construit un exemple d'un espace de Hilbert H et de deux sous-espaces vectoriels fermés F et G dans H tels que $F \cap G = \{0\}$ et $F + G$ ne soit pas fermé.

Solution. 1. Il est clair que $T \in \mathscr{L}(\ell^2)$, et que T n'est pas surjective car $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 0} \notin T(\ell^2)$. Comme pour tout $n \geq 0$, on a $\mathbf{e}_n \in T(\ell^2)$ et $\mathrm{Vect}(\{\mathbf{e}_n\ ;\ n \geq 0\}) = c_c$ est dense dans ℓ^2,

alors $T(\ell^2)$ est dense dans $T(\ell^2)$.
2. Il est clair que l'on a $F \cap G = \{0\}$ car T est injective. Comme T n'est pas surjective, alors $F+G \neq H$. Il reste à montrer que $F+G$ est dense dans H. Soit $y \in \ell^2$. Comme $T(\ell^2)$ est dense dans ℓ^2, alors il existe une suite $(\xi_n)_{n\geq 0}$ dans ℓ^2 telle que la suite $(T(\xi_n))_{n\geq 0}$ converge vers y. Pour tout $n \geq 0$, soit $b_n = (-\xi_n, 0) + (\xi_n, T(\xi_n)) = (0, T(\xi_n))$, alors $(b_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans $F+G$ qui converge vers $(0, y)$. Par conséquent, $F+G$ est dense dans H.

Exercice 8.35. Soit E un sous espace vectoriel d'un espace de Hilbert H et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire continue prolongeant f à H et de même norme que f.
Solution. Soit $\overline{E}$ l'adhérence de E dans H. D'après la proposition 6.3.5, il existe une unique $\widetilde{f} : \overline{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ forme linéaire continue prolongeant f. De plus, on a $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$. Comme $\overline{E}$ est un espace de Hilbert, d'après le théorème de Riesz, il existe $a \in \overline{E}$ tel que pour tout $x \in \overline{E}$, on ait $\widetilde{f}(x) = \langle x, a\rangle$ et $\|\widetilde{f}\| = \|a\|$. Pour tout $x \in H$, soit $g(x) = \langle x, a\rangle$, alors g est une forme linéaire continue sur H, prolongeant f et on a $\|g\| = \|a\| = \|\widetilde{f}\| = \|f\|$. Soit h une forme linéaire continue sur H, prolongeant f telle que $\|h\| = \|f\| = \|\widetilde{f}\|$. D'après le théorème de Riesz, il existe $b \in H$ tel que pour tout $x \in H$, on ait $h(x) = \langle x, b\rangle$. On a $b = y + z$, avec $y \in \overline{E}$ et $z \in \overline{E}^{\perp}$. Alors pour tout $x \in \overline{E}$, on a $\langle x, b\rangle = \langle x, y\rangle$ et $\langle x, b\rangle = \langle x, a\rangle$, donc pour tout $x \in \overline{E}$, on a $\langle x, y\rangle = \langle x, a\rangle$. Or $y, a \in \overline{E}$, d'où on a $y = a$. On a $\|h\| = \|b\| = \|a + z\| = \sqrt{\|a\|^2 + \|z\|^2} = \sqrt{\|f\|^2 + \|z\|^2} = \sqrt{\|h\|^2 + \|z\|^2}$, d'où $z = 0$. Donc, pour tout $x \in H$, on a $h(x) = \langle x, a\rangle = g(x)$, d'où $h = g$.

Exercice 8.36. Soient $(H, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$ une application isométrique non surjective.

1. Montrer que $T(H)$ est fermé dans H et que T^* n'est pas injective.

2. Soit $S \in \mathscr{L}(H)$ tel que $\|T - S\| < 1$. Montrer que $T^* \circ S$ est bijective. En déduire que S n'est pas surjective.

3. Soit $S \in \mathscr{L}(H)$ tel que $\|T - S\| = 1$. Montrer que S n'est pas surjective.

Solution. 1. Puisque T est isométrique, il résulte de la proposition 8.4.7 que $\mathrm{Im}(H)$ est fermé dans H. D'après la proposition 8.4.4, on a $\ker(T^*) = \mathrm{Im}(T)^{\perp}$. Comme $\mathrm{Im}(H) \neq H$, car T n'est pas surjective, et $\mathrm{Im}(H)$ est fermé dans H, il résulte du corollaire 8.3.2 que l'on a $\mathrm{Im}(T)^{\perp} \neq \{0\}$. Par conséquent, on a $\ker(T^*) \neq \{0\}$. Autrement dit, T^* n'est pas injective.
2. On a $\|\mathrm{id}_H - T^* \circ S\| = \|T^* \circ T - T^* \circ S\| \leq \|T^*\|\,\|T - S\| \leq \|T - S\| < 1$, donc $T^* \circ S$ est bijective, voir corollaire 8.7.2. On en déduit que S est injective. Si S était surjective, S serait bijective et on en déduirait que T^* est bijective, ce qui est impossible. Donc S n'est pas surjective.
3. Pour tout $n \geq 0$, soit $S_n = T + \frac{n}{n+1}(S - T)$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, et pour tout $n \geq 0$, on a $\|T - S_n\| < 1$. D'après 2, pour tout $n \geq 0$, S_n n'est pas surjective. D'après la proposition 7.1.3, l'ensemble des applications linéaires continues non surjectives est fermé dans $\mathscr{L}(H)$. On en déduit que S n'est pas surjective.

Exercice 8.37. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de H et $T \in \mathscr{L}(H)$ tel que $T(e_n) = e_{n+1}$. Autrement dit, pour tout $x \in H$, il existe $(\lambda_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$ tel que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n e_n \in H$ et on pose $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n e_{n+1}$.

1. Déterminer T^*.
2. Montrer que T ne possède pas de valeur propre.
3. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| < 1$, λ est une valeur propre de T^*.

Solution. 1. Pour tout $y \in H$, on a $\langle T^*(e_0), y\rangle = \langle e_0, T(y)\rangle = 0$, d'où $T^*(e_0) = 0$. Pour tous $n \geq 1$ et $k \geq 0$, on a $\langle T^*(e_n), e_k\rangle = \langle e_n, T(e_k)\rangle = \langle e_n, e_{k+1}\rangle$, d'où :

$$\langle T^*(e_n), e_k\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = n-1\,, \\ 0 & \text{si} \quad k \neq n-1\,. \end{cases}$$

Par conséquent, on a $T^*(e_n) = e_{n-1}$. Autrement dit, pour tout $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n e_n \in H$, avec $(\lambda_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, on a $T^*(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e_{n-1}$. Notons que l'on a $T^* \circ T = \mathrm{id}_H$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si λ est une valeur propre de T, alors il existe $x \in H$ tel que $x \neq 0$ et $T(x) = \lambda x$. D'où on a $|\lambda|\,\|x\| = \|T(x)\| = \|x\|$. Donc on a $\lambda \neq 0$. D'autre part, on a $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n e_n \in H$ et $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n e_{n+1}$. Par conséquent, on a $\lambda\,\lambda_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, on a $\lambda\,\lambda_{n+1} = \lambda_n$, d'où pour tout $n \geq 0$, on a $\lambda_n = 0$, donc $x = 0$. Ce qui est impossible. Par conséquent, T ne possède pas de valeur propre.
3. On a vu que l'on a $T^*(e_0) = 0$, donc $\lambda = 0$ est une valeur propre de T^*. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $0 < |\lambda| < 1$. Alors $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n e_n \in H$ et on a $x \neq 0$ et $T^*(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n e_{n-1} = \lambda x$. Donc λ est une valeur propre de T^*.

Pour plus d'exercices, voir le supplément associé à ce livre.

Chapitre 9

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

Les objets de base considérés ici sont des espaces vectoriels munis d'une topologie. Pour que cette juxtaposition des structures algébriques et topologiques soit intéressante, ces dernières doivent vérifier certaines conditions de compatibilité. Si E est un espace à la fois vectoriel, sur le corps $\mathbb{K}$, et topologique, la plus simple de ces conditions est que les applications somme, de $E \times E$ dans E, et produit par un scalaire, de $\mathbb{K} \times E$ dans E soient continues lorsque les espaces de départ sont munis de la topologie produit. Dans ce cas, on dit que E est un espace vectoriel topologique. Ces espaces jouent un rôle capital en analyse fonctionnelle. Les espaces normés, étudiés au chapitre 6, sont des cas particuliers très importants d'espaces vectoriels topologiques. Le corps $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.

En rédigeant ce chapitre, je me suis beaucoup appuyé sur le livre de W. Rudin, ([28]).

9.1 Espaces vectoriels topologiques

Définition 9.1.1. Un **espace vectoriel topologique** est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'une topologie $\mathcal{T}$ telle que :

1. L'origine $\{0\}$ soit fermée dans E.
2. Les applications suivantes

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

   soient continues.

Exemple 9.1.1. Tout espace normé est un espace vectoriel topologique, voir proposition 6.1.2.

Proposition 9.1.1. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique.*

1. *Pour tout $a \in E$, la translation $x \longmapsto a + x$ est un homéomorphisme de E.*

2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, l'homothétie $x \longmapsto \lambda x$ est un homéomorphisme de E.*

3. *L'application $(x, y) \longmapsto x - y$ est continue de $E \times E$ dans E.*

4. *L'espace $(E, \mathcal{T})$ est séparé.*

Démonstration. On déduit immédiatement, de la définition, les propriétés 1, 2 et 3. Vérifions seulement la dernière propriété. Soient $x_0, y_0 \in E$ tels que $x_0 \neq y_0$. Alors $E \setminus \{0\}$ est un ouvert de E contenant $x_0 - y_0$. Puisque l'application $(x, y) \longmapsto x - y$ est continue de $E \times E$ dans E, il existe un voisinage V de x_0 et un voisinage W de y_0 tels que $V - W \subset E \setminus \{0\}$, d'où on a $V \cap W = \emptyset$. Par conséquent, $(E, \mathcal{T})$ est séparé. ■

Corollaire 9.1.1. *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique, $a \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. *Soient U un ouvert de E et A un sous-ensemble de E. Alors $a + U$ et $A + U = \bigcup_{x \in A} x + U$ sont des ouverts de E, et λU est un ouvert de E si $\lambda \neq 0$.*

2. *Soit F un fermé de E. Alors $a + F$ et λF sont des fermés de E.*

3. *Soit K un compact de E. Alors $a + K$ et λK sont des compacts de E.*

Définition 9.1.2. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique. Une **base locale** de E est un système fondamental de voisinages du point 0.

Proposition 9.1.2. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique.*

1. *Soit $a \in E$. Les voisinages de a sont de la forme $a + V$, où V parcourt l'ensemble des voisinages de 0. En particulier, la topologie d'un espace vectoriel topologique est entièrement déterminée par l'ensemble des voisinages de 0.*

2. *Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Soit V un sous-ensemble de E. Alors V est un voisinage de 0 dans E si et seulement si λV est un voisinage de 0 dans E.*

3. *Si $\mathcal{B}$ est une base locale de E, alors tout élément de $\mathcal{B}$ contient l'adhérence d'un élément de $\mathcal{B}$. En particulier, E possède une base locale formée d'ensembles fermés.*

4. *E possède une base locale formée d'ensembles équilibrés.*

5. *Soient V un voisinage de 0 et $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ une suite dans $\mathbb{K}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} |\alpha_n| = +\infty$. Alors on a $E = \bigcup_{n \geq 0} \alpha_n V$.*

Démonstration. Les propriétés 1 et 2 résultent de la proposition précédente.
3. Soit $U \in \mathcal{B}$. Puisque l'application $(x, y) \longmapsto x - y$ est continue de $E \times E$ dans E, il existe un voisinage ouvert V de 0 tel que $V - V \subset U$, d'où on a $V \cap ((E \setminus U) + V) = \emptyset$. Comme $(E \setminus U) + V$ est ouvert dans E, alors on a $\overline{V} \cap ((E \setminus U) + V) = \emptyset$, donc $\overline{V} \cap (E \setminus U) = \emptyset$. Autrement dit, on a $\overline{V} \subset U$.
4. Soit U un voisinage de 0. Puisque l'application $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ est continue de $\mathbb{K} \times E$ dans E, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage V de 0 tels que $\alpha V \subset U$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $|\alpha| < \varepsilon$. Soit $W = \bigcup_{|\alpha| < \varepsilon} \alpha V$, alors W est un voisinage équilibré de 0 tel que $W \subset U$.
5. Soit $x \in E$. Puisque la suite $\left(\frac{x}{\alpha_n}\right)_{n \geq 0}$ tend vers 0, alors il existe $n \geq 0$ tel que $\frac{x}{\alpha_n} \in V$, d'où $x \in \alpha_n V$. Par conséquent, on a $E = \bigcup_{n \geq 0} \alpha_n V$. ■

Proposition 9.1.3. *Soit A un sous-ensemble d'un espace vectoriel topologique $(E, \mathcal{T})$.*

1. *On a $\overline{A} = \bigcap\limits_{V\in\mathcal{V}}(A+V) = \bigcap\limits_{V\in\mathcal{B}}(A+V)$, où $\mathcal{V}$ est l'ensemble des voisinages de 0 et $\mathcal{B}$ est une base locale de E.*
2. *Si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.*
3. *Si A est convexe tel que $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, alors pour tout $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ et pour tout $x \in \overline{A}$, on a $[x_0, x[\subset \overset{\circ}{A}$. En particulier, $\overset{\circ}{A}$ est convexe.*
4. *Si A est convexe tel que $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, alors on a $\overline{A} = \overline{\overset{\circ}{A}}$ et $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\overline{A}}$.*
5. *Si A est équilibré, alors $\overline{A}$ est équilibré. Si de plus, on a $0 \in \overset{\circ}{A}$, alors $\overset{\circ}{A}$ est équilibré.*

Démonstration. 1. Soit $x \in E$, on a $x \in \overline{A}$ si et seulement si pour tout voisinage V de 0, on a $(x+V) \cap A \neq \emptyset$. Ceci est équivalent à $x \in A - V$. Or V est un voisinage de 0 si et seulement si $-V$ est un voisinage de 0, donc on a $\overline{A} = \bigcap\limits_{V\in\mathcal{V}}(A+V)$. La deuxième égalité est évidente.
2. Soit $t \in]0, 1[$. L'application

$$\begin{array}{rccc} f_t : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \longmapsto & tx + (1-t)y \end{array}$$

étant continue, donc $f_t^{-1}(\overline{A})$ est un fermé de $E \times E$. Comme A est convexe, alors on a $A \times A \subset f_t^{-1}(A) \subset f_t^{-1}(\overline{A})$, d'où $\overline{A} \times \overline{A} \subset f_t^{-1}(\overline{A})$. Autrement dit, on a $f_t(\overline{A} \times \overline{A}) \subset \overline{A}$. Par conséquent, $\overline{A}$ est convexe.
3. On suppose A convexe tel que $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$. Soit $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ et supposons d'abord $x \in A$, alors pour tout $t \in [0, 1[$, on a $(1-t)x_0 + tx \in (1-t)\,\overset{\circ}{A} + tA \subset A$ et $(1-t)\,\overset{\circ}{A} + tA$ est un ouvert de E, donc on a $(1-t)x_0 + tx \in \overset{\circ}{A}$. Autrement dit, on a $[x_0, x[\subset \overset{\circ}{A}$. Supposons maintenant que $x \in \overline{A}$. Soit $y \in]x_0, x[$, alors il existe $t \in]0, 1[$ tel que $y = (1-t)x_0 + tx$. Pour tout $z \in E$, soit $h(z) = y + \frac{t}{1-t}(y-z)$, alors h est un homéomorphisme de E et on a $h(x) = x_0$. On en déduit que $h^{-1}(\overset{\circ}{A})$ est un ouvert de E contenant x, donc $h^{-1}(\overset{\circ}{A}) \cap A \neq \emptyset$. Soit $u \in h^{-1}(\overset{\circ}{A}) \cap A$, alors $h(u) \in \overset{\circ}{A}$ et on a $h(u) = y + \frac{t}{1-t}(y-u)$, d'où $y = (1-t)h(u) + tu \in]h(u), u[$. Il résulte de ce qui précède que l'on a $y \in \overset{\circ}{A}$. Donc on a bien $[x_0, x[\subset \overset{\circ}{A}$. En particulier, $\overset{\circ}{A}$ est convexe.
4. On suppose A convexe tel que $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$. On a toujours $\overset{\circ}{A} \subset A$, d'où $\overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{A}$. Réciproquement, soit $x \in \overline{A}$. Comme $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, il existe un point $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. D'après 3, on a $[x_0, x[\subset \overset{\circ}{A}$. Comme on a $x = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}x_0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x$, alors $x \in \overline{\overset{\circ}{A}}$, donc $\overline{A} \subset \overline{\overset{\circ}{A}}$. Par conséquent, on a $\overline{A} = \overline{\overset{\circ}{A}}$.

On a toujours $A \subset \overline{A}$, d'où $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{A}}$. Réciproquement, soit $x \in \overset{\circ}{\overline{A}}$. Alors il existe un voisinage ouvert V de x dans E tel que $V \subset \overline{A}$. Comme $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, il existe un point $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Pour tout $n \geq 2$, soit $x_n = \frac{n}{n-1}x - \frac{1}{n-1}x_0$, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, donc il existe $p \geq 2$ tel

que $x_p \in V \subset \overline{A}$. Comme on a $x = \left(1 - \frac{1}{p}\right)x_p + \frac{1}{p}x_0 \in]x_0, x_p[$, il résulte de 3 que l'on a $x \in \overset{\circ}{A}$. Donc on a $\overset{\circ}{\overline{A}} \subset \overset{\circ}{A}$. Par conséquent, on a $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\overline{A}}$.
5. On suppose A équilibré. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq 1$. Alors on a $\lambda\overline{A} = \overline{\lambda A} \subset \overline{A}$. Donc $\overline{A}$ est équilibré. On suppose maintenant que l'on a de plus $0 \in \overset{\circ}{A}$. Alors on a $0\ \overset{\circ}{A} = \{0\} \subset \overset{\circ}{A}$. Si $\lambda \neq 0$, alors on a $\lambda\ \overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\lambda A} \subset \overset{\circ}{A}$. Donc $\overset{\circ}{A}$ est équilibré. ■

Proposition 9.1.4. *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique $(E, \mathcal{T})$.*

1. *L'espace vectoriel F muni de la topologie induite par E est un espace vectoriel topologique.*
2. *L'adhérence $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.*
3. *Si $F \neq E$, alors on a $\overset{\circ}{F} = \emptyset$.*

Démonstration. 1. Ceci est trivial.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application

$$\begin{array}{rccc} f: & E \times E & \longrightarrow & E \\ & (x, y) & \longmapsto & x + \lambda y \end{array}$$

étant continue, donc $f^{-1}\big(\overline{F}\big)$ est un fermé de $E \times E$. Comme F est un sous-espace vectoriel de E, alors on a $F \times F \subset f^{-1}\big(\overline{F}\big)$, d'où on a $\overline{F} \times \overline{F} \subset f^{-1}\big(\overline{F}\big)$. Autrement dit, on a $f\big(\overline{F} \times \overline{F}\big) \subset \overline{F}$. Ceci étant vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on en déduit que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, alors il existe un ouvert non vide W de E tel que $W \subset \overset{\circ}{F}$. Soit $x \in W$, alors $V = x - W$ est un ouvert de E contenant 0 tel que $V \subset F$. D'après la proposition 9.1.2, on a alors $E = \bigcup\limits_{n \geq 1} nV \subset F$, d'où $E = F$, ce qui est impossible. Donc on a $\overset{\circ}{F} = \emptyset$. ■

Proposition 9.1.5. *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique, K un compact de E et F un fermé de E. Si l'on a $K \cap F = \emptyset$, alors il existe un voisinage équilibré V de 0 dans E tel que $(K + V) \cap (F + V) = \emptyset$.*

Démonstration. Comme on a $K \subset E \setminus F$ et $E \setminus F$ est ouvert dans E, alors, pour tout $x \in K$, il existe un voisinage ouvert W_x de 0 dans E tel que $x + W_x \subset E \setminus F$. Comme l'application $(a, b, c) \longmapsto a + b + c$ est continue de $E \times E \times E$ dans E, alors il existe un voisinage ouvert équilibré V_x de 0 dans E tel que $V_x + V_x + V_x \subset W_x$. Comme K est compact et on a $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} x + V_x$, alors il existe $x_1, \ldots, x_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} x_i + V_{x_i}$. Soit $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}$, alors V est un voisinage ouvert équilibré de 0 dans E. De plus, on a $V + V + V \subset W_{x_i}$, pour tout $1 \leq i \leq n$. On a $(K + V) \cap (F + V) = (K + V - V) \cap F = (K + V + V) \cap F$ et

$$K + V + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i + V_{x_i} + V + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i + V_{x_i} + V_{x_i} + V_{x_i} \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i + W_{x_i} \subset E \setminus F.$$

Par conséquent, on a $(K + V) \cap (F + V) = \emptyset$. ■

Définition 9.1.3. Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique.

1. Soit B un sous-ensemble de E. On dit que B est **borné** si pour tout voisinage V de 0, il existe un réel $s > 0$ tel que $B \subset sV$.
2. Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans $(E, \mathcal{T})$ est dite bornée si l'ensemble $\{x_n \ ; \ n \geq 0\}$ est borné.
3. On dit que E est **localement borné** si 0 possède un voisinage borné.
4. On dit que E possède la **propriété de Heine-Borel** si tout fermé borné dans E est compact.

Lemme 9.1.1. *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et B un sous-ensemble de E. Les propriétés suivantes sont équivalents.*

(i) B est borné.

(ii) Pour tout voisinage V de 0, il existe un réel $s > 0$ tel que $B \subset tV$ pour tout $t \geq s$.

(iii) Pour tout voisinage V de 0, il existe un réel $s > 0$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \geq s$, on ait $B \subset \lambda V$.

Démonstration. Les implications $(iii) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (i)$ sont évidentes.
Preuve de $(i) \Longrightarrow (iii)$. Soit V un voisinage de 0. Soit W un voisinage équilibré de 0 tel que $W \subset V$. Par hypothèse, il existe $s > 0$ tel que $B \subset sW$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \geq s > 0$, alors on a $\frac{s}{|\lambda|} \leq 1$, d'où $\frac{s}{\lambda} W \subset W$. Donc on a $sW \subset \lambda W \subset \lambda V$. Par conséquent, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \geq s$, on a $B \subset sW \subset \lambda V$. ■

Proposition 9.1.6. *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et B une partie de E. Les propriétés suivantes sont équivalents.*

(i) B est bornée.

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans B et pour toute suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{K}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$, on ait $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n x_n = 0$.

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 9 du supplément.

Proposition 9.1.7. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique.*

1. *Si B est un sous-ensemble borné de E, alors $\overline{B}$ est borné.*
2. *Si K est un compact de E, alors K est borné.*
3. *Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite convergente dans E, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée.*

Démonstration. 1. Soit V un voisinage de 0 dans E. D'après la proposition 9.1.2, il existe un voisinage fermé W de 0 dans E tel que $W \subset V$. Comme B est borné, il existe $s > 0$ tel que $B \subset sW$. D'où on a $\overline{B} \subset \overline{sW} = s\overline{W} = sW \subset sV$. Donc $\overline{B}$ est borné.
2. Soit V un voisinage ouvert équilibré de 0 dans E. D'après la proposition 9.1.2, on a $E = \bigcup\limits_{n\geq 0} nV$. Comme K est compact, alors il existe $p \geq 1$ tel que $K \subset \bigcup\limits_{n=0}^{p} nV$. Comme V est équilibré, alors pour tout $n \geq 0$, on a $nV \subset (n+1)V$, d'où $K \subset pV$. Donc K est borné.
3. Soit $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, alors $\{x\} \cup \{x_n \ ; \ n \geq 0\}$ est une partie compacte de E, donc bornée, d'où $\{x_n \ ; \ n \geq 0\}$ est borné. ■

Proposition 9.1.8. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique. Soient V un voisinage borné de 0 et $(\beta_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} |\beta_n| = 0$. Alors $(\beta_n V)_{n\geq 0}$ est une base locale de E.*

Démonstration. Notons d'abord que pour tout $n \geq 0$, $\beta_n V$ est un voisinage de 0. Soit U un voisinage équilibré de 0. Puisque V est borné, il existe un réel $s > 0$ tel que $V \subset sU$. La suite $(s\beta_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0, donc il existe $n \geq 0$ tel que $s|\beta_n| \leq 1$, d'où on a $s\beta_n U \subset U$. Par conséquent, on a $V \subset sU \subset \frac{1}{\beta_n} U$, d'où $\beta_n V \subset U$. Donc $(\beta_n V)_{n\geq 0}$ est une base locale de E. ■

On vient de voir que tout espace vectoriel topologique localement borné possède une base locale dénombrable. La réciproque n'est pas toujours vraie, voir exemples 9.2.5 et 9.2.6.

Définition 9.1.4. Une distance d sur un espace vectoriel E est dite **invariante par translation**, si pour tout $x, y, z \in E$, on a $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.

Remarque 9.1.1. Soit d une distance invariante par translation sur un espace vectoriel E. Alors pour tout $x \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d(0, nx) \leq nd(0, x)$. En effet, si $n = 0$, c'est clair. Supposons donc $n \geq 1$, on a $d(0, nx) \leq \sum\limits_{k=0}^{n-1} d(kx, (k+1)x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} d(0, x) = nd(0, x)$.

Tout espace vectoriel topologique métrisable possède une base locale dénombrable ; il suffit de prendre les boules ouvertes de centre 0 et de rayon $\frac{1}{n}$. La réciproque est aussi vraie et donnée par le théorème suivant :

Théorème 9.1.1. *Soit E un espace vectoriel topologique possédant une base locale dénombrable. Alors il existe une distance d sur E invariante par translation telle que*

1. *La topologie définie par d est égale à la topologie de E.*
2. *Les boules ouvertes de centre 0 sont équilibrées.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir ([28], p. 18).

Lemme 9.1.2. *Soit E un espace vectoriel topologique métrisable. Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans E convergente vers 0, il existe une suite $(t_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n x_n = 0$*

Démonstration. D'après le théorème précédent, il existe une distance d invariante par translation sur E induisant sa topologie. Comme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(0, x_n) = 0$, alors pour tout $k \geq 1$, il existe $n_k \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_k$, on ait $d(0, x_n) < \frac{1}{k^2}$. De plus, on peut supposer que pour tout $k \geq 1$, on a $n_{k+1} > n_k$. On pose $t_n = 1$ si $0 \leq n < n_1$ et $t_n = k$ si $n_k \leq n < n_{k+1}$. Alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$. D'après la remarque 9.1.1, pour tout n tel que $n_k \leq n < n_{k+1}$, on a $d(0, t_n x_n) = d(0, kx_n) \leq kd(0, x_n) < \frac{1}{k}$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n x_n = 0$. ■

Remarque 9.1.2. La notion de sous-ensemble borné d'un espace vectoriel topologique $(E, \mathcal{T})$ a déjà été définie dans la définition 9.1.3. Lorsque $(E, \mathcal{T})$ est métrisable, il y a possibilité de confusion entre cette définition et la définition usuelle d'un ensemble borné dans un espace métrique, voir définition 2.2.1. Si d est une distance invariante par translation sur E dont la topologie associée est $\mathcal{T}$ et si A est un sous-ensemble borné de $(E, \mathcal{T})$, alors A est borné dans l'espace métrique (E, d). En effet, il existe un $n \geq 1$ tel que $A \subset nB(0,1)$, où $B(0,1) = \{x \in E \; ; \; d(0,x) < 1\}$. D'après la remarque 9.1.1, pour tout $x \in E$, on a $d(0, nx) \leq nd(0,x)$, d'où $nB(0,1) \subset B(0,n)$. Par conséquent, A est borné dans l'espace métrique (E, d). Par contre, les deux notions peuvent être différentes même si la distance induisant la topologie est invariante par translation. Par exemple, si E est un espace normé et si d est la distance induite par la norme, alors les deux notions coïncident. Mais ceci est faux si l'on remplace d par $d' = \frac{d}{1+d}$ qui est aussi une distance invariante par translation et qui induit la même topologie sur E. En fait, E est borné pour la distance d', mais un espace vectoriel topologique $(E, \mathcal{T})$ n'est jamais borné si $E \neq \{0\}$. Lorsque l'on parle d'ensembles bornés dans un espace vectoriel topologique, il est sous-entendu que la définition utilisée est celle donnée dans ce chapitre.

Remarque 9.1.3. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique. La notion de suite de Cauchy peut être définie dans $(E, \mathcal{T})$ sans faire référence à aucune distance. Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de E est dite **de Cauchy** si pour tout voisinage V de 0 dans $(E, \mathcal{T})$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n - x_m \in V$ dès que $n \geq N$ et $m \geq N$. De même, si $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille filtrante croissante d'éléments de E, on dit que $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est **de Cauchy** si pour tout voisinage V de 0 dans $(E, \mathcal{T})$, il existe un $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que pour tout $\lambda, \mu \in \Lambda$ vérifiant $\lambda \geq \lambda_0$ et $\mu \geq \lambda_0$, on ait $x_\lambda - x_\mu \in V$. Supposons maintenant qu'il existe une distance d invariante par translation sur E dont la topologie associée est $\mathcal{T}$. Puisque l'on a $d(x_n, x_m) = d(x_n - x_m, 0)$ et puisque les boules centrées à l'origine forment une base locale de $(E, \mathcal{T})$, on en déduit qu'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de E est de Cauchy dans $(E, \mathcal{T})$ si et seulement si $(x_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans l'espace métrique (E, d). De même, une famille filtrante croissante d'éléments de E est de Cauchy dans $(E, \mathcal{T})$ si et seulement si elle est de Cauchy dans l'espace métrique (E, d). En conséquence, deux distances sur E, invariantes par translation et induisant la topologie $\mathcal{T}$, ont les mêmes suites de Cauchy. Elles ont aussi les mêmes suites convergentes dans $(E, \mathcal{T})$. Ces remarques montrent le résultat important suivant :
Si d_1 et d_2 sont deux distances sur E invariantes par translation et induisant la topologie $\mathcal{T}$, alors on a :

1. d_1 et d_2 ont les mêmes suites de Cauchy.
2. (E, d_1) est complet si et seulement si (E, d_2) est complet.

Lemme 9.1.3. *Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans un espace vectoriel topologique $(E, \mathcal{T})$. Alors $(x_n)_{n \geq 0}$ est bornée.*

Démonstration. Soient W et V des voisinages de 0 dans $(E, \mathcal{T})$ tels que V soit équilibré et $V + V \subset W$. Comme $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n - x_N \in V$ pour tout $n \geq N$. Comme $K = \{x_0, \ldots, x_N\}$ est une partie bornée de E, voir proposition 9.1.7, alors il existe $s > 0$ tel que $K \subset sV$. Soit $t = \max(1, s)$, alors pour $n \in \{0, \ldots, N\}$, on a $x_n \in sV \subset tV \subset tW$, et pour tout $n \geq N$, on a $x_n = (x_n - x_N) + x_N \in V + sV \subset tV + tV \subset tW$. Par conséquent, $(x_n)_{n \geq 0}$ est bornée. ∎

Définition 9.1.5. Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et A un sous-ensemble de E. On dit que A est **précompact** † si pour tout voisinage V de 0 dans E, il existe un sous-ensemble fini F dans E tel que $A \subset F + V$.

Notons que si $(E, \mathcal{T})$ est un espace vectoriel topologique métrisable et si d est une distance invariante par translation sur E induisant la topologie $\mathcal{T}$, alors un sous-ensemble A de E est précompact si et seulement si l'espace métrique (A, d) est précompact, voir définition 3.1.4. Notons aussi qu'un ensemble précompact d'un espace vectoriel topologique est toujours borné.

Définition 9.1.6. On dit qu'un espace vectoriel topologique $(E, \mathcal{T})$ est un **F-espace** si la topologie $\mathcal{T}$ peut être définie par une métrique invariante et complète.

Proposition 9.1.9. *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et F un sous-espace vectoriel de E tel que F muni de la topologie induite par E soit un F-espace. Alors F est fermé dans E.*

Démonstration. Soit $y \in \overline{F}$, alors il existe une famille filtrante croissante $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans F telle que $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = y$. Donc $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est de Cauchy. Comme F est un F-espace, alors $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge vers un élément $x \in F$, voir théorème 2.6.1. Donc on a $y = x \in F$. Par conséquent, F est fermé dans $(E, \mathcal{T})$. ■

Proposition 9.1.10. *Soient E, F deux espaces vectoriels topologiques et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) T est uniformément continue, i.e. pour tout voisinage V de 0 dans F, il existe un voisinage U de 0 dans E tel que pour tout $x, y \in E$ vérifiant $x - y \in U$, on ait $T(x) - T(y) \in V$.

(ii) T est continue.

(iii) T est continue en 0.

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 9 du supplément.

Définition 9.1.7. Soient E, F deux espaces vectoriels topologiques et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On dit que T est **bornée** si l'image de tout borné de E est un borné de F.

Proposition 9.1.11. *Soient E, F deux espaces vectoriels topologiques et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Considérons les propriétés suivantes :*

(i) T est continue.

(ii) T est bornée.

(iii) Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans E telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $(T(x_n))$ est une suite bornée dans F.

(iv) Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans E telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $T(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

† On dit **totally bounded** dans les textes mathématiques en langue anglaise.

1. *On a les implications suivantes : (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) et (i) $\Longrightarrow$ (iv).*

2. *Si E est métrisable, alors on a les équivalences (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv).*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 9 du supplément.

Proposition 9.1.12. *Soient E un espace vectoriel topologique et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *f est continue.*

(ii) $\ker(f)$ *est fermé dans E.*

(iii) $\ker(f)$ *n'est pas dense dans E.*

(iv) *f est bornée sur un voisinage de 0, i.e. il existe un voisinage V de 0 dans E et il existe une constante $M > 0$ tels $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in V$.*

Démonstration. Les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) sont triviales.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (iv). Supposons donc $\overline{\ker(f)} \neq E$. Il résulte alors de la proposition 1.2.2 que le complémentaire de $\ker(f)$ est d'intérieur non vide. Par conséquent, il existe $x \in E$ et un voisinage équilibré V de 0 dans E tels que $(x + V) \cap \ker(f) = \emptyset$. Si $f(V)$ n'est pas bornée, comme $f(V)$ est une partie équilibrée de $\mathbb{K}$, alors on a $f(V) = \mathbb{K}$. Soit $y \in V$ tel que $f(y) = -f(x)$, alors on a $f(x + y) = 0$, d'où $x + y \in (x + V) \cap \ker(f)$, ce qui est impossible. Donc $f(V)$ est bornée.
Preuve de (iv) $\Longrightarrow$ (i). D'après la proposition 9.1.10, il suffit de montrer que f est continue en 0. Soit $r > 0$. Soient V un voisinage de 0 dans E et $M > 0$ tels que pour tout $x \in V$, on ait $|f(x)| \leq M$. Soit $t > 0$ tel que $tM < r$. Alors tV est un voisinage de 0 dans E et pour tout $z \in tV$, on a $|f(z)| \leq tM < r$. Autrement dit, on a $f(tV) \subset B(0, r)$, où $B(0, r)$ est la boule ouverte de centre 0 et de rayon r dans $\mathbb{K}$. Donc f est continue en 0. ■

Définition 9.1.8. Soit E un espace vectoriel topologique. On appelle **dual topologique** de E et l'on note E^* l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E.

Théorème 9.1.2. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique de dimension finie n. Alors il existe un homéomorphisme linéaire T de $\mathbb{K}^n$ sur E, où $\mathbb{K}^n$ est muni de n'importe quelle norme $\| \; \|$.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 9 du supplément.

Corollaire 9.1.2. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors il existe une unique topologie sur E faisant de E un espace vectoriel topologique.*

Corollaire 9.1.3. *Soient E, F deux espaces vectoriels topologiques et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Si E est de dimension finie. Alors T est continue.*

Démonstration. Ceci résulte du théorème précédent et du corollaire 6.6.1. ■

Corollaire 9.1.4. *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique $(E, \mathcal{T})$. Si F est de dimension finie, alors F est fermé dans E.*

Démonstration. D'après le théorème précédent, F muni de la topologie induite par E est linéairement homéomorphe à $\mathbb{K}^n$. Donc F muni de la topologie induite par E est un F-espace. Il résulte alors de la proposition 9.1.9 que F est fermé dans $(E, \mathcal{T})$. ■

Théorème 9.1.3. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique. Les propriétés suivantes sont équivalents.*

(i) E est de dimension finie.

(ii) E est localement compact.

(iii) E est localement borné et possède la propriété de Heine-Borel.

Démonstration. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte du théorème précédent et du théorème 6.6.2.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Puisque E est localement compact, il résulte de la proposition 9.1.7 que E est localement borné. Soit B une partie bornée et fermée dans E. Soit V un voisinage compact de 0 dans E, alors il existe $s > 0$ tel que $B \subset sV$. Comme sV est compact et B est fermée, alors B est compacte. Donc E possède la propriété de Heine-Borel.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). Puisque E est localement borné, il existe un voisinage borné W de 0 dans E. D'après la proposition 9.1.2, il existe un voisinage V de 0 dans E tel que $\overline{V} \subset W$. Donc $\overline{V}$ est borné et fermé, d'où $\overline{V}$ est compact. Par conséquent, il existe $x_1, \dots, x_p \in E$ tels que $\overline{V} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{p} x_i + \frac{1}{2}V$. Soit $F = \mathrm{Vect}(\{x_1, \dots, x_p\})$, alors F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E tel que $V \subset \overline{V} \subset F + \frac{1}{2}V$. On a $\frac{1}{2}V \subset \frac{1}{2}F + \frac{1}{2^2}V = F + \frac{1}{2^2}V$, d'où $V \subset F + F + \frac{1}{2^2}V = F + \frac{1}{2^2}V$. On vérifie, par récurrence, que pour tout $n \geq 0$, on a alors $V \subset F + \frac{1}{2^n}V$. Donc on a $V \subset \bigcap\limits_{n\geq 0} F + \frac{1}{2^n}V$. D'après la proposition 9.1.8, $\left(\frac{1}{2^n}V\right)_{n\geq 0}$ est une base locale de E. Il résulte alors de la proposition 9.1.3 que l'on a $\bigcap\limits_{n\geq 0} F + \frac{1}{2^n}V = \overline{F}$. D'après le corollaire 9.1.4, F est fermé dans E, d'où on a $V \subset F$. Il résulte de la proposition 9.1.4 que $E = F$, donc E est de dimension finie. ■

9.2 Espaces localement convexes

En contraste avec les espaces normés, un espace vectoriel topologique E peut ne pas contenir des ouverts convexes autres que $\emptyset$ et E, voir exercices 9.4 et 9.5, et dans ce cas, le dual topologique de E est trivial, *i.e.* $E^* = \{0\}$, voir également la remarque 9.4.1. Donc l'intérêt d'étudier les espaces vectoriels topologiques généraux est réduit parce que ils peuvent avoir des propriétés pathologiques.

Définition 9.2.1. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique.

1. On dit que E est **localement convexe** ou que E est un **espace localement convexe** s'il possède une base locale constituée d'ensembles convexes.

2. On dit que E est **de Fréchet** ou que E est un **espace de Fréchet** s'il est à la fois un F-espace et localement convexe.

3. On dit que E est **normable** si sa topologie peut être définie par une norme.

Exemple 9.2.1. 1. Tout espace normé est localement convexe et localement borné.

2. Tout espace de Banach est un espace de Fréchet.

Exemple 9.2.2. Soit $p \in]0, 1[$. On note ℓ_p l'ensemble des suites de scalaires $x = (x_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty$. On vérifie facilement que pour tous réels positifs s et t, on a $(s + t)^p \leq s^p + t^p$. On en déduit que ℓ_p est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0}, y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell_p$, on pose :

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n - y_n|^p .$$

On montrera, exercice 9.6, que d est une distance sur ℓ_p invariante par translation, et ℓ_p muni de cette distance est un F-espace. Mais ℓ_p n'est pas localement convexe. Autrement dit, ℓ_p est un F-espace qui n'est pas de Fréchet.

Proposition 9.2.1. *Tout espace localement convexe possède une base locale constituée d'ensembles convexes et équilibrés.*

Démonstration. Soient E un espace localement convexe et U un voisinage convexe de 0. D'après la proposition 9.1.2, il existe un voisinage équilibré W de 0 tel que $W \subset U$. Soit $V = \text{conv}(W)$ l'enveloppe convexe de W, voir définition 9.5.1, alors V est un voisinage convexe et équilibré de 0 tel que $V \subset U$. ■

Définition 9.2.2. Une famille $\mathcal{P} = (p_i)_{i\in I}$ de semi-normes sur un espace vectoriel E est dite **séparante** si pour tout $x \in E$ tel que $x \neq 0$, il existe $i \in I$ tel que $p_i(x) \neq 0$.

Exemple 9.2.3. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, soient $p_1(x, y) = |x|$ et $p_2(x, y) = |y|$, alors $\{p_1, p_2\}$ est une famille séparante de semi-normes sur $\mathbb{R}^2$.

Notez qu'une famille de semi-normes sur un espace vectoriel est séparante au sens de la définition 1.5.2 est aussi séparante au sens de la définition 9.2.2, mais la réciproque n'est pas toujours vraie comme est cela montré dans l'exemple ci-dessus. En tout cas, lorsque l'on parle d'une famille de semi-normes séparante, il est sous-entendu que l'on utilise la définition 9.2.2.

Lemme 9.2.1. *Soient E un espace vectoriel topologique et p une semi-norme sur E. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *p est continue.*

(ii) *p est continue en 0.*

(iii) *p est uniformément continue en 0, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de 0 dans E tel que pour tout $x, y \in E$ vérifiant $x - y \in U$, on ait $|p(x) - p(y)| < \varepsilon$.*

(iv) *Pour tout $r > 0$, l'ensemble $\{x \in E ; p(x) < r\}$ est un ouvert de E.*

(v) *Il existe $r > 0$ tel que $\{x \in E ; p(x) < r\}$ soit un ouvert de E.*

(vi) *Pour tout $r > 0$, l'ensemble $\{x \in E ; p(x) \leq r\}$ est un voisinage de 0 dans E.*

(vii) *Il existe $r > 0$ tel que $\{x \in E ; p(x) \leq r\}$ soit un voisinage de 0 dans E.*

Démonstration. Puisque pour tout x, $y \in E$, on a $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$, alors on a les équivalences (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). Soient $r > 0$ et $s > 0$. Puisque l'on a $\{x \in E\ ;\ p(x) < s\} = \frac{s}{r}\{x \in E\ ;\ p(x) < r\}$ et $\{x \in E\ ;\ p(x) \leq s\} = \frac{s}{r}\{x \in E\ ;\ p(x) \leq r\}$, alors on a les équivalences (iv) $\Longleftrightarrow$ (v) et (vi) $\Longleftrightarrow$ (vii). Finalement, les implications (i) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (vi) $\Longrightarrow$ (i) sont triviales. ■

On déduit du lemme précédent que si E est un espace vectoriel topologique et si p et q sont des semi-normes sur E telles que p soit continue et $q(x) \leq p(x)$, pour tout $x \in E$, alors q est continue.

Proposition 9.2.2. *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et A une partie à la fois convexe et voisinage de 0 dans E. Alors A est absorbante et la jauge μ_A de A vérifie les propriétés suivantes :*

1. *La fonction μ_A est sous-additive et positivement homogène et on a :*
$$\{x \in E\ ;\ \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in E\ ;\ \mu_A(x) \leq 1\}\,.$$
2. *Si A est équilibrée, alors μ_A est une semi-norme continue sur E et on a :*
$$\overset{\circ}{A} = \{x \in E\ ;\ \mu_A(x) < 1\} \quad \textit{et} \quad \overline{A} = \{x \in E\ ;\ \mu_A(x) \leq 1\}\,.$$
3. *Si A est ouverte, on a $A = \{x \in E\ ;\ \mu_A(x) < 1\}$ et μ_A est semi-continue supérieurement.*
4. *Si A est fermée, on a $A = \{x \in E\ ;\ \mu_A(x) \leq 1\}$ et μ_A est semi-continue inférieurement.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 9 du supplément.

Théorème 9.2.1. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace localement convexe. Soit $\mathcal{B} = (V_i)_{i\in I}$ une base locale de E formée d'ensembles ouverts convexes et équilibrés. Pour tout $i \in I$, soit μ_i la jauge de V_i. Alors $(\mu_i)_{i\in I}$ est une famille séparante de semi-normes continues sur E telle que pour tout $i \in I$, on ait $V_i = \{x \in E\ ;\ \mu_i(x) < 1\}$.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, $(\mu_i)_{i\in I}$ est une famille de semi-normes continues sur E telle que pour tout $i \in I$, on ait $V_i = \{x \in E\ ;\ \mu_i(x) < 1\}$. Il reste à montrer que la famille de semi-normes $(\mu_i)_{i\in I}$ est séparante. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$. Comme E est séparé, il existe $i \in I$ tel que $x \notin V_i$, d'où on a $\mu_i(x) \geq 1$. Par conséquent, la famille $(\mu_i)_{i\in I}$ est séparante. ■

Lemme 9.2.2. *Soient E un espace vectoriel, $(F_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces vectoriels topologiques et pour tout $i \in I$, soit $f_i : E \longrightarrow F_i$ une application linéaire. On suppose de plus que la famille $(f_i)_{i\in I}$ est séparante, i.e. pour tout $x \in E$ tel que $x \neq 0$, il existe $i \in I$ tel que $f_i(x) \neq 0$. Alors E muni de la topologie initiale associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$ est un espace vectoriel topologique. De plus, si pour tout $i \in I$, F_i est localement convexe, alors E est localement convexe.*

Pour une preuve du lemme précédent, voir chapitre 9 du supplément.

Soient E un espace vectoriel et $(p_i)_{i\in I}$ une famille de semi-normes sur E. Pour tout $i \in I$, soit $(E_i, \| \|_i)$ l'espace normé séparé de (E, p_i) et soit $\pi_i : (E, p_i) \longrightarrow (E_i, \| \|_i)$ l'application canonique, c'est une application linéaire et pour tout $x \in E$, on a $\|\pi_i(x)\|_i = p_i(x)$, voir proposition 7.5.1. La topologie sur E **associée à la famille de semi-normes** $(p_i)_{i\in I}$ est par définition la topologie initiale sur E associée à la famille d'applications linéaires $(\pi_i)_{i\in I}$.

Théorème 9.2.2. *Soient E un espace vectoriel et $(p_i)_{i\in I}$ une famille séparante de semi-normes sur E. Soit $\mathcal{T}_1$ la topologie sur E associée à la famille $(p_i)_{i\in I}$. Alors on a :*

1. *$(E, \mathcal{T}_1)$ est un espace localement convexe.*
2. *Pour tout $i \in I$ et tout $n \geq 1$, soit $V(i,n) = \{x \in E \ ; \ p_i(x) < \frac{1}{n}\}$. Soit $\mathcal{B}$ la collection des intersections finies de $V(i,n)$. Alors $\mathcal{B}$ est une base locale de $(E, \mathcal{T}_1)$ formée d'ensembles ouverts convexes et équilibrés.*
3. *Pour tout $i \in I$, p_i est continue.*
4. *Soit A un sous-ensemble de E. Alors A est borné dans $(E, \mathcal{T}_1)$ si et seulement si pour tout $i \in I$, p_i est majorée sur A.*

Démonstration. 1. Ceci résulte de la définition de la topologie $\mathcal{T}_1$ et du lemme précédent.
2. Puisque pour tout $i \in I$ et pour tout $x \in E$, on a $\|\pi_i(x)\|_i = p_i(x)$, on déduit du lemme 1.4.1, que $\mathcal{B}$ est une base locale de $(E, \mathcal{T}_1)$ formée d'ensembles ouverts. Puisque pour tout $i \in I$ et tout $n \geq 1$, $V(i,n)$ est convexe et équilibré, on en déduit que tout élément du $\mathcal{B}$ est convexe et équilibré.
3. Soit $i \in I$. Puisque $V(i,1)$ est ouvert dans $(E, \mathcal{T}_1)$, on déduit du lemme 9.2.1 que p_i est continue.
4. Soit A un sous-ensemble de E. Supposons d'abord que A est borné dans $(E, \mathcal{T}_1)$. Soit $i \in I$. Alors il existe $s > 0$ tel que $A \subset sV(i,1) = \{x \in E \ ; \ p_i(x) < s\}$. Donc p_i est majorée sur A.
Réciproquement, supposons que pour tout $i \in I$, p_i est majorée sur A. Soit V un voisinage de 0 dans $(E, \mathcal{T}_1)$. Alors il existe $i_1, \dots, i_q \in I$ et $n_1, \dots, n_q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\bigcap\limits_{k=1}^{q} V(i_k, n_k) \subset V$. Comme pour tout $i \in I$, p_i est majorée sur A, il existe $t_k > 0$ tel que pour tout $x \in A$, on ait $p_{i_k}(x) < t_k$. Alors pour tout k et pour tout $x \in A$, on a $p_{i_k}\big(\frac{1}{t_k n_k}x\big) < \frac{1}{n_k}$. Autrement dit, pour tout k, on a $\frac{1}{t_k n_k}A \subset V(i_k, n_k)$. Soit $s = \max\limits_{1\leq k\leq q} t_k n_k$, alors $s > 0$ et pour tout k, on a $\frac{1}{s}A \subset \frac{t_k n_k}{s}V(i_k, n_k) \subset V(i_k, n_k)$. Par conséquent, on a $\frac{1}{s}A \subset V$. Donc A est borné. ∎

Remarque 9.2.1. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace localement convexe. Soit $\mathcal{B} = (V_i)_{i\in I}$ une base locale de E formée d'ensembles ouverts convexes et équilibrés. Pour tout $i \in I$, soit μ_i la jauge de V_i. Le théorème 9.2.1 nous dit que $(\mu_i)_{i\in I}$ est une famille séparante de semi-normes continues sur E. Le théorème 9.2.2 nous dit que $(\mu_i)_{i\in I}$ induit une topologie $\mathcal{T}_1$ sur E qui en fait un espace localement convexe. Alors on a $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1$. En effet, d'après le théorème 9.2.1, pour tout $i \in I$, la semi-norme μ_i est continue de $(E, \mathcal{T})$ dans $\mathbb{R}$. Alors pour tout $i \in I$ et pour tout $n \geq 1$, $V(i,n) = \{x \in E \ ; \ \mu_i(x) < \frac{1}{n}\}$ est un ouvert de $(E,\, \mathcal{T})$. Il résulte du théorème 9.2.2 que tout ouvert de $(E,\, \mathcal{T}_1)$ est un ouvert de $(E,\, \mathcal{T})$. Autrement dit, on a $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$. D'après le théorème 9.2.1, pour tout $i \in I$, on a $V_i = \{x \in E \; ; \; \mu_i(x) < 1\} = V(i, 1)$ qui est ouvert dans $(E,\, \mathcal{T}_1)$. Par conséquent, on a $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1$, d'où $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1$.

Remarque 9.2.2. Soit $(E,\, \mathcal{T})$ un espace localement convexe. Supposons que E possède une base locale dénombrable. D'après le théorème 9.1.1, $(E,\, \mathcal{T})$ est métrisable. On va définir concrètement deux distances sur E qui induisent la topologie $\mathcal{T}$. En effet, soit $(V_n)_{n\geq 1}$ une base locale de E formée d'ensembles ouverts convexes et équilibrés. Pour tout $n \geq 1$, soit p_n la jauge de V_n.
Première distance. Pour tout $x, y \in E$, on pose :

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}.$$

Montrons que d est une distance sur E invariante par translation et la topologie induite par d est $\mathcal{T}$. De plus, les boules ouvertes de centre 0 associées à cette distance sont équilibrées, mais ne sont pas en général convexes.
On vérifie, comme dans la proposition 2.3.5, que d est une distance sur E. Il est clair que d est invariante par translation. Il reste à montrer que la topologie induite par d est égale à $\mathcal{T}$. Pour tout $n \geq 1$, soit $(E_n,\, \|\ \|_n)$ l'espace normé séparé de $(E,\, p_n)$ et soit $\pi_n \,:\, (E,\, p_n) \longrightarrow (E_n,\, \|\ \|_n)$ l'application canonique. Pour tout $x, y \in E$, on a $0 \leq \dfrac{\|\pi_n(x-y)\|_n}{1+\|\pi_n(x-y)\|_n} \leq 2^n d(x,y)$. On en déduit que π_n est continue de $(E,\, d)$ dans $(E_n,\, \|\ \|_n)$. Par conséquent, l'application identité $x \longmapsto x$ est continue de $(E,\, d)$ dans $(E,\, \mathcal{T})$. Autrement dit, tout ouvert de $(E,\, \mathcal{T})$ est un ouvert de $(E,\, d)$. Comme d est invariante par translation, pour montrer que tout ouvert de $(E,\, d)$ est un ouvert de $(E,\, \mathcal{T})$, il suffit de montrer que pour tout $r > 0$, il existe un voisinage ouvert V de 0 dans $(E,\, \mathcal{T})$ tel que $V \subset B(0,r) = \{x \in E \; ; \; d(0,x) < r\}$. Soient $r > 0$ et $N \geq 1$ tels que $\frac{1}{2^N} < \frac{r}{2}$. Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $\varepsilon > 0$, soit $V(n,\varepsilon) = \{x \in E \; ; \; p_n(x) < \varepsilon\}$. Soit $V = \bigcap\limits_{n=1}^{N} V\big(n, \frac{r}{2}\big)$, alors V est un ouvert de $(E,\, \mathcal{T})$ contenant 0. Soit $x \in V$, on a :

$$\begin{aligned}
d(0,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} p_n(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{r}{2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \;=\; \tfrac{r}{2}\big(1 - \tfrac{1}{2^N}\big) + \tfrac{1}{2^N} < r.
\end{aligned}$$

Donc on a $V \subset B(0,r)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq 1$, on a $d(0, \lambda x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(\lambda x)}{1 + p_n(\lambda x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\lambda| p_n(\lambda x)}{1 + |\lambda| p_n(x)}$.
Comme l'application $s \longmapsto \frac{s}{1+s}$ est croissante sur $[0, +\infty[$, on a $\frac{|\lambda| p_n(\lambda x)}{1 + |\lambda| p_n(x)} \leq \frac{p_n(x)}{1 + p_n(x)}$, d'où $d(0, \lambda x) \leq d(0, x)$. Donc les boules de centre 0 sont équilibrées.

Deuxième distance. Soit $(t_n)_{n \geq 1}$ une suite strictement positive telle que $t_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour tout $x, y \in E$, on pose :

$$d'(x, y) = \max_{n \geq 1} \frac{t_n\, p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)}.$$

Montrons que d' est une distance sur E invariante par translation et la topologie induite par d' est $\mathcal{T}$. De plus, les boules ouvertes de centre 0 associées à cette distance sont équilibrées et convexes.
On vérifie, comme ci-dessus, que d' est une distance sur E et que tout ouvert de $(E, \mathcal{T})$ est un ouvert de (E, d'). Comme d' est invariante par translation, pour montrer que tout ouvert de (E, d') est un ouvert de $(E, \mathcal{T})$, il suffit de montrer que pour tout $r > 0$, $B(0, r) = \{x \in E \ ;\ d'(0, x) < r\}$ est un ouvert de $(E, \mathcal{T})$. Soit $r > 0$. Comme on a $\lim_{n \to +\infty} t_n = 0$, alors il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $t_n \leq r$. Donc l'ensemble $I = \{n \geq 1 \ ;\ t_n > r\}$ est fini. Notons d'abord que si $x \in E$, alors il existe $n_0 \geq 1$ tel que $d'(0, x) = \max_{n \geq 1} \frac{t_n\, p_n(x)}{1 + p_n(x)} = \frac{t_{n_0}\, p_{n_0}(x)}{1 + p_{n_0}(x)} < t_{n_0}$. Si $I = \emptyset$, alors on a $B(0, r) = E$, donc c'est un ouvert convexe de $(E, \mathcal{T})$. Si $I \neq \emptyset$, on pose $V_n = \left\{x \in E \ ;\ p_n(x) < \frac{r}{t_n - r}\right\}$, pour tout $n \in I$. Vérifions que l'on a $B(0, r) = \bigcap_{n \in I} V_n$. Soit $x \in B(0, r)$. Alors pour tout $n \in I$, on a $\frac{t_n\, p_n(x)}{1 + p_n(x)} \leq d'(0, x) < r$, d'où $p_n(x) < \frac{r}{t_n - r}$, donc on a $x \in \bigcap_{n \in I} V_n$. Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{n \in I} V_n$. Alors il existe $n_0 \geq 1$ tel que $d'(0, x) = \max_{n \geq 1} \frac{t_n\, p_n(x)}{1 + p_n(x)} = \frac{t_{n_0}\, p_{n_0}(x)}{1 + p_{n_0}(x)} < t_{n_0}$. Si $n_0 \notin I$, alors on a $t_{n_0} \leq r$, d'où $d'(0, x) < r$, donc $x \in B(0, r)$. Si $n_0 \in I$, alors on a $p_{n_0}(x) < \frac{r}{t_{n_0} - r}$.
Comme l'application $s \longmapsto \frac{t_n s}{1+s}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, alors on a $\frac{t_{n_0}\, p_{n_0}(x)}{1 + p_{n_0}(x)} < t_{n_0} \frac{\frac{r}{t_{n_0} - r}}{1 + \frac{r}{t_{n_0} - r}} = r$, d'où $d'(0, x) = \frac{t_{n_0}\, p_{n_0}(x)}{1 + p_{n_0}(x)} < r$, donc $x \in B(0, r)$. Par conséquent, on a $B(0, r) = \bigcap_{n \in I} V_n$. Ainsi, la topologie induite par d' est $\mathcal{T}$.
Comme ci-dessus, on vérifie également que les boules de centre 0 sont équilibrées. Il reste à montrer que les boules ouvertes de centre 0 sont convexes. Comme pour tout $n \in I$, V_n est convexe, voir lemme 9.2.1, on en déduit que $B(0, r)$ est convexe.

Remarque 9.2.3. Soient E un espace vectoriel et $(p_n)_{n \geq 1}$ une famille dénombrable séparante de semi-normes sur E. Alors E muni de la topologie associée à la famille $(p_n)_{n \geq 1}$ est un espace localement convexe et métrisable, et les formules dans la remarque précédente définissent des distances sur E induisant la topologie de E associée à la famille de semi-normes $(p_n)_{n\geq 1}$.

Remarque 9.2.4. Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace localement convexe et $(p_i)_{i\in I}$ une famille séparante de semi-normes sur E induisant la topologie $\mathcal{T}$. Soit F un sous-espace vectoriel de E et pour tout $i \in I$, soit q_i la restriction de p_i à F. Alors $(q_i)_{i\in I}$ une famille séparante de semi-normes sur F. On déduit du théorème précédent, propriété 2, que la topologie sur F associée à la famille $(q_i)_{i\in I}$ coïncide avec la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur F.

Remarque 9.2.5. Soient E un espace vectoriel et $(G_i, N_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces normés et pour tout $i \in I$, soit $f_i : E \longrightarrow (G_i, N_i)$ une application linéaire. On suppose de plus que la famille d'applications $(f_i)_{i\in I}$ est séparante. Pour tout $i \in I$ et pour tout $x \in E$, soit $p_i(x) = N_i(f_i(x))$. Alors $(p_i)_{i\in I}$ est une famille séparante de semi-normes sur E. Pour tout $i \in I$, soit $(E_i, \| \|_i)$ l'espace normé séparé de (E, p_i) et soit $\pi_i : (E, p_i) \longrightarrow (E_i, \| \|_i)$ l'application canonique, c'est une application linéaire et pour tout $x \in E$, on a $\|\pi_i(x)\|_i = p_i(x)$, voir proposition 7.5.1. D'après la proposition 7.5.2, pour tout $i \in I$, il existe une application linéaire continue $\widetilde{f_i} : E_i \longrightarrow G_i$ telle que $\widetilde{f_i} \circ \pi_i = f_i$. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & & G_i \\ & E_i \arrow[ur, "\widetilde{f_i}"'] & \end{tikzcd}$$

De plus, pour tout $x \in E$, on a $N_i(\widetilde{f_i}(\pi_i(x))) = N_i(f_i(x)) = p_i(x) = \|\pi_i(x)\|_i$. Autrement dit, $\widetilde{f_i}$ est une isométrie de E_i sur $f_i(E)$. En particulier, $\widetilde{f_i}$ est un homéomorphisme de E_i sur $f_i(E)$. On en déduit que la topologie initiale sur E associée à la famille $(f_i)_{i\in I}$ coïncide avec la topologie sur E associée à la famille de semi-normes $(p_i)_{i\in I}$.

Remarque 9.2.6. Soient E un espace localement convexe et $(p_i)_{i\in I}$ une famille de semi-normes sur E induisant sa topologie. Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de E et $a \in E$. Alors on a :

1. La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers a dans E si et seulement si pour tout $i \in I$, la suite $(p_i(a_n - a))_{n\geq 0}$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.
   En effet, supposons d'abord que $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers a dans E. Comme pour tout $i \in I$, p_i est continue, alors pour tout $i \in E$, la suite $(p_i(a_n - a))_{n\geq 0}$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.
   Réciproquement, supposons que pour tout $i \in I$, la suite $(p_i(a_n - a))_{n\geq 0}$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$. Pour tout $i \in I$, soit $(E_i, \| \|_i)$ l'espace normé séparé de (E, p_i) et soit $\pi_i : (E, p_i) \longrightarrow (E_i, \| \|_i)$ l'application canonique, c'est une application linéaire et pour tout $x \in E$, on a $\|\pi_i(x)\|_i = p_i(x)$, voir proposition 7.5.1. La topologie de E est la topologie initiale associée à la famille $(\pi_i)_{i\in I}$. Comme pour tout $i \in I$ et pour tout $n \geq 0$, on a $\|\pi_i(a_n) - \pi_i(a)\|_i = \|\pi_i(a_n - a)\|_i = p_i(a_n - a)$, on déduit de la proposition 1.7.3 que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers a dans E.
   Montrons directement que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers a dans E. Soit V un voisinage de 0 dans E. Alors il existe $i_1, \ldots, i_k \in I$ et il existe $\varepsilon > 0$ tels que $\bigcap_{j=1}^{k} \{x \in E \,;\, p_{i_j}(x) < \varepsilon\} \subset V$. Comme pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$, on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} p_{i_j}(a_n - a) = 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$, on ait $p_{i_j}(a_n - a) < \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $n \geq N$, on a $a_n - a \in V$. Autrement dit, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers a dans E.

2. Si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers a dans E, alors pour tout $i \in E$, la suite $(p_i(a_n))_{n\geq 0}$ converge vers $p_i(a)$ dans $\mathbb{R}$. La réciproque n'est pas vraie.
   En effet, comme pour tout $i \in I$, p_i est continue, si $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers a dans E, alors pour tout $i \in E$, la suite $(p_i(a_n))_{n\geq 0}$ converge vers $p_i(a)$ dans $\mathbb{R}$. Pour montrer que la réciproque n'est pas vraie, il suffit de prendre $E = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue et de prendre $a_n = (-1)^n$ et $a = 1$. Alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = 1 = |a|$, mais la suite la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers a dans $\mathbb{R}$.

Remarque 9.2.7. Soient E un espace vectoriel et $(p_i)_{i\in I}$ une famille séparante de semi-normes sur E. Soit $\mathcal{E}(I)$ l'ensemble des parties finies et non vides de I. Pour tout $J \in \mathcal{E}(I)$ et pour tout $x \in E$, soit $P_J(x) = \max\limits_{i\in J} p_i(x)$. Alors $(P_J)_{J\in\mathcal{E}(I)}$ une famille séparante de semi-normes sur E et la topologie sur E associée à la famille $(P_J)_{J\in\mathcal{E}(I)}$ coïncide avec la topologie sur E associée à la famille $(p_i)_{i\in I}$. De plus, la famille $(P_J)_{J\in\mathcal{E}(I)}$ vérifie la propriété suivante : pour tout $J_1, J_2 \in \mathcal{E}(I)$, il existe $J_3 \in \mathcal{E}(I)$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $\max(P_{J_1}(x), P_{J_2}(x)) \leq P_{J_3}(x)$.

Théorème 9.2.3. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique. Les propriétés suivantes sont équivalents.*

(i) $(E, \mathcal{T})$ *est normable.*

(ii) $(E, \mathcal{T})$ *est localement convexe et localement borné.*

Démonstration. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est triviale.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit V un voisinage ouvert, convexe, équilibré et borné de 0 dans $(E, \mathcal{T})$. Pour tout $x \in E$, soit $\|x\| = \mu(x)$, où μ est la jauge de V. D'après la proposition 9.2.2, $\|\ \|$ est une semi-norme continue sur $(E, \mathcal{T})$ et on a $V = \{x \in E \ ;\ \|x\| < 1\}$. D'après la proposition 9.1.8, $\left(\frac{1}{n}V\right)_{n\geq 0}$ est une base locale de $(E, \mathcal{T})$. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$, alors il existe $n \geq 1$ tel que $x \notin \frac{1}{n}V$, d'où on a $\|x\| = \mu(x) \geq \frac{1}{n}$. Donc on a $\|x\| \neq 0$. Par conséquent, $\|\ \|$ est bien une norme continue sur $(E, \mathcal{T})$. On en déduit que tout ouvert de $(E, \|\ \|)$ est un ouvert de $(E, \mathcal{T})$. Comme $\left(\frac{1}{n}V\right)_{n\geq 0}$ est une base locale de $(E, \mathcal{T})$ et pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n}V = \left\{x \in E \ ;\ \|x\| < \frac{1}{n}\right\}$ est un ouvert de $(E, \|\ \|)$, on en déduit que tout ouvert de $(E, \mathcal{T})$ est un ouvert de $(E, \|\ \|)$. Par conséquent, la topologie induite par la norme $\|\ \|$ coïncide avec la topologie $\mathcal{T}$. Autrement dit, $(E, \mathcal{T})$ est normable. ■

Théorème 9.2.4. *Soient E et F des espaces localement convexes. Soit $(p_i)_{i\in I}$ (resp. $(q_j)_{j\in J}$) une famille séparante de semi-normes sur E (resp. F) induisant respectivement leurs topologies. Alors on a :*

1. *Une semi-norme p sur E est continue si et seulement si il existe une constante $c > 0$ et un sous-ensemble fini I' de I tel que pour tout $x \in E$, on ait $p(x) \leq c \max\limits_{i\in I'} p_i(x)$.*

2. *Une application linéaire $T : E \longrightarrow F$ est continue si et seulement si pour tout $j \in J$, il existe une constante $c_j > 0$ et un sous-ensemble fini I_j de I tel que pour tout $x \in E$, on ait $q_j(T(x)) \leq c_j \max\limits_{i\in I_j} p_i(x)$.*

3. Une forme linéaire $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue si et seulement si il existe une constante $c > 0$ et un sous-ensemble fini I' de I tel que pour tout $x \in E$, on ait $|f(x)| \leq c \max_{i \in I'} p_i(x)$.

Démonstration. 1. Soit p une semi-norme sur E. Supposons d'abord qu'il existe une constante $c > 0$ et un sous-ensemble fini I' de I tel que pour tout $x \in E$, on ait $p(x) \leq c \max_{i \in I'} p_i(x)$. Puisque les p_i sont continues en 0, on en déduit que p est continue en 0, et donc p est continue par le lemme 9.2.1.
Réciproquement, supposons que p est continue. Alors $V = \{x \in E \; ; \; p(x) < 1\}$ est un voisinage de 0 dans E. D'après le théorème 9.2.2, il existe $\eta > 0$ et $i_1, \ldots, i_n \in I$ tels que $\bigcap_{k=1}^{n} \{x \in E \; ; \; p_{i_k}(x) < \eta\} \subset V$. Montrons que pour tout $x \in E$, on a alors $p(x) \leq \frac{1}{\eta} \max_{1 \leq k \leq n} p_{i_k}(x)$. Soit $x \in E$. Si $p(x) > \frac{1}{\eta} \max_{1 \leq k \leq n} p_{i_k}(x)$, on pose $z = \dfrac{x}{p(x)}$, alors $p(z) = 1$ et pour tout $1 \leq k \leq n$, on a $p_{i_k}(x) < \eta$. D'où on a $z \in V$ et $p(z) = 1$, ce qui est impossible. Donc pour tout $x \in E$, on a $p(x) \leq \frac{1}{\eta} \max_{1 \leq k \leq n} p_{i_k}(x)$.
2. Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Supposons d'abord que T est continue. Soit $j \in J$. Alors $q_j \circ T$ est une semi-norme continue sur E. D'après 1, il existe une constante $c_j > 0$ et un sous-ensemble fini I_j de I tel que pour tout $x \in E$, on ait $q_j(T(x)) \leq c_j \max_{i \in I_j} p_i(x)$.
Réciproquement, supposons que pour tout $j \in J$, il existe une constante $c_j > 0$ et un sous-ensemble fini I_j de I tel que pour tout $x \in E$, on ait $q_j(T(x)) \leq c_j \max_{i \in I_j} p_i(x)$. Pour tout $j \in J$, soit $(F_j, \| \; \|_j)$ l'espace normé séparé de (F, q_j) et soit $\pi_j : (F, q_j) \longrightarrow (F_j, \| \; \|_j)$ l'application canonique, c'est une application linéaire et pour tout $y \in F$, on a $\|\pi_j(y)\|_j = q_j(y)$, voir proposition 7.5.1. Puisque la topologie sur F est la topologie initiale associée à la famille d'applications $(\pi_j)_{j \in J}$, alors T est continue si et seulement si pour tout $j \in J$, l'application linéaire $\pi_j \circ T$ est continue. D'après la proposition 9.1.10, $\pi_j \circ T$ est continue si et seulement si $\pi_j \circ T$ est continue en 0. Comme pour tout $x \in E$, on a $\|\pi_j(T(x))\|_j = q_j(T(x)) \leq c_j \max_{i \in I_j} p_i(x)$ et pour tout $i \in I$, p_i est continue en 0, on en déduit que $\pi_j \circ T$ est continue en 0. Donc T est continue.
3. Ceci résulte de 2. ∎

On termine ce paragraphe par quelques exemples.

Exemple 9.2.4. Soit X un ensemble quelconque non vide. On note $\mathbb{C}^X$ l'espace vectoriel des applications de X dans $\mathbb{C}$. Pour tout $x \in X$ et tout $f \in \mathbb{C}^X$, on pose $p_x(f) = |f(x)|$. Alors $(p_x)_{x \in X}$ est une famille séparante de semi-normes sur $\mathbb{C}^X$. On munit $\mathbb{C}^X$ de la topologie associée à cette famille. C'est la topologie de la convergence simple, voir remarque 9.2.5 et chapitre 5, paragraphe 5.1. Alors $\mathbb{C}^X$ est un espace localement convexe vérifiant la propriété de Heine-Borel, voir théorème 5.1.1. Si X n'est pas fini, $\mathbb{C}^X$ n'est pas normable.

Exemple 9.2.5. Soit $\mathcal{S} = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$. Pour tout $x = (x_n)_{n \geq 0}$, $y = (y_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{S}$, on pose :

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \, .$$

Alors $(\mathcal{S}, d)$ est un espace de Fréchet, voir remarque 9.2.3, et propositions 2.4.3 et 2.6.7. Notons aussi que $(\mathcal{S}, d)$ n'est pas localement borné car il possède la propriété de Heine-Borel et il est de dimension infinie.

Exemple 9.2.6. Soit X un espace localement compact et dénombrable à l'infini. D'après le théorème 3.4.2, il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts de X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ et $X = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} K_n$. Soit $C(X)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications continues de X dans le corps $\mathbb{K}$. Pour tout $n \geq 0$ et pour tout $f \in C(X)$, on pose $p_n(f) = \|f_{|K_n}\|_\infty$. Alors $(p_n)_{n\geq 0}$ est une famille séparante de semi-normes sur $C(X)$. D'après la remarque 9.2.3, $C(X)$ muni de la topologie associée à la famille $(p_n)_{n\geq 0}$ est un espace localement convexe et métrisable et si on pose $d(f,g) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} \dfrac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$, pour tout $f, g \in C(X)$, alors d est une distance sur $C(X)$ invariante par translation et induisant sa topologie. Vérifions que l'on a les propriétés suivantes :

1. $(C(X),\, d)$ est un espace de Fréchet.
2. Si X n'est pas compact, alors $(C(X),\, d)$ n'est localement borné et donc $(C(X),\, d)$ n'est pas normable.

1. Pour montrer que $(C(X),\, d)$ est un espace de Fréchet, il reste à montrer que $(C(X),\, d)$ est complet. Soit $(f_p)_{p\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(C(X),\, d)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé. Alors pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{p_n(f_p - f_q)}{1 + p_n(f_p - f_q)} \leq 2^n d(f_p, f_q)$. Comme l'application $s \longmapsto \frac{s}{1-s}$ est croissante sur l'intervalle $[0,\, 1[$, alors on a $\|(f_p - f_q)_{|K_n}\|_\infty = p_n(f_p - f_q) \leq \dfrac{2^n d(f_p, f_q)}{1 - 2^n d(f_p, f_q)}$, pour p et q assez grand. Comme $(C(K_n),\, \|\ \|_\infty)$ est un espace de Banach, voir proposition 2.6.8 ou corollaire 5.2.1, et on a $K_n \subset K_{n+1}$, on trouve une application $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tout $n \geq 0$, $f_{|K_n}$ soit continue et $\lim\limits_{p\to+\infty} p_n(f_p - f) = 0$. Comme on a $X = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \overset{\circ}{K}_n$, on déduit de la proposition 1.4.4 que f est continue sur X. Autrement dit, on a $f \in C(X)$. Montrons que la suite $(f_p)_{p\geq 0}$ converge vers f dans $(C(X),\, d)$. On a $d(f_p, f) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} \dfrac{p_n(f_p - f)}{1 + p_n(f_p - f)}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme on a $\dfrac{p_n(f_p - f)}{1 + p_n(f_p - f)} \leq 1$ et la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est convergente, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} \dfrac{p_n(f_p - f)}{1 + p_n(f_p - f)} < \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, pour tout $n \in \{0,\, 1,\, \ldots, N\}$, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} \dfrac{p_n(f_p - f)}{1 + p_n(f_p - f)} = 0$, donc il existe $q_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq q_0$ et pour tout $n \in \{0,\, 1,\, \ldots, N\}$, on ait $\dfrac{p_n(f_p - f)}{1 + p_n(f_p - f)} < \dfrac{\varepsilon}{2(N+1)}$. Par conséquent, pour tout $p \geq q_0$, on a $d(f_p, f) < \varepsilon$. Donc la suite $(f_p)_{p\geq 0}$ converge vers f dans $(C(X),\, d)$. Ainsi, $(C(X),\, d)$ est un espace de Fréchet.

2. Supposons que X n'est pas compact et montrons que $(C(X),\, d)$ n'est localement borné. Puisque pour tout $n \geq 0$ et pour tout $f \in C(X)$, on a $p_n(f) \leq p_{n+1}(f)$, d'après le

théorème 9.2.2, les ouverts $V_n = \{f \in C(X)\ ;\ p_n(f) < \frac{1}{n+1}\}$ forment une base locale de $(C(X),\, d)$. Montrons que pour tout $n \geq 0$, V_n n'est pas borné. D'après le théorème 9.2.2, V_n est borné si pour tout $q \in \mathbb{N}$, p_q est borné sur V_n. Comme X n'est pas compact, alors il existe $q > n$ tel que $K_n \neq K_q$. D'après le théorème d'Urysohn, théorème 3.6.1, pour tout $M > 0$, il existe $f \in C(X)$ tel que $f_{|K_n} = 0$ et $p_q(f) \geq M$. Par conséquent, V_n n'est pas borné. Donc $(C(X),\, d)$ n'est localement borné, d'où $(C(X),\, d)$ n'est pas normable.

Exemple 9.2.7. Cet exemple est un cas particulier de l'exemple précédent. Soit $C(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour tout $n \geq 1$ et tout $f \in C(\mathbb{R})$, on pose :

$$p_n(f) = \sup_{-n \leq x \leq n} |f(x)|\,.$$

Alors $(p_n)_{n\geq 1}$ est une famille séparante de semi-normes sur $C(\mathbb{R})$. Donc $C(\mathbb{R})$ muni de la topologie associée à la famille $(p_n)_{n\geq 1}$ est un espace localement convexe métrisable. Pour tout $f, g \in C(\mathbb{R})$, on pose :

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}.$$

Alors d est une distance sur $C(\mathbb{R})$ invariante par translation et induisant sa topologie. De plus, $(C(\mathbb{R}),\, d)$ est un espace de de Fréchet non localement borné et donc $(C(\mathbb{R}),\, d)$ n'est pas normable.
Vérifions que la boule ouverte de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$ de $(C(\mathbb{R}),\, d)$ n'est pas convexe. Soient $a \in]0,\, 1[$ et f une fonction affine sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = a$ et $f(x) = 0$, pour tout $x \in]-\infty,\, -1] \cup [1,\, +\infty[$. Alors on a $d(f,0) = \frac{a}{1+a} < \frac{1}{2}$, donc $f \in B\big(0, \frac{1}{2}\big)$. Soit $t \in]0,\, 1[$. Comme on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(1-t)n}{1+(1-t)n} = 1$, alors il existe $b > 0$ tel que $\frac{(1-t)b}{1+(1-t)b} > \frac{1}{1+ta}$ et $(1-t)b > a$. Soit g une fonction affine sur $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = 0$, pour tout $x \in [-1,\, 1]$ et $g(x) = b$, pour tout $x \in]-\infty,\, -2] \cup [2,\, +\infty[$. Alors on a $d(g,0) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\frac{b}{1+b} = \frac{b}{2(1+b)} < \frac{1}{2}$, donc $g \in B\big(0, \frac{1}{2}\big)$. On a :

$$d(tf + (1-t)g, 0) = \frac{ta}{2(1+ta)} + \frac{(1-t)b}{2(1+(1-t)b)} > \frac{1}{2}\Big(\frac{ta}{1+ta} + \frac{1}{1+ta}\Big) = \frac{1}{2}\,.$$

Donc $tf + (1-t)g \notin B\big(0, \frac{1}{2}\big)$. Par conséquent, $B\big(0, \frac{1}{2}\big)$ n'est pas convexe.

9.3 Théorèmes fondamentaux dans les F-espaces

On généralise dans ce paragraphe, aux F-espaces, les résultats donnés dans les paragraphes 7.1 et 7.2.

Définition 9.3.1. Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques et Γ une famille d'applications linéaires de E dans F. On dit que Γ est **équicontinue** si pour tout voisinage W de 0 dans F, il existe un voisinage V de 0 dans E tel que $f(V) \subset W$ pour tout $f \in \Gamma$.

Si Γ contient un seul élément f, les deux notions d'équicontinuité et de continuité coïncident, voir proposition 9.1.10.

Remarque 9.3.1. Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques et Γ une famille d'applications linéaires de E dans F. Si F est métrisable, alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Γ est équicontinue, au sens de la définition précédente.

(ii) Γ est équicontinue en 0, au sens de la définition 5.3.1.

(iii) Γ est équicontinue, au sens de la définition 5.3.1.

Remarque 9.3.2. Soient $(E, \| \;\|)$ et $(F, \| \;\|')$ deux espaces normés et Γ une famille d'applications linéaires de E dans F. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Γ est équicontinue.

(ii) Il existe une constante $M > 0$ tel que pour tout $f \in A$, on ait $\|f\| \leq M$. Autrement dit, Γ est une partie bornée de $\mathscr{L}(E; F)$.

On a vu, proposition 9.1.11, qu'une application linéaire continue est bornée. Une famille équicontinue d'applications linéaires possède cette propriété d'une manière uniforme, comme cela est montré dans la proposition suivante :

Proposition 9.3.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques et Γ une famille équicontinue d'applications linéaires de E dans F. Soit B une partie bornée de E, alors il existe une partie bornée D de F telle que $f(B) \subset D$ pour tout $f \in \Gamma$. En particulier, pour tout $x \in E$, l'ensemble $\big\{f(x) \;;\; f \in \Gamma\big\}$ est borné dans F.*

Démonstration. Soient $D = \bigcup\limits_{f\in\Gamma} f(B)$ et W un voisinage de 0 dans F. Puisque Γ est équicontinue, il existe un voisinage V de 0 dans E tel que $f(V) \subset W$ pour tout $f \in \Gamma$. Comme B est bornée, il existe $s > 0$ tel que $B \subset sV$, d'où pour tout $f \in \Gamma$, on a $f(B) \subset sf(V) \subset sW$. Donc on a $D \subset sW$. Par conséquent, D est bornée. ■

Théorème 9.3.1 (Banach-Steinhaus). *Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques et Γ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Pour tout $x \in E$, soit $\Gamma_x = \big\{f(x) \;;\; f \in \Gamma\big\} \subset F$ et soit $B = \big\{x \in E \;;\; \Gamma_x$ soit borné dans $F\big\}$. Si B n'est pas maigre dans E, alors l'ensemble Γ est équicontinue. En particulier, on a $B = E$.*

Démonstration. Soit W un voisinage de 0 dans F. Soit U un voisinage équilibré fermé de 0 dans F tel que $U + U \subset W$. Soit $A = \bigcap\limits_{f\in\Gamma} f^{-1}(U)$, alors A est fermé dans E. Si $x \in B$, alors Γ_x est borné dans F et donc il existe $n \geq 1$ tel que $\Gamma_x \subset nU$, d'où $x \in nA$. Par conséquent, on a $B \subset \bigcup\limits_{n\geq 1} nA$. Comme B n'est pas maigre dans E, alors il existe $n \geq 1$ tel que nA ait un intérieur non vide. Puisque la multiplication par n, $n \neq 0$, est un homéomorphisme de E, on en déduit que $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$. Soit $a \in \overset{\circ}{A}$, alors il existe un voisinage V de 0 dans E tel que $a + V \subset A$, d'où on a $f(V) \subset f(A) - f(a) \subset U - U \subset W$ pour tout $f \in \Gamma$. Ceci prouve que Γ est équicontinue. ■

On déduit du théorème précédent et du théorème de Baire, théorème 2.8.1, voir également remarque 7.2.1, le corollaire important suivant :

Corollaire 9.3.1. *Soient E un F-espace, F un espace vectoriel topologique et Γ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) Γ *est équicontinue.*

(ii) Pour tout $x \in E$, le sous-ensemble $\{f(x)\ ;\ f \in \Gamma\}$ est borné dans F.

Corollaire 9.3.2. *Soient E un F-espace, F un espace vectoriel topologique et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications linéaires continues de E dans F. On suppose que pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge ; notons $f(x)$ sa limite. Alors la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est équicontinue et f est linéaire et continue de E dans F.*

Démonstration. Il est clair que f est linéaire. Pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est convergente, donc bornée. Il résulte du corollaire précédent que $(f_n)_{n\geq 0}$ est équicontinue. Donc, si W est un voisinage de 0 dans F, il existe un voisinage V de 0 dans E tel que $f_n(V) \subset W$ pour tout $n \geq 0$. Il s'ensuit que $f(V) \subset \overline{W}$. Par conséquent, f est continue, voir propositions 9.1.2 et 9.1.10. ■

Théorème 9.3.2. *Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques et Γ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Soit K un compact convexe de E tel que pour tout $x \in K$, $\Gamma_x = \big\{f(x)\ ;\ f \in \Gamma\big\}$ soit un sous-ensemble borné de F. Alors il existe une partie bornée D de F telle que $f(K) \subset D$ pour tout $f \in \Gamma$.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 9 du supplément.

Les démonstrations des théorèmes qui vont suivre dans ce paragraphe généralisent celles données dans le paragraphe 7.1. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter ([28], p. 48-51).

Théorème 9.3.3 (théorème de l'application ouverte). *Soient E un F-espace, F un espace vectoriel topologique et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue telle que $T(E)$ soit non maigre dans F, alors on a :*

1. *T est une application ouverte.*
2. *$T(E) = F$.*
3. *F est un F-espace.*

Corollaire 9.3.3. *Soient E, F deux F-espaces et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue.*

1. *Si T est surjective, alors T est une application ouverte.*
2. *Si T est bijective, alors T est un homéomorphisme.*

Remarque 9.3.3. Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur E telles que $(E, \mathcal{T}_1)$ et $(E, \mathcal{T}_2)$ soient des F-espaces. Si on a $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, alors $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Théorème 9.3.4 (théorème du graphe fermé). *Soient E, F deux F-espaces et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors T est continue si et seulement si le graphe $G(T) = \big\{(x, T(x))\ ;\ x \in E\big\}$ est fermé dans $E \times F$.*

9.4 Convexité

On généralise dans ce paragraphe les résultats donnés dans les paragraphes 7.7 et 7.8.

Lemme 9.4.1. *Soient $(E, \mathcal{T})$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique, C un convexe ouvert non vide de E et $b \in E$ avec $b \notin C$. Alors il existe $f \in E^*$ tel que $f(x) < f(b)$ pour tout $x \in C$.*

Pour une preuve du lemme précédent, voir chapitre 9 du supplément.

Remarque 9.4.1. On déduit du lemme précédent que si E est un espace vectoriel topologique, alors son dual topologique E^* est non trivial si et seulement si E possède un ouvert convexe non trivial.

Théorème 9.4.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique et A, B deux ensembles convexes non vides et disjoints de E.*

1. *Si A est ouvert, il existe $f \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait $Re(f(a)) < \alpha \leq Re(f(b))$.*

2. *Supposons que E est localement convexe. Si A est compact et B est fermé, il existe $f \in E^*$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait $Re(f(a)) < \alpha_1 < \alpha_2 < Re(f(b))$.*

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, voir proposition 7.4.5.
1. Soit $C = A - B = \big\{a - b\ ;\ a \in A,\ b \in B\big\}$, alors C est un ouvert convexe non vide de E et $0 \notin C$. Par le lemme précédent, il existe $f \in E^*$ tel que $f(a - b) < 0 = f(0)$ pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, d'où on a $f(a) < f(b)$. Soit $\alpha = \inf\limits_{b \in B} f(b)$, alors $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on a $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$. S'il existe $a \in A$ tel que $f(a) = \alpha$, puisque A est ouvert, il existe $h \in E$ tel que $a + h \in A$ et $f(a + h) > \alpha$, ce qui est impossible. Donc pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on a $f(a) < \alpha \leq f(b)$.
2. On suppose de plus que E est localement convexe. Puisque A est compact et B est fermé tels que $A \cap B = \emptyset$, d'après la proposition 9.1.5, il existe un voisinage ouvert convexe V de 0 dans E tel que $\big(A + V\big) \cap \big(B + V\big) = \emptyset$, d'où on a $\big(A + V\big) \cap B = \emptyset$. L'ensemble $A + V$ est ouvert convexe non vide de E, et on a $A \subset A + V$. D'après 1, il existe $f \in E^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait $f(a) < \beta \leq f(b)$. Puisque A est compact, il existe $a_0 \in A$ tel que pour tout $a \in A$, on ait $f(a) \leq f(a_0) < \beta$. Pour avoir le résultat, il suffit de prendre $\alpha_1, \alpha_2 \in]f(a_0), \beta[$ tels que $\alpha_1 < \alpha_2$. ■

Corollaire 9.4.1. *Soit E un espace localement convexe. Alors E^* sépare les points de E. Autrement dit, pour tout x, $y \in E$ tels que $x \neq y$, il existe $f \in E^*$ tel que $f(x) \neq f(y)$.*

Démonstration. On applique le théorème précédent à $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$. ■

Corollaire 9.4.2. *Soit B un sous-ensemble convexe fermé et non vide d'un espace localement convexe E. Alors il existe une famille $(t_i)_{i \in I}$ dans $\mathbb{R}$ et une famille $(f_i)_{i \in I}$ dans E^* telles que $B = \bigcap\limits_{i \in I} \big\{x \in E\ ;\ Re(f_i(x)) \leq t_i\big\}$. Autrement dit, tout ensemble convexe fermé et non vide dans un $\mathbb{R}$-espace localement convexe est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.*

Démonstration. Pour tous $f \in E^*$ et $t \in \mathbb{R}$, soit $H(f,t) = \{x \in E \; ; \; \mathrm{Re}(f(x)) \leq t\}$. D'après le théorème précédent, pour tout $x \in E \setminus B$, il existe $f_x \in E^*$ et un réel t_x tels que $\mathrm{Re}(f_x(b)) < t_x < \mathrm{Re}(f_x(x))$, pour tout $b \in B$. Alors on a $B \subset H(f_x, t_x)$ et $x \notin H(f_x, t_x)$. Par conséquent, on a $B = \bigcap_{x \in E \setminus B} H(f_x, t_x)$. ■

Théorème 9.4.2. *Soient E un espace localement convexe, F un sous-espace vectoriel de E et $x_0 \in E$. Si $x_0 \notin \overline{F}$, alors il existe $f \in E^*$ tel que $f(x_0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in F$.*

Démonstration. En appliquant le théorème précédent à $A = \{x_0\}$ et $B = \overline{F}$, on obtient $g \in E^*$ tel que $g(x_0) \notin g(F)$. Comme $g(F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$ tel que $g(F) \neq \mathbb{K}$, on en déduit que l'on a $g(F) = \{0\}$. Soit $f = \dfrac{g}{g(x_0)}$, alors $f \in E^*$ et on a $f(x_0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in F$. ■

Corollaire 9.4.3. *Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments d'un espace localement convexe E. Alors la famille $(x_i)_{i \in I}$ est totale dans E si et seulement si pour tout $f \in E^* \setminus \{0\}$, il existe $i \in I$ tel que $f(x_i) \neq 0$.*

Corollaire 9.4.4. *Soient E un espace localement convexe et F un sous-espace vectoriel de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) F est fermé dans E.

(ii) Pour tout $x \in E \setminus F$, il existe $f \in E^*$ tel que $f(x) = 1$ et $F \subset \ker(f)$.

Démonstration. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte du théorème précédent.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $G = \{f \in E^* \; ; \; F \subset \ker(f)\}$. Montrons que l'on a $F = \bigcap_{f \in G} \ker(f)$. Il est clair que l'on a $F \subset \bigcap_{f \in G} \ker(f)$. Soit $x \in E \setminus F$. Par hypothèse, il existe $f \in E^*$ tel que $f(x) = 1$ et $F \subset \ker(f)$, d'où $f \in G$ et $x \notin \ker(f)$. En particulier, on a $x \notin \bigcap_{f \in G} \ker(f)$, d'où $\bigcap_{f \in G} \ker(f) \subset F$. Par conséquent, on a $F = \bigcap_{f \in G} \ker(f)$, donc F est fermé dans E. ■

Théorème 9.4.3. *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace localement convexe $(E, \mathcal{T})$ et $g \in F^*$. Alors il existe $f \in E^*$ tel que $f = g$ sur F.*

Démonstration. On donne deux démonstrations de ce théorème.
Première démonstration. On peut supposer $g \neq 0$. Soit $G = \{x \in F \; ; \; g(x) = 0\}$ et soit $x_0 \in F$ tel que $g(x_0) = 1$. Comme G est fermé dans F, car g est continue, alors on a $G = \overline{G} \cap F$, voir exercice 1.24. Donc on a $x_0 \notin \overline{G}$. D'après le théorème précédent, il existe $f \in E^*$ tel que $f(x_0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in G$. Soit $x \in F$, alors on a $x - g(x)x_0 \in G$, car $g(x_0) = 1$, d'où $f(x) - g(x) = f(x) - g(x)f(x_0) = f(x - g(x)x_0) = 0$. Par conséquent, on a $f = g$ sur F.
Deuxième démonstration. Soit $(p_i)_{i \in I}$ une famille séparante de semi-normes sur E induisant la topologie $\mathcal{T}$. Alors la restriction des p_i à F induit la topologie de F, voir remarque 9.2.4. Comme g est une forme linéaire continue sur F, d'après le théorème 9.2.4, il existe une constante $c > 0$ et un sous-ensemble fini I' de I tel que pour tout $x \in F$, on ait $|g(x)| \leq c \max_{i \in I'} p_i(x)$. Pour tout $x \in E$, soit $p(x) = c \max_{i \in I'} p_i(x)$, alors p est une semi-norme sur E. D'après le théorème 7.7.2, il existe une forme linéaire f sur E prolongeant g telle

que pour tout $x \in E$, on ait $|f(x)| \leq p(x)$. Il résulte alors du théorème 9.2.4 que f est continue. ∎

Théorème 9.4.4. *Soient E un espace localement convexe, C un convexe et équilibré de E et $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin C$.*

1. *Si C est ouvert, il existe $f \in E^*$ tel que $f(x_0) = 1$ et pour tout $x \in C$, on ait $|f(x)| < 1$.*
2. *Si C est fermé, il existe $f \in E^*$ tel que pour tout $x \in C$, on ait $|f(x)| < 1 < f(x_0)$.*

Démonstration. 1. D'après le théorème 9.4.1, il existe $g \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in C$, on ait $\mathrm{Re}(g(x)) < \alpha \leq \mathrm{Re}(g(x_0))$. Soit $x \in C$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = e^{i\theta}|g(x)|$, d'où on a $g(e^{-i\theta}x) = |g(x)| = \mathrm{Re}(g(e^{-i\theta}x))$. Puisque C est équilibré, on a $e^{-i\theta}x \in C$. On en déduit que l'on a $|g(x)| < \alpha \leq \mathrm{Re}(g(x_0)) \leq |g(x_0)|$. Soit $f = \dfrac{g}{g(x_0)}$, alors $f \in E^*$, $f(x_0) = 1$ et pour tout $x \in C$, on a $|f(x)| < 1$.
2. On applique le théorème 9.4.1 au compact $A = \{x_0\}$. Alors il existe $g \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in C$, on ait $\mathrm{Re}(g(x)) < \alpha < \mathrm{Re}(g(x_0))$. Comme ci-dessus, on montre que pour tout $x \in C$, on a $|g(x)| < \alpha < \mathrm{Re}(g(x_0)) \leq |g(x_0)|$. Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = e^{i\theta_0}|g(x_0)|$. Soit $f = \dfrac{e^{-i\theta_0}g}{\alpha}$, alors $f \in E^*$ et pour tout $x \in C$, on a $|f(x)| < 1 < f(x_0)$. ∎

Théorème 9.4.5. *Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur E telles que $(E, \mathcal{T}_1)$ et $(E, \mathcal{T}_2)$ soient des espaces localement convexes. On suppose de plus que le dual topologique de $(E, \mathcal{T}_1)$ coïncide avec le dual topologique de $(E, \mathcal{T}_2)$. Soit C un ensemble convexe de E. Alors l'adhérence de C dans $(E, \mathcal{T}_1)$ coïncide avec l'adhérence de C dans $(E, \mathcal{T}_2)$. En particulier, C est fermé dans $(E, \mathcal{T}_1)$ si et seulement si C est fermé $(E, \mathcal{T}_2)$.*

Démonstration. Le résultat est trivial si $C = \emptyset$, donc on peut supposer que $C \neq \emptyset$. Soit C_1 (*resp.* C_2) l'adhérence de C pour $\mathcal{T}_1$ (*resp.* $\mathcal{T}_2$). Comme C_1 est convexe et fermé dans $(E, \mathcal{T}_1)$, d'après le théorème 9.4.1, pour tout $x \in E \setminus C_1$, il existe $f_x \in E^*$ tel que $\mathrm{Re}(f_x(x)) < \inf\limits_{y \in C_1} \mathrm{Re}(f_x(y))$. Soit $A_x = \big\{z \in E \ ; \ \mathrm{Re}(f_x(z)) \geq \inf\limits_{y \in C_1} \mathrm{Re}(f_x(y))\big\}$, alors A_x est fermé dans $(E, \mathcal{T}_2)$ et on a $\bigcap\limits_{x \in E \setminus C_1} A_x = C_1$, donc C_1 est fermé dans $(E, \mathcal{T}_2)$. De même, on montre que C_2 est fermé dans $(E, \mathcal{T}_1)$. Par conséquent, on a $C_1 = C_2$. ∎

9.5 Points extrémaux

On a vu, proposition 6.1.3, qu'une intersection d'ensembles convexes dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble convexe, et on sait aussi qu'une intersection d'ensembles fermés dans un espace topologique est un fermé, d'où l'utilité d'introduire les définitions ci-dessous.

Définition 9.5.1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E.

1. L'**enveloppe convexe** de A, notée $\mathrm{conv}(A)$, est l'intersection de tous les sous-ensembles convexes de E contenant A. C'est le plus petit sous-ensemble convexe de E contenant A.

2. On suppose de plus que E est un espace vectoriel topologique. L'**enveloppe convexe fermée** de A, notée $\overline{\mathrm{conv}}(A)$, est l'intersection de tous les sous-ensembles convexes fermés de E contenant A. C'est le plus petit sous-ensemble convexe fermé de E contenant A.

Proposition 9.5.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E.*

1. *Soit $x \in E$, alors $x \in conv(A)$ si et seulement s'il existe $a_1, \ldots, a_n \in A$ et $t_1 \geq 0, \ldots, t_n \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ et $x = \sum_{i=1}^{n} t_i a_i$.*

2. *Si de plus E est un espace vectoriel topologique, alors on a $\overline{conv}(A) = \overline{conv(A)}$.*

Démonstration. 1. Soit C l'ensemble des sommes $\sum_{i=1}^{n} t_i a_i$, où $n \geq 1$, $a_i \in A$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $t_1 \geq 0, \ldots, t_n \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. Il est clair que C est un sous-ensemble convexe de E contenant A, donc on a $\mathrm{conv}(A) \subset C$. D'après la proposition 6.1.3, on a $C \subset \mathrm{conv}(A)$. Par conséquent, on a $\mathrm{conv}(A) = C$.
2. Ceci résulte de la proposition 9.1.3. ■

Corollaire 9.5.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, \ldots, x_p \in E$. Alors on a :*

$$conv\big(\{x_1, \ldots, x_p\}\big) = \Big\{ \sum_{i=1}^{p} t_i x_i \ ; \ t_1 \geq 0, \ldots, t_p \geq 0 \ et \ \sum_{i=1}^{p} t_i = 1 \Big\}.$$

Exemple 9.5.1. Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé et $S = \big\{x \in E \ ; \ \|x\| = 1\big\}$. Alors on a $\mathrm{conv}(S) = B_E = \big\{x \in E \ ; \ \|x\| \leq 1\big\}$. En effet, d'après la proposition 6.1.4, B est convexe, et comme on a $S \subset B$, alors on a $\mathrm{conv}(S) \subset B$. Réciproquement, soit $x \in B$. Si $x = 0$, alors $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(-y)$, où y est un élément quelconque de S, donc $x \in \mathrm{conv}(S)$. Supposons maintenant $x \neq 0$, alors on a $0 < \|x\| \leq 1$. Comme on a $x = \Big(\frac{1 + \|x\|}{2}\Big)\frac{x}{\|x\|} + \Big(\frac{1 - \|x\|}{2}\Big)\frac{-x}{\|x\|}$, alors $x \in \mathrm{conv}(S)$. Par conséquent, on a $\mathrm{conv}(S) = B$.

Remarque 9.5.1. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application affine. On déduit de la proposition 9.5.1 que si A est un sous-ensemble de E, on a $f(\mathrm{conv}(A)) = \mathrm{conv}(f(A))$.

Lemme 9.5.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A_1, \ldots, A_n$ des sous-ensembles non vides convexes dans E. Alors $conv(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ est l'ensemble des sommes $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$, où $x_i \in A_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $t_1 \geq 0, \ldots, t_n \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$.*

Pour une preuve du lemme précédent, voir chapitre 9 du supplément.

Théorème 9.5.1. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique.*

1. *Si $A_1, \dots, A_n$ sont des ensembles convexes compacts dans E, alors $\mathrm{conv}(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ est compact.*

2. *Si E est localement convexe et si $A \subset E$ est précompact, alors $\mathrm{conv}(A)$ est précompact.*

3. *Si E est de Fréchet et si $K \subset E$ est compact, alors $\overline{\mathrm{conv}}(K)$ est compact.*

Démonstration. 1. Soit S l'ensemble des $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. Alors S est compact. Pour tous $t = (t_1, \dots, t_n) \in S$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n$, on pose $f(t, a) = \sum_{i=1}^{n} t_i a_i$. D'après le lemme précédent, f est une application surjective de $S \times A_1 \times \ldots \times A_n$ sur $\mathrm{conv}(A_1 \cup \dots \cup A_n)$. Comme f est continue et $S \times A_1 \times \ldots \times A_n$ est compact, on en déduit que $\mathrm{conv}(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ est compact.
2. Soit U un voisinage de 0 dans E. Soit V un voisinage convexe de 0 dans E tel que $V + V \subset U$. Comme A est précompact, il existe un ensemble fini F de E tel que $A \subset F + V$. D'où on a $A \subset \mathrm{conv}(F) + V$. Puisque $\mathrm{conv}(F) + V$ est convexe, alors on a $\mathrm{conv}(A) \subset \mathrm{conv}(F) + V$. D'après 1, $\mathrm{conv}(F)$ est compact, donc il existe un ensemble fini B de E tel que $\mathrm{conv}(F) \subset B + V$. Ainsi, on a $\mathrm{conv}(A) \subset \mathrm{conv}(F) + V \subset B + V + V \subset B + U$. Par conséquent, $\mathrm{conv}(A)$ est précompact.
3. L'adhérence d'un ensemble précompact est précompacte dans tout espace métrique et, par suite, est compacte dans tout espace métrique complet, voir théorème 3.1.3. Puisque K est compact, alors K est précompact, et d'après 2, $\mathrm{conv}(K)$ est précompact. Par conséquent, $\overline{\mathrm{conv}}(K) = \overline{\mathrm{conv}(K)}$ est compact. ■

Proposition 9.5.2. *Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$.*

1. *Si $x \in \mathrm{conv}(A)$, alors il existe $a_1, \dots, a_{n+1} \in A$ et $t_1 \geq 0, \dots, t_{n+1} \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$ et $\sum_{i=1}^{n+1} t_i a_i = x$.*

2. *On munit $\mathbb{R}^n$ de la topologie usuelle. Si A est compact, alors $\mathrm{conv}(A)$ est compacte.*

Pour une preuve de la précédente, voir chapitre 9 du supplément.

Définition 9.5.2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble non vide de E.

1. Un sous-ensemble non vide $S \subset A$ est appelé un **ensemble extrémal** de A si quel que soient $x, y \in A$ tels que $(1 - t)x + ty \in S$, avec un certain $t \in]0, 1[$, alors on a $x, y \in S$.

2. On dit qu'un point $a \in A$ est un **point extrémal** de A si $\{a\}$ est un sous-ensemble extrémal de A. Autrement dit, quel que soient $x, y \in A$ tels que $(1 - t)x + ty = a$, avec un certain $t \in]0, 1[$, alors on a $x = y = a$.

On note $e(A)$ l'ensemble des points extrémaux de l'ensemble A.

Notez que si A est sous-ensemble non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors A est un ensemble extrémal de A.

Proposition 9.5.3. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A sous-ensemble convexe de E et $a \in A$. On a :*

1. *a est un point extrémal A si et seulement si quel que soient $x, y \in A$ tels que $a = \frac{x+y}{2}$, on a alors $x = y = a$.*
2. *a est un point extrémal de A si et seulement si $A \setminus \{a\}$ est convexe.*

Démonstration. 1. Il est clair que si a est un point extrémal A, alors pour tous $x, y \in A$ tels que $a = \frac{x+y}{2}$, on ait $x = y = a$.
Réciproquement, soit $a \in A$ tel que pour tout $x, y \in A$ vérifiant $a = \frac{x+y}{2}$, on ait $x = y = a$. Montrons qu'alors a est un point extrémal de A. Soient $x', y' \in A$ et $t \in]0, 1[$ tels que $a = tx' + (1-t)y'$. Comme A est convexe, alors pour tout $s \in [0, 1]$, on a $sx' + (1-s)y' \in A$. Soit $r > 0$ tel que $0 < t - r < t + r < 1$. Soient $x = (t-r)x' + (1-t+r)y'$ et $y = (t+r)x' + (1-t-r)y'$. Alors $x, y \in A$ et on a $a = \frac{x+y}{2}$. Par hypothèse, on a alors $x = y = a$. Or on a $a + r(y' - x') = x = a$, d'où $x' = y'$. Par conséquent, on a $a = x' = y'$. Donc a est un point extrémal A.
2. Supposons d'abord que a est point extrémal de A. Soient $x, y \in A \setminus \{a\}$ et $t \in]0, 1[$. Comme A est convexe, alors $tx + (1-t)y \in A$. Si $tx + (1-t)y = a$, alors $x = y = a$, ce qui est impossible, donc $tx + (1-t)y \neq a$. Autrement dit, $tx + (1-t)y \in A \setminus \{a\}$, donc $A \setminus \{a\}$ est convexe.
Réciproquement, supposons que $A \setminus \{a\}$ est convexe. Soient $x, y \in A$ et $t \in]0, 1[$ tels que $tx + (1-t)y = a$. Si $x \neq a$ ou $y \neq a$, alors $x \neq a$ et $y \neq a$, d'où $x, y \in A \setminus \{a\}$ qui est convexe, donc on a $tx + (1-t)y \in A \setminus \{a\}$, ce qui est impossible. Par conséquent, on a $x = y = a$. Autrement dit, a est un point extrémal de A. ■

Proposition 9.5.4. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A_1, \ldots, A_n$ des sous-ensembles non vides convexes dans E. Soit x un point extrémal de conv$(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} t_i a_i$, où $a_i \in A_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $t_1 \geq 0, \ldots, t_n \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. Alors $x = a_i$ pour tout i tel que $t_i \neq 0$. En particulier, l'ensemble des points extrémaux de conv$(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ est inclus dans $A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Autrement dit, on a $e(\text{conv}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)) \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n$.*

Démonstration. On peut supposer que pour tout i, on a $t_i > 0$ et que $n \geq 2$. Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$. D'après le lemme 9.5.1, on a $\displaystyle\sum_{i \neq j} \frac{t_i}{1 - t_j} a_i \in \text{conv}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$. Comme on a $x = t_j a_j + (1-t_j) \displaystyle\sum_{i \neq j} \frac{t_i}{1 - t_j} a_i$ et x est un point extrémal de conv$(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$, alors on a $x = a_j$. En utilisant le lemme 9.5.1, on en déduit l'inclusion $e(\text{conv}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)) \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n$. ■

Corollaire 9.5.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1. *Si A est un sous-ensemble convexe non vide de E et si x est un point extrémal de A tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i a_i$, où $a_i \in A_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $t_1 \geq 0, \ldots, t_n \geq 0$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. Alors $x = a_i$ pour tout i tel que $t_i \neq 0$.*

2. *Si $x_1, \ldots, x_p \in E$, alors on a $e(conv(\{x_1, \ldots, x_p\})) \subset \{x_1, \ldots, x_p\}$.*

Remarque 9.5.2. Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé, non réduit à zéro, et A un sous-ensemble non vide de E. Alors tout point extrémal de A appartient à la frontière de A. En particulier, si $x_0 \in E$, $r > 0$ et $B'(x_0, r) = \{x \in E \ ; \ \|x - x_0\| \leq r\}$, alors les points extrémaux de $B'(x_0, r)$ appartiennent à la sphère $S(x_0, r) = \{x \in E \ ; \ \|x - x_0\| = r\}$.
En effet, soit a un point extrémal de A. Rappelons d'abord que la frontière de A est l'ensemble $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Tout point extrémal de A est, par définition, un point de A. Pour montrer que a appartient à la frontière de A, il reste à vérifier que $a \notin \overset{\circ}{A}$. Supposons que $a \in \overset{\circ}{A}$. Alors il existe $r >$ tel que $B(a, r) \subset A$. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$ et $\|x\| < r$. Alors on a $a + x, a - x \in B(a, r) \subset A$, $a + x \neq a$, $a - x \neq a$ et $a = \frac{1}{2}(a + x) + \frac{1}{2}(a - x)$. Donc a n'est pas un point extrémal de A, d'où la contradiction. Par conséquent, a appartient à la frontière de A.

On verra, exercice 9.32, que si $(E, \langle , \rangle)$ est un espace préhilbertien, alors l'ensemble des points extrémaux de la boule unité fermée de E est la sphère unité S_E.

Exemple 9.5.2. Soit c_0 l'espace de Banach des suites complexes convergeant vers 0 muni de la norme usuelle $\| \ \|_\infty$. Alors la boule unité fermée de c_0 n'admet pas de point extrémal.
En effet, soient B_{c_0} la boule unité fermée de c_0 et $x = (x_n)_{n \geq 0} \in B_{c_0}$. Soit $n_0 \geq 0$ tel que $|x_{n_0}| < \frac{1}{2}$. Soient $y = (y_n)_{n \geq 0}$, $z = (z_n)_{n \geq 0} \in B_{c_0}$, définis par $y_n = z_n = x_n$ si $n \neq n_0$ et $y_{n_0} = x_{n_0} + \frac{1}{2}$, $z_{n_0} = x_{n_0} - \frac{1}{2}$. Alors on a y, $z \in B_{c_0}$, $x \neq y$, $z \neq x$ et $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$. Donc x n'est pas un point extrémal de B_{c_0}.

Lemme 9.5.2. *Soit A un sous-ensemble non vide d'un espace vectoriel E.*

1. *Si S est un sous-ensemble extrémal de A et S' est un sous-ensemble extrémal de S, alors S' est un sous-ensemble extrémal de A.*

2. *Si $\mathcal{S}$ est une famille non vide de sous-ensembles extrémaux de A et si $\bigcap\limits_{S \in \mathcal{S}} S \neq \emptyset$, alors $\bigcap\limits_{S \in \mathcal{S}} S$ est un sous-ensemble extrémal de A.*

3. *Supposons que E est un espace vectoriel topologique et que A est un compact. Si $f \in E^*$ et si $\alpha = \max\limits_{y \in A} Re(f(y))$, alors $\{x \in A \ ; \ Re(f(x)) = \alpha\}$ est un sous-ensemble extrémal fermé de A.*

Démonstration. Les propriétés 1 et 2 résultent immédiatement de la définition d'un sous-ensemble extrémal.
3. Soit $S = \{x \in A \ ; \ \mathrm{Re}(f(x)) = \alpha\}$, alors est un sous-ensemble non vide fermé de A, car f est continue. Soient x, $y \in A$ tels que $tx + (1 - t)y \in S$ pour un certain $t \in]0, 1[$. Alors on a $t\mathrm{Re}(f(x)) + (1 - t)\mathrm{Re}(f(y)) = \mathrm{Re}(f(tx + (1 - t)y)) = \alpha$. Puisque $\mathrm{Re}(f(x)) \leq \alpha$ et $\mathrm{Re}(f(y)) \leq \alpha$, alors on a $\mathrm{Re}(f(x)) = \alpha$ et $\mathrm{Re}(f(y)) = \alpha$. Autrement dit, on a x, $y \in S$. Donc S est bien un sous-ensemble extrémal de A. ∎

Théorème 9.5.2 (Krein-Milman). *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace localement convexe et K un sous-ensemble non vide compact de E. Alors on a :*

1. *Tout sous-ensemble extrémal fermé de K contient un point extrémal de K. En particulier, on a $e(K) \neq \emptyset$.*

2. *K est inclus dans l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux. Autrement dit, on a $K \subset \overline{conv}(e(K))$. D'une manière équivalente, on a $\overline{conv}(K) = \overline{conv}(e(K))$.*

3. *Si de plus K est convexe, alors K est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux. Autrement dit, on a $K = \overline{conv}(e(K))$.*

Démonstration. 1. Tout d'abord, on va montrer que K contient un point extrémal. Soit $\mathcal{S}$ la famille des sous-ensembles extrémaux fermés de K. Alors $\mathcal{S}$ est non vide car $K \in \mathcal{S}$. On définit une relation d'ordre sur $\mathcal{S}$ en décrétant que $S_1 \preceq S_2$ si et seulement si $S_1 \supseteq S_2$. Montrons que $\mathcal{S}$ est inductif, *i.e.* toute partie totalement ordonnée de $\mathcal{S}$ possède un majorant. Soit $(S_i)_{i\in I}$ une partie, indexée par I, totalement ordonnée de $\mathcal{S}$. Alors pour tout $i, j \in I$, soit on a $S_i \supseteq S_j$, soit on a $S_j \supseteq S_i$. Comme pour tout $i \in I$, S_i est un sous-ensemble compact non vide, alors $S = \bigcap\limits_{i\in I} S_i$ est un sous-ensemble compact non vide. Il résulte du lemme précédent que S est aussi un sous-ensemble extrémal de K. Par conséquent, $S \in \mathcal{S}$ et S est un majorant de $(S_i)_{i\in I}$, donc $\mathcal{S}$ est inductif. Par le lemme de Zorn, voir Appendice A, $\mathcal{S}$ possède un élément maximal S_0. Supposons que S_0 contient deux points distincts x et y. Comme E^* sépare les points de E, alors il existe $f \in E^*$ tel que $f(x) \neq f(y)$. Quitte à multiplier par i, on peut supposer que $\mathrm{Re}(f(x)) \neq \mathrm{Re}(f(y))$. Soit $\alpha = \max\limits_{z\in S_0} \mathrm{Re}(f(z))$, alors il résulte du lemme précédent que $\big\{x \in S_0 \ ; \ \mathrm{Re}(f(x)) = \alpha\big\}$ est un sous-ensemble propre de S_0 et extrémal et fermé de K, ce qui contredit le fait que S_0 est maximal. Donc S_0 contient seul point qui va être un point extrémal de K. On applique alors le raisonnement précédent à chaque sous-ensemble extrémal fermé S de K, pour en déduire que S contient un point extrémal qui sera à son tour un point extrémal de K, par le lemme précédent.
2. Soit $e(K)$ l'ensemble des points extrémaux de K. Si $K \not\subset \overline{\mathrm{conv}}(e(K))$, alors il existe $x_0 \in K \backslash \overline{\mathrm{conv}}(e(K))$. En appliquant la partie 2 du théorème 9.4.1 aux $\{x_0\}$ et $\overline{\mathrm{conv}}(e(K))$, on obtient un $f \in E^*$ tel que $\max\limits_{x\in\overline{\mathrm{conv}}(e(K))} \mathrm{Re}(f(x)) < \mathrm{Re}(f(x_0)) \leq \alpha = \max\limits_{y\in K} \mathrm{Re}(f(y))$. Il résulte du lemme précédent que $\big\{x \in K \ ; \ \mathrm{Re}(f(x)) = \alpha\big\}$ est un sous-ensemble extrémal fermé de K, et d'après 1, $\big\{x \in K \ ; \ \mathrm{Re}(f(x)) = \alpha\big\}$ contient un point extrémal de K, d'où la contradiction car $e(K) \cap \big\{x \in K \ ; \ \mathrm{Re}(f(x)) = \alpha\big\} = \emptyset$. Par conséquent, on a $K \subset \overline{\mathrm{conv}}(e(K))$.
3. Comme K est compact et convexe, alors on a $\overline{\mathrm{conv}}(e(K)) \subset K$. D'après 2, on a aussi $K \subset \overline{\mathrm{conv}}(e(K))$. Par conséquent, on a $K = \overline{\mathrm{conv}}(e(K))$. ■

Remarque 9.5.3. En faisant le même raisonnement que précédemment et en utilisant le théorème 10.1.5 au lieu du théorème 9.4.1, on obtient ainsi la version suivante du théorème de Krein-Milman.

Théorème 9.5.3 (Krein-Milman). *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique tel que E^* sépare les points de E, et soit K un sous-ensemble non vide compact de E. On a :*

1. *Tout sous-ensemble extrémal fermé de K contient un point extrémal de K. En particulier, on a $e(K) \neq \emptyset$.*

2. *Si de plus K est convexe, alors K est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux. Autrement dit, on a $K = \overline{conv}(e(K))$.*

Corollaire 9.5.3. *Soit K un sous-ensemble non vide compact d'un espace vectoriel topologique E tel que E^* sépare les points de E, et soit $f \in E^*$. Alors il existe un* *point extrémal x_0 de K tel que $Re(f(x_0)) = \max\limits_{y\in K} Re(f(y))$. En particulier, on a :* $\max\limits_{x\in e(K)} Re(f(x)) = \max\limits_{y\in K} Re(f(y))$.

Démonstration. Soit $\alpha = \max\limits_{y\in K} \mathrm{Re}(f(y))$. D'après le lemme 9.5.2, $S = \{x \in K\ ;\ \mathrm{Re}(f(x)) = \alpha\}$ est un sous-ensemble extrémal fermé de K. Il résulte du théorème précédent que S possède un point extrémal x_0 de K, d'où on a $\mathrm{Re}(f(x_0)) = \max\limits_{y\in K} \mathrm{Re}(f(y))$. ■

Théorème 9.5.4 (Milman). *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace localement convexe et K un sous-ensemble non vide compact de E. Si $\overline{conv}(K)$ est aussi compacte, alors tous les points extrémaux de $\overline{conv}(K)$ appartiennent à K.*

Démonstration. Soit x un point extrémal de $\overline{\mathrm{conv}}(K)$. Si $x \notin K$, alors il existe un voisinage convexe, équilibré et fermé V de 0 dans E tel que $(x+V) \cap K = \emptyset$. Comme K est compact, il existe $x_1, \ldots, x_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (x_i + V)$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $A_i = \overline{\mathrm{conv}}(K \cap (x_i + V)) \subset \overline{\mathrm{conv}}(K) \cap (x_i + V)$, alors A_i est compact et convexe. En plus, on a $K \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n \subset \overline{\mathrm{conv}}(K)$. D'où on a $\overline{\mathrm{conv}}(K) = \overline{\mathrm{conv}}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$. D'après le théorème 9.5.1, on a $\overline{\mathrm{conv}}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mathrm{conv}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$. Par conséquent, on a $\overline{\mathrm{conv}}(K) = \mathrm{conv}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$. D'après la proposition 9.5.4, il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x \in A_i$, d'où on a $x \in x_i + V \subset K + V$, donc $(x+V) \cap K \neq \emptyset$, car V est équilibré. Ce qui est impossible. Donc on a bien $x \in K$. ■

On déduit du théorème 9.5.1 et du théorème précédent et de la proposition 9.5.2, le corollaire suivant :

Corollaire 9.5.4. *Soient E un espace de Fréchet et K un compact non vide de E.*

1. *on a $e(\overline{conv}(K)) \subset K$.*
2. *Si $E = \mathbb{R}^n$, on a $e(conv(K)) \subset K$.*

9.6 Exercices

Remarque 9.6.1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et d une distance sur E invariante par translation, alors l'addition dans E est continue. En effet, pour tous $x, y, x_0, y_0 \in E$, on a :

$$\begin{aligned} d(x+y, x_0+y_0) &= d(x - x_0 + y, y_0) \\ &= d(x - x_0, y_0 - y) \\ &\leq d(x - x_0, 0) + d(0, y_0 - y) \\ &= d(x, x_0) + d(y, y_0) \\ &= D((x,y),(x_0,y_0)). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'application $(x, y) \longmapsto x + y$ est continue de $E \times E$ dans E.

Exercice 9.1. Soit $E = C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions complexes continues sur $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme $\mathcal{T}_{cu}$, voir paragraphe 5.2. Montrer que l'addition dans E est continue, mais que la multiplication par un scalaire ne l'est pas.
Solution. Rappelons d'abord que $\mathcal{T}_{cu}$, la topologie de la convergence uniforme sur E, est associée à la distance d définie sur E par : pour tout $f, g \in E$, on a :

$$d(f,g) = \min\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|, 1\right).$$

Il est clair que d est invariante par translation, donc l'addition est continue dans E.
Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = f(x) = x$ et $\lambda_n = \frac{1}{n}$, alors la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f dans $(E, \mathcal{T}_{cu})$ et la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 dans $\mathbb{C}$, mais on a $d(\lambda_n f_n, 0) = 1$, donc la suite $(\lambda_n f_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0 dans $(E, \mathcal{T}_{cu})$. Par conséquent, la multiplication par un scalaire n'est pas continue.

Exercice 9.2. Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et A, B deux sous-ensembles de E. Montrer que l'on a les propriétés suivantes :

1. Si A et B sont bornés, alors $A + B$ est borné.

2. Si A et B sont compacts, alors $A + B$ est un compact de E.

3. Si A est compact et B est fermé, alors $A + B$ est un fermé de E.

Solution. 1. Soit V un voisinage de 0 dans E. Alors il existe un voisinage équilibré W de 0 dans E tel que $W + W \subset V$. Comme A et B sont bornés, alors il existe $s > 0$ et $t > 0$ tels que $A \subset sW$ et $b \subset tW$. Soit $\alpha = \max(s,t)$, alors on a $sW \subset \alpha W$ et $tW \subset \alpha W$, car W est équilibré. D'où on a $A + B \subset \alpha W + \alpha W \subset \alpha V$, donc $A + B$ est borné.
2. Puisque l'application

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \longrightarrow & A + B \\ (x,y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

est continue et surjective et $A \times B$ est compact, alors $A + B$ est compact.
3. Pour montrer que $A + B$ est fermé dans E, on va montrer que $E \setminus (A + B)$ est ouvert dans E. Soit $x \in E \setminus (A + B)$. Alors $x - B$ est un fermé de E tel que $(x - B) \cap A = \emptyset$. D'après la proposition 9.1.5, il existe un voisinage ouvert V de 0 dans E tel que $(A + V) \cap (x - B + V) = \emptyset$, d'où on a $(A + B) \cap (x + V) = \emptyset$. Donc $x + V$ est un ouvert de E tel que $x \in x + V \subset E \setminus (A + B)$. Par conséquent, $E \setminus (A + B)$ est ouvert dans E.

Exercice 9.3. Soit B un sous-ensemble fermé non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique $(E, \mathcal{T})$.

1. Montrer que si A est un compact non vide de $\mathbb{K}$ tel que $0 \notin A$, alors $F' = \bigcup\limits_{\lambda\in A} \lambda B$ est fermé dans E.

2. On suppose de plus $0 \notin B$. Montrer que si A est un fermé non vide de $\mathbb{K}$ tel que $0 \notin A$, alors $F = \bigcup\limits_{\lambda\in A} \lambda B$ est fermé dans E.

Solution. 1. On va montrer que $E \setminus F'$ est ouvert dans E. Soit $x \in E$, alors on a :

$$\begin{aligned} x \in E \setminus F' &\iff \forall\, \lambda \in A,\ x \notin \lambda B \\ &\iff \forall\, \lambda \in A,\ \tfrac{x}{\lambda} \notin B \\ &\iff \forall\, \lambda \in A,\ 0 \notin -\tfrac{x}{\lambda} + B \\ &\iff 0 \notin \bigcup_{\lambda \in A} -\tfrac{x}{\lambda} + B\,. \end{aligned}$$

Comme A est compact et $0 \notin A$, alors l'ensemble $\big\{ -\frac{x}{\lambda}\ ;\ \lambda \in A \big\}$ est compact dans E. Il résulte de l'exercice précédent que $\bigcup\limits_{\lambda \in A} -\frac{x}{\lambda} + B$ est fermé dans E. Par conséquent, il existe un voisinage ouvert équilibré U de 0 dans E tel que $U \cap \bigcup\limits_{\lambda \in A} -\frac{x}{\lambda} + B = \emptyset$. Soit $\varepsilon = \inf \big\{ |\lambda|\ ;\ \lambda \in A \big\}$, alors $\varepsilon > 0$ et pour tout $\lambda \in A$, on a $\varepsilon U \cap \lambda\Big(\bigcup\limits_{\lambda \in A} -\frac{x}{\lambda} + B \Big) = \emptyset$, car U est équilibré et $\varepsilon \le |\lambda|$. Par conséquent, pour tout $\lambda \in A$, on a $(x + \varepsilon U) \cap \lambda B = \emptyset$, d'où $x + \varepsilon U \subset E \setminus F'$. On en déduit que $E \setminus F'$ est ouvert dans E.
2. On suppose de plus $0 \notin B$. On va montrer que $E \setminus F$ est ouvert dans E. Soit $x \in E$, alors $x \in E \setminus F$ si et seulement si $0 \notin \bigcup\limits_{\lambda \in A} -\frac{x}{\lambda} + B$. Soit $G = \bigcup\limits_{\lambda \in A} -\frac{x}{\lambda} + B$. Montrons d'abord que $0 \notin \overline{G}$. Pour tout $n \geq 1$, soit $A_n = \{\lambda \in \mathbb{K}\ ;\ |\lambda| \le n\} \cap A$. Alors A_n est compact et $0 \notin A_n$. Quitte à prendre n assez grand, on peut supposer $A_n \neq \emptyset$. Il résulte de l'exercice précédent que $\bigcup\limits_{\lambda \in A_n} -\frac{x}{\lambda} + B$ est fermé dans E, car B est fermé dans E. D'où on a :

$$\begin{aligned} \overline{G} \;=\; \overline{\bigcup_{\lambda \in A} -\tfrac{x}{\lambda} + B} &= \overline{\bigcup_{\lambda \in A_n} -\tfrac{x}{\lambda} + B} \cup \overline{\bigcup_{\lambda \in A \setminus A_n} -\tfrac{x}{\lambda} + B} \\ &= \Big(\bigcup_{\lambda \in A_n} -\tfrac{x}{\lambda} + B \Big) \cup \overline{\bigcup_{\lambda \in A \setminus A_n} -\tfrac{x}{\lambda} + B}\,. \end{aligned}$$

Comme B est fermé et $0 \notin B$, alors il existe un voisinage ouvert V de 0 dans E tel que $V \cap B = \emptyset$. Soit W un voisinage ouvert équilibré de 0 dans E tel que $W + W \subset V$. Comme la suite $\big(\frac{x}{n}\big)_{n \geq 1}$ tend vers 0 dans E, alors il existe $p \geq 1$ tel que $\frac{x}{p} \in W$, d'où pour tout $\lambda \in A \setminus A_p$, on a $\frac{x}{\lambda} = \frac{p}{\lambda}\frac{x}{p} \in \frac{p}{\lambda} W \subset W$, car W est équilibré. Si on a $0 \in \overline{G}$, alors $0 \in \overline{\bigcup\limits_{\lambda \in A \setminus A_p} -\frac{x}{\lambda} + B}$, d'où il existe $\lambda \in A \setminus A_p$ et $b \in B$ tels que $-\frac{x}{\lambda} + b \in W$, donc $b \in \frac{x}{\lambda} + W \subset W + W \subset V$, ce qui est impossible. Donc on a bien $0 \notin \overline{G}$. Alors il existe un voisinage ouvert équilibré U de 0 dans E tel que $U \cap \bigcup\limits_{\lambda \in A} -\frac{x}{\lambda} + B = \emptyset$. Soit $\varepsilon = \inf \big\{ |\lambda|\ ;\ \lambda \in A \big\}$, alors $\varepsilon > 0$ et pour tout $\lambda \in A$, on a $\varepsilon U \cap \lambda\big(\bigcup\limits_{\lambda \in A} -\frac{x}{\lambda} + B \big) = \emptyset$, car U est équilibré et $\varepsilon \le |\lambda|$. Par conséquent, pour tout $\lambda \in A$, on a $(x + \varepsilon U) \cap \lambda B = \emptyset$, d'où $x + \varepsilon U \subset E \setminus F$. On en déduit que $E \setminus F$ est ouvert dans E.

Exercice 9.4. Soient $I = [0,\, 1]$ et $E = C(I,\, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur I. Pour tout $f \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on dira que ε est associé à f si l'ensemble $\{t \in I\ ;\ |f(t)| \geq \varepsilon\}$ peut être recouvert par une famille finie d'intervalles dont la somme des longueurs est $\le \varepsilon$. On pose alors $p(f) = \inf\{\varepsilon > 0\ ;\ \varepsilon \text{ est associé à} f\}$. Notons d'abord que pour tout $f \in E$, on a les propriétés suivantes :

(i) Si $\varepsilon > \|f\|_\infty = \sup_{t\in I} |f(t)|$, alors ε est associé à f.

(ii) S'il existe un intervalle J de I tel que pour tout $t \in I \setminus J$, on ait $f(t) = 0$, alors $p(f) \leq$ la longueur de J.

(iii) Si $\varepsilon > 0$ est associé à f, alors pour tout $\varepsilon' \geq \varepsilon$, ε' est associé à f.

(iv) Pour tout $\varepsilon > p(f)$, ε est associé à f.

(v) On a $p(f) \leq p(g)$, pour tous $f, g \in E$ tels que $|f(t)| \leq |g(t)|$, pour tout $t \in I$.

1. Montrer que pour tous $f, g \in E$, on a les propriétés suivantes :

   (α) $p(f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0$;

   (β) $p(f) = p(-f)$ et $p(f + g) \leq p(f) + p(g)$;

   (γ) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $p(\lambda f) \leq p(f)$ si $|\lambda| \leq 1$ et $p(\lambda f) \leq |\lambda| p(f)$ si $|\lambda| \geq 1$.

   Montrer que pourtant, p n'est pas une norme sur E.

2. Pour tout $f, g \in E$, on pose $d(f, g) = p(f - g)$. Montrer que d est une distance sur E et que pour toute boule de centre 0 et de rayon $r > 0$, l'enveloppe convexe de cette boule est l'espace E tout entier.

3. Montrer que E muni de d est un espace vectoriel topologique non localement convexe.

4. Montrer que la seule forme linéaire continue sur E est la forme identiquement nulle. Autrement dit, on a $E^* = \{0\}$.

Solution. 1(α). Il est clair que l'on a $p(0) = 0$. Soit $f \in E$ tel que $f \neq 0$. Soit $x \in I$ tel que $f(x) \neq 0$. Alors il existe $\eta > 0$ et il existe un intervalle $I_\eta \subset I$ de longueur η tel que pour tout $t \in I_\eta$, on ait $|f(t)| \geq \frac{|f(x)|}{2}$. Soit $\varepsilon = \inf\left(\frac{|f(x)|}{2}, \frac{\eta}{2}\right)$, alors $\varepsilon > 0$ et ε n'est pas associé à f, donc on a $p(f) \geq \varepsilon$. Par conséquent, on a $p(f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0$.
1(β). Il est clair que pour tout $f \in E$, on a $p(f) = p(|f|)$, d'où $p(f) = p(-f)$.
Soient $f, g \in E$ et $n \geq 1$. Soient $A_n = \left\{t \in I \,;\, |f(t)| \geq p(f) + \frac{1}{n}\right\}$ et $B_n = \left\{t \in I \,;\, |g(t)| \geq p(g) + \frac{1}{n}\right\}$. Alors on a $\left\{t \in I \,;\, |f(t) + g(t)| \geq p(f) + p(g) + \frac{2}{n}\right\} \subset \left\{t \in I \,;\, |f(t)| + |g(t)| \geq p(f) + p(g) + \frac{2}{n}\right\} \subset A_n \cup B_n$. Comme $p(f) + \frac{1}{n}$ est associé à f et $p(g) + \frac{1}{n}$ est associé à g, on en déduit que $p(f) + p(g) + \frac{2}{n}$ est associé à $f + g$, d'où $p(f + g) \leq p(f) + p(g) + \frac{2}{n}$. Comme ceci étant vrai, pour tout $n \geq 1$, alors on a $p(f + g) \leq p(f) + p(g)$.
1(γ). Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \neq 0$. Supposons d'abord $|\lambda| \leq 1$, et pour tout $n \geq 1$, soit $\varepsilon_n = p(f) + \frac{1}{n}$. On a $\left\{t \in I \,;\, |\lambda f(t)| \geq \varepsilon_n\right\} = \left\{t \in I \,;\, |f(t)| \geq \frac{\varepsilon_n}{|\lambda|}\right\} \subset \left\{t \in I \,;\, |f(t)| \geq \varepsilon_n\right\}$. Comme ε_n est associé à f, on en déduit que ε_n est aussi associé à λf, d'où on a $p(\lambda f) \leq \varepsilon_n$. Comme ceci étant vrai, pour tout $n \geq 1$, alors on a $p(\lambda f) \leq p(f)$.
Supposons maintenant $|\lambda| \geq 1$ et pour tout $n \geq 1$, soit $\varepsilon_n = \left(p(f) + \frac{1}{n}\right)|\lambda|$. On a $\left\{t \in I \,;\, |\lambda f(t)| \geq \varepsilon_n\right\} = \left\{t \in I \,;\, |f(t)| \geq \frac{\varepsilon_n}{|\lambda|}\right\}$. Comme $\varepsilon_n \geq \dfrac{\varepsilon_n}{|\lambda|}$ et $\dfrac{\varepsilon_n}{|\lambda|}$ est associé à f, car $\dfrac{\varepsilon_n}{|\lambda|} > p(f)$, alors ε_n est associé à λf, d'où on a $p(\lambda f) \leq \varepsilon_n$. Comme ceci étant vrai,

pour tout $n \geq 1$, alors on a $p(\lambda f) \leq |\lambda| p(f)$.
Soit $c \geq 0$ et soit $f = c$ la fonction constante qui vaut c sur I, alors on a :

$$p(f) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad c \geq 1\,, \\ c & \text{si} \quad 0 \leq c \leq 1\,. \end{cases}$$

Donc si $c > 1$ et si $f = c$, on a $p(f) = 1 = p(\frac{1}{c} f)$, d'où $p(\frac{1}{c} f) \neq \frac{1}{c} p(f)$. Par conséquent, p n'est pas une norme sur E.
2. Soient $f, g \in E$, on a $d(f,g) = 0 \Longleftrightarrow p(f-g) = 0 \Longleftrightarrow f-g = 0$. Pour tous $f, g, h \in E$, on a $d(f,g) = p(f-g) = p(g-f) = d(g,f)$ et $d(f,g) = p(f-g) = p(f-h+h-g) \leq p(f-h) + p(h-g) = d(f,h) + d(h,g)$. Donc d est bien une distance sur E. Soient $r > 0$ et $B(0,r) = \{f \in E \ ; \ d(f,0) < r\} = \{f \in E \ ; \ p(f) < r\}$. Il s'agit de montrer que $\mathrm{conv}(B(0,r)) = E$. Soient $f \in E$ et $n \geq 1$ tel que $\frac{3}{2n} < r$. Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, soit $J_k = \left]\frac{2k-1}{2n}, \frac{k+1}{n}\right[$. D'après la proposition 3.6.4, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, il existe $\varphi_k \in E$ telle que $\mathrm{Supp}(\varphi_k) \subset J_k \cap I$, $0 \leq \varphi_k(t) \leq 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(t) = 1$, pour tout $t \in I$.
Comme on a $\mathrm{Supp}(\varphi_k) \subset J_k \cap I$, alors pour tout $g \in E$, on a $p(g\varphi_k) \leq \frac{3}{2n}$. En particulier, on a $p((n+1) f \varphi_k) \leq \frac{3}{2n} < r$, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Soit $f_k = (n+1) f \varphi_k$, alors $f_k \in B(0,r)$ et on a $f = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} f_k$, d'où $f \in \mathrm{conv}(B(0,r))$. Par conséquent, on a $\mathrm{conv}(B(0,r)) = E$.
3. Pour tous $f, g, h \in E$, on a $d(f+h, g+h) = p(f+h-h-g) = p(f-g) = d(f,g)$, donc d est invariante par translation. Il résulte de la remarque 9.6.1 que l'addition est continue dans E. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in E$, $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ une suite dans $\mathbb{R}$ convergeant vers λ et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite dans E convergeant vers f. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $d(f_n, f) < \dfrac{\varepsilon}{2(1+|\lambda|)}$, $|\lambda_n - \lambda| < 1$ et $|\lambda_n - \lambda| \, \|f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $|\lambda_n| < 1 + |\lambda|$ et $p((\lambda_n - \lambda) f) < \frac{\varepsilon}{2}$. On a :

$$\begin{aligned} d(\lambda_n f_n, \lambda f) &= p(\lambda_n f_n - \lambda f) \\ &= p(\lambda_n f_n - \lambda_n f + \lambda_n f - \lambda f) \\ &\leq p(\lambda_n (f_n - f)) + p((\lambda_n - \lambda) f) \\ &\leq \max(|\lambda_n|, 1) p(f_n - f) + p((\lambda_n - \lambda) f) \\ &\leq (1 + |\lambda|) d(f_n, f) + p((\lambda_n - \lambda) f) \ < \ \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Donc la suite $(\lambda_n f_n)_{n \geq 0}$ converge vers λf dans E. Par conséquent, la multiplication par un scalaire est continue dans E. Donc, E muni de d est bien un espace vectoriel topologique. Comme on a $B(0,1) \neq E$, on déduit de 2 que $B(0,1)$ ne contient aucun ouvert convexe contenant 0, donc E n'est pas localement convexe.
4. Soit f une forme linéaire continue sur E. Alors pour tout $r > 0$, $f^{-1}\big(\,]-r, r[\,\big)$ est un ouvert convexe contenant 0 de E. Il résulte de 2 que l'on a $f^{-1}(\,]-r, r[\,) = E$. Par conséquent, on a $f = 0$.

Exercice 9.5. Soit $E = C([0,\, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur $[0,\, 1]$. Pour tout $f, g \in E$, on pose :

$$d(f,g) = \int_0^1 \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|}\, dx\,.$$

Soit $\mathcal{T}$ la topologie sur E définie par la famille séparante des semi-normes $(p_x)_{0 \leq x \leq 1}$, où $p_x(f) = |f(x)|$, pour tout $f \in E$.

1. Montrer que d est une distance sur E invariante par translation et que E muni de d est un espace vectoriel topologique. On note $\mathcal{T}_d$ la topologie sur E associée à la distance d.

2. Montrer que $(E,\, \mathcal{T}_d)$ ne contient aucun ouvert convexe autre $\emptyset$ et E. En déduire que le dual topologique de $(E,\, \mathcal{T}_d)$ est réduit à $\{0\}$.

3. Montrer que l'application identité $\mathrm{id}_E\ : (E,\, \mathcal{T}) \longrightarrow (E,\, \mathcal{T}_d)$ n'est pas continue.

4. Soit Λ une forme linéaire continue sur $(E,\, \mathcal{T})$. Montrer qu'il existe $x_1, \ldots, x_n \in [0,\, 1]$ et des $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $f \in E$, on ait $\Lambda(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

5. Montrer que l'application identité $\mathrm{id}_E : (E,\, \mathcal{T}_d) \longrightarrow (E,\, \mathcal{T})$ n'est pas continue.

Solution. 1. Il est clair que pour tout $f, g \in E$, on a $d(f,g) \geq 0$, $d(f,g) = d(g,f)$ et que $d(f,g) = 0 \iff f = g$. Soient $f, g, h \in E$. On vérifie comme dans la proposition 2.3.5 que pour tout $x \in [0,\, 1]$, on a :

$$\frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} \leq \frac{|f(x) - h(x)|}{1 + |f(x) - h(x)|} + \frac{|h(x) - g(x)|}{1 + |h(x) - g(x)|}\,.$$

Par conséquent, on a $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$. Donc d est bien une distance sur E. Il est clair que d est invariante par translation, donc l'addition dans E est continue. Il reste à vérifier que l'application $(\lambda, f) \longmapsto \lambda f$ est continue de $\mathbb{R} \times E$ dans E. Pour tout $f, f_0 \in E$ et pour tout $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} d(\lambda f, \lambda_0 f_0) &= d(\lambda f - \lambda f_0, \lambda_0 f_0 - \lambda f_0) \\ &\leq d(\lambda f - \lambda f_0, 0) + d(0, \lambda_0 f_0 - \lambda f_0) \\ &= \int_0^1 \frac{|\lambda|\,|f(x) - f_0(x)|}{1 + |\lambda|\,|f(x) - f_0(x)|}\, dx + \int_0^1 \frac{|\lambda - \lambda_0|\,|f_0(x)|}{1 + |\lambda - \lambda_0|\,|f_0(x)|}\, dx\,. \end{aligned}$$

Soit $M = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |f_0(x)|$, alors $M \in]0, +\infty[$ et on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\lambda - \lambda_0|\,|f_0(x)|}{1 + |\lambda - \lambda_0|\,|f_0(x)|}\, dx =$ $\displaystyle|\lambda - \lambda_0| \int_0^1 \frac{|f_0(x)|}{1 + |\lambda - \lambda_0||f_0(x)|}\, dx \leq |\lambda - \lambda_0| \int_0^1 |f_0(x)|\, dx \leq |\lambda - \lambda_0| M$. On peut supposer

$|\lambda| \leq |\lambda_0| + 1$, et comme l'application $s \longmapsto \frac{s}{1+s}$ est croissante sur $[0, +\infty[$, alors on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{|\lambda|\,|f(x)-f_0(x)|}{1+|\lambda|\,|f(x)-f_0(x)|}\,dx &\leq (|\lambda_0|+1)\int_0^1 \frac{|f(x)-f_0(x)|}{1+(|\lambda_0|+1)|f(x)-f_0(x)|}\,dx \\ &\leq (|\lambda_0|+1)\int_0^1 \frac{|f(x)-f_0(x)|}{1+|f(x)-f_0(x)|}\,dx \\ &= (|\lambda_0|+1)d(f, f_0)\,.\end{aligned}$$

On en déduit que l'application $(\lambda, f) \longmapsto \lambda f$ est continue de $\mathbb{R}\times E$ dans E. Donc E muni de la distance d est bien un espace vectoriel topologique.
2. Soit U un ouvert convexe non vide de $(E, \mathcal{T}_d)$. Soient $g \in U$ et $V = U - \{g\}$, alors V est un ouvert convexe de $(E, \mathcal{T}_d)$ tel que $0 \in V$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) = \{f \in E\ ;\ d(f,0) < r\} \subset V$. Pour montrer que $U = E$, il suffit de montrer que l'enveloppe convexe de $B(0,r)$ est l'espace E tout entier. Soient $f \in E$ et $n \geq 1$ tel que $\frac{3}{2n} < r$. Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, soit $J_k = \left]\frac{2k-1}{2n}, \frac{k+1}{n}\right[$. D'après la proposition 3.6.4, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, il existe $\varphi_k \in E$ telle que $\mathrm{Supp}(\varphi_k) \subset J_k \cap [0,\, 1]$, $0 \leq \varphi_k(t) \leq 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(t) = 1$, pour tout $t \in [0,\, 1]$. Comme on a $\mathrm{Supp}(\varphi_k) \subset J_k \cap [0,\, 1]$, alors pour tout $h \in E$, on a $d(h\varphi_k, 0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{|h(x)\varphi_k(x)|}{1+|h(x)\varphi_k(x)|}\,dx \leq \frac{3}{2n} < r$. En particulier, on a $d((n+1)f\varphi_k, 0) \leq \frac{3}{2n} < r$, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Soit $f_k = (n+1)f\varphi_k$, alors $f_k \in B(0,r)$ et on a $f = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} f_k$, d'où $f \in \mathrm{conv}(B(0,r))$. Par conséquent, on a $\mathrm{conv}(B(0,r)) = E$, d'où $U = E$. Donc $(E, \mathcal{T}_d)$ ne contient aucun ouvert convexe autre $\emptyset$ et E. Soit f une forme linéaire continue sur $(E, \mathcal{T}_d)$. Alors pour tout $r > 0$, $f^{-1}(\,]-r,\, r[\,)$ est un ouvert convexe non vide de $(E, \mathcal{T}_d)$, d'où $f^{-1}(\,]-r,\, r[\,) = E$. Par conséquent, on a $f = 0$. Autrement dit, le dual topologique de $(E, \mathcal{T}_d)$ est réduit à $\{0\}$.
3. Puisque l'application $\mathrm{id}_E : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (E, \mathcal{T}_d)$ est linéaire, alors elle est continue si et seulement si elle est continue en 0. D'après le théorème 9.2.2, id_E est continue en 0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ et il existe $x_1, \dots, x_n \in [0,\, 1]$ tels que pour tout $f \in E$ vérifiant $\displaystyle\max_{1\leq i\leq n} |f(x_i)| < \eta$, on ait $d(f, 0) < \varepsilon$. Soit $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Soient $\eta > 0$ et $x_1, \dots, x_n \in [0,\, 1]$. On peut supposer que l'on a $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$. Soit $p \geq 1$ tel que $x_{i+1} - x_i > \frac{1}{p}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$ et $\frac{p}{1+p} > \frac{1}{2}$. On peut construire trivialement une fonction affine positive f sur $[0,\, 1]$ telle que $f(x_i) = 0$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $f(t) = p$, pour tout $t \in \left[\frac{3x_i + x_{i+1}}{4}, \frac{x_i + 3x_{i+1}}{4}\right]$. Alors on a :
$$d(f,0) = \int_0^1 \frac{|f(x)|}{1+|f(x)|}\,dx = \sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{|f(x)|}{1+|f(x)|}\,dx \geq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p}{1+p}\frac{x_{i+1}-x_i}{2} = \frac{p}{2(1+p)}$$
$> \frac{1}{4} = \varepsilon$. Par conséquent, $\mathrm{id}_E : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (E, \mathcal{T}_d)$ n'est pas continue.
4. Soit Λ une forme linéaire continue sur $(E, \mathcal{T})$. D'après le théorème 9.2.4, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ et il existe $x_1, \dots, x_n \in [0,\, 1]$ tels que pour tout $f \in E$, on ait $|\Lambda(f)| \leq c \displaystyle\max_{1\leq i\leq n} |f(x_i)|$. Or pour tout $x \in [0,\, 1]$, l'application $f \longmapsto f(x)$ est une forme linéaire sur E, il résulte du lemme 7.8.2 qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout

$f \in E$, on ait $\Lambda(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.
5. Si l'application identité $\mathrm{id}_E : (E, \mathcal{T}_d) \longrightarrow (E, \mathcal{T})$ est continue, il résulte de 4 que le dual topologique de $(E, \mathcal{T}_d)$ n'est pas trivial, ce qui est impossible par 2. Donc $\mathrm{id}_E : (E, \mathcal{T}_d) \longrightarrow (E, \mathcal{T})$ n'est pas continue.

Exercice 9.6. Soit $p \in]0, 1[$. On vérifie facilement que tous réels positifs s et t, on a $(s+t)^p \leq s^p + t^p$. On note ℓ_p l'ensemble des suites de scalaires $x = (x_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty$. Alors ℓ_p est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0}, y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell_p$, on pose $d(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n - y_n|^p$.

1. Montrer que d est une distance sur ℓ_p invariante par translation et que ℓ_p muni de cette distance est un F-espace.
2. Montrer que pour tous x, $y \in \ell_p$ tels que $x \neq y$, il existe deux voisinages convexes disjoints V_x et V_y de x et y respectivement dans ℓ_p, mais que ℓ_p n'est pas localement convexe. En particulier, ℓ_p est un F-espace qui n'est pas de Fréchet.
3. Montrer que $(\ell_p)^*$ sépare les points de ℓ_p.
4. Soit $y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$. Vérifier que pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell_p$, le série $\sum_{n\geq 0} x_n\, y_n$ est convergente dans $\mathbb{K}$ et que l'application $f_y : x \longmapsto f_y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, y_n$ est une forme linéaire continue sur ℓ_p.
5. Montrer que l'application suivante est linéaire bijective.

$$\begin{array}{cccc} T: & \ell^\infty & \longrightarrow & {\ell_p}^* \\ & y & \longmapsto & f_y \end{array}$$

Solution. 1. Il est clair que d est une distance invariante par translation sur ℓ_p. Par conséquent, l'addition est continue dans ℓ_p, voir remarque 9.6.1. Pour tous $x, y \in \ell_p$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned} d(\lambda x, \mu y) &= d(\lambda x - \mu x, \mu y - \mu x) \\ &\leq d((\lambda-\mu)x, 0) + d(0, \mu(y-x)) \\ &= |\lambda-\mu|^p d(x,0) + |\mu|^p d(x,y) \\ &\leq |\lambda-\mu|^p (d(x,y) + d(y,0)) + |\mu|^p d(x,y)\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, la multiplication par un scalaire est continue. Donc ℓ_p muni de d est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique. Il reste à montrer que $(\ell_p,\, d)$ est complet. Soit $(\xi_k)_{k\geq 0}$

une suite de Cauchy dans $(\ell_p,\, d)$. Pour tout $k \geq 0$, on a $\xi_k = (x_{k,n})_{n\geq 0}$, avec $x_{k,n} \in \mathbb{K}$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k, k' \geq k_0$, on ait :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_{k,n} - x_{k',n}|^p = d(\xi_k, \xi_{k'}) < \varepsilon\,.$$

Soit $n \geq 0$. Pour tout k, k', on a $|x_{k,n} - x_{k',n}| \leq \left(d(\xi_k, \xi_{k'})\right)^{\frac{1}{p}}$, donc la suite $(x_{k,n})_{k\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ qui est de Banach, donc il existe $x_n \in \mathbb{K}$ tel que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{k,n} = x_n$. Pour tout $N \geq 0$ et pour tout $k, k' \geq k_0$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} |x_{k,n} - x_{k',n}|^p \leq d(\xi_k, \xi_{k'}) < \varepsilon\,.$$

On fait tendre k' vers l'infini, on obtient que :

$$\sum_{n=0}^{N} |x_{k,n} - x_n|^p \leq \varepsilon\,.$$

Ceci étant vrai pour tout $N \geq 0$, d'où on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_{k,n} - x_n|^p \leq \varepsilon\,.$$

Soit $x = (x_n)_{n\geq 0}$, alors on a $x - \xi_k \in \ell_p$. Comme ℓ_p est un espace vectoriel, alors $x = x - \xi_k + \xi_k \in \ell_p$. De plus l'inégalité précédente montre que $(\xi_k)_{k\geq 0}$ converge vers x dans $(\ell_p,\, d)$. Donc $(\ell_p,\, d)$ est bien un F-espace.
2. Soient $x,\, y \in \ell_p$ tels que $x \neq y$. Alors il existe $n \geq 0$ tel que $x_n \neq y_n$, d'où il existe $r > 0$ tel que $B(x_n, r) \cap B(y_n, r) = \emptyset$ dans $\mathbb{K}$. Soient $V_x = \{z \in \ell_p \;;\; |z_n - x_n| < r\}$ et $V_y = \{z \in \ell_p \;;\; |z_n - y_n| < r\}$. Puisque toute boule dans un espace normé, ici $\mathbb{K}$, est convexe, alors V_x et V_y sont des ensembles convexes. De plus, on a $V_x \cap V_y = \emptyset$. Pour tous $a, b \in \ell_p$, on a $|a_n - b_n| \leq \left(d(a,b)\right)^{\frac{1}{p}}$, on en déduit que l'on a $x \in B(x, r^p) \subset V_x$ et $y \in B(y, r^p) \subset V_y$. Par conséquent, V_x et V_y sont respectivement des voisinages convexes disjoints de x et y dans ℓ_p.
Supposons que ℓ_p est localement convexe. Soit $s > 0$, alors il existe un ouvert convexe V dans ℓ_p tel que $0 \in V \subset B(0, s)$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset V \subset B(0, s)$. Soit $t \in]0,\, r[$ et pour tout $n \geq 0$, soit $\xi_n = t^{\frac{1}{p}} \mathbf{e}_n$, où $\mathbf{e}_n = (\delta_{n,k})_{k\geq 0} \in \ell_p$ défini par :

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = n\,, \\ 0 & \text{si} \quad k \neq n\,. \end{cases}$$

On a $d(\xi_n, 0) = t < r$, d'où $\xi_n \in B(0, r) \subset V$. Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, soit $\eta_q = \sum\limits_{n=0}^{q-1} \frac{1}{q}\xi_n$. Comme V est convexe, alors on a $\eta_q \in V \subset B(0, s)$. D'autre part, on a $d(\eta_q, 0) = \sum\limits_{n=0}^{q-1} \frac{1}{q^p} t = q^{1-p} t$. Comme on a $\lim\limits_{q\to+\infty} q^{1-p} = +\infty$, alors il existe $q \geq 1$ tel que $\eta_q \notin B(0, s)$.

D'où la contradiction. Donc ℓ_p n'est pas localement convexe.
3. Pour tout $x \in \ell_p$ et pour tout $n \geq 0$, soit $f_n(x) = x_n$. Alors f_n est une forme linéaire non nulle sur ℓ_p. Comme pour tout $x, y \in \ell_p$, on a $|f_n(x) - f_n(y)| = |x_n - y_n| \leq (d(x,y))^{\frac{1}{p}}$, alors f_n est continue. Si $x \neq y$, alors il existe $n \geq 0$ tel que $x_n \neq y_n$, d'où $f_n(x) \neq f_n(y)$. Donc $(\ell_p)^*$ sépare les points de ℓ_p.
4. Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell_p$. Comme on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |x_n|^p = 0$, d'où il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|x_n| \leq 1$, donc on a $|x_n| \leq |x_n|^p$, pour tout $n \geq N$. Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |x_n|$ est absolument convergente. On en déduit que pour tout $y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, le série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x_n\, y_n$ est convergente dans $\mathbb{K}$. On pose $f_y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, y_n$. Il est clair que f_y est une forme linéaire sur ℓ_p. Pour tout $x \in B(0,1)$, on a $|f_y(x)| \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|\,|y_n| \leq \|y\|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| \leq \|y\|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p = \|y\|_\infty\, d(x,0) \leq \|y\|_\infty$. Donc f est bornée dans $B(0,1)$. Par conséquent, f est continue, voir proposition 9.1.12. Autrement dit, on a $f_y \in {\ell_p}^*$.
5. Il est clair que l'application T est linéaire injective. Il reste à montrer que T est surjective. Soit $f \in {\ell_p}^*$. Alors f est bornée dans $B(0,1)$. Donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$, on ait $|f(\mathbf{e}_n)| \leq M$, d'où $y = (f(\mathbf{e}_n))_{n\geq 0} \in \ell^\infty$. Comme $\mathrm{Vect}(\{\mathbf{e}_n\ ;\ n \geq 0\})$ est dense dans ℓ_p et on a $f = f_y$ sur $\mathrm{Vect}(\{\mathbf{e}_n\ ;\ n \geq 0\})$, alors on a $f = f_y$. Autrement dit, l'application T est surjective. Par conséquent, T est bijective.

Exercice 9.7. Soit H un sous-espace vectoriel dense d'un espace vectoriel topologique E, F un F-espace et $f : H \longrightarrow F$ une application linéaire continue. Montrer que f admet un prolongement linéaire continue $\widetilde{f} : E \longrightarrow F$.
Solution. Soit $x \in E$. Comme H est dense dans E, alors il existe une famille filtrante croissante $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans H telle que $\displaystyle\lim_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = x$. Montrons que la famille filtrante croissante $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ est convergente dans F. Soit V un voisinage de 0 dans F. Comme f est linéaire continue, d'après la proposition 9.1.10, il existe un voisinage U de 0 dans H tel que pour tout $x, y \in H$ vérifiant $x - y \in U$, on ait $f(x) - f(y) \in V$. Comme on a $\displaystyle\lim_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = x$ et H est un sous-espace vectoriel de E, alors il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tels que pour tout $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ vérifiant $\lambda_0 \leq \lambda$ et $\lambda_0 \leq \lambda'$, on ait $x_\lambda - x_{\lambda'} \in U$, d'où on a $f(x_\lambda) - f(x_{\lambda'}) \in V$. Par conséquent, $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ est de Cauchy dans F, donc convergente. Soit $(y_\mu)_{\mu\in\Gamma}$ une famille filtrante croissante dans H telle que $\displaystyle\lim_{\mu\in\Gamma} y_\mu = x$. Montrons que $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ et $(f(y_\mu))_{\mu\in\Gamma}$ convergent vers la même limite dans F. Comme on a $\displaystyle\lim_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = x = \lim_{\mu\in\Gamma} y_\mu$, alors il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ et $\mu_0 \in \Gamma$ tels que pour tous $\lambda \in \Lambda$ et $\mu \in \Gamma$ vérifiant $\lambda_0 \leq \lambda$ et $\mu_0 \leq \mu$, on ait $x_\lambda - y_\mu \in U$, d'où on a $f(x_\lambda) - f(y_\mu) \in V$. Par conséquent, $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ et $(f(y_\mu))_{\mu\in\Gamma}$ convergent vers la même limite dans F. Pour tout $x \in E$, on pose $\widetilde{f}(x) = \displaystyle\lim_{\lambda\in\Lambda} f(x_\lambda)$, où $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille filtrante croissante dans H convergente vers x. Il est clair que $\widetilde{f}$ est une application linéaire de E dans F prolongeant f. Il reste à montrer que $\widetilde{f}$ est continue. Soient V un voisinage de 0 dans F et W un voisinage fermé de 0 dans F

tel que $W \subset V$. Comme f est linéaire continue, d'après la proposition 9.1.10, il existe un voisinage U de 0 dans H tel que pour tout $x, y \in H$ vérifiant $x - y \in U$, on ait $f(x) - f(y) \in W$. Soit U' un voisinage de 0 dans E tel que $U = U' \cap H$. Soient $x, y \in E$ tels que $x - y \in U'$. Soient $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $(y_\mu)_{\mu\in\Gamma}$ des familles filtrantes croissantes dans H telles que $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = x$ et $\lim\limits_{\mu\in\Gamma} y_\mu = y$. Alors il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ et $\mu_0 \in \Gamma$ tels que pour tous $\lambda \in \Lambda$ et $\mu \in \Gamma$ vérifiant $\lambda_0 \leq \lambda$ et $\mu_0 \leq \mu$, on ait $x_\lambda - y_\mu \in U'$, d'où on a $x_\lambda - y_\mu \in U$ car $x_\lambda - y_\mu \in H$. Par conséquent, pour tous $\lambda \in \Lambda$ et $\mu \in \Gamma$ vérifiant $\lambda_0 \leq \lambda$ et $\mu_0 \leq \mu$, on a $f(x_\lambda) - f(y_\mu) \in W$. On en déduit que l'on a $\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(y) \in \overline{W} = W \subset V$. Donc $\widetilde{f}$ est bien continue.

Exercice 9.8. Soient E un espace vectoriel topologique admettant une base locale dénombrable et V une partie équilibrée de E telle que pour tout ensemble borné B de E, il existe $s > 0$ tel que $B \subset sV$. Montrer que V est un voisinage de 0 dans E.
Solution. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une base locale dénombrable de E. On peut supposer que pour tout $n \geq 1$, on a $U_{n+1} \subset U_n$. Si V n'est pas voisinage de 0 dans E, alors pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n} U_n \not\subset V$, d'où l'existence d'un $x_n \in U_n$ tel que $x_n \notin nV$. Comme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, alors l'ensemble $\{x_n \; ; \; n \geq 1\}$ est borné, donc il existe $s > 0$ tel que $\{x_n \; ; \; n \geq 1\} \subset sV$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq s$. Comme V est équilibrée, alors pour tout $n \geq p$, on a $sV \subset nV$. D'où pour tout $n \geq p$, on a $x_n \in nV$, ce qui est impossible. Par conséquent, V est bien un voisinage de 0 dans E.

Exercice 9.9. Soient E un F-espace et V un sous-ensemble fermé, convexe et absorbant de E. Montrer que V est un voisinage de 0 dans E. Montrer que le résultat est faux sans l'hypothèse de convexité de V, même si $E = \mathbb{R}^2$.
Solution. Notons d'abord que $0 \in V$ car V est absorbant. Puisque V est aussi convexe, alors pour tout $t \in [0, 1]$, on a $tV \subset V$. Soit $x \in E$. Comme V est absorbant, alors il existe $s > 0$ tel que $x \in sV$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq s$, alors $sV \subset nV$, car $\frac{s}{n} \leq 1$. Par conséquent, on a $E = \bigcup\limits_{n\geq 1} nV$. Pour tout $n \geq 1$, nV est fermé dans E et comme E est un espace de Baire, alors il existe $n \geq 1$ tel que $\overbrace{nV}^{\circ} \neq \emptyset$, voir proposition 2.8.1 et théorème 2.8.1. Comme l'application $x \longmapsto nx$ est un homéomorphisme de E, alors on a $\overset{\circ}{V} \neq \emptyset$. Soit $z \in \overset{\circ}{V}$. Alors il existe un voisinage ouvert U de 0 dans E tel que $z + U \subset V$. Alors pour tout $t \in]0, 1]$, on a $tz + tU \subset tV \subset V$. Or tU est un voisinage ouvert de 0 dans E, donc $tz \in \overset{\circ}{V}$, pour tout $t \in]0, 1]$. Soit $n \geq 1$ tel que $-z \in nV$, alors on a $\frac{-z}{n} \in V$. Comme on a $\frac{z}{n} \in \overset{\circ}{V}$, il résulte de la proposition 9.1.3 que l'on a $\left]\frac{-z}{n}, \frac{z}{n}\right] \subset \overset{\circ}{V}$, d'où $0 \in \overset{\circ}{V}$. Par conséquent, V est un voisinage de 0 dans E.
Si $V = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 + y^2 = 1\big\} \cup \big\{(0, 0)\big\}$, alors V est fermé, absorbant et non convexe dans $\mathbb{R}^2$, mais V n'est pas un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9.10. Soit A un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel topologique $(E, \mathcal{T})$ tel que $0 \in A$.

1. Montrer que l'on a $\bigcap\limits_{r>1} rA = \bigcap\limits_{n\geq 1} \big(1 + \frac{1}{n}\big)A$ et que $\bigcap\limits_{r>1} rA \subset \overline{A}$.

2. Montrer que si de plus $0 \in \overset{\circ}{A}$, alors on a $\bigcap\limits_{r>1} rA = \overline{A}$.

Solution. 1. Comme A est convexe et $0 \in A$, alors pour tout $x \in A$ et pour tout $t \in [0,\, 1]$, on a $tx = tx + (1-t)0 \in A$, donc $tA \subset A$. Soient $s \geq r > 0$, alors on a $0 < \frac{r}{s} \leq 1$, d'où $\frac{r}{s}A \subset A$, donc on a $rA \subset sA$. On en déduit que l'on a $\bigcap\limits_{r>1} rA = \bigcap\limits_{n\geq 1}\big(1+\frac{1}{n}\big)A$. Soit $x \in \bigcap\limits_{r>1} rA$, alors pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in A$ tel que $x = \big(1+\frac{1}{n}\big)x_n$, d'où $\frac{n}{n+1}x \in A$. Comme on a $x = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}x$, alors $x \in \overline{A}$. Par conséquent, on a $\bigcap\limits_{r>1} rA \subset \overline{A}$.
2. On suppose de plus $0 \in \overset{\circ}{A}$, alors il existe un voisinage ouvert V de 0 dans E tel que $V \subset A$. Soit $x \in \overline{A}$. Pour tout $n \geq 1$, $x - \frac{1}{n}V$ est un voisinage ouvert de x dans E, donc il existe $x_n \in V \subset A$ et $y_n \in A$ tels que $x - \frac{1}{n}x_n = y_n$, d'où $\frac{n}{n+1}x = \frac{1}{n+1}x_n + \frac{n}{n+1}y_n \in A$. Donc, pour tout $n \geq 1$, on a $x \in \frac{n+1}{n}A = \big(1+\frac{1}{n}\big)A$, d'où $x \in \bigcap\limits_{n\geq 1}\big(1+\frac{1}{n}\big)A = \bigcap\limits_{r>1} rA$. Par conséquent, on a bien $\bigcap\limits_{r>1} rA = \overline{A}$.

Exercice 9.11. Soit B un sous-ensemble non vide borné d'un espace vectoriel topologique $(E,\, \mathcal{T})$.

1. Soient A et C deux sous-ensembles non vides de E tels que C soit convexe et $A + B \subset C + B$. Montrer que l'on a $A \subset \overline{C}$.

2. En déduire que si A et C sont deux sous-ensembles convexes non vides fermés de E tels que $A + B = C + B$, alors on a $A = C$.

Solution. 1. Soit $a \in A$. On construit, par récurrence sur n, une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dans C et une suite $(b_n)_{n\geq 1}$ dans B telles que pour tout $n \geq 1$, on ait $a + b_n = x_n + b_{n+1}$. D'où, pour tout $n \geq 1$, on a $a - x_n = b_{n+1} - b_n$, donc, pour tout $n \geq 1$, on a $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(a - x_k) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(b_{k+1} - b_k)$. Par conséquent, pour tout $n \geq 1$, on a $a - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k = \frac{1}{n}(b_{n+1} - b_1)$, avec $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k \in C$, car C est convexe. Comme l'ensemble $B - b_1$ est borné, il résulte de la proposition 9.1.6 que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(b_{n+1} - b_1) = 0$. Donc on a $a = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k \in \overline{C}$. Par conséquent, on a $A \subset \overline{C}$.
2. Si A et C sont deux sous-ensembles convexes non vides fermés de E tels que $A + B = C + B$, on déduit de 1 que l'on a $A \subset \overline{C} = C$ et $C \subset \overline{A} = A$, d'où $A = C$.

Exercice 9.12. Soit A un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel topologique E tel que $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ et $\overline{A} = E$. Montrer que l'on a $A = E$.
Solution. Sans perdre de généralité, on peut supposer $0 \in \overset{\circ}{A}$. Soit $x \in E$. Comme on a $2x \in E = \overline{A}$, d'après la proposition 9.1.3, on a $[0,\, 2x[\, \subset \overset{\circ}{A} \subset A$. Or on a $x \in [0,\, 2x[$, d'où $x \in A$. Par conséquent, on a $A = E$.

Exercice 9.13. Soit A un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel topologique E. On sait, proposition 9.1.3, que si $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, alors $\overset{\circ}{A}$ est convexe et dense dans A. Soit B un ouvert convexe de E tel que $B \subset A$ et B soit dense dans A. Montrer que $B = \overset{\circ}{A}$.

Solution. Notons d'abord que l'on peut supposer $B \neq \emptyset$. Comme B est un ouvert de E tel que $B \subset A$, alors on a $B \subset \overset{\circ}{A}$. D'autre part, d'après la proposition 9.1.3, on a $B = \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{\overline{B}}$. Comme on a $A \subset \overline{B}$, alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{B}} = B$. Par conséquent, on a $B = \overset{\circ}{A}$.

Exercice 9.14. Soit A un sous-ensemble convexe d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique E tel que $\overline{A} = E$. Montrer que pour tout hyperplan affine fermé H dans E, $A \cap H$ est dense dans H.
Solution. Soient f une forme linéaire continue non nulle sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $H = \{x \in E \; ; \; f(x) = \alpha\}$. Soient $D_1 = \{x \in E \; ; \; f(x) < \alpha\}$ et $D_2 = \{x \in E \; ; \; f(x) > \alpha\}$. Soient $x \in H$ et V un voisinage de 0 dans E. Soit W un voisinage ouvert équilibré de 0 dans E tel que $W + W \subset V$. Comme on a $H \subset \overline{D_1} \cap \overline{D_2}$, alors $(x + W) \cap D_1 \neq \emptyset$ et $(x+W) \cap D_2 \neq \emptyset$, donc $(x+W) \cap D_1$ et $(x+W) \cap D_2$ sont des ouverts non vides de E. Or A est dense dans E, donc il existe $a, b \in A$ tels que $a \in (x+W) \cap D_1$ et $b \in (x+W) \cap D_2$. Soient $y, z \in W$ tels que $a = x + y$ et $b = x + z$. On a $f(a) < \alpha$ et $f(b) > \alpha$ et f est continue, donc il existe $c \in [a, b] \subset A$ tel que $f(c) = \alpha$. Donc il existe $t \in [0, 1]$ tel que $c = ta + (1-t)b \in A$ et $c \in H$. On a $c = ta + (1-t)b = x + ty + (1-t)z \in x + W + W \subset x + V$. Par conséquent, on a $(x + V) \cap A \cap H \neq \emptyset$. Donc $A \cap H$ est dense dans H.

Exercice 9.15. Soit A un sous-ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.

(ii) Il existe un hyperplan affine H de $\mathbb{R}^n$ tel que $A \subset H$.

Solution. Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit H un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ tel que $A \subset H$. Comme on a $\overset{\circ}{H} = \emptyset$, voir proposition 9.1.4, alors $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.
Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Notons d'abord que l'on peut supposer $0 \in A$. On suppose que pour tout hyperplan H de $\mathbb{R}^n$, on a $A \not\subset H$ et on montre qu'alors $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$. Comme pour tout hyperplan H de $\mathbb{R}^n$, on a $A \not\subset H$, alors $\mathrm{Vect}(A) = \mathbb{R}^n$. Donc il existe $a_1, \ldots, a_n \in A$ tels que $\{a_1, \ldots, a_n\}$ soit une base de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe alors un unique $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n t_i a_i$. Comme toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, on peut prendre comme norme sur $\mathbb{R}^n$; $\|x\| = \displaystyle\max_{1 \le i \le n} |t_i|$. Comme $0 \in A$, alors $a = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{2n} a_i = \frac{1}{2} 0 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2n} a_i \in A$. Montrons que la boule ouverte $B\big(a, \frac{1}{2n}\big) \subset A$. Soit $x \in B\big(a, \frac{1}{2n}\big)$. Alors $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n t_i a_i$, avec $\displaystyle\max_{1 \le i \le n} \big|t_i - \frac{1}{2n}\big| = \|a - x\| < \frac{1}{2n}$. Donc, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $t_i > 0$. On a aussi $\displaystyle\Big|\sum_{i=1}^n t_i - \frac{1}{2}\Big| = \Big|\sum_{i=1}^n \big(t_i - \frac{1}{2n}\big)\Big| \le \sum_{i=1}^n \big|t_i - \frac{1}{2n}\big| < \frac{1}{2}$, d'où $0 < \displaystyle\sum_{i=1}^n t_i < 1$. Par conséquent, on a $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n t_i a_i = \Big(1 - \sum_{i=1}^n t_i\Big) 0 + \sum_{i=1}^n t_i a_i \in A$, d'où $B\big(a, \frac{1}{2n}\big) \subset A$. Donc on a bien $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$.

Remarque 9.6.2. Une autre manière d'énoncer le résultat de l'exercice précédent est de dire que si A est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in A$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$.

(ii) $\mathrm{Vect}(A) = \mathbb{R}^n$.

Exercice 9.16. Soient A un sous-ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $x \in \overset{\circ}{A}$.

(ii) Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, il existe $t > 0$ tel que $x + tv \in A$.

(iii) Pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, il existe $t > 0$ tel que $x + t(x - z) \in A$. Autrement dit, pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, il existe $s > 1$ tel que $(1 - s)z + sx \in A$.

Solution. Les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) sont triviales. Montrons l'implications (iii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons donc que pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, il existe $t > 0$ tel que $x + t(x - z) \in A$. Alors $0 \in A - x$ et on a $\mathrm{Vect}(A - x) = \mathbb{R}^n$. Comme $A - x$ est convexe, il résulte de la remarque précédente que l'on a $\overset{\circ}{\overbrace{A - x}} \neq \emptyset$, d'où $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$. Soit $z \in \overset{\circ}{A}$. Alors il existe $t > 0$ tel que $y = x + t(x - z) \in A$. Or on a $x = \frac{1}{1+t}y + \frac{t}{1+t}z \in [z, y[$, d'où $x \in \overset{\circ}{A}$ car $[z, y[\subset \overset{\circ}{A}$, voir proposition 9.1.3.

Exercice 9.17. Soit A un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) A est fermé dans $\mathbb{R}^n$.

(ii) Pour toute droite D de $\mathbb{R}^n$, $A \cap D$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.

Solution. Puisque toute droite D de $\mathbb{R}^n$ est fermée, alors l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est triviale.
Réciproquement, supposons que pour toute droite D de $\mathbb{R}^n$, $A \cap D$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Puisque l'on a $(A - a) \cap D + a = A \cap (D + a)$, on peut supposer que l'on a $0 \in A$. Soit $F = \mathrm{Vect}(A)$. Comme F est fermé dans $\mathbb{R}^n$, car F est sous-espace vectoriel de dimension finie, alors A est fermé dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si A est fermé dans F. Comme aussi toute droite de F est aussi une droite de $\mathbb{R}^n$, on peut aussi supposer que l'on a $\mathrm{Vect}(A) = \mathbb{R}^n$. Il résulte de la remarque 9.6.2 que l'on a $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$. Montrons maintenant que A est fermé dans $\mathbb{R}^n$. Soit $x \in \overline{A}$. Soit $a \in \overset{\circ}{A}$. D'après la proposition 9.1.3, on a $[a, x[\subset \overset{\circ}{A} \subset A \cap D$, où D est la droite passant par les points a est x. Donc on a $x \in [a, x] = \overline{[a, x[} \subset \overline{A \cap D} = A \cap D$, d'où $x \in A$. Par conséquent, on a $\overline{A} \subset A$. Autrement dit, A est fermé dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 9.18. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles convexes d'un espace vectoriel topologique E telle que $\bigcap\limits_{i \in I} \overset{\circ}{A_i} \neq \emptyset$. Montrer que l'on a $\overline{\bigcap\limits_{i \in I} A_i} = \bigcap\limits_{i \in I} \overline{A_i}$.

Solution. On a $\bigcap_{i\in I} A_i \subset \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$ et $\bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$ est fermé dans E, d'où $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subset \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$. Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$ et soit $a \in \bigcap_{i\in I} \overset{\circ}{A_i}$. Pour tout $i \in I$, on a $a \in \overset{\circ}{A_i}$ et $x \in \overline{A_i}$. Il résulte de la proposition 9.1.3 que pour tout $i \in I$, on a $[a,\, x[\, \subset \overset{\circ}{A_i} \subset A_i$, d'où $[a,\, x[\, \subset \bigcap_{i\in I} A_i$, donc on a $x \in \overline{\bigcap_{i\in I} A_i}$. Par conséquent, on a $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$.

Remarque 9.6.3. Soient $A = \big\{(x, 0)\ ;\ x \in \mathbb{R}\big\}$ et $B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ y < 0\big\} \cup \big\{(0, 0)\big\}$. Alors A et B sont des sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}^2$ tels que $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ et $\overset{\circ}{B} \neq \emptyset$ et on a $\overline{A \cap B} = \{(0, 0)\}$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = A$.

Exercice 9.19. Soit A un ensemble convexe fermé d'un espace vectoriel topologique E.

1. Montrer que s'il existe $a \in A$ et un voisinage V de a dans E tel que $A \cap V$ soit compact, alors A est localement compact.

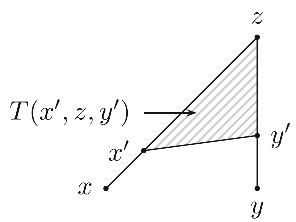
2. En déduire que l'adhérence dans E d'un ensemble convexe localement compact est localement compacte.

Solution. 1. Notons d'abord que l'on peut supposer que V est aussi fermé dans E, voir proposition 9.1.2. On a $(V - a) \cap (A - a) = (V \cap A) - a$ est compact, donc on peut supposer $0 \in A$ et qu'il existe un voisinage fermé V de 0 dans E tel que $A \cap V$ soit compact. Soit $x \in A$. Alors il existe $t \in]0,\, 1]$ tel que $tx \in \overset{\circ}{V}$, d'où $x \in \frac{1}{t}\overset{\circ}{V} \subset \frac{1}{t}V$. Comme A est un convexe contenant 0 et on a $0 < t \leq 1$, alors $tA \subset A$, d'où $V \cap tA \subset V \cap A$. Or $V \cap tA$ est fermé dans E et $V \cap A$ est compact, donc $V \cap tA$ est compact, d'où $(\frac{1}{t}V) \cap A = \frac{1}{t}(V \cap tA)$ est compact. Comme $\frac{1}{t}V$ est un voisinage de x dans E, on en déduit que A est localement compact.
2. Soit B un ensemble convexe localement compact de E. Il s'agit de montrer que $\overline{B}$ est localement compact. Soit $b \in B$. Comme B est localement compact, il existe un voisinage V de b dans E tel que $V \cap B$ soit compact. Comme B est localement compact et B est dense dans $\overline{B}$, il résulte de la proposition 3.4.3 que B est ouvert dans $\overline{B}$. Donc il existe un ouvert U dans E tel que $B = U \cap \overline{B}$. D'où on a $V \cap B = V \cap U \cap \overline{B}$. Comme $V \cap U$ est un voisinage de b dans E, il résulte de 1 que $\overline{B}$ est localement compact.

Exercice 9.20. Soit A un ensemble fermé et connexe d'un espace vectoriel topologique $(E, \mathcal{T})$. On suppose de plus que A est **localement convexe**, *i.e.* pour tout $x \in A$, il existe un voisinage V de x dans E tel que $A \cap V$ soit convexe. Il s'agit de montrer alors que A est convexe.

1. Montrer que deux points quelconques de A peuvent être joints par une ligne brisée contenue dans A. Autrement dit, pour tout $x, y \in A$, il existe $z_1, \ldots, z_n \in A$ tels que $z_1 = x$, $z_n = y$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on ait $[z_i,\, z_{i+1}] \subset A$.

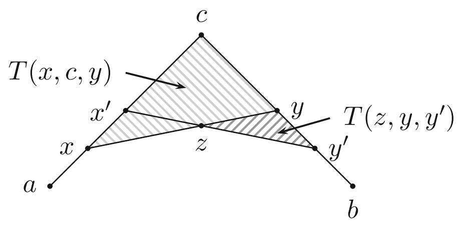
2. Soient $x, y, z \in A$ tels que $x \neq z$, $y \neq z$, $[x,\, z] \subset A$ et $[y,\, z] \subset A$. Montrer qu'il existe $y' \in [y,\, z[$ et $x' \in [x,\, z[$ tels que le triangle $T(x', z, y') = \mathrm{conv}(\{x', z, y'\})$ de sommets x', z et y' soit inclus dans A.



3. Soient $a, b, c \in A$ tels que $[a,\, c] \subset A$ et $[b,\, c] \subset A$. Montrer que $[a,\, b] \subset A$.

4. En déduire que A est convexe.

Solution. 1. Soient $x \in A$ et A_x l'ensemble des points y de A pour lesquels il existe $z_1, \ldots, z_n \in A$ tels que $z_1 = x$, $z_n = y$ et $[z_i,\, z_{i+1}] \subset A$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. L'ensemble A_x est non vide car $x \in A_x$. Montrons que A_x est ouvert dans A. Soit $y \in A_x$, alors il existe un voisinage V de y dans E tel que $V \cap A$ soit convexe. Alors pour tout $z \in V \cap A$, on a $[y,\, z] \subset A$, d'où $V \cap A \subset A_x$, donc A_x est ouvert dans A. Montrons que A_x est fermé (dans A). Soit $z \in \overline{A_x} \subset A$. Soit W un voisinage de z dans E tel que $W \cap A$ soit convexe. On a $W \cap A_x \neq \emptyset$ et $W \cap A_x \subset W \cap A$, on prend $y \in W \cap A_x$, d'où $[y,\, z] \subset A$. Donc on a $z \in A_x$. Par conséquent, A_x est fermé dans A. Puisque A est connexe, alors on a $A_x = A$. Comme ceci est vrai pour tout $x \in A$, on en déduit que pour $x, y \in A$, il existe $z_1, \ldots, z_n \in A$ tels que $z_1 = x$, $z_n = y$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on ait $[z_i,\, z_{i+1}] \subset A$.
2. Soient $x, y, z \in A$ tels que $x \neq z$, $y \neq z$, $[x,\, z] \subset A$ et $[y,\, z] \subset A$. Soit V un voisinage de z dans E tel que $V \cap A$ soit convexe. On a $[x,\, z] = \{(1-t)x + tz \;;\; 0 \leq t \leq 1\}$ et $[y,\, z] = \{(1-t)y + tz \;;\; 0 \leq t \leq 1\}$ et comme les applications $t \longmapsto (1-t)x + tz$ et $t \longmapsto (1-t)y + tz$ sont continues, alors il existe $t_0 \in]0,\, 1[$ tel que pour tout $t \in [t_0,\, 1]$, on ait $x_t = (1-t)x + tz \in V \cap A$ et $y_t = (1-t)y + tz \in V \cap A$. Comme $V \cap A$ est convexe, alors on a $T(x_{t_0}, z, y_{t_0}) \subset A$.
3. Soient $a, b, c \in A$ tels que $[a,\, c] \subset A$ et $[b,\, c] \subset A$. Il s'agit de montrer que l'on a $[a,\, b] \subset A$. On peut supposer $a \neq c$ et $b \neq c$, sinon c'est trivial. Soit X l'ensemble des points $y \in [b,\, c[$ pour lesquels il existe $x \in [a,\, c[$ tel que le triangle $T(x, c, y)$ de sommets x, c et y soit inclus dans A. On veut montrer que $X = [b,\, c[$. Notez d'abord que si $y \in X$, alors on a aussi $[y,\, c[\subset X$. Soit $y \in X$ tel que $y \neq b$. Montrons qu'il existe $y' \in [b,\, y[$ tel que $y' \in X$. Soit $x \in [a,\, c[$ tel que le triangle $T(x, c, y) \subset A$. On a $[x,\, y] \subset A$ et $[b,\, y] \subset A$, d'après 2, il existe $y' \in [b,\, y[$ et il existe $z \in [x,\, y[$ tel que le triangle $T(z, y, y') \subset A$. La droite passant par z et y' coupe le segment $[x\, c[$ en un point x' et on a $T(x', c, y') \subset A$. Donc on a $y' \in X$.



D'après 2, X est non vide et soit $s = \inf\big\{t \in [0,\, 1[\;;\; y_t = (1-t)b + tc \in X\big\}$. Alors pour tout $t \in]s,\, 1[$, on a $y_t \in X$. On va montrer que $y_s \in X$. Soit V un voisinage de y_s dans E tel que $V \cap A$ soit convexe. Soit U un ouvert de E tel que $y_s \in U \subset V$. Comme on a $\lim\limits_{n \to +\infty} y_{s+\frac{1}{n}} = y_s$, alors il existe $n \geq 1$ tel que $y_{s+\frac{1}{n}} \in U \cap A \subset V \cap A$. Soit $x_n \in [a,\, c[$ tel que $T(x_n, c, y_{s+\frac{1}{n}}) \subset A$. Soit $z \in [x_n,\, y_{s+\frac{1}{n}}[$ tel que $z \in V \cap A$. Comme $V \cap A$ est convexe, alors le triangle $T(z, y_{s+\frac{1}{n}}, y_s) \subset V \cap A \subset A$. La droite passant par z et y_s coupe le segment $[x_n,\, c[$ en un point x'. Par conséquent, le triangle $T(x', c, y_s) \subset A$. Donc on a $y_s \in X$. Si $y_s \neq b$, d'après le raisonnement ci-dessus, on peut trouver $y' \in [b,\, y_s[\cap X$, ce qui contredit la définition de y_s, donc on a bien $y_s = b$. Autrement dit, on a $X = [b,\, c[$.

Soit Y l'ensemble des points $x \in [a,\, c[$ tels que le triangle $T(x,c,b) \subset A$. On fait le même type de raisonnement que ci-dessus et on montre qu'alors $Y = [a,\, c[$, donc le triangle $T(a,c,b) \subset A$. En particulier, on a $[a,\, b] \subset A$.
4. Pour montrer que A est convexe, il suffit de combiner 1 et 3.

Exercice 9.21. Soit C un ensemble convexe fermé d'un $\mathbb{R}$-espace localement convexe E. Montrer qu'une partie A de E est contenue dans C si et seulement si pour toute fonction numérique affine continue g dans E telle que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in C$, on a $g(y) \geq 0$ pour tout $y \in A$.
Solution. Il est clair que si $A \subset C$ et si g est une fonction numérique affine continue dans E telle que pour tout $x \in C$, on ait $g(x) \geq 0$, alors on a $g(y) \geq 0$ pour tout $y \in A$. Réciproquement, supposons que pour toute fonction numérique affine continue g dans E telle que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in C$, on ait $g(y) \geq 0$ pour tout $y \in A$. Soit $y \in A$ et supposons que $y \notin C$. D'après le théorème 9.4.1, il existe $f \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(y) < \alpha < f(x)$, pour tout $x \in C$. Soit $g = f - \alpha$, alors g est une fonction numérique affine continue dans E telle que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in C$, mais $g(y) < 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc on a bien $A \subset C$.

Exercice 9.22. Soient C un ensemble convexe fermé d'un espace de Banach $(E,\, \|\ \|)$, $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée d'éléments de C et $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs.

1. Montrer que si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n = 1$ alors la série de terme général $\lambda_n x_n$ est convergente dans $(E,\, \|\ \|)$ et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x_n \in C$.

2. Montrer que si $0 \in C$ et si l'on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \leq 1$ alors la série de terme général $\lambda_n x_n$ est convergente dans $(E,\, \|\ \|)$ et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x_n \in C$.

Solution. 1. Soit $M > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|x_n\| \leq M$, d'où $\|\lambda_n x_n\| \leq M\lambda_n$. Comme la série de terme général λ_n est convergente, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \lambda_n x_n$ est absolument convergente, donc convergente car $(E,\, \|\ \|)$ est un espace de Banach. Pour tout $n \geq 0$, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k$, alors on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x_n$. Comme on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Big(1 - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k\Big) x_{n+1} = 0$ et $S_n + \Big(1 - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k\Big) x_{n+1} \in C$, car C est convexe, on en déduit que l'on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x_n \in \overline{C} = C$.

2. Comme dans 1, la série de terme général $\lambda_n x_n$ est convergente et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x_n =$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Comme $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k x_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k x_k + \Big(1 - \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k\Big) 0 \in C$, alors on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x_n \in \overline{C} = C$.

Exercice 9.23. Soient $U_1, \ldots, U_n$ des ouverts convexes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique $(E, \mathcal{T})$ tels que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i = \emptyset$. Montrer qu'il existe une application linéaire continue $T : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ telle que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} T(U_i) = \emptyset$.

Solution. Soit $U = \big\{(x_1 - x_2, x_1 - x_3, \ldots, x_1 - x_n) \ ; \ x_i \in U_i \text{ et } 1 \le i \le n\big\}$, alors U est un ouvert convexe de E^{n-1} tel que $0 \notin U$. D'après le lemme 9.4.1, il existe une forme linéaire continue f sur E^{n-1} telle que pour tout $z \in U$, on ait $0 = f(0) < f(z)$. Soient $f_1, \ldots, f_{n-1} \in E^*$ telles que pour tout $z = (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in E^{n-1}$, on ait $f(z) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} f_i(z_i)$, d'où on a $\sum\limits_{i=1}^{n-1} f_i(x_1 - x_{i+1}) > 0$ pour tous $x_1 \in U_1$ et $x_{i+1} \in U_{i+1}$, avec $1 \le i \le n-1$. Pour tout $x \in E$, on pose $T(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x))$, alors T est une application linéaire continue de E dans $\mathbb{R}^{n-1}$ telle que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} T(U_i) = \emptyset$.

Exercice 9.24. Soit A un sous-ensemble non vide équilibré d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $\mathrm{conv}(A)$ est aussi équilibré.

Solution. Soient $x \in \mathrm{conv}(A)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \le 1$. D'après la proposition 9.5.1, il existe $a_1, \ldots, a_n \in A$ et $t_1 \ge 0, \ldots, t_n \ge 0$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$ et $x = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i a_i$. D'où on a $\lambda x = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i \lambda a_i$. Puisque A est équilibré, alors $\lambda a_i \in A$, pour tout $1 \le i \le n$, d'où on a $\lambda x \in \mathrm{conv}(A)$. Donc $\mathrm{conv}(A)$ est équilibré.

Exercice 9.25. Soient A et B deux sous-ensembles non vides disjoints convexes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit $x \in E$. Montrer que ou bien $\mathrm{conv}(\{x\} \cup A) \cap B = \emptyset$ ou bien $\mathrm{conv}(\{x\} \cup B) \cap A = \emptyset$.

Solution. D'après le lemme 9.5.1, on a $\mathrm{conv}(\{x\} \cup A) = \big\{tx + (1-t)a \ ; \ 0 \le t \le 1 \text{ et } a \in A\big\}$ et $\mathrm{conv}(\{x\} \cup B) = \big\{sx + (1-s)b \ ; \ 0 \le s \le 1 \text{ et } b \in B\big\}$. Si $\mathrm{conv}(\{x\} \cup A) \cap B \ne \emptyset$ et $\mathrm{conv}(\{x\} \cup B) \cap A \ne \emptyset$, alors il existe $t, s \in]0,\, 1]$ et $a \in A$ et $b \in B$ tels que $tx + (1-t)a \in B$ et $sx + (1-s)b \in A$. Comme A et B sont convexes, alors pour tout $\alpha, \beta \in [0,\, 1]$, on a $\alpha t x + \alpha(1-t)a + (1-\alpha)b \in B$ et $\beta s x + \beta(1-s)b + (1-\beta)a \in A$. Or on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha t & = & \beta s \\ \alpha(1-t) & = & 1-\beta \\ 1-\alpha & = & \beta(1-s) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{s}{s + t(1-s)} \\ \\ \beta = \dfrac{t}{t + s(1-t)} \end{array}\right.$$

donc si on pose $\alpha = \dfrac{s}{s + t(1-s)}$ et $\beta = \dfrac{t}{t + s(1-t)}$, alors $\alpha, \beta \in [0,\, 1]$ et on a :

$$\alpha t x + \alpha(1-t)a + (1-\alpha)b = \beta s x + \beta(1-s)b + (1-\beta)a \in A \cap B\,.$$

Ce qui est impossible. Par conséquent, ou bien $\mathrm{conv}(\{x\} \cup A) \cap B = \emptyset$ ou bien : $\mathrm{conv}(\{x\} \cup B) \cap A = \emptyset$.

Exercice 9.26. Soient A et B deux sous-ensembles disjoints convexes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer qu'il existe dans E deux ensembles convexes disjoints C et D tels que $A \subset C$, $B \subset D$ et $C \cup D = E$.
Solution. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des couples (M, N) où M et N sont des sous-ensembles convexes de E tels que $A \subset M$, $B \subset N$ et $M \cap N = \emptyset$. L'ensemble $\mathscr{E} \neq \emptyset$ car $(A, B) \in \mathscr{E}$. On munit $\mathscr{E}$ de la relation d'ordre suivante :

$$(M, N) \leq (M', N') \iff M \subset M' \text{ et } N \subset N'.$$

On vérifie que $\leq$ est bien une relation d'ordre sur $\mathscr{E}$. Montrons que $\mathscr{E}$ est inductif, *i.e.* toute partie totalement ordonnée de $\mathscr{E}$ possède un majorant. Soit $(M_i, N_i)_{i\in I}$ une partie, indexée par I, totalement ordonnée de $\mathscr{E}$. Alors pour tout $i, j \in I$, soit on a $(M_i, N_i) \leq (M_j, N_j)$, soit on a $(M_j, N_j) \leq (M_i, N_i)$. Soient $M = \underset{i\in I}{\cup} M_i$ et $N = \underset{i\in I}{\cup} N_i$, alors M et N sont des sous-ensembles convexes de E tels que $A \subset M$, $B \subset N$ et $M \cap N = \emptyset$ et pour tout $i \in I$, on a $(M_i, N_i) \leq (M, N)$. Ainsi (M, N) est un majorant dans $\mathscr{E}$ de $(M_i, N_i)_{i\in I}$, donc $\mathscr{E}$ est inductif. Par le lemme de Zorn, voir Appendice A, $\mathscr{E}$ possède un élément maximal (C, D). Supposons $C \cup D \neq E$ et soit $x \in E \setminus (C \cup D)$. D'après l'exercice précédent, ou bien $\mathrm{conv}(\{x\} \cup C) \cap D = \emptyset$ ou bien $C \cap \mathrm{conv}(\{x\} \cup D) = \emptyset$. Ainsi, on trouve un majorant de (C, D) dans $\mathscr{E}$ et différent de (C, D). Ce qui est impossible. Donc on a bien $C \cup D = E$.

Exercice 9.27. Soient $(E, \| \|)$ un espace normé et U un ouvert non vide de E. Montrer que $\mathrm{conv}(U)$ est un ouvert de E.
Solution. Soit $x \in \mathrm{conv}(U)$. D'après la proposition 9.5.1, il existe $x_1, \ldots, x_n \in U$ et $t_1 \geq 0, \ldots, t_n \geq 0$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ et $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$. Puisque U est un ouvert, il existe $r_1 > 0, \ldots, r_n > 0$ tels que $B(x_i, r_i) \subset U$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Soit $r = \inf\limits_{1\leq i\leq n} r_i$, alors $r > 0$. Montrons que l'on a $B(x, r) \subset \mathrm{conv}(U)$. Soit $y \in B(x, r)$. On pose $y_i = x_i + y - x$. Alors on a $y_i \in B(x_i, r) \subset B(x_i, r_i) \subset U$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i y_i$, d'où $y \in \mathrm{conv}(U)$. Donc on a bien $B(x, r) \subset \mathrm{conv}(U)$. Par conséquent, $\mathrm{conv}(U)$ est un ouvert de E.

Remarque 9.6.4. L'enveloppe convexe d'un fermé n'est pas en général fermé. En effet, soit $F = \big\{(x, 0)\ ;\ x \in \mathbb{R}\big\} \cup \big\{(0, 1)\big\}$, alors F est fermé dans $\mathbb{R}^2$, mais $\mathrm{conv}(F) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ 0 \leq y < 1\big\} \cup \big\{(0, 1)\big\}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9.28. Soient $(E, \| \|)$ un espace normé et A un sous-ensemble non vide borné de E. Montrer que le diamètre de $\mathrm{conv}(A)$ est égal au diamètre de A. Autrement dit, on a $\delta(\mathrm{conv}(A)) = \delta(A)$.
Solution. Comme on a $A \subset \mathrm{conv}(A)$, alors on a $\delta(A) \leq \delta(\mathrm{conv}(A))$. Réciproquement, soient $x, y \in \mathrm{conv}(A)$. D'après la proposition 9.5.1, il existe $a_1, \ldots, a_n \in A$ et $t_1 \geq 0, \ldots, t_n \geq 0$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ et $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i a_i$ et il existe $b_1, \ldots, b_m \in A$ et $s_1 \geq$

$0, \ldots, s_m \geq 0$ tels que $\sum_{j=1}^{m} s_j = 1$ et $y = \sum_{j=1}^{m} s_j b_j$. On en déduit que l'on a $x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} t_i s_j a_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} t_i s_j b_j$. D'après l'inégalité triangulaire, on a $\|x - y\| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} t_i s_j \|a_i - b_j\| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} t_i s_j \delta(A) = \delta(A)$. Par conséquent, on a $\delta(\mathrm{conv}(A)) \leq \delta(A)$, d'où $\delta(\mathrm{conv}(A)) = \delta(A)$.

Exercice 9.29 [théorème de Lucas]. Soit $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n$ un polynôme de degré $n \geq 2$ sur $\mathbb{C}$. On note Z_p (*resp.* Z'_p) l'ensemble des zéros de p (*resp.* p'). Montrer que l'on a $Z'_p \subset \mathrm{conv}(Z_p)$.
Solution. On a $P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$, avec $a_n \neq 0$ et $Z_p = \{z_1, \ldots, z_n\}$, où chaque racine est répétée autant des fois que son ordre de multiplicité. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus Z_p$, on a $\dfrac{p'(z)}{p(z)} = \dfrac{1}{z - z_1} + \cdots + \dfrac{1}{z - z_n} = \dfrac{\bar{z} - \bar{z_1}}{|z - z_1|^2} + \cdots + \dfrac{\bar{z} - \bar{z_n}}{|z - z_n|^2}$. Soit $z \in Z'_p$, *i.e.* $p'(z) = 0$. Si $z \in Z_p$, on a rien à démontrer. Supposons que $z \notin Z_p$ et posons $t_i = \dfrac{1}{|z - z_i|^2}$. On déduit de l'égalité précédente que l'on a $z = \dfrac{t_1 z_1 + \cdots + t_n z_n}{t_1 + \cdots + t_n}$, donc $z \in \mathrm{conv}(Z_p)$. Par conséquent, on a $Z'_p \subset \mathrm{conv}(Z_p)$.

Exercice 9.30. Déterminer les points extrémaux du compact $K = \left\{\frac{1}{n} \,;\, n \geq 1\right\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$.
Solution. Pour tout $n \geq 1$, on a $\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}\frac{1}{n} + (1 - \frac{n}{n+1})0$, donc $\frac{1}{n+1}$ n'est pas un point extrémal de K. Soient $x, y \in K$ et $t \in]0, 1[$ tels que $1 = tx + (1 - t)y$. Si $x \neq 1$, alors on a $x \leq \frac{1}{2}$, d'où $1 \leq \frac{t}{2} + (1 - t)y \leq \frac{t}{2} + (1 - t) < 1$, ce qui est impossible, donc on a $x = 1$. Par conséquent, on a $x = y = 1$, donc 1 est un point extrémal de K. Soient $x, y \in K$ et $t \in]0, 1[$ tels que $0 = tx + (1 - t)y$. Comme on a $0 \leq x$ et $0 \leq y$, alors on a $x = y = 0$, donc 0 est un point extrémal de K. Finalement, on a $e(K) = \{0, 1\}$.

Exercice 9.31. Soit K un compact convexe non vide d'un espace préhilbertien $(E, \langle, \rangle)$. D'après le théorème de Krein-Milman, K possède au moins un point extrémal. Sans faire utilisation de ce théorème, montrer que si $x_0 \in K$ tel que $\|x_0\|^2 = \max\left\{\|x\|^2 \,;\, x \in K\right\}$, alors x_0 est un point extrémal de K.
Solution. Supposons que x_0 n'est pas un point extrémal de K, alors il existe $x, y \in K$ tels que $x \neq y$ et $x_0 = \frac{x+y}{2}$. D'après l'identité du parallélogramme, on a :

$$\|x_0\|^2 = \left\|\frac{x + y}{2}\right\|^2 = \tfrac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \tfrac{1}{2}\|x - y\|^2\right).$$

Comme on a $x \neq y$, alors $\|x - y\| > 0$, d'où on a :

$$\|x_0\|^2 < \tfrac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \leq \tfrac{1}{2}\left(\|x_0\|^2 + \|x_0\|^2\right) = \|x_0\|^2,$$

ce qui est impossible. Par conséquent, x_0 est bien un point extrémal de K.

Exercice 9.32. Soit $(E, \langle\, , \rangle)$ un espace préhilbertien. Montrer que l'ensemble des points extrémaux de la boule unité fermée B_E est la sphère unité S_E.

Solution. On déduit de la remarque 9.5.2 que l'on a $e(B_E) \subset S_E$. Réciproquement, soit $x \in S_E$. Montrons que x est un point extrémal de B_E. D'après la proposition 9.5.3, il suffit de montrer que pour tout $y, z \in B_E$ vérifiant $x = \frac{y+z}{2}$, on a $y = z = x$. Soient $y, z \in B_E$ tels que $x = \frac{y+z}{2}$. D'après l'identité du parallélogramme, on a $\|y+z\|^2 = 2\Big(\|y\|^2 + \|z\|^2\Big) - \|y-z\|^2 \leq 4 - \|y-z\|^2$, d'où $\|x\|^2 = \left\|\frac{y+z}{2}\right\|^2 \leq 1 - \left\|\frac{y-z}{2}\right\|^2$. Si $y \neq z$, alors on a $0 < \left\|\frac{y-z}{2}\right\|^2 \leq 1$, d'où $\|x\| < 1$, ce qui est impossible. Donc on a $y = z$, d'où $x = y = z$.

Exercice 9.33. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $U \in \mathscr{L}(H)$ une isométrie. Montrer que U est un point extrémal de la boule unité fermée de $\mathscr{L}(H)$.
Solution. Soient S et T deux opérateurs dans la boule unité fermée de $\mathscr{L}(H)$ et $r \in [0, 1]$ tels que $U = rS + (1-r)T$. Soit $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$. Alors on a $U(x) = rS(x) + (1-r)T(x)$. Comme on a $\|U(x)\| = \|x\| = 1$, $\|S(x)\| \leq 1$ et $\|T(x)\| \leq 1$, on déduit de l'exercice précédent que l'on a $U(x) = S(x) = T(x)$. Par conséquent, on a $U = S = T$. Donc U est un point extrémal de la boule unité fermée de $\mathscr{L}(H)$.

Exercice 9.34. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $P \in \mathscr{L}(H)$ un projecteur orthogonal. Soit $A = \big\{T \in \mathscr{L}(H)\ ;\ \|T\| \leq 1 \text{ et } T \text{ est positif}\big\}$. Montrer que A est une partie convexe de $\mathscr{L}(H)$ et que P est un point extrémal de A.
Solution. Comme la boule unité fermée de $\mathscr{L}(H)$ est convexe et l'ensemble des opérateurs positifs est une partie convexe de $\mathscr{L}(H)$, on en déduit que A est une partie convexe de $\mathscr{L}(H)$. Soient $S, T \in A$ et $r \in [0, 1]$ tels que $P = rS + (1-r)T$. Soit $x \in P(H)$, alors on a $x = P(x) = rS(x) + (1-r)T(x)$. Comme on a $\|S(x)\| \leq \|x\|$ et $\|T(x)\| \leq \|x\|$, on déduit de l'exercice 9.32 que l'on a $x = S(x) = T(x)$. Soit $y \in P(H)^\perp$. Alors on a $0 = \langle P(y), y\rangle = r\langle S(y), y\rangle + (1-r)\langle T(y), y\rangle$. Comme S et T sont des opérateurs positifs, on a $\langle S(y), y\rangle \geq 0$ et $\langle T(y), y\rangle \geq 0$, d'où on a $\langle S(y), y\rangle = \langle T(y), y\rangle = 0$. D'après l'exercice 8.59 du supplément, on a $0 \leq \langle S(y), S(y)\rangle \leq \langle S(y), y\rangle$ et $0 \leq \langle T(y), T(y)\rangle \leq \langle T(y), y\rangle$, donc on a $S(y) = T(y) = 0$. Par conséquent, on a $P = S = T$. Donc P est un point extrémal de A.

Exercice 9.35. Soient X un espace compact et $E = C(X)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions continues sur X et à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$, muni de la norme $\|\ \|_\infty$. Montrer que les points extrémaux de B_E, la boule unité fermée de E, est l'ensemble des fonctions f de E telles que $|f(x)| = 1$, pour tout $x \in X$.
Solution. Soit $f \in E$ telle que pour tout $x \in X$, on ait $|f(x)| = 1$. Soient $t \in]0, 1[$ et $g, h \in B_E$ telles que $f = tg + (1-t)h$. Alors pour tout $x \in X$, on a $|f(x)| = 1$, $|g(x)| \leq 1$, $|h(x)| \leq 1$ et $f(x) = tg(x) + (1-t)h(x)$. On déduit de l'exercice 9.32 que pour tout $x \in X$, on a $f(x) = g(x) = h(x)$. Donc on a $f = g = h$. Par conséquent, f est un point extrémal de B_E.
Réciproquement, soit f un point extrémal de B_E. Supposons qu'il existe $x_0 \in X$ tel que $|f(x_0)| < 1$. D'après le théorème d'Urysohn, théorème 3.6.1, il existe $g \in E$ tel que $g \neq 0$, $f - g \in B_E$ et $f + g \in B_E$. Comme on a $f = \frac{f+g}{2} + \frac{f-g}{2}$, alors f n'est pas un point extrémal de B_E.

Exercice 9.36. Montrer que l'ensemble des points extrémaux de la boule unité fermée de ℓ^∞ est l'ensemble $\big\{x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty\ ;\ |x_n| = 1 \text{ pour tout } n \geq 0\big\}$.

Solution. Soit B la boule unité fermée de ℓ^∞. Alors B est convexe. Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$ tel que $|x_n| = 1$, pour tout $n \geq 0$. Alors on a $x \in B$. Soient $y, z \in B$ tels que $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$. Alors pour tout $n \geq 0$, on a $x_n = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}z_n$. Comme on a $|x_n| = 1$, $|y_n| \leq 1$ et $|z_n| \leq 1$, on déduit de l'exercice 9.32 que pour pour tout $n \geq 0$, on a $x_n = y_n = z_n$. Donc on a $x = y = z$. Par conséquent, x est un point extrémal de B.
Réciproquement, soit x un point extrémal de B. D'après la remarque 9.5.2, on a $\|x\|_\infty = 1$. Soit $n \geq 0$. Si $|x_n| < 1$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x_n| + \varepsilon \leq 1$. Soient $y, z \in B$ définis par $y_p = z_p = x_p$ si $p \neq n$, et $y_n = x_n - \varepsilon$, $z_n = x_n + \varepsilon$. Alors on a $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, $y \neq x$ et $z \neq x$. Ce qui est impossible car x est un point extrémal de B. Donc on a bien $|x_n| = 1$. Par conséquent, pour tout $n \geq 0$, on a $|x_n| = 1$.

Exercice 9.37. Montrer que l'ensemble des points extrémaux de la boule unité fermée de ℓ^1 est l'ensemble $\{\lambda \mathbf{e}_n \ ; \ |\lambda| = 1 \text{ et } n \geq 0\}$.
Solution. Soit B la boule unité fermée de ℓ^1. Alors B est convexe. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| = 1$. Soit $n \geq 0$. Montrons que $\lambda \mathbf{e}_n$ est un point extrémal de B. Soient $y, z \in B$ tels que $\lambda \mathbf{e}_n = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$. Alors pour tout $p \neq n$, on a $0 = \frac{1}{2}y_p + \frac{1}{2}z_p$ et on a $\lambda = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}z_n$. On a $|y_n| \leq \|y\|_1 \leq 1$ et $|z_n| \leq \|z\|_1 \leq 1$, il résulte de l'exercice 9.32 que l'on a $\lambda = y_n = z_n$, d'où $1 = |y_n| = |z_n|$. Comme on a $\|y\|_1 = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} |y_p| \leq 1$ et $\|z\|_1 = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} |z_p| \leq 1$, on en déduit que $y_p = z_p = 0$, pour tout $p \neq n$. Par conséquent, on a $y = z = \lambda \mathbf{e}_n$, donc $\lambda \mathbf{e}_n$ est un point extrémal de B.

Réciproquement, soit x un point extrémal de B. D'après la remarque 9.5.2, on a $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} |x_p| = \|x\|_1 = 1$. Soit $n \geq 0$ tel que $x_n \neq 0$. Si $|x_n| < 1$, alors il existe $q \geq 0$ tel que $q \neq n$ et $0 < |q_n| < 1$. On pose $y_p = z_p = x_p$ si $p \notin \{n, q\}$ et $y_n = (1 + |x_q|)x_n$, $y_q = (1 - |x_n|)x_q$, $z_n = (1 - |x_q|)x_n$ et $z_q = (1 + |x_n|)x_q$. Alors $y = (y_n)_{n\geq 0}$, $z = (z_n)_{n\geq 0} \in B$ tels que $y \neq x$, $z \neq x$ et on a $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$. Ce qui est impossible, car x est un point extrémal de B. Donc on a $|x_n| = 1$, d'où $x_p = 0$, pour tout $p \neq n$. Donc on a bien $x = x_n \mathbf{e}_n$, avec $|x_n| = 1$. Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| = 1$ et il existe $n \geq 0$ tel que $x = \lambda \mathbf{e}_n$.

Remarque 9.6.5. On montrera au chapitre 10, voir propositions 10.3.1 et 10.4.1, que pour tout $p \in]1, +\infty[$, l'ensemble des points extrémaux de la boule unité fermée de ℓ^p est la sphère unité.

Exercice 9.38. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application affine injective. Soient A un sous-ensemble non vide de E et $\xi \in A$.

1. Montrer que si ξ est un point extrémal de A, alors $f(\xi)$ est un point extrémal de $f(A)$.

2. En déduire que si f est de plus bijective, alors ξ est un point extrémal de A si et seulement si $f(\xi)$ est un point extrémal de $f(A)$.

3. Supposons que E et F sont des espaces normés. Soient $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire isométrique et A un sous-ensemble non vide de E. Montrer que l'on a $e(T(A)) = T(e(A))$.

4. Supposons que E est un espace localement convexe et que F est un espace vectoriel

topologique. Soient $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue et C un compact non vide de E. Montrer que l'on a $e(T(C)) \subset T(e(C))$.

Solution. 1. Soient $g : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $z \in F$ tels que pour tout $x \in E$, on ait $f(x) = g(x)+z$. Supposons que ξ un point extrémal de A. Soient $x, y \in f(A)$ et $t \in]0, 1[$ tels que $f(\xi) = (1-t)x + ty$. Soient $a, b \in A$ tels que $x = f(a) = g(a) + z$ et $y = f(b) = g(b)+z$, d'où $f(\xi) = (1-t)g(a)+tg(b)+z = g\big((1-t)a+tb\big)+z = f\big((1-t)a+tb\big)$. Comme f est injective, alors on a $\xi = (1-t)a+tb$. Or ξ est un point extrémal de A, donc on a $\xi = a = b$. Par conséquent, on a $f(\xi) = f(a) = f(b)$, d'où $f(\xi) = x = y$. Autrement dit, $f(\xi)$ est un point extrémal de $f(A)$.
2. Ceci résulte immédiatement de 1.
3. On applique 2 aux espaces normés E et $T(E)$.
4. Soit $\eta \in e(T(C))$. Comme T est continue, alors $K = C \cap T^{-1}(\{\eta\})$ est un compact non vide de E. D'après le théorème 9.5.2, $e(K) \neq \emptyset$. Soit $a \in e(K)$. Alors on a $T(a) = \eta$. Montrons que $a \in e(C)$. Soient $x, y \in C$ et $t \in]0, 1[$ tels que $a = (1-t)x + ty$, d'où $\eta = T(a) = (1-t)T(x) + tT(y)$. Comme η est un point extrémal de $T(C)$, alors on a $\eta = T(x) = T(y)$, d'où $x, y \in K$. Par conséquent, on a $a = x = y$, car a est un point extrémal de K. Donc a est bien un point extrémal de C. Donc on a bien $e(T(C)) \subset T(e(C))$.

Exercice 9.39. Soit $n \geq 2$.

1. Déterminer les points extrémaux des boules unités fermées de $\mathbb{R}^n$ pour les normes $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$.
2. Existe-t-il des isométries surjectives entre $(\mathbb{R}^n, \| \|_1)$, $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ et $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$?

Solution. 1. On désigne respectivement par B_1, B_2 et B_∞ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ pour la norme $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$. D'après l'exercice 9.32, on a :

$$e(B_2) = \mathrm{Fr}(B_2) = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\big\}.$$

On montre comme dans les exercices 9.40 et 9.41 que l'on a :

$$e(B_1) = \big\{\lambda \mathbf{e}_i \ ; \ 1 \leq i \leq n \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \ ; \ |\lambda| = 1\big\}$$

et

$$e(B_\infty) = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ |x_1| = \cdots = |x_n| = 1\big\}.$$

2. Supposons qu'il existe une isométrie surjective de $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ sur $(\mathbb{R}^n, \| \|_1)$. D'après l'exercice 6.78 du supplément, il existe alors une isométrie linéaire surjective g de $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ sur $(\mathbb{R}^n, \| \|_1)$. Alors on a $g(B_2) = B_1$ et $g(\mathrm{Fr}(B_2)) = \mathrm{Fr}(B_1) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ |x_1| + \cdots + |x_n| = 1\}$. D'après l'exercice précédent, on a $e(B_1) = g(e(B_2)) = g(\mathrm{Fr}(B_2)) = \mathrm{Fr}(B_1)$, ce qui est impossible d'après 1. Donc il n'existe pas d'isométrie surjective de $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ sur $(\mathbb{R}^n, \| \|_1)$. De même, comme on a $e(B_\infty) \neq \mathrm{Fr}(B_\infty)$, alors il n'y a pas d'isométrie surjective de $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ sur $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$.
Notons que l'application $(x, y) \longmapsto \frac{1}{2}(x + y, -x + y)$ est une isométrie linéaire surjective de $(\mathbb{R}^2, \| \|_\infty)$ sur $(\mathbb{R}^2, \| \|_1)$.

Exercice 9.40. Soient $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 0, -1)$ et $K = \{u, v\} \cup \{(\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \ ; \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \subset \mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathrm{conv}(K)$, l'enveloppe convexe de K, est compact mais que

l'ensemble des points extrémaux de $\mathrm{conv}(K)$ n'est pas compact.
Solution. Puisque K est compact, on déduit de la proposition 9.5.2 que $\mathrm{conv}(K)$ est compact. On déduit aussi du corollaire 9.5.4 que les points extrémaux de $\mathrm{conv}(K)$ appartiennent à K. Soit $A = \{(x, y, 0)\ ;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Comme on a : $A = \mathrm{conv}(\{(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)\ ;\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\})$, alors $\mathrm{conv}(K) = \mathrm{conv}\big(\{u\} \cup \{v\} \cup A\big)$. D'après le lemme 9.5.1, on a alors :

$$\mathrm{conv}(K) = \big\{t_1u+t_2v+t_3(x,y,0)\ ;\ x^2+y^2 \leq 1,\, t_1 \geq 0,\, t_2 \geq 0,\, t_3 \geq 0,\, t_1+t_2+t_3 = 1\big\}.$$

Comme on a $\mathrm{conv}(K) \setminus \{u\} =$ $\big\{t_1u + t_2v + t_3(x, y, 0)\ ;\ x^2 + y^2 \leq 1,\, 1 > t_1 \geq 0,\, t_2 \geq 0,\, t_3 \geq 0,\, t_1 + t_2 + t_3 = 1\big\}$. Alors $\mathrm{conv}(K)\setminus\{u\}$ est convexe. On déduit de la proposition 9.5.3 que u est un point extrémal de $\mathrm{conv}(K)$. De même, on a $\mathrm{conv}(K) \setminus \{v\} =$ $\big\{t_1u + t_2v + t_3(x, y, 0)\ ;\ x^2 + y^2 \leq 1,\, t_1 \geq 0,\, 1 > t_2 \geq 0,\, t_3 \geq 0,\, t_1 + t_2 + t_3 = 1\big\}$. Alors $\mathrm{conv}(K) \setminus \{v\}$ est convexe. Donc v est un point extrémal de $\mathrm{conv}(K)$. On a $(1, 0, 0) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$, donc $(1, 0, 0)$ n'est pas un point extrémal de $\mathrm{conv}(K)$. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Montrons que $(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ est un point extrémal de $\mathrm{conv}(K)$. Soient $a = t_1u + t_2v + t_3(x, y, 0), b = s_1u + s_2v + s_3(x', y', 0)$, avec $x^2 + y^2 \leq 1$, $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$, $t_3 \geq 0$, $t_1 + t_2 + t_3 = 1$, $x'^2 + y'^2 \leq 1$, $s_1 \geq 0$, $s_2 \geq 0$, $s_3 \geq 0$, $s_1 + s_2 + s_3 = 1$, tels que $(\cos(\theta), \sin(\theta), 0) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$. Alors on a $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\big(t_1 + s_1 + t_2 + s_2\big) + \frac{1}{2}t_3x + \frac{1}{2}s_3x'$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{2}t_3y + \frac{1}{2}s_3y'$. D'où on a $e^{i\theta} = \frac{1}{2}\big(t_1 + s_1 + t_2 + s_2\big) + \frac{1}{2}t_3(x + iy) + \frac{1}{2}s_3(x' + iy')$, avec $\frac{1}{2}(t_1 + s_1 + t_2 + s_2) + \frac{1}{2}t_3 + \frac{1}{2}s_3 = 1$. Comme $x + iy$, $x' + iy'$ et 1 sont dans la boule unité fermée de $\mathbb{C}$ et $e^{i\theta}$ est un point extrémal de cette boule, voir exercice 9.32, on déduit du corollaire 9.5.2 que si $\frac{1}{2}(t_1 + s_1 + t_2 + s_2) \neq 0$, alors $e^{i\theta} = 1$, ce qui est impossible. Donc on a $\frac{1}{2}(t_1 + s_1 + t_2 + s_2) = 0$, d'où $t_1 = s_1 = t_2 = s_2 = 0$ et $t_3 = s_3 = 1$. On applique encore une fois le corollaire 9.5.2, on obtient $e^{i\theta} = x + iy$ et $e^{i\theta} = x' + iy'$, d'où on a $x = \cos(\theta) = x'$ et $y = \sin(\theta) = y'$. Par conséquent, on a $a = b = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$. Donc $(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ est un point extrémal de $\mathrm{conv}(K)$. Finalement, on a $e(\mathrm{conv}(K)) = \{u, v\}\cup\{(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)\ ;\ 0 < \theta < 2\pi\} = K\setminus\{(1, 0, 0)\}$, donc $e(\mathrm{conv}(K))$ n'est pas compact.

Exercice 9.41. Soit K un sous-ensemble non vide, compact et convexe de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'ensemble des points extrémaux de K est compact.
Solution. On va montrer que $K \setminus e(K)$ est ouvert dans K. Soit $a \in K \setminus e(K)$. Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \cap K \subset K \setminus e(K)$. Comme $\overset{\circ}{K}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et on a $\overset{\circ}{K} \subset K \setminus e(K)$, par la remarque 9.5.2, on peut supposer que $a \notin \overset{\circ}{K}$. Comme $a \notin e(K)$, alors il existe $x, y \in K$ tels que $x \neq y$, $x \neq a$, $y \neq a$ et $a = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$. Vérifions que K se trouve dans un seul coté de la droite D passant par x et y. S'il existe $z, z' \in K$ tels que z et z' se trouvent de manière opposée par rapport à la droite D, on considère alors les deux triangles T_z de sommets x, y et z et $T_{z'}$ de sommets x, y et z'. Comme K est convexe, alors on a $T_z \cup T_{z'} \subset K$ et $a \in \overset{\circ}{\overbrace{T_z \cup T_{z'}}}$, d'où $a \in \overset{\circ}{K}$, ce qui est impossible car on avait supposé que $a \notin \overset{\circ}{K}$. Donc K se trouve bien dans un seul coté de la droite D. Si $K \subset D$ et si $\varepsilon = \|a - x\|$, alors $\varepsilon > 0$ et on a $B(a, \varepsilon) \cap K =]x, y[\subset K \setminus e(K)$. Supposons maintenant que $K \not\subset D$. Alors il existe $z \in K$ tel que $z \notin D$. Comme K est convexe, alors le triangle T_z de sommets x, y et z est inclus dans K. Soit z' la symétrie de z par rapport au point a, autrement dit, on a $z' = 2a - z$ et soit $T_{z'}$ le triangle de

sommets x, y et z'. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset \overbrace{T_z \cup T_{z'}}^{\circ}$. Par conséquent, on a $B(a, \varepsilon) \cap K \subset \overset{\circ}{T_z} \cup]x, y[\subset K \setminus e(K)$. Donc $K \setminus e(K)$ est bien ouvert dans K.

Exercice 9.42. Soit $(e_n)_{n \geq 1}$ une famille orthonormale dans un espace de Hilbert $(H, \langle\ ,\ \rangle)$. Soit K l'ensemble des vecteurs 0 et $\frac{1}{n} e_n$, $n \geq 1$.

1. Montrer que K est compact.

2. Montrer que $\mathrm{conv}(K)$ est bornée mais n'est pas fermée.

3. Trouver tous les points extrémaux de $\overline{\mathrm{conv}}(K)$.

Solution. 1. Comme on a $\left\|\frac{1}{n} e_n\right\| = \frac{1}{n}$, alors la suite $\left(\frac{1}{n} e_n\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0 dans H, donc K est compact.
2. Soit B la boule unité fermée de H. Comme B est convexe et $K \subset B$, alors on a $\mathrm{conv}(K) \subset B$, donc $\mathrm{conv}(K)$ est bornée. Vérifions que l'on a :

$$\mathrm{conv}(K) = \Big\{ \sum_{p=1}^{n} \frac{t_p}{p} e_p \ ;\ n \geq 1,\ t_1 \geq 0, \ldots, t_n \geq 0 \text{ et } \sum_{p=1}^{n} t_p \leq 1 \Big\}.$$

En effet, on a $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{t_p}{p} e_p = \sum_{p=1}^{n} \frac{t_p}{p} e_p + \big(1 - \sum_{p=1}^{n} t_p\big) 0 \in \mathrm{conv}(K)$, voir proposition 9.5.1. Il est clair aussi que l'ensemble $\Big\{ \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{t_p}{p} e_p \ ;\ n \geq 1,\ t_1 \geq 0, \ldots, t_n \geq 0 \text{ et } \sum_{p=1}^{n} t_p \leq 1 \Big\}$ est convexe, donc on a $\mathrm{conv}(K) = \Big\{ \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{t_p}{p} e_p \ ;\ n \geq 1,\ t_1 \geq 0, \ldots, t_n \geq 0 \text{ et } \sum_{p=1}^{n} t_p \leq 1 \Big\}$.
Montrons maintenant que $\mathrm{conv}(K)$ n'est pas fermée. On a $\|\frac{1}{2^p p} e_p\| = \frac{1}{2^p p}$, donc la série $\displaystyle\sum_{p \geq 1} \frac{1}{2^p p} e_p$ est convergente dans H. Soit $x = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2^p p} e_p$. On a $x = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2^p p} e_p$ et pour tout $n \geq 1$, on a $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2^p} \leq 1$, donc $x \in \overline{\mathrm{conv}(K)}$ et pour tout $p \geq 1$, on a $\langle x, e_p \rangle = \frac{1}{2^p p} \neq 0$. Si $x \in \mathrm{conv}(K)$, alors il existe $n \geq 1$ et $t_1 \geq 0, \ldots, t_n \geq 0$ tels que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} t_p \leq 1$ et $x = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{t_p}{p} e_p$, d'où pour tout $p > n$, on a $\langle x, e_p \rangle = 0$, ce qui est impossible, donc $x \notin \mathrm{conv}(K)$. Par conséquent, $\mathrm{conv}(K)$ n'est pas fermée.
3. Puisque H est un espace de Fréchet, d'après le corollaire 9.5.4, tous les points extrémaux de $\overline{\mathrm{conv}}(K)$ appartiennent à K. Soit $n \geq 1$. Notons d'abord que pour tout $x \in \mathrm{conv}(K)$, on a $0 \leq \langle x, e_n \rangle \leq \frac{1}{n}$. Par conséquent, pour tout $x \in \overline{\mathrm{conv}}(K) = \overline{\mathrm{conv}(K)}$, on a $0 \leq \langle x, e_n \rangle \leq \frac{1}{n}$. Notons aussi que l'on a $\overline{\mathrm{conv}}(K) \subset \overline{\mathrm{Vect}(\{e_p \ ;\ p \geq 1\})} = H'$ et que $(e_p)_{p \geq 1}$ est une base hilbertienne de l'espace de Hilbert H'. Donc pour tout $x \in \overline{\mathrm{conv}}(K)$, on a $x = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \langle x, e_p \rangle e_p$. Soient $n \geq 1$ et $x, y \in \overline{\mathrm{conv}}(K)$ tels que $\frac{1}{n} e_n = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} y$. Alors

on a $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\langle x, e_n\rangle + \frac{1}{2}\langle y, e_n\rangle$, avec $0 \le \langle x, e_n\rangle \le \frac{1}{n}$ et $0 \le \langle y, e_n\rangle \le \frac{1}{n}$, donc on a $\langle x, e_n\rangle = \langle y, e_n\rangle = \frac{1}{n}$. Pour tout $p \neq n$, on a aussi $0 = \frac{1}{2}\langle x, e_p\rangle + \frac{1}{2}\langle y, e_p\rangle$, avec $0 \le \langle x, e_p\rangle$ et $0 \le \langle y, e_p\rangle$, donc on a $\langle x, e_p\rangle = \langle y, e_p\rangle = 0$. Par conséquent, on a $x = y = \frac{1}{n}e_n$, donc $\frac{1}{n}e_n$ est un point extrémal de $\overline{\mathrm{conv}}(K)$. De même, si $x, y \in \overline{\mathrm{conv}}(K)$ tels que $0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$, alors pour tout $p \ge 1$, on a $\langle x, e_p\rangle = \langle y, e_p\rangle = 0$. Donc on a $x = y = 0$, d'où 0 est un point extrémal de $\overline{\mathrm{conv}}(K)$. Par conséquent, K est l'ensemble des points extrémaux de $\overline{\mathrm{conv}}(K)$.

Exercice 9.43. Soit $p \in]0,\, 1[$. Il s'agit de montrer que l'espace vectoriel topologique $(\ell_p,\, d)$, voir exercice 9.6, contient un compact K dont l'enveloppe convexe n'est pas bornée. Pour tout $n \ge 1$, soient $\xi_n = \frac{1}{n^{1-p}}\mathbf{e}_n$ et $\eta_n = \frac{1}{n}(\xi_1 + \cdots + \xi_n)$. Soit K l'ensemble des vecteurs 0 et ξ_n, $n \ge 1$. Vérifier que K est compact et que la suite $(\eta_n)_{n\ge 1}$ n'est pas bornée dans ℓ_p.

Solution. On a $d(\xi_n, 0) = \frac{1}{n^{p-p^2}}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\xi_n, 0) = 0$. Donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n = 0$ dans $(\ell_p,\, d)$. Par conséquent, K est compact. D'autre part, on a $\eta_n \in \mathrm{conv}(K)$ et

$$d(\eta_n, 0) = \frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{p-p^2}} \ge \frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^{p-p^2}} = n^{1-2p+p^2} = n^{(1-p)^2}\,.$$

Donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\eta_n, 0) = +\infty$. Par conséquent, la suite $(\eta_n)_{n\ge1}$ n'est pas bornée dans ℓ_p.

Exercice 9.44. Soient E un espace vectoriel topologique et K un compact convexe non vide de E. Montrer que l'on a $K = \mathrm{conv}(\mathrm{Fr}(K))$.

Solution. Puisque K est convexe et on a $\mathrm{Fr}(K) \subset K$, alors on a $\mathrm{conv}(\mathrm{Fr}(K)) \subset K$. Réciproquement, soient $x \in K$ et D une droite quelconque passant par x, par exemple $D = \{tx\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$. Alors $D \cap K$ est compact et convexe, donc il existe $y, z \in K$ tels que $D \cap K = [y,\, z]$, d'où $y, z \in \mathrm{Fr}(K)$ et on a $x \in \mathrm{conv}(\{y, z\}) \subset \mathrm{conv}(\mathrm{Fr}(K))$. Par conséquent, on a $K = \mathrm{conv}(\mathrm{Fr}(K))$.

Pour plus d'exercices, voir le supplément associé à ce livre.

Chapitre 10

TOPOLOGIES FAIBLE ET $*$-FAIBLE

Rappelons d'abord certains résultats concernant la topologie initiale, voir chapitre 1. Soient X un ensemble, $(Y_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour chaque $i \in I$, soit $f_i : X \longrightarrow Y_i$, une application. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des intersections finies d'ensembles de la forme $f_i^{-1}(U_i)$, où $i \in I$ et U_i ouvert de Y_i. Alors $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts d'une topologie $\mathcal{T}$ sur X, appelée **topologie initiale** associée à la famille $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in I}$. La topologie $\mathcal{T}$ est aussi appelée la **$\mathcal{F}$-topologie**. En fait, $\mathcal{T}$ est la topologie la moins fine sur X rendant continue toutes les applications f_i. Notons que si la famille $\mathcal{F}$ est constituée d'une seule application $f : X \longrightarrow Y$, alors la topologie initiale associée à f est tout simplement $\mathcal{T} = \big\{ f^{-1}(U) \,;\, U \text{ ouvert de } Y \big\}$.
La $\mathcal{F}$-topologie possède les propriétés suivantes.

- Étant donné un point $x \in X$, on obtient une base de voisinages de x pour la $\mathcal{F}$-topologie en considérant les ensembles de la forme $\underset{i \in J}{\cap} f_i^{-1}(V_i)$, où V_i est un voisinage de $f_i(x)$ dans Y_i et J est un sous-ensemble fini de I.
- Si $g : E \longrightarrow X$ est une application d'un espace topologique E dans l'espace X muni de la $\mathcal{F}$-topologie, alors g est continue en un point $a \in E$, si et seulement si, pour tout $i \in I$, $f_i \circ g$ est continue en a.
- Si pour tout $i \in I$, l'espace topologique $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ est séparé et si la famille $(f_i)_{i \in I}$ est séparante, *i.e.* pour tout $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $i \in I$ tel que $f_i(x) \neq f_i(y)$, alors X muni de la $\mathcal{F}$-topologie est séparé.
- Soient $x \in X$ et $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite dans X. Alors $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers x pour la $\mathcal{F}$-topologie si et seulement si, pour tout $i \in I$, la suite $(f_i(x_n))_{n \geq 0}$ converge vers $f_i(x)$ dans $(Y_i, \mathcal{T}_i)$.
- Soient $x \in X$ et $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille filtrante croissante dans X. Alors $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge vers x dans X pour la $\mathcal{F}$-topologie si et seulement si, pour tout $i \in I$, la famille filtrante croissante $(f_i(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ converge vers $f_i(x)$ dans $(Y_i, \mathcal{T}_i)$.

Rappelons aussi que si $(E, \| \, \|)$ est un espace normé, alors la boule unité fermée de E est $B_E = \big\{ x \in E \,;\, \|x\| \leq 1 \big\}$, et la sphère unité de E est $S_E = \big\{ x \in E \,;\, \|x\| = 1 \big\}$.

10.1 Dualité dans les espaces vectoriels topologiques

On se donne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un sous-espace vectoriel F de son dual algébrique E', et on souhaite étudier les propriétés des topologies $\mathcal{T}$ sur E, qui font de E un espace localement convexe dont le dual topologique est F. On supposera toujours que F sépare les points de E ; autrement dit, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe $f \in F$ tel que $f(x) \neq 0$. On suppose cette hypothèse parce que l'on souhaite que l'espace topologique $(E, \mathcal{T})$ soit séparé, voir lemme 1.5.1.

Définition 10.1.1. On appelle **système dual** un pair (E, F) de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, où F est un sous-espace vectoriel de E', le dual algébrique de E, séparant les éléments de E.

Exemple 10.1.1. Soient E un espace vectoriel et E' son dual algébrique, alors (E, E') est un système dual.

Exemple 10.1.2. Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace localement convexe et $F = E^*$ son dual topologique, alors (E, F) est un système dual, voir corollaire 9.4.1.

Définition 10.1.2. Soit (E, F) un système dual. On appelle **topologie faible** sur E définie par F, et l'on note $\sigma(E, F)$, la topologie initiale sur E associée aux formes linéaires $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ lorsque f parcourt F.

Soit (E, F) un système dual. Alors l'application canonique

$$J : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F' \\ x & \longmapsto & J(x) \end{array}$$

où $J(x)(f) = f(x)$, pour tous $x \in E$ et $f \in F$, est linéaire et injective. Donc on peut identifier E au sous-espace vectoriel $J(E)$ de F'. Il est aussi clair que $J(E)$ sépare les points de F. Par conséquent, on peut toujours voir de manière canonique (F, E) comme un système dual. On définit alors de la même manière la **topologie faible** $\sigma(F, E)$ sur F ; c'est la topologie initiale associée aux formes linéaires $J(x) : F \longrightarrow \mathbb{K}$ lorsque x parcourt E. Autrement dit, on pose par définition $\sigma(F, E) = \sigma(F, J(E))$.

On emploiera parfois l'adjectif « faible » et l'adverbe « faiblement » pour désigner des propriétés relatives à la topologie faible, lorsqu'il ne pourra en résulter de confusions. On parlera par exemple de partie faiblement ouverte ou faiblement fermée dans E, de suite faiblement convergente, de convergence faible, de fonction faiblement continue, etc.

Théorème 10.1.1. *Soit (E, F) un système dual.*

1. *L'espace vectoriel E muni de la topologie faible $\sigma(E, F)$ est un espace localement convexe.*

2. *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire. On munit E de la topologie faible $\sigma(E, F)$. Alors f est continue si et seulement si $f \in F$. Autrement dit, le dual topologique de E, muni de la topologie faible $\sigma(E, F)$, est F.*

3. *L'espace vectoriel F muni de la topologie faible $\sigma(F, E)$ est un espace localement convexe.*

4. *Soit $\Lambda : F \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire. On munit F de la topologie faible $\sigma(F, E)$. Alors Λ est continue si et seulement si il existe $x \in E$ tel que $\Lambda(g) = g(x)$, pour tout $g \in F$. Autrement dit, le dual topologique de F, muni de la topologie faible $\sigma(F, E)$, est E.*

Démonstration. Les propriétés 1 et 3 résultent du lemme 9.2.2.
2. D'après la définition de la topologie faible $\sigma(E, F)$, si $f \in F$, alors f est continue. Réciproquement, supposons que f est continue quand on munit E de la topologie faible $\sigma(E, F)$. Alors il existe un voisinage ouvert V de 0 dans $(E, \sigma(E, F))$ tel que pour tout $x \in V$, on ait $|f(x)| < 1$. D'après la définition de la topologie $\sigma(E, F)$, il existe $\eta > 0$ et $f_1, \dots, f_n \in F$ tels que $\{x \in E \ ; \ |f_i(x)| < \eta \text{ , pour tout } 1 \leq i \leq n\} \subset V$. Montrons que pour tout $x \in E$, on a alors $|f(x)| \leq \frac{1}{\eta} \max\limits_{1 \leq i \leq n} |f_i(x)|$. Soit $x \in E$. Si $|f(x)| > \frac{1}{\eta} \max\limits_{1 \leq i \leq n} |f_i(x)|$, on pose $z = \dfrac{x}{f(x)}$, alors $|f(z)| = 1$ et pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $|f_i(z)| < \eta$. D'où on a $z \in V$ et $|f(z)| = 1$, ce qui est impossible. Donc, pour tout $x \in E$, on a $|f(x)| \leq \frac{1}{\eta} \max\limits_{1 \leq i \leq n} |f_i(x)|$. D'après le lemme 7.8.2, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tels que $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$, d'où $f \in F$.
4. Ceci résulte de la défintion de la topologie faible $\sigma(F, E)$ sur F et de 2. ∎

Remarque 10.1.1. Soit $(E,\, F)$ un système dual.

1. Soit $\mathbb{K}^F$ l'espace vectoriel des applications de F dans $\mathbb{K}$ muni de la topologie produit ou de la topologie de la convergence simple, voir remarque 5.1.1. On déduit de la remarque 1.4.7 que la topologie faible $\sigma(E, F)$ sur E est la topologie image réciproque sur E associée à l'application linéaire injective suivante.
$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^F \\ x & \longmapsto & (f(x))_{f \in F} \end{array}$$
2. De même, soit $\mathbb{K}^E$ l'espace vectoriel des applications de E dans $\mathbb{K}$ muni de la topologie produit ou de la topologie de la convergence simple. Alors la topologie faible $\sigma(F, E)$ sur F est la topologie image réciproque sur F associée à l'application linéaire injective suivante.
$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{K}^E \\ f & \longmapsto & (f(x))_{x \in E} \end{array}$$
Autrement dit, on a $F \subset \mathbb{K}^E$ et la topologie faible $\sigma(F, E)$ sur F est la topologie induite sur F par la topologie de la convergence simple sur $\mathbb{K}^E$.

On déduit des remarques 9.2.5 et 9.2.7, la remarque suivante :

Remarque 10.1.2. Soit $(E,\, F)$ un système dual.

1. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies non vides de F. Pour tout $B \in \mathcal{F}$, on pose $P_B(x) = \max\limits_{f \in B} |f(x)|$, pour tout $x \in E$. Alors $(P_B)_{B \in \mathcal{F}}$ est une famille séparante de semi-normes sur E dont la topologie associée est la topologie faible $\sigma(E, F)$.

2. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties finies non vides de E. Pour tout $A \in \mathcal{E}$, on pose $P_A(f) = \max\limits_{x \in A} |f(x)|$, pour tout $f \in F$. Alors $(P_A)_{A\in\mathcal{E}}$ est une famille séparante de semi-normes sur F dont la topologie associée est la topologie faible $\sigma(F, E)$.

Remarque 10.1.3. Soit $(E,\, F)$ un système dual.

1. Soit $x_0 \in E$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute famille finie $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de F, soit :
$$V(x_0, f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) = \left\{x \in E \;;\; |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon \text{ , pour tout } 1 \leq i \leq n\right\}.$$
Alors les $V(x_0, f_1, \ldots, f_n, \varepsilon)$, où ε, n et les f_i arbitraires, forment une base de voisinages ouverts convexes et équilibrés de x_0 pour la topologie $\sigma(E, F)$ sur E.

2. Les ensembles de la forme $\left\{x \in E \;;\; |f_i(x)| \leq 1 \text{ , pour tout } 1 \leq i \leq n\right\}$, où $n \geq 1$ et $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est une famille finie quelconque de F, est une base locale pour l'espace vectoriel topologique $(E,\, \sigma(E, F))$.

3. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans E et $x \in E$. Alors $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x pour la topologie faible si et seulement si pour tout $f \in F$, $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$ dans le corps $\mathbb{K}$.

4. Soit $f_0 \in F$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute famille finie $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de E, soit :
$$V(f_0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \left\{f \in F \;;\; |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon \text{ , pour tout } 1 \leq i \leq n\right\}.$$
Alors les $V(f_0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)$, où ε, n et les x_i arbitraires, forment une base de voisinages ouverts convexes et équilibrés de f_0 pour la topologie faible $\sigma(F, E)$ sur F.

5. Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans F et $f \in F$. Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f pour la topologie faible $\sigma(F, E)$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$ dans le corps $\mathbb{K}$.

Définition 10.1.3. Soient $(E,\, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et E^* son dual topologique. On suppose que E^* sépare les points de E.

1. La **topologie faible** ou la w**-topologie** sur E est la topologie $\sigma(E, E^*)$ sur E. Autrement dit, la topologie faible sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continue toutes les applications $f \in E^*$.

2. La **topologie $*$-faible** ou la w^***-topologie** sur E^* est la topologie $\sigma(E^*, E)$ sur E^*. Autrement dit, la topologie $*$-faible sur E^* est la topologie la moins fine sur E^* rendant continue toutes les formes linéaires $J(x) \,:\, E^* \longrightarrow \mathbb{K}$, lorsque x parcourt E, où $J(x)(f) = f(x)$, pour tout $f \in E^*$.

Remarque 10.1.4. Soit $(E,\, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique tel que E^* sépare les points de E.

1. Puisque chaque $f \in E^*$ est, par définition, continue lorsque l'on munit E de la topologie $\mathcal{T}$, alors la topologie faible est moins fine que la topologie $\mathcal{T}$. Autrement dit, tout ouvert de E pour la topologie faible est aussi ouvert de E pour la topologie $\mathcal{T}$.

2. La topologie $\mathcal{T}$ « intervient peu » dans la définition des topologies $\sigma(E, E^*)$ et $\sigma(E^*, E)$. En fait, on a besoin de la topologie $\mathcal{T}$ juste pour avoir notre espace vectoriel E^*.

Remarque 10.1.5. Soient $(E, \| \|)$ un $\mathbb{K}$-espace normé, E^* son dual topologique et E^{**} son bidual topologique.

1. Il est clair que la topologie $\sigma(E^*, E)$ sur E^* est moins fine que la topologie $\sigma(E^*, E^{**})$ qui est à son tour moins fine que la topologie normique sur E^*.

2. D'après la proposition 7.9.1, l'application canonique

$$J : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^{**} \\ x & \longmapsto & J(x) \end{array}$$

où $J(x)(f) = f(x)$, pour tous $x \in E$ et $f \in E^*$, est linéaire et isométrique. Ainsi, on identifie E à un sous-espace normé de son bidual E^{**}. Pour tous $x_0 \in E$, $f_1, \ldots, f_n \in E^*$ et $\varepsilon > 0$, on a $J(V(x_0, f_1, \ldots, f_n, \varepsilon)) = V(J(x_0), f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) \cap J(E)$. Par conséquent, en identifiant E à $J(E)$, la topologie induite sur $J(E)$ par la topologie $*$-faible sur E^{**} est égale à la topologie faible sur $J(E)$.

On déduit du théorème 9.4.5 et du théorème 10.1.1 le théorème suivant.

Théorème 10.1.2. *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace localement convexe et C un ensemble convexe de E. Alors l'adhérence de C dans $(E, \mathcal{T})$ coïncide avec l'adhérence de C dans E muni de la topologie faible. En particulier, C est fermé dans $(E, \mathcal{T})$ si et seulement si C est fermé dans E muni de la topologie faible.*

Corollaire 10.1.1. *Soient $(E, \| \|)$ un espace normé et $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite dans E qui converge faiblement vers un $x \in E$. Alors il existe une suite $(y_n)_{n \geq 0}$ dans $\overline{\mathrm{conv}}(\{x_n \ ; \ n \geq 0\})$ qui converge vers x pour la norme. Autrement dit, si $(x_n)_{n \geq 0}$ converge faiblement vers x, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t_1 \geq 0, \ldots, t_p \geq 0$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} t_i = 1$ et $\displaystyle\left\| x - \sum_{i=1}^{p} t_i x_i \right\| < \varepsilon$.*

Démonstration. Soit $C = \overline{\mathrm{conv}}(\{x_n \ ; \ n \geq 0\})$, alors C est convexe et fermé dans $(E, \| \|)$. D'après le théorème précédent, on a $\overline{C}^w = C$, où $\overline{C}^w$ désigne l'adhérence de C pour la topologie faible. Or $x \in \overline{C}^w$, d'où on a $x \in C$. On déduit de la proposition 9.5.1 que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t_1 \geq 0, \ldots, t_p \geq 0$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} t_i = 1$ et $\displaystyle\left\| x - \sum_{i=1}^{p} t_i x_i \right\| < \varepsilon$. ■

Théorème 10.1.3 (Alaoglu). *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique tel que son dual topologique E^* sépare les points de E et soit V un voisinage de 0 dans $(E, \mathcal{T})$. Soit :*

$$K = \left\{ f \in E^* \ ; \ |f(x)| \leq 1 \ , \ \textit{pour tout} \ x \in V \right\} .$$

Alors K est compact pour la topologie $*$-faible.

Démonstration. Comme V est un voisinage de 0 dans E, il résulte de la proposition 9.1.2 que V est absorbant, donc pour tout $x \in E$, il existe $t_x > 0$ tel que $x \in t_x V$. D'où on a $|f(x)| \leq t_x$, pour tout $f \in K$. Soit $D_x = \{z \in \mathbb{K} \; ; \; |z| \leq t_x\}$, alors D_x est compact, et alors d'après le théorème de Tychonoff, théorème 3.3.3, l'espace topologique produit $D = \prod\limits_{x \in E} D_x$ est compact. On a $K \subset E^* \cap D \subset D \subset \mathbb{K}^E$ et la topologie $*$-faible sur K est induite par la topologie produit sur D, voir remarque 10.1.1. Donc, pour montrer que K est compact pour la topologie $*$-faible, il suffit de montrer que K est fermé dans D. Soit $g \in \overline{K}$. Notons que g est une fonction définie sur E, à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in E$, on ait $|g(x)| \leq t_x$. Soient x, $y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\varepsilon > 0$. Alors :

$$W = \big\{f \in D \; ; \; |f(x) - g(x)| < \varepsilon \; , \; |f(y) - g(y)| < \varepsilon \text{ et } |f(x + \lambda y) - g(x + \lambda y)| < \varepsilon\big\}$$

est un voisinage de g dans D. Donc il existe $f \in K$ tel que $f \in W$. Puisque f est linéaire, on a $g(x + \lambda y) - g(x) - \lambda g(y) = (g - f)(x + \lambda y) - (g - f)(x) - \lambda(g - f)(y)$. D'où on a $|g(x + \lambda y) - g(x) - \lambda g(y)| < (2 + |\lambda|)\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc on a $g(x + \lambda y) = g(x) + \lambda g(y)$. Autrement dit, g est linéaire. Soient $z \in V$ et $\varepsilon > 0$. Alors $U = \{f \in D \; ; \; |f(z) - g(z)| < \varepsilon\}$ est un voisinage de g dans D. Donc il existe $f \in K$ tel que $f \in U$. Puisque l'on a $|f(z)| \leq 1$, alors $|g(z)| < 1 + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc on a $|g(z)| \leq 1$. Par conséquent, pour tout $z \in V$, on a $|g(z)| \leq 1$. On déduit de la proposition 9.1.12 que g est continue et donc on a $g \in K$. Par conséquent, K est fermé dans D. ∎

Corollaire 10.1.2 (**Alaoglu**). *Soit $(E, \| \|)$ un espace normé. Alors on a :*

1. *La boule unité fermée $B_{E^*} = \{f \in E^* \; ; \; \|f\| \leq 1\}$ est compact pour la topologie $*$-faible.*
2. *Toute partie bornée, pour la norme, de E^* est relativement $*$-faiblement compacte. En particulier, les parties de E^* qui sont bornées, pour la norme, et $*$-faiblement fermées sont $*$-faiblement compactes.*

Démonstration. 1. On applique le théorème précédent à $V = B_E$, la boule unité fermée de E. Comme on a $B_{E^*} = \{f \in E^* \; ; \; |f(x)| \leq 1 \text{ , pour tout } x \in B_E\}$, alors B_{E^*} est compact pour la topologie $*$-faible.
2. Soit B une partie bornée pour la norme dans E^*. Alors il existe $r > 0$ tel que $rB \subset B_{E^*}$. Il résulte de 1 que rB est relativement compacte pour la topologie $*$-faible. Comme E^* muni de la topologie $*$-faible est un espace vectoriel topologique, alors la multiplication par $\frac{1}{r}$ est un homéomorphisme de E^*, muni de la topologie $*$-faible, donc B est relativement $*$-faiblement compacte. ∎

Lemme 10.1.1. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique tel que E^* sépare les points de E. Alors tout voisinage de* 0 *dans E pour la topologie faible contient un sous-espace vectoriel de codimension finie. En particulier, si E est de dimension infinie, alors tout voisinage de* 0 *dans E pour la topologie faible contient un sous-espace vectoriel de dimension infinie.*

Démonstration. Soit W un voisinage de 0 dans E pour la topologie faible. On peut bien sûr supposer $W \neq E$. D'après la remarque 10.1.3, il existe $\varepsilon > 0$ et $f_1, \ldots, f_n \in E^*$ tels que $\{x \in E \; ; \; |f_i(x)| < \varepsilon \text{ , pour tout } 1 \leq i \leq n\} \subset W$, d'où on a $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker(f_i) \subset W$.

On peut supposer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f_i \neq 0$. Considérons l'application linéaire suivante.

$$\begin{array}{rccc} f : & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & x & \longmapsto & (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \end{array}$$

Alors on a $\ker(f) = \bigcap_{i=1}^{n} \ker(f_i)$. Soit G un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\ker(f)$ dans E. Alors la restriction de f à G est linéaire injective de G dans $\mathbb{K}^n$, donc G est de dimension finie. Par conséquent, $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(f_i)$ est un sous-espace vectoriel de E de codimension finie. ■

Proposition 10.1.1. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique de dimension infinie tel que son dual topologique E^* sépare les points de E. Soit U un ouvert non vide de E pour la topologie faible. Alors U n'est pas borné dans $(E, \mathcal{T})$. Autrement dit, tout ouvert non vide bornée dans $(E, \mathcal{T})$ n'est pas ouvert pour la topologie faible.*

Démonstration. Soit $x_0 \in U$. Alors $U - x_0$ est un voisinage de 0 dans E pour la topologie faible. D'après le lemme précédent, il existe un sous-espace vectoriel de dimension infinie F dans E tel que $F \subset U - x_0$, d'où on a $x_0 + F \subset U$. Or tout sous-espace vectoriel non nul n'est pas borné dans $(E, \mathcal{T})$, donc $x_0 + F$ n'est pas borné. Par conséquent, U n'est pas borné dans $(E, \mathcal{T})$. ■

Corollaire 10.1.3. *Si $(E, \| \ \|)$ est un espace normé de dimension infinie, alors la topologie faible sur E est strictement moins fine que la topologie associée à la norme.*

On déduit du corollaire 9.1.2 et du théorème 10.1.1 le résultat suivant.

Proposition 10.1.2. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique de dimension finie. Alors $(E, \mathcal{T})$ est normable et on a :*

1. *La topologie $\mathcal{T}$ et la topologie faible coïncident sur E.*
2. *La topologie normique et la topologie $*$-faible coïncident sur E^*.*

On déduit des propositions 10.1.1 et 10.1.2 le corollaire suivant :

Corollaire 10.1.4. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique localement borné tel que E^* sépare les points de E. Alors la topologie $\mathcal{T}$ et la topologie faible coïncident sur E si et seulement si E est de dimension finie.*

Théorème 10.1.4. *Soit A une partie d'un espace localement convexe $(E, \mathcal{T})$. Alors A est bornée dans $(E, \mathcal{T})$ si et seulement si A est faiblement bornée.*

Démonstration. Comme la topologie faible est moins fine que la topologie $\mathcal{T}$, si A est bornée dans $(E, \mathcal{T})$, alors A est faiblement bornée.
Réciproquement, supposons que A est faiblement bornée. Soit U un voisinage de 0 dans $(E, \mathcal{T})$. Comme $(E, \mathcal{T})$ est localement convexe, il existe un voisinage convexe, équilibré et fermé V de 0 dans $(E, \mathcal{T})$ tel que $V \subset U$. Soit $K = \big\{f \in E^* \ ; \ |f(x)| \leq 1 \, , \text{pour tout } x \in V\big\}$. Soit $W = \big\{x \in E \ ; \ |f(x)| \leq 1 \, , \text{pour tout } f \in K\big\}$. Montrons que l'on a $V = W$. Il est clair que $V \subset W$. Soit $x_0 \in E \setminus V$. D'après le théorème 9.4.4, il existe $f \in E^*$ tel que pour tout $x \in V$, on ait $|f(x)| < 1 < f(x_0)$, d'où $x_0 \notin W$. Par conséquent, on a $V = W$. Comme A est faiblement bornée, pour tout $f \in E^*$, il existe $t_f > 0$ tel que $|f(x)| \leq t_f$

pour tout $x \in A$. Puisque les formes linéaires $J(x) : f \longmapsto f(x)$ sont $*$-faiblement continues et puisque K est convexe, et $*$-faiblement compact, par le théorème d'Alaoglu, en appliquant le théorème 9.3.2, avec E^* à la place de E et le corps $\mathbb{K}$ à la place de F, on obtient une constante $r > 0$ telle que $|f(x)| \leq r$ pour tout $f \in K$ et pour tout $x \in A$. D'où pour tout $f \in K$ et pour tout $x \in A$, on a $\left|f\left(\frac{1}{r}x\right)\right| \leq 1$. Par conséquent, pour tout $x \in A$, on a $\frac{1}{r}x \in V$, d'où $A \subset rV$. Donc on a $A \subset rU$. Ainsi, A est bornée dans $(E, \mathcal{T})$. ■

Remarque 10.1.6. Le théorème précédent n'est pas valable si l'espace vectoriel topologique E n'est pas localement convexe. En effet, soient $p \in]0,\ 1[$ et $E = \ell_p$ l'espace vectoriel topologique des suites de scalaires $x = (x_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty$. La topologie de ℓ_p est définie par la distance $d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n - y_n|^p$, où $x = (x_n)_{n\geq 0}, y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell_p$. On a montré, exercice 9.6, que ℓ_p est un F-espace, mais pas localement convexe et que l'application

$$\begin{array}{rccc} T : & \ell^\infty & \longrightarrow & {\ell_p}^* \\ & y & \longmapsto & f_y \end{array}$$

est linéaire bijective, où pour tout $y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$ et pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell_p$, on a $f_y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, y_n$. Soit $B = \left\{x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell_p\ ;\ \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| \ \leq 1\right\}$. Alors pour tout $f \in (\ell_p)^*$, $f(B)$ est borné dans $\mathbb{K}$ mais B n'est pas borné dans ℓ_p. Autrement dit, B est faiblement borné, mais B n'est pas borné dans ℓ_p. En effet, pour tout $y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$ et pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in B$, on a $|f_y(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|\, |y_n| \leq \|y\|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| \leq \|y\|_\infty$. Donc, pour tout $f \in (\ell_p)^*$, $f(B)$ est borné dans $\mathbb{K}$. Autrement dit, B est faiblement borné dans ℓ_p. Soit $a = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \in]0, +\infty[$. Pour tout $n \geq 1$, soit $\xi_n = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{p}}} \mathbf{e}_k$, alors $\xi_n \in B$ et on a $d(\xi_n, 0) = \frac{1}{a^p} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\xi_n, 0) = +\infty$. Par conséquent, B n'est pas bornée dans ℓ_p.

On déduit du théorème précédent et de la proposition 10.1.1 le résultat suivant :

Corollaire 10.1.5. *Soit E un espace localement convexe de dimension infinie. Alors tout ouvert non vide de E pour la topologie faible n'est pas borné pour la topologie faible. En particulier, E muni de la topologie faible n'est pas normable, voir théorème* 9.2.3.

Corollaire 10.1.6. *Soit A une partie d'un espace normé $(E, \| \ \|)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) A est bornée dans $(E, \| \ \|)$.

(ii) A est faiblement bornée.

(iii) Pour tout $f \in E^*$, $f(A)$ est une partie bornée du corps $\mathbb{K}$.

Démonstration. L'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) résulte du théorème 9.2.2 et de la remarque 9.2.5. L'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) est une conséquence immédiate du théorème précédent. Mais on va donner une autre démonstration sans utiliser le théorème d'Alaoglu. Comme la topologie faible est moins fine que la topologie associée à la norme, si A est bornée dans $(E, \|\ \|)$, alors A est faiblement bornée.
Réciproquement, supposons que A est faiblement bornée. L'application canonique

$$\begin{array}{rccc} J: & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & x & \longmapsto & J(x) \end{array}$$

où $J(x)(f) = f(x)$, pour tous $x \in E$ et $f \in E^*$, est linéaire et isométrique. Par hypothèse, pour tout $f \in E^*$, il existe $t_f > 0$ tel que $|f(x)| \leq t_f$ pour tout $x \in A$. Autrement dit, pour tout $f \in E^*$, on a $\sup\big\{J(x)(f)\ ;\ x \in A\big\} < +\infty$. On applique le théorème de Banach-Steinhaus, corollaire 7.2.1, avec l'espace de Banach E^* à la place de E et le corps $\mathbb{K}$ à la place de F, on obtient que $\sup\big\{\|J(x)\|\ ;\ x \in A\big\} < +\infty$. Comme J est isométrique, on a alors $\sup\big\{\|x\|\ ;\ x \in A\big\} < +\infty$. Autrement dit, A est bornée dans $(E, \|\ \|)$. ■

Corollaire 10.1.7. *Soient $(E, \|\ \|)$ un espace de Banach et B une partie du dual topologique $(E^*, \|\ \|)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) B est bornée dans $(E^*, \|\ \|)$.

(ii) B est $*$-faiblement bornée.

(iii) Pour tout $x \in E$, $\big\{f(x)\ ;\ f \in B\big\}$ est une partie bornée du corps $\mathbb{K}$.

Démonstration. L'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) résulte du théorème 9.2.2 et de la remarque 9.2.5. L'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) n'est autre que le théorème de Banach-Steinhaus, corollaire 7.2.1. ■

Notez que l'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) n'est pas valable si l'espace normé $(E, \|\ \|)$ n'est pas de Banach, voir exercice 7.12.

Théorème 10.1.5. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique tel que son dual topologique E^* sépare les points de E. Soient A et B deux sous-ensembles non vides, disjoints, compacts et convexes de E. Alors il existe $f \in E^*$ tel que $\sup\limits_{x\in A} Re(f(x)) < \inf\limits_{x\in B} Re(f(y))$.*

Démonstration. Soit $E_w = E$ muni de la topologie faible. D'après le théorème 10.1.1, E_w est un espace localement convexe et on a $E_w^* = E^*$. Comme la topologie faible est moins fine que la topologie $\mathcal{T}$, alors A et B sont aussi compacts dans E_w. D'après la partie 2 du théorème 9.4.1, il existe $f \in E_w^* = E^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in A$ et pour tout $x \in B$, on ait $\mathrm{Re}(f(x)) < \alpha < \beta < \mathrm{Re}(f(y))$. D'où on a $\sup\limits_{x\in A} \mathrm{Re}(f(x)) < \alpha < \beta < \inf\limits_{x\in B} \mathrm{Re}(f(y))$. ■

Définition 10.1.4. Soit (E, F) un système dual. Soient A un sous-ensemble non vide de E et B un sous-ensemble non vide de F. On appelle **polaire** de A dans F l'ensemble :

$$A^\circ = \big\{f \in F\ ;\ |f(x)| \leq 1\,,\ \text{pour tout}\, x \in A\big\}\,.$$

De même, on appelle **polaire** de B dans E l'ensemble :

$$^\circ B = \{x \in E \; ; \; |f(x)| \leq 1 \, , \text{ pour tout } f \in B\} \, .$$

Notons que d'après la remarque 10.1.3, les polaires dans E des sous-ensembles finis de F forment une base locale pour l'espace vectoriel topologique $(E, \sigma(E, F))$.

Notons que d'après le théorème d'Alaoglu, si V est un voisinage de 0 dans un espace vectoriel topologique $(E, \mathcal{T})$ tel que E^* sépare les points de E, alors son polaire V° est une partie convexe, équilibrée et compacte dans E^* pour la topologie $*$-faible.

Exemple 10.1.3. Soient $(E, \| \|)$ un espace normé et $F = E^*$ son dual topologique. Si $A = B_E$ est la boule unité fermée de E, alors $A^\circ = B_{E^*}$ est la boule unité fermée de E^*.

Proposition 10.1.3. *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace localement convexe, A un sous-ensemble non vide de E et B un sous-ensemble non vide de E^*. Alors on a :*

1. *L'ensemble A° est convexe, équilibré et fermé dans E^* pour la topologie $*$-faible.*
2. *L'ensemble $^\circ B$ est convexe, équilibré et fermé dans $(E, \mathcal{T})$.*
3. *Si G est un sous-espace vectoriel de E, on a $G^\circ = \{f \in E^* \; ; \; f(x) = 0, \text{ pour tout } x \in G\}$.*
4. *Si G est un sous-espace vectoriel fermé de E, on a $G = \bigcap\limits_{f \in G^\circ} \ker(f)$.*
5. *Si G est un sous-espace vectoriel de E, alors G est dense dans E si et seulement si $G^\circ = \{0\}$.*

Démonstration. 1. Soient $f, g \in A^\circ$, $t \in [0, 1]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq 1$. Pour tout $x \in A$, on a $|tf(x) + (1-t)g(x)| \leq t|f(x)| + (1-t)|g(x)| \leq t + (1-t) = 1$, d'où $tf + (1-t)g \in A^\circ$, donc A° est convexe. On a aussi $|\lambda f(x)| = |\lambda| \, |f(x)| \leq 1$, d'où $\lambda f \in A^\circ$, donc A° est équilibré. Puisque pour tout $x \in E$, l'application $f \longmapsto f(x)$ est continue de E^* muni de la topologie $*$-faible dans $\mathbb{K}$, alors A° est fermé dans E^*.
2. On vérifie, comme dans 1, que $^\circ B$ est convexe, équilibré et fermé dans E.
3. Il est clair que l'on a $\{f \in E^* \; ; \; f(x) = 0, \text{ pour tout } x \in G\} \subset G^\circ$. Réciproquement, soit $f \in G^\circ$, alors $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$ et on a $|f(x)| \leq 1$, pour tout $x \in G$. D'où on a $f(G) = \{0\}$.
4. D'après 3, on a $G^\circ = \{f \in E^* \; ; \; G \subset \ker(f)\}$, d'où $G \subset \bigcap\limits_{f \in G^\circ} \ker(f)$. Soit $x \in E \setminus G$. D'après le théorème 9.4.2, il existe $f \in E^*$ tel que $f(x) = 1$ et $G \subset \ker(f)$, d'où $f \in G^\circ$ et $x \notin \ker(f)$. En particulier, on a $x \notin \bigcap\limits_{f \in G^\circ} \ker(f)$, donc $\bigcap\limits_{f \in G^\circ} \ker(f) \subset G$. Par conséquent, on a $G = \bigcap\limits_{f \in G^\circ} \ker(f)$.
5. Ceci résulte de 3 et du corollaire 9.4.3. ■

Théorème 10.1.6 (théorème des bipolaires). *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace localement convexe, A un sous-ensemble équilibré de E et B un sous-ensemble équilibré de E^*. Alors on a :*

$$^\circ(A^\circ) = \overline{conv}(A) = \overline{conv}^{w}(A) \quad \textit{et} \quad (^\circ B)^\circ = \overline{conv}^{w^*}(B) \, .$$

Démonstration. Il est clair que l'on a $A \subset {}^\circ(A^\circ)$. D'après la proposition précédente, ${}^\circ(A^\circ)$ est convexe et fermé dans E, d'où on a $\overline{\mathrm{conv}}(A) \subset {}^\circ(A^\circ)$. Soit $x \in E \setminus \overline{\mathrm{conv}}(A)$. Comme $\overline{\mathrm{conv}}(A)$ est convexe et fermé, et équilibré, voir exercice 9.24, d'après le théorème 9.4.4, il existe $f \in E^*$ tel que pour tout $a \in A$, on ait $|f(a)| < 1 < f(x)$. Donc on a $f \in A^\circ$ et $1 < f(x) = |f(x)|$, d'où $x \notin {}^\circ(A^\circ)$. Donc on a ${}^\circ(A^\circ) \subset \overline{\mathrm{conv}}(A)$. Par conséquent, on a ${}^\circ(A^\circ) = \overline{\mathrm{conv}}(A)$. D'après le théorème 10.1.2, on a $\overline{\mathrm{conv}}(A) = \overline{\mathrm{conv}}^w(A)$.
On montre la deuxième partie en échangeant le rôle de E et E^*. ■

On s'intéresse dans cette dernière partie de ce paragraphe à la question suivante :
Étant donné un système dual $(E,\, F)$, alors quelles sont les topologies possibles $\mathcal{T}$ sur E telle que $(E,\, \mathcal{T})$ soit un espace localement convexe et telle que $(E,\, \mathcal{T})^* = F$?

Soit $(E,\, \mathcal{T})$ un espace localement convexe. On munit E^* de la topologie $*$-faible. Si B est une partie non vide bornée de E^*, on pose $p_B(x) = \sup\limits_{f \in B} |f(x)|$, pour tout $x \in E$. Alors p_B est une semi-norme sur E.

Définition 10.1.5. Soit $(E,\, F)$ un système dual. On appelle **topologie de Mackey** sur E définie par F, et l'on note $\mathcal{M}(E, F)$, la topologie sur E associée à la famille séparante des semi-normes $(p_B)_{B \in \mathcal{K}}$, où $\mathcal{K}$ est l'ensemble des parties convexes, équilibrées et compactes dans F pour la topologie $\sigma(F, E)$.

Lemme 10.1.2. *Soit $(E,\, F)$ un système dual. Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur E telle que $(E,\, \mathcal{T})$ soit un espace localement convexe et telle que $(E,\, \mathcal{T})^* = F$. Alors on a $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}(E, F)$. En particulier, on a $\sigma(E, F) \subset \mathcal{M}(E, F)$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base locale de $(E,\, \mathcal{T})$ formée d'ensembles convexes, fermés et équilibrés. Comme on a $(E,\, \mathcal{T})^* = F$, d'après le théorème d'Alaoglu, pour tout $A \in \mathcal{B}$, A° est compact dans F pour la topologie $\sigma(F, E)$. D'après le théorème des bipolaires, A° est aussi convexe et équilibré et on a ${}^\circ(A^\circ) = A$. Or on a $\{x \in E\ ;\ p_{A^\circ}(x) \le 1\} = {}^\circ(A^\circ)$, d'où $A = \{x \in E\ ;\ p_{A^\circ}(x) \le 1\}$. Par conséquent, A est un voisinage de 0 dans $(E,\, \mathcal{M}(E,\, F))$. On en déduit que l'on a $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}(E, F)$. ■

Lemme 10.1.3. *Soit $(E,\, F)$ un système dual. Alors on a $(E,\, \mathcal{M}(E, F))^* = F$.*

Démonstration. Comme on a $\sigma(E, F) \subset \mathcal{M}(E, F)$, on en déduit que si f est une forme linéaire sur E continue pour la topologie $\sigma(E, F)$, alors f est continue pour la topologie $\mathcal{M}(E, F)$. Donc on a $(E,\, \sigma(E, F))^* \subset (E,\, \mathcal{M}(E, F))^*$. D'après le théorème 10.1.1, on a $(E,\, \sigma(E, F))^* = F$, d'où $F \subset (E,\, \mathcal{M}(E, F))^*$.
Réciproquement, soit f une forme linéaire sur E continue pour la topologie $\mathcal{M}(E, F)$. D'après le théorème 9.2.4, il existe une constante $c > 0$ et il existe $B_1, \ldots, B_n$ des compacts, convexes et équilibrés de F pour la topologie $\sigma(F, E)$ tels que pour tout $x \in E$, on ait $|f(x)| \le c \max\limits_{1 \le i \le n} p_{B_i}(x)$. Or on a $p_{B_i}(x) = \max\limits_{g \in B_i} |g(x)|$, d'où pour tout $g \in B = \mathrm{conv}(B_1 \cup \ldots \cup B_n)$, on a $|f(x)| \le c \max\limits_{g \in B} |g(x)|$. Soit $D = cB$, alors D est convexe et équilibré et d'après le théorème 9.5.1, D est compact dans F pour la topologie $\sigma(F, E)$. Donc on a $|f(x)| \le p_D(x)$, pour tout $x \in E$. On a ${}^\circ D = \{x \in E\ ;\ p_D(x) \le 1\}$, d'où $f \in ({}^\circ D)^\circ$ pour la dualité entre E et son dual algébrique E'. Or la topologie $\sigma(F, E)$ sur F est induite par $\sigma(E', E)$; par suite D est convexe, équilibré et compact dans E' pour la topologie $\sigma(E', E)$. D'après le théorème des bipolaires, appliqué à la dualité

entre E et E', on a $D = ({}^\circ D)^\circ$. Donc on a $f \in D$, d'où $f \in F$. Par conséquent, on a $(E, \mathcal{M}(E,F))^* = F$. ■

Théorème 10.1.7 (Mackey). *Soit (E, F) un système dual. Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur E telle que $(E, \mathcal{T})$ soit un espace localement convexe. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $\sigma(E,F) \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{M}(E,F)$.

(ii) $(E, \mathcal{T})^* = F$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons donc que l'on a $\sigma(E,F) \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{M}(E,F)$. Alors on a $(E, \sigma(E,F))^* \subset (E, \mathcal{T})^* \subset (E, \mathcal{M}(E,F))^*$. D'après le lemme 10.1.3, on a $(E, \mathcal{M}(E,F))^* = F$, et d'après le théorème 10.1.1, on a $(E, \sigma(E,F))^* = F$. Par conséquent, on a $(E, \mathcal{T})^* = F$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons donc que l'on a $(E, \mathcal{T})^* = F$. Comme $\sigma(E,F)$ est la topologie la moins fine sur E rendant continues tous les éléments $f \in F$, alors on a $\sigma(E,F) \subset \mathcal{T}$. L'inclusion $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}(E,F)$ résulte du lemme 10.1.2. ■

Corollaire 10.1.8. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace localement convexe. On a :*

1. *$\sigma(E,E^*)$ est la topologie la moins fine sur E telle que $(E, \sigma(E,E^*))$ soit un espace localement convexe et telle que $(E, \sigma(E,E^*))^* = E^*$.*

2. *$\mathcal{M}(E,E^*)$ est la topologie la plus fine sur E telle que $(E, \mathcal{M}(E,E^*))$ soit un espace localement convexe et telle que $(E, \mathcal{M}(E,E^*))^* = E^*$.*

Définition 10.1.6. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace localement convexe. On dit que $(E, \mathcal{T})$ est un **espace de Mackey** si l'on a $\mathcal{T} = \mathcal{M}(E,E^*)$.

On verra, exercice 10.8, que tout espace de Banach est un espace de Mackey.

10.2 Topologies faible et $*$-faible dans les espaces normés

On s'intéresse essentiellement dans ce paragraphe aux topologies faible et $*$-faible dans les espaces normés.

Proposition 10.2.1. *Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans un espace normé $(E, \| \ \|)$ et $x \in E$. Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans E^* et $f \in E^*$. Alors on a :*

1. *Si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x pour la norme, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x pour la topologie faible et la suite $\big(\|x_n\|\big)_{n\geq 0}$ converge vers $\|x\|$.*

2. *Si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x pour la topologie faible, alors la suite $\big(\|x_n\|\big)_{n\geq 0}$ est bornée et on a $\|x\| \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|x_n\|$. Si de plus, pour tout $n \geq 0$, on a $\|x_n\| \leq \|x\|$, alors $\big(\|x_n\|\big)_{n\geq 0}$ converge vers $\|x\|$.*

3. *Si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x pour la topologie faible et si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans E^* pour la norme, alors $(f_n(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$.*

4. *Si $(E, \| \|)$ est de Banach et si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans E^* pour la topologie $*$-faible, alors la suite $\big(\|f_n\|\big)_{n\geq 0}$ est bornée et on a $\|f\| \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|$. De plus, si pour tout $n \geq 0$, on a $\|f_n\| \leq \|f\|$, alors $\big(\|f_n\|\big)_{n\geq 0}$ converge vers $\|f\|$.*

5. *Si $(E, \| \|)$ est de Banach et si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x pour la norme et si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans E^* pour la topologie $*$-faible, alors $(f_n(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$.*

Démonstration. 1. Soit $g \in E^*$, alors on a $|g(x_n) - g(x)| \leq \|g\| \, \|x_n - x\|$, pour tout $n \geq 0$. Donc si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x pour la norme, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers x. Pour tout $n \geq 0$, on a $\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\|$. Donc la suite $\big(\|x_n\|\big)_{n\geq 0}$ converge vers $\|x\|$.
2. Puisque $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente pour la topologie faible, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est faiblement bornée. Il résulte alors du corollaire 10.1.6 que la suite $\big(\|x_n\|\big)_{n\geq 0}$ est bornée. Soit $g \in E^*$ telle que $\|g\| \leq 1$. Alors pour tout $n \geq 0$, on a $|g(x_n)| \leq \|x_n\|$. Comme on a $|g(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} |g(x_n)|$, alors $|g(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} |g(x_n)| = \liminf\limits_{n\to+\infty} |g(x_n)| \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|x_n\|$. D'après le corollaire 7.9.1, on a $\|x\| = \sup\limits_{g\in B_{E^*}} |g(x)|$, on en déduit que l'on a $\|x\| \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|x_n\|$. Supposons de plus que pour tout $n \geq 0$, on a $\|x_n\| \leq \|x\|$. Alors on a $\|x\| \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| \leq \|x\|$, d'où $\liminf\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| = \limsup\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$. Donc la suite $\big(\|x_n\|\big)_{n\geq 0}$ converge vers $\|x\|$.
3. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &= |f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(x)| \\ &\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leq \|x_n\| \, \|f_n - f\| + |f(x_n) - f(x)| \,. \end{aligned}$$

D'après 2, la suite $(\|x_n\|)_{n\geq 0}$ est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|x_n\| \leq M$. Par conséquent, on a $|f_n(x_n) - f(x)| \leq M \, \|f_n - f\| + |f(x_n) - f(x)|$, pour tout $n \geq 0$. On en déduit que la suite $(f_n(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$.
4. Il résulte du théorème de Banach-Steinhaus, corollaire 7.2.3, que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est bornée et que l'on a $\|f\| \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|$. Supposons de plus que pour tout $n \geq 0$, on a $\|f_n\| \leq \|f\|$. Alors on a $\|f\| \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|f_n\| \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} \|f_n\| \leq \|f\|$. D'où on a $\liminf\limits_{n\to+\infty} \|f_n\| = \limsup\limits_{n\to+\infty} \|f_n\| = \|f\|$. Par conséquent, la suite $\big(\|f_n\|\big)_{n\geq 0}$ converge vers $\|f\|$.
5. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &= |f_n(x_n) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\leq |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq \|f_n\| \, \|x_n - x\| + |f_n(x) - f(x)| \,. \end{aligned}$$

D'après 4, la suite $\big(\|f_n\|\big)_{n\geq 0}$ est bornée. Par conséquent, la suite $(f_n(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$. ■

Remarque 10.2.1. On vient de voir qu'une suite, dans un espace normé, convergente pour la norme est faiblement convergente. Mais la réciproque n'est pas toujours vraie. En effet, considérons la suite $(\mathbf{e}_n)_{n\geq 0}$ dans l'espace ℓ^p, avec $1 < p < +\infty$. Soit f une forme

linéaire continue sur ℓ^p. D'après la proposition 7.4.4, il existe $y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^q$ tel que pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^p$, on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, y_n$. D'où on a $f(\mathbf{e}_n) = y_n$. Comme on a $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$, alors on a $\lim_{n\to+\infty} f(\mathbf{e}_n) = 0$. Autrement dit, la suite $(\mathbf{e}_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers 0 dans l'espace ℓ^p. Or pour tout $n \geq 0$, on a $\|\mathbf{e}_n\|_p = 1$, donc la suite $(\mathbf{e}_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers 0 pour la norme dans l'espace ℓ^p.
Un autre exemple : pour tout $n \geq 0$, soit $\xi_n = \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_n$, alors la suite $(\xi_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers $\mathbf{e}_0$ dans l'espace de Banach c_0. De plus la suite $\big(\|\xi_n\|_\infty\big)_{n\geq 0}$ converge vers $\|\mathbf{e}_0\|_\infty$, et pourtant la suite $(\xi_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers $\mathbf{e}_0$ pour la norme, $\|\ \|_\infty$, dans c_0. De même la suite $(\xi_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers $\mathbf{e}_0$ dans l'espace de Banach ℓ^∞ et la suite $\big(\|\xi_n\|_\infty\big)_{n\geq 0}$ converge vers $\|\mathbf{e}_0\|_\infty$, et pourtant la suite $(\xi_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers $\mathbf{e}_0$ pour la norme $\|\ \|_\infty$ dans ℓ^∞.

Proposition 10.2.2 (Schur). *Dans l'espace de Banach $(\ell^1, \|\ \|_1)$ une suite est convergente pour la norme si et seulement si elle est faiblement convergente.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 10 du supplément.

Théorème 10.2.1 (Goldstine). *Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé et $J : E \longrightarrow E^{**}$ l'application canonique. Alors $J(B_E)$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-dense dans la boule unité fermée $B_{E^{**}}$ de E^{**}.*

Démonstration. D'après le théorème d'Alaoglu, $B_{E^{**}}$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-compacte. Soit K l'adhérence de $J(B_E)$ dans E^{**}, pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$. Comme on a $J(B_E) \subset B_{E^{**}}$, alors on a $K \subset B_{E^{**}}$. Il reste à montrer que l'on a $B_{E^{**}} \subset K$. Soit $\Lambda \in E^{**}$ tel que $\Lambda \notin K$. D'après les théorèmes 9.4.1 et 10.1.1, il existe $f \in E^*$ telle que $\sup_{\Phi\in K} \mathrm{Re}(\Phi(f)) < \mathrm{Re}(\Lambda(f))$. Or on a $J(B_E) \subset K$, d'où $\|f\| = \sup_{x\in B_E} \mathrm{Re}(f(x)) < \mathrm{Re}(\Lambda(f)) \leq |\Lambda(f)|$. Par conséquent, on a $\|\Lambda\| > 1$. Autrement dit, on a $\Lambda \notin B_{E^{**}}$, donc $B_{E^{**}} \subset K$. D'où on a $K = B_{E^{**}}$. ■

Corollaire 10.2.1. *Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé et $J : E \longrightarrow E^{**}$ l'application canonique. Alors $J(E)$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-dense dans E^{**}.*

Démonstration. Soit F l'adhérence de $J(E)$ dans E^{**}, pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$. D'après la proposition 9.1.4, F est un sous-espace vectoriel de E^{**}. D'après le théorème précédent, on a $B_{E^{**}} \subset F$. Par conséquent, on a $F = E^{**}$. ■

Théorème 10.2.2. *Soient $(E, \|\ \|)$, $(F, \|\ \|')$ deux espaces normés et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) T est continue quand on munit E et F de la topologie normique.

(ii) T est continue quand on munit E et F de la topologie faible.

(iii) Pour tout $f \in F^*$, on a $f \circ T \in E^*$.

Démonstration. Montrons d'abord l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). On suppose que T est continue quand on munit E et F de la topologie normique. Pour tout $f \in F^*$, on a $f \circ T \in E^*$, donc $f \circ T$ est continue de E muni de la topologie faible dans $\mathbb{K}$. Il résulte

de la définition de la topologie faible sur F que T est continue quand on munit E et F de la topologie faible.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Par hypothèse, T est continue quand on munit E et F de la topologie faible, donc pour tout $f \in F^*$, $f \circ T$ est continue de E muni de la topologie faible dans $\mathbb{K}$, d'où on a $f \circ T \in E^*$, voir théorème 10.1.1.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). L'application T est continue quand on munit E et F de la topologie normique si et seulement si $T(B_E)$ est une partie bornée dans $(F, \| \|')$. Par hypothèse, pour tout $f \in F^*$, on a $f \circ T \in E^*$. Donc $f(T(B_E)) = (f \circ T)(B_E)$ est une partie bornée du corps $\mathbb{K}$. Il résulte alors du corollaire 10.1.6 que $T(B_E)$ est une partie bornée dans $(F, \| \|')$. Donc, T est continue quand on munit E et F de la topologie normique. ■

Proposition 10.2.3. *Soit $(E, \| \|)$ un espace normé. Alors il existe un espace compact X tel que $(E, \| \|)$ soit isométriquement isomorphe à un sous-espace de $(C(X), \| \|_\infty)$. Si $(E, \| \|)$ est de Banach, alors $(E, \| \|)$ est isométriquement isomorphe à un sous-espace fermé de $C(X)$.*

Démonstration. Soit $X = B_{E^*}$ muni de la topologie $*$-faible. D'après le théorème d'Alaoglu, corollaire 10.1.2, X est un espace compact. Considérons l'application suivante

$$\begin{array}{rccc} J: & E & \longrightarrow & C(X) \\ & x & \longmapsto & J(x) \end{array}$$

où $J(x)(f) = f(x)$, pour tout $f \in X = B_{E^*}$. Alors J est une application linéaire. D'après le corollaire 7.9.1, J est aussi isométrique. Si $(E, \| \|)$ est de Banach, alors $J(E)$ est aussi de Banach, donc $J(E)$ est fermé dans $(C(X), \| \|_\infty)$. ■

Proposition 10.2.4. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique tel que E^* sépare les points de E. Alors E^* muni de la topologie $*$-faible est métrisable si et seulement si E admet une base algébrique finie ou dénombrable.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 10 du supplément.
On déduit de la proposition précédente et de l'exercice 7.1 le corollaire suivant :

Corollaire 10.2.2. *Soit $(E, \| \|)$ un espace de Banach de dimension infinie. Alors E^* muni de la topologie $*$-faible n'est pas métrisable.*

Proposition 10.2.5. *Soit $(E, \| \|)$ un espace normé. Alors E muni de la topologie faible est métrisable si et seulement si E est de dimension finie.*

Démonstration. Si E est de dimension finie, il résulte de la proposition 10.1.2 que la topologie faible sur E coïncide avec la topologie associée à la norme, donc la topologie faible sur E est métrisable.
Réciproquement, supposons que la topologie faible sur E est métrisable. Soit d une distance sur E induisant la topologie faible. Si E est de dimension infinie, d'après la proposition 10.1.1, pour tout $n \geq 0$, l'ouvert $U_n = \left\{x \in E \ ; \ d(0,x) < \frac{1}{n+1}\right\}$ n'est pas borné dans $(E, \| \|)$, donc il existe $x_n \in U_n$ tel que $\|x_n\| \geq n$. Puisque la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge pour la topologie faible, il résulte de la proposition 10.2.1 que la suite $\big(\|x_n\|\big)_{n\geq 0}$ est bornée, d'où la contradiction. Donc E est de dimension finie. ■

Théorème 10.2.3. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique séparable tel que E^* sépare les points de E.*

1. *Soit K une partie $*$-faiblement compacte dans E^*, alors K est métrisable pour la topologie $*$-faible.*

2. *Soient V un voisinage de 0 dans E et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans E^* telle que pour tout $x \in V$ et pour tout $n \geq 0$, on ait $|f_n(x)| \leq 1$. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ de $(f_n)_{n\geq 0}$ et $f \in E^*$ tels que $f(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} f_{n_k}(x)$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. 1. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dense dans E. Alors les applications

$$J(x_n) : \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & f(x_n) \end{array}$$

sont continues et forment une famille séparante pour K. Il résulte alors de la proposition 3.4.5 que K, muni de la topologie $*$-faible, est métrisable.
2. Ceci résulte de 1 et du théorème d'Alaoglu. ■

Théorème 10.2.4. *Soit $(E, \|\ \|)$ un espace normé. Alors on a :*

1. *La boule unité fermée $B_{E^*} = \{f \in E^* \ ; \ \|f\| \leq 1\}$, munie de la topologie $*$-faible, est métrisable si et seulement si $(E, \|\ \|)$ est séparable.*

2. *La boule unité fermée $B_E = \{x \in E \ ; \ \|x\| \leq 1\}$, munie de la topologie faible, est métrisable si et seulement si $(E^*, \|\ \|)$ est séparable.*

Démonstration. 1. Si B_{E^*} est métrisable pour la topologie $*$-faible, il résulte du théorème d'Alaoglu et de la proposition 3.6.1 que l'espace normé $(C(B_{E^*}), \|\ \|_\infty)$ est séparable. D'après la proposition 10.2.3, l'espace normé $(E, \|\ \|)$ est isométriquement isomorphe à un sous-espace de $(C(B_{E^*}), \|\ \|_\infty)$, donc $(E, \|\ \|)$ est séparable.
Réciproquement, supposons que $(E, \|\ \|)$ est séparable. Il résulte du théorème d'Alaoglu et du théorème 10.2.3 que B_{E^*}, munie de la topologie $*$-faible, est métrisable. Mais refaisons la preuve dans ce cadre. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dense dans S_E. Alors les applications

$$J(x_n) : \begin{array}{ccc} (B_{E^*}, \sigma(E^*, E)) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & f(x_n) \end{array}$$

sont continues et forment une famille séparante pour B_{E^*}. Il résulte alors de la proposition 3.4.5 que B_{E^*}, muni de la topologie $*$-faible, est métrisable. Notons qu'une distance induisant la topologie $*$-faible sur B_{E^*} est définie par : pour tout f, $g \in B_{E^*}$, $d(f,g) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}|f(x_n) - g(x_n)|$, voir propositions 2.4.3 et 2.5.1.
2. Supposons d'abord que $(E^*, \|\ \|)$ est séparable. D'après 1, la boule unité fermée $B_{E^{**}}$, munie de la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$, est métrisable. D'après la remarque 10.1.5, on identifie $(B_E, \sigma(E, E^*))$ à un sous-espace de $(B_{E^{**}}, \sigma(E^{**}, E^*))$, donc $(B_E, \sigma(E, E^*))$ est métrisable. Il résulte également de 1, que si $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dense dans S_{E^*}, une distance induisant la topologie faible sur B_E est définie par : pour tout x, $y \in B_E$, on a $d(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}|f_n(x) - f_n(y)|$.
Réciproquement, supposons que $(B_E, \sigma(E, E^*))$ est métrisable. Alors il existe une base

dénombrable $(U_n)_{n\geq 0}$ de voisinages ouverts de 0 dans $(B_E, \sigma(E, E^*))$. On peut supposer que pour tout $n \geq 0$, il existe $\varepsilon_n > 0$ et une partie finie A_n dans E^* tels que $U_n = \{x \in B_E \;;\; |f(x)| < \varepsilon_n \,,\text{ pour tout } f \in A_n\}$. Soient $A = \bigcup\limits_{n\geq 0} A_n$ et $F = \overline{\mathrm{Vect(A)}}$. Alors F est un sous-espace vectoriel fermé et séparable dans $(E^*, \|\ \|)$. Montrons que l'on a $F = E^*$. Si $F \neq E^*$, alors il existe $g \in E^* \setminus F$ tel que $d = d(g, F) > 0$. D'après le théorème de Hahn-Banach, corollaire 7.7.2, il existe $T \in E^{**}$ telle que $T(F) = 0$, $T(g) = 1$ et $\|T\| = \frac{1}{d}$. Soit $V = \{x \in B_E \;;\; |g(x)| < \frac{d}{2}\}$, alors V est un voisinage ouvert de 0 dans $(B_E, \sigma(E, E^*))$. Donc, il existe $n \geq 0$ tel que $U_n \subset V$. Comme on a $dT \in B_{E^{**}}$, d'après le théorème de Goldstine, il existe $x \in B_E$ tel que $J(x) \in V\big(dT, g, \frac{d}{2}\big) \cap V(dT, A_n, \varepsilon_n)$. Autrement dit, il existe $x \in B_E$ tel que $|d - g(x)| = |dT(g) - J(x)(g)| < \frac{d}{2}$ et $|f(x)| = |dT(f) - J(x)(f)| < \varepsilon_n$, pour tout $f \in A_n$. D'où on a $|g(x)| > \frac{d}{2}$ et $x \in U_n$. Par conséquent, on a $x \notin V$ et $x \in U_n$, d'où la contradiction. Donc on a bien $F = E^*$, d'où $(E^*, \|\ \|)$ est séparable. ■

Corollaire 10.2.3. *Soit $(E, \|\ \|)$ un espace normé séparable. Alors E^* muni de la topologie $*$-faible est séparable.*

Démonstration. D'après le théorème précédent et le théorème d'Alaoglu, B_{E^*} munie de la topologie $*$-faible est compact et métrisable, donc B_{E^*} est séparable, voir proposition 3.1.7. Or on a $E^* = \bigcup\limits_{n\geq 1} nB_{E^*}$, donc E^* muni de la topologie $*$-faible est séparable. ■

Rappelons que l'on a vu, proposition 7.7.2 , que si $(E, \|\ \|)$ est un espace normé et si E^*, muni de sa norme, est séparable, alors $(E, \|\ \|)$ est séparable, mais que la réciproque n'est pas toujours vraie.

Proposition 10.2.6. *Soit $(E, \|\ \|)$ un espace normé. Alors $(E, \|\ \|)$ est séparable si et seulement si E muni de la topologie faible est séparable.*

Démonstration. Comme la topologie faible est moins fine que la topologie associée à la norme, si $(E, \|\ \|)$ est séparable, alors E muni de la topologie faible est séparable.
Réciproquement, supposons que E muni de la topologie faible est séparable. Soit S un ensemble au plus dénombrable et faiblement dense dans E. Soit $D = \mathrm{Vect}(S)$. Comme D est convexe, d'après le théorème 10.1.2, on a $\overline{D} = \overline{D}^w$, où $\overline{D}^w$ est l'adhérence de D pour la topologie faible. Or on a $\overline{D}^w = E$, donc $\overline{D} = E$. Par conséquent, $(E, \|\ \|)$ est séparable, voir proposition 6.8.2. ■

Remarque 10.2.2. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace normé. Comme la topologie $*$-faible sur E^* est moins fine que la topologie associée à la norme, si $(E^*, \|\ \|)$ est séparable, alors E^* muni de la topologie $*$-faible est séparable. Mais la réciproque n'est pas toujours vraie. En effet, soit $E = \ell^1$, muni de la norme $\|\ \|_1$, alors E est un espace de Banach séparable. Il résulte du corollaire précédent que $E^* = \ell^\infty$ muni de la topologie $*$-faible est séparable. Par contre, $E^* = \ell^\infty$, muni de la norme $\|\ \|_\infty$, n'est pas séparable.

Remarque 10.2.3. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace normé séparable. On note encore par $\|\ \|$ la norme sur l'espace normé dual E^*. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dense dans S_E. Pour tout $f \in E^*$, on pose $\|f\|_* = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}|f(x_n)|$. Alors $\|\ \|_*$ est une norme sur E^* telle que $\|f\|_* \leq 2\|f\|$, pour tout $f \in E^*$. D'après la démonstration du théorème 10.2.4, si A est une partie bornée dans $(E^*, \|\ \|)$, alors la topologie induite par la norme $\|\ \|_*$ sur A coïncide avec la topologie induite sur A par la topologie $*$-faible.

Proposition 10.2.7. *Soit K une partie faiblement compacte d'un espace normé $(E, \| \|)$. Si E^* est $\sigma(E^*, E)$-séparable, alors $(K, \sigma(E, E^*))$ est métrisable. En particulier, si $(E, \| \|)$ est séparable, alors $(K, \sigma(E, E^*))$ est métrisable.*

Démonstration. Puisque E^* est $\sigma(E^*, E)$-séparable, alors il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ dense dans E^* pour la topologie $*$-faible. Par conséquent, $(f_n)_{n\geq 0}$ est une famille séparante de fonctions continues pour $(E, \sigma(E, E^*))$. Il résulte de la proposition 3.4.5 que $(K, \sigma(E, E^*))$ est métrisable. Si $(E, \| \|)$ est séparable, d'après le corollaire 10.2.3, E^* est $\sigma(E^*, E)$-séparable, donc $(K, \sigma(E, E^*))$ est métrisable. ■

Théorème 10.2.5 (Eberlein-Šmulian). *Une partie K d'un espace normé $(E, \| \|)$ est relativement compacte pour la topologie faible si et seulement si de toute suite d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir ([21], p. 248).

Il faut bien noter que le théorème précédent a lieu même si K n'est pas métrisable pour la topologie faible. C'est bien sûr un résultat très utile en pratique puisqu'il permet de n'utiliser que des suites, et dispense de l'usage des familles filtrantes croissantes.

Théorème 10.2.6. *Soit $(E, \| \|)$ un espace normé séparable. On a :*

1. *$(E, \| \|)$ est isométriquement isomorphe à un sous-espace de ℓ^∞.*
2. *$(E, \| \|)$ est isométriquement isomorphe à un sous-espace de $(C([0, 1]), \| \|_\infty)$.*

Démonstration. 1. D'après le théorème d'Alaoglu et le théorème 10.2.4, il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ $*$-faiblement dense dans B_{E^*}. On définit $T : (E, \| \|) \longrightarrow \ell^\infty$ par $T(x) = (f_n(x))_{n\geq 0}$. Alors T est linéaire et isométrique.
2. Pour la démonstration de cette partie, voir ([14], p. 144). ■

Proposition 10.2.8. *Soit $(E, \| \|)$ un espace normé. Alors on a :*

1. *B_{E^*} est l'enveloppe convexe $*$-faiblement fermée de ses points extrémaux.*
2. *Si E est de dimension infinie, B_{E^*} possède un nombre infini des points extrémaux.*

Démonstration. 1. Ceci résulte du théorème de Krein-Milman et du théorème d'Alaoglu, corollaire 10.1.2.
2. Si B_{E^*} possède un nombre fini des points extrémaux, d'après 1, B_{E^*} serai dans un sous-espace vectoriel de dimension finie, d'où E^* serai de dimension finie, ce qui est impossible. ■

Remarque 10.2.4. Soit $E_{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$, muni de la norme $\| \|_\infty$. On déduit de la proposition précédente et de l'exercice 9.35 que $E_{\mathbb{R}}$ n'est pas isométriquement isomorphe au dual topologique d'aucun espace normé.

On a montré, exercice 9.35, que si X est un espace compact et si $E = C(X)$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions continues sur X et à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$, muni de la norme $\| \|_\infty$, alors les points extrémaux de B_E, la boule unité fermée de E, est l'ensemble des fonctions f de E telles que $|f(x)| = 1$, pour tout $x \in X$. Dans la proposition suivante, on va déterminer les points extrémaux de la boule unité fermée de E^*.

Proposition 10.2.9. *Soient X un espace compact et $E = C(X)$ muni de la norme $\| \|_\infty$. Alors on a $e(B_{E^*}) = \{\lambda\delta_x \; ; \; x \in X \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}, \text{ avec } |\lambda| = 1\}$.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 10 du supplément.

Théorème 10.2.7 (Rainwater). *Soient $(E, \| \|)$ un espace normé, $x \in E$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée dans $(E, \| \|)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $(x_n)_{n\geq 0}$ *converge faiblement vers x.*

(ii) *Pour tout $f \in e(B_{E^*})$, $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$ dans $\mathbb{K}$.*

Pour la démonstration du théorème précédent, voir ([14], p. 86).

Corollaire 10.2.4. *Soient X un espace compact et $E = C(X)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions continues sur X et à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$, muni de la norme $\| \|_\infty$. Soient $f \in E$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée dans $(E, \| \|_\infty)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge faiblement vers f.*

(ii) *Pour tout $x \in X$, $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$ dans $\mathbb{K}$. Autrement dit, $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f pour la topologie de la convergence simple sur E.*

Théorème 10.2.8 (James). *Soit A un ensemble non vide convexe et fermé d'un espace de Banach $(E, \| \|)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *A est compact pour la topologie faible.*

(ii) *Pour tout $f \in E^*$, il existe $a \in A$ tel que $|f(a)| = \sup\limits_{x\in A} |f(x)|$.*

(iii) *Pour tout $f \in E^*$, il existe $a \in A$ tel que $Re(f(a)) = \sup\limits_{x\in A} Re(f(x))$.*

Pour la démonstration du théorème précédent, voir ([21], p. 261).

Théorème 10.2.9. *Soit $(E, \| \|)$ un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *E est réflexif.*

(ii) *$B_E = \{x \in E \; ; \; \|x\| \leq 1\}$ est compact pour la topologie faible.*

(iii) *Toute suite bornée dans $(E, \| \|)$ possède une sous-suite faiblement convergente.*

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Si E est réflexif, alors on a $E = E^{**}$ et ainsi on a $B_E = B_{E^{**}}$. D'après le théorème d'Alaoglu, $B_{E^{**}}$ munie de la topologie $*$-faible est compacte. On déduit de la remarque 10.1.5 que B_E muni de la topologie faible est compacte.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Si B_E est faiblement compacte, il résulte de la remarque 10.1.5 que B_E muni de la topologie $*$-faible, induite par $B_{E^{**}}$, est compacte, donc fermée dans $(B_{E^{**}}, \sigma(E^{**}, E^*))$. D'après le théorème de Goldstine, B_E est dense dans $(B_{E^{**}}, \sigma(E^{**}, E^*))$, donc on a $B_E = B_{E^{**}}$. Par conséquent, on a $E = E^{**}$. Autrement dit, E est réflexif.
L'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) résulte du théorème d'Eberlein-Šmulian. ■

Corollaire 10.2.5. *Soit $(E, \| \|)$ un espace de Banach, séparable et réflexif, alors B_E munie de la topologie faible est compacte et métrisable.*

Démonstration. Combiner le théorème précédent, le théorème 10.2.4 et la proposition 7.7.2. ■

Corollaire 10.2.6. *Soit $(E, \| \|)$ un espace de Banach réflexif, alors B_E est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.*

Démonstration. Combiner le théorème précédent, le théorème de Krein-Milman et le théorème 10.1.2. ■

Théorème 10.2.10. *Soit $(E, \| \|)$ un espace de Banach. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) E est réflexif.

(ii) Si A et B sont deux sous-ensembles convexes fermés non vides et disjoints de E et si A ou B est borné, alors il existe $f \in E^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait $Re(f(a)) \leq \alpha < \beta \leq Re(f(b))$.

(iii) Si K est un convexe fermé non vide dans E et si $x \in E$, alors il existe $y \in K$ tel que $d(x, K) = \|x - y\|$.

(iv) Si F est un sous-espace vectoriel fermé propre de E, alors il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $d(x, F) = 1$.

(v) Si $f \in E^*$, alors il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $\|f\| = |f(x)|$.

Démonstration. Montrons que (i) $\Longrightarrow$ (ii). Notons d'abord que d'après le théorème 10.1.2, tout ensemble convexe et fermé dans $(E, \| \|)$ est convexe et fermé pour la topologie faible sur E. Puisque E est réflexif, on déduit de la remarque 10.1.5, du théorème 10.1.2 et du corollaire 10.1.2 que tout ensemble borné, convexe et fermé dans $(E, \| \|)$ est compact pour la topologie faible. Pour avoir (ii), il suffit d'appliquer les théorèmes 9.4.1 et 10.1.1.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Il s'agit de montrer qu'il existe $y \in K$ tel que pour tout $z \in K$, on ait $\|x - y\| \leq \|x - z\|$. Puisque $x - K$ est un convexe fermé non vide de E, on peut supposer que $x = 0$, et donc il s'agit de montrer que tout convexe fermé non vide K de E contient un point y de norme minimale. Si $0 \in K$, on peut choisir $y = 0$. Supposons désormais que $0 \notin K$. Alors on a $r = d(0, K) > 0$, car K est fermé. Raisonnons par l'absurde et supposons que K ne contient pas de point de norme minimale. Soit $A = \big\{x \in E \ ; \ \|x\| \leq r\big\}$, alors A est borné, convexe et fermé et on a $A \cap K = \emptyset$. Il existe, par hypothèse, $f \in E^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$ et tout $b \in K$, on ait $\mathrm{Re}(f(a)) \leq \alpha < \beta \leq \mathrm{Re}(f(b))$. Soit $t > 1$ tel que $t\alpha < \beta$, et soit $b \in K$ tel que $\|b\| < tr$. Alors $\frac{1}{t}b \in A$, d'où on a $\mathrm{Re}(f(\frac{1}{t}b)) \leq \alpha$. Par conséquent, on a $\mathrm{Re}(f(b)) \leq t\alpha < \beta$, ce qui est impossible.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (iv). Soit F un sous-espace vectoriel fermé propre de E et soit $x_0 \in E \backslash F$. D'après (iii), il existe $y \in F$ tel que pour tout $z \in F$, on ait $\|x_0 - y\| \leq \|x_0 - (y + z)\|$, car $y + z \in F$. Soit $x = \dfrac{x_0 - y}{\|x_0 - y\|}$, alors on a $\|x\| = 1$ et pour tout $z \in F$, on a $1 \leq \left\| x - \dfrac{z}{\|x_0 - y\|} \right\| \leq d(x, F) \leq 1$, d'où $d(x, F) = 1$.

Preuve de (iv) $\Longrightarrow$ (v). Soit $f \in E^*$. On peut supposer $f \neq 0$, sinon c'est évident. Soit $F = \ker(f)$, alors F est un sous-espace vectoriel fermé propre de E. D'après (iii), il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $d(x, F) = 1$. D'après l'exercice 6.43, on a $d(x, F) = \dfrac{|f(x)|}{\|f\|}$. Par conséquent, on a $\|f\| = |f(x)|$.
Finalement, l'implication (v) $\Longrightarrow$ (i) est due à R.C. James, pour une preuve de cette implication, voir ([21], p. 115-134). ■

10.3 Espaces de Banach strictement convexes

Définition 10.3.1. Un espace normé $(E, \| \ \|)$ est dit **strictement convexe** si pour tout $x,\, y \in S_E$ tels que $x \neq y$ et pour tout $t \in]0,\, 1[$, on a $\|tx + (1-t)y\| < 1$. Autrement dit, la sphère unité S_E ne contient aucun segment non trivial.

Lemme 10.3.1. *Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $(E, \| \ \|)$ est strictement convexe.

(ii) Pour tout $x,\, y \in S_E$ tels que $x \neq y$, il existe $t \in]0,\, 1[$ tel que $\|tx + (1-t)y\| < 1$.

Démonstration. Il est clair que (i) $\Longrightarrow$ (ii). Réciproquement, supposons que l'on a la propriété (ii). Soient $x,\, y \in S_E$ tels que $x \neq y$ et soit $t_0 \in]0,\, 1[$ tel que $\|t_0x + (1-t_0)y\| < 1$. Autrement dit, on a $t_0x + (1-t_0)y \in \overset{\circ}{B}_E$. D'après la proposition 9.1.3, propriété 2, on a $[t_0x + (1-t_0)y,\, x[\subset \overset{\circ}{B}_E$ et $[t_0x + (1-t_0)y,\, y[\subset \overset{\circ}{B}_E$. Par conséquent, on a $]x,\, y[\subset \overset{\circ}{B}_E$. Autrement dit, pour tout $t \in]0,\, 1[$, on a $\|tx + (1-t)y\| < 1$. Donc $(E, \| \ \|)$ est strictement convexe. ■

Proposition 10.3.1. *Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $(E, \| \ \|)$ est strictement convexe.

(ii) Tout point de S_E est un point extrémal de B_E.

(iii) Pour tout $x,\, y \in S_E$ tels que $x \neq y$, on a $\left\| \dfrac{x+y}{2} \right\| < 1$.

(iv) Pour tout $x,\, y \in E$ tels que (x, y) soit libre, on a $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$.

(v) Pour tout $p \in]1,\, +\infty[$ et pour tout $x,\, y \in E$ tels que $x \neq y$, on a :
$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p < \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}.$$

(vi) Pour tout $x,\, y \in E$ vérifiant $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, il existe $a \geq 0$ et $b \geq 0$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $ax = by$.

(vii) Pour tout $x,\, y \in E$ vérifiant $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 = 0$, on a $x = y$.

Démonstration. Montrons que (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soient $z \in S_E$, $x, y \in B_E$ et $t \in]0, 1[$ tels que $tx+(1-t)y = z$. Si $\|x\| < 1$ ou $\|y\| < 1$, alors on a $1 = \|z\| = \|tx+(1-t)y\| \leq t\|x\|+ (1-t)\|y\| < t+(1-t) = 1$, ce qui est impossible. Donc on a forcément, $\|x\| = \|y\| = 1$. Autrement dit, on a $x, y \in S_E$. Si $x \neq y$, d'après (i), on a $1 = \|z\| = \|tx+(1-t)y\| < 1$, ce qui est impossible. Donc on a $x = y$, d'où $z = x = y$, ce qui prouve que z est un point extrémal de B_E.
L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est triviale.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (iv). Raisonnons par l'absurde en supposant que l'on ait (iii) et qu'il existe deux éléments $x, y \in E$ tels que (x, y) soit libre et que l'on ait $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$. On peut clairement supposer $0 < \|x\| \leq \|y\|$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| &\geq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| - \left\| \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\ &= \frac{\|x\|+\|y\|}{\|x\|} - \frac{\|y\|-\|x\|}{\|x\|} = 2\,. \end{aligned}$$

Ce qui contredit (iii).
Preuve de (iv) $\Longrightarrow$ (v). Puisque la fonction $t \longmapsto |t|^p$ est strictement convexe sur $]0, +\infty[$, alors pour tous $s > 0, t > 0$ tels que $s \neq t$, on a $\left|\frac{s+t}{2}\right|^p < \frac{|s|^p+|t|^p}{2}$. Après quelques vérifications, on en déduit que pour tous $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq b$, on a $\left|\frac{a+b}{2}\right|^p < \frac{|a|^p+|b|^p}{2}$. Soient $x, y \in E$ tels que $x \neq y$. Si (x, y) est libre, alors on a $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p < \left(\frac{\|x\|+\|y\|}{2}\right)^p \leq \frac{\|x\|^p+\|y\|^p}{2}$. Si $x = 0$ ou $y = 0$, l'inégalité à montrer est triviale. Supposons à présent $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $y = tx$, avec $t \in \mathbb{K}$ tel que $t \neq 1$. Alors on a $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p = \left|\frac{1+t}{2}\right|^p \|x\|^p < \frac{1+|t|^p}{2}\|x\|^p = \frac{\|x\|^p+\|y\|^p}{2}$.
L'implication (v) $\Longrightarrow$ (iii) est triviale. L'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i) résulte du lemme précédent.
L'équivalence (iv) $\Longleftrightarrow$ (vi) est triviale.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (vii). Soient $x, y \in E$ tels que $2\|x\|^2+2\|y\|^2-\|x+y\|^2 = 0$. On peut supposer $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Comme on a :

$$2\|x\|^2+2\|y\|^2-\|x+y\|^2 \geq 2\|x\|^2+2\|y\|^2-\big(\|x\|+\|y\|\big)^2 = \big(\|x\|-\|y\|\big)^2 \geq 0\,,$$

alors on a $\|x\| = \|y\|$ et $4 = \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|}\right\|^2$. On déduit de (iii) que l'on a $x = y$.
Preuve de (vii) $\Longrightarrow$ (iii). Soient x, $y \in S_E$. On a toujours $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1$. Si $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$, alors $\|x+y\|^2 = 4$, d'où $2\|x\|^2+2\|y\|^2-\|x+y\|^2 = 0$. On déduit de (vi) que l'on a $x = y$. Par conséquent, si $x \neq y$, alors on a $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$. ■

Exemple 10.3.1. Soit $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien. Alors H est strictement convexe, voir exercice 8.4.

Exemple 10.3.2. L'espace $(\mathbb{K}^2, \|\ \|_1)$ n'est pas strictement convexe. En effet, soient $x = (1, 0)$, $y = (0, 1) \in \mathbb{K}^2$, on a $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$ et $\|x+y\|_1 = 2$. On en déduit que pour tout $n \geq 2$, $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_1)$ n'est pas strictement convexe et que l'espace $(\ell^1, \|\ \|_1)$ n'est pas strictement convexe.

Exemple 10.3.3. L'espace $(\mathbb{K}^2, \| \|_\infty)$ n'est pas strictement convexe. En effet, soient $x = (1, 1)$, $y = (1, -1) \in \mathbb{K}^2$, alors on a $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$ et $\|x + y\|_\infty = 2$. On en déduit que pour tout $n \geq 2$, $(\mathbb{K}^n, \| \|_\infty)$ n'est pas strictement convexe et que l'espace $(\ell^\infty, \| \|_\infty)$ n'est pas strictement convexe.

Exemple 10.3.4. Soit X un espace compact de cardinal ≥ 2. Alors l'espace de Banach $(C(X), \| \|_\infty)$ n'est pas strictement convexe. En effet, soient $s, t \in X$ tels que $s \neq t$. D'après le théorème d'Urysohn, théorème 3.6.1, il existe $f : X \longrightarrow [0, 1]$ continue telle que $f(s) = 0$ et $f(t) = 1$. Soit $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1 sur X. Alors on a $\|f\|_\infty = \|\mathbf{1}\|_\infty = 1$ et $\|f + \mathbf{1}\|_\infty = 2$.

Proposition 10.3.2. *Soit $(E, \| \|)$ un espace normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $(E, \| \|)$ est strictement convexe.

(ii) Pour tout $x \in S_E$, il existe $f \in E^*$ telle que $f(x) = 1$ et $Re(f)(y) < 1$ pour tout $y \in B_E \setminus \{x\}$.

Démonstration. Montrons que (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $x \in S_E$. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in E^*$ telle que $f(x) = \|x\| = 1$ et $\|f\| = 1$. Soit $y \in B_E \setminus \{x\}$, on a $\mathrm{Re}(f)(y) \leq |f(y)| \leq \|y\| \leq 1$. Si $\mathrm{Re}(f)(y) = 1$, alors on a $\|y\| = 1$ et $1 = \mathrm{Re}(f)\big(\frac{x+y}{2}\big) \leq \big|f\big(\frac{x+y}{2}\big)\big| \leq \big\|\frac{x+y}{2}\big\| \leq 1$. D'où on a $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\big\|\frac{x+y}{2}\big\| = 1$, ce qui est impossible, car $(E, \| \|)$ est strictement convexe. Donc on a bien $\mathrm{Re}(f)(y) < 1$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soient $x, y \in S_E$ tels que $x \neq y$, et soit $z = \frac{x+y}{2}$. Alors on a $z \neq x$, $z \neq y$ et $\|z\| \leq 1$. Si $\|z\| = 1$, alors il existe $f \in E^*$ telle que $f(z) = 1$ et $\mathrm{Re}(f)(a) < 1$ pour tout $a \in B_E \setminus \{z\}$. Comme on a $1 = \mathrm{Re}(f)(z) = \dfrac{\mathrm{Re}(f)(x) + \mathrm{Re}(f)(y)}{2}$, alors $\mathrm{Re}(f)(x) \geq 1$ ou $\mathrm{Re}(f)(y) \geq 1$, d'où la contradiction car on a $\mathrm{Re}(f)(x) < 1$ et $\mathrm{Re}(f)(y) < 1$. Donc on a bien $\|z\| < 1$. Par conséquent, $(E, \| \|)$ est strictement convexe. ∎

Proposition 10.3.3. *Soit $(E, \| \|)$ un espace normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $(E, \| \|)$ est strictement convexe.

(ii) Pour toute partie A convexe, fermée et non vide de E et pour tout $x \in E$, il existe au plus un point $a \in A$ tel $d(x, A) = \|x - a\|$.

Démonstration. Montrons que (i) $\Longrightarrow$ (ii). Comme on a $d(x, A) = d(0, A - x)$ et $A - x$ est une partie convexe fermée non vide de E, on peut supposer $x = 0$. Si $0 \in A$, le résultat est évident. Donc on peut supposer $0 \notin A$, d'où on a $d(0, A) > 0$, car A est fermé. Comme pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, on a $d(0, \lambda A) = |\lambda| d(0, A)$, on peut supposer que $d(0, A) = 1$. D'où on a $A \cap B_E \subset S_E$. Soient $a, b \in A$ tels que $1 = d(0, A) = \|a\| = \|b\|$. Comme A est convexe, alors pour tout $t \in [0, 1]$, on a $ta + (1 - t)b \in A \cap B_E$. Par conséquent, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\|ta + (1 - t)b\| = 1$. Comme $(E, \| \|)$ est strictement convexe, alors on a $a = b$.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons que $(E, \| \|)$ n'est pas strictement convexe. D'après le lemme 10.3.1, il existe $x, y \in S_E$ tels que $x \neq y$ et pour tout $t \in [0, 1]$, on ait $tx + (1 - t)y \in S_E$. Alors $A = \{tx + (1 - t)y \ ; \ 0 \leq t \leq 1\}$ est une partie convexe, fermée et non vide de E et pour tout $a \in A$, on a $d(0, A) = \|a\| = 1$. Donc on n'a pas (ii). ∎

On déduit de la proposition précédente et du théorème 10.2.10 le corollaire suivant :

Corollaire 10.3.1. *Soit $(E, \| \|)$ un espace de Banach réflexif et strictement convexe. Alors pour toute partie A convexe, fermée et non vide de E et pour tout $x \in E$, il existe un unique point $a \in A$ tel $d(x, A) = \|x - a\|$.*

Définition 10.3.2. Soient $(E, \| \|)$, $(F, \| \|')$ deux espaces normés, U un ouvert de E et $x \in U$. Soit $f : U \longrightarrow F$ une application. On dit que f est **Gâteaux différentiable en** x s'il existe $T \in \mathscr{L}(E; F)$ telle que pour tout $h \in E$, on ait $\lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} = T(h)$.

Définition 10.3.3. Soit $(E, \| \|)$ un $\mathbb{R}$-espace normé. On dit que la norme $\| \|$ est Gâteaux différentiable si $\| \|$ est Gâteaux différentiable en tout point de $E \setminus \{0\}$.

Notez qu'une norme n'est jamais différentiable en 0.

Lemme 10.3.2. *Soient $(E, \| \|)$ un $\mathbb{R}$-espace normé et $x \in E \setminus \{0\}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) La norme $\| \|$ est Gâteaux différentiable en x.

(ii) Pour tout $h \in E$, $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\|x + th\| - \|x\|}{t}$ existe dans $\mathbb{R}$.

(ii) Pour tout $h \in E$, $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\|x + th\| + \|x - th\| - 2\|x\|}{t} = 0$.

Pour une preuve du lemme précédent, voir chapitre 10 du supplément.

Théorème 10.3.1. *Soient $(E, \| \|)$ un espace normé et $x \in E \setminus \{0\}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) La norme $\| \|$ est Gâteaux différentiable en x, quand on considère $(E, \| \|)$ comme un $\mathbb{R}$-espace normé.

(ii) Pour toutes suites $(f_n)_{n \geq 0}$ et $(g_n)_{n \geq 0}$ dans S_{E^*} vérifiant $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} g_n(x) = \|x\|$, la suite $(f_n - g_n)_{n \geq 0}$ converge $*$-faiblement vers 0 dans E^*.

(iii) Il existe une unique $f \in E^*$ telle $\|f\| = 1$ et $f(x) = \|x\|$.

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 10 du supplément.

Théorème 10.3.2. *Soit $(E, \| \|)$ un espace normé. Alors on a :*

1. Si E^* est strictement convexe, alors la norme $\| \|$ sur E est Gâteaux différentiable.

2. Si la norme sur E^* est Gâteaux différentiable, alors $(E, \| \|)$ est strictement convexe.

Démonstration. 1. Supposons que E^* est strictement convexe. Pour montrer que la norme $\| \|$ sur E est Gâteaux différentiable, d'après le théorème précédent, il suffit de montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe une unique $f \in E^*$ telle que $\|f\| = 1$ et $f(x) = \|x\|$. D'après le théorème de Hahn-Banach, corollaire 7.7.1, il existe $f \in E^*$ telle que $\|f\| = 1$ et $f(x) = \|x\|$. Soit $g \in E^*$ telle que $\|g\| = 1$ et $g(x) = \|x\|$. Alors on a $\|f + g\| \leq 2$ et comme on a $f(x) + g(x) = 2\|x\|$, d'où $\|f + g\| = 2$. Comme E^* est

strictement convexe, il résulte de la proposition 10.3.1 que l'on a $f = g$. Donc la norme $\| \ \|$ sur E est Gâteaux différentiable.
2. Supposons que la norme sur E^* est Gâteaux différentiable. Si $(E, \| \ \|)$ n'est pas strictement convexe, il résulte de la proposition 10.3.2 qu'il existe $x \in S_E$ tel que pour tout $f \in E^*$ vérifiant $f(x) = 1$, il existe $y \in B_E$ tel que $y \neq x$ et $\mathrm{Re}(f)(y) \geq 1$. Soit $f \in E^*$ telle que $\|f\| = 1$ et $f(x) = 1$, une telle f existe par le corollaire 7.7.1. Alors il existe $y \in B_E$ tel que $y \neq x$ et $\mathrm{Re}(f)(y) \geq 1$. D'où on a $\|y\| = 1$ et $f(y) = 1$. Soit $J : E \longrightarrow E^{**}$ l'application canonique. Alors $J(x)$ et $J(y)$ sont deux formes linéaires continues sur E^* telles que $\|J(x)\| = \|J(y)\| = 1$, $J(x)(f) = J(y)(f) = \|f\|$ et $J(x) \neq J(y)$. Ce qui contredit le fait que la norme sur E^* est Gâteaux différentiable. Donc $(E, \| \ \|)$ est bien strictement convexe. ■

Corollaire 10.3.2. *Soit $(E, \| \ \|)$ un espace de Banach réflexif. Alors on a :*

1. *E^* est strictement convexe si et seulement si la norme $\| \ \|$ sur E est Gâteaux différentiable.*
2. *La norme sur E^* est Gâteaux différentiable si et seulement si $(E, \| \ \|)$ est strictement convexe.*

10.4 Espaces de Banach uniformément convexes

On a vu, proposition 10.3.1, qu'un espace normé $(E, \| \ \|)$ est strictement convexe si pour tout $x, y \in S_E$ tels que $x \neq y$, on a $0 < 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|$. Mais on n'a pas de contrôle sur $1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|$. Autrement dit, la quantité $1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|$ n'est pas nécessairement uniformément minorée. D'où la nécessité d'introduire la définition suivante :

Définition 10.4.1. Un espace normé $(E, \| \ \|)$ est dit **uniformément convexe** si pour tout $\varepsilon \in]0, 2]$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in S_E$ vérifiant $\|x - y\| \geq \varepsilon$, on ait $\delta \leq 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|$.
Une autre manière d'énoncer la définition est :
Pour tout $\varepsilon \in]0, 2]$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in S_E$ vérifiant $1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < \delta$, on ait $\|x - y\| < \varepsilon$.

Notons que pour tous $x \in S_E$ et $y \in B_E$, on a $0 \leq 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \frac{\|x-y\|}{2}$. En effet, il suffit d'écrire $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$.

Exemple 10.4.1. Soit $(H, \langle \, , \, \rangle)$ un espace préhilbertien. Alors H est uniformément convexe. En effet, d'après l'identité du parallélogramme, pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\|x + y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) - \|x - y\|^2 .$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $x, y \in E$ tels que $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ et $\|x - y\| \geq \varepsilon$, alors on a $\|x + y\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2$, d'où $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$. Or on a $\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{8}$, d'où $\frac{\varepsilon^2}{8} \leq 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|$. Donc $\delta = \frac{\varepsilon^2}{8}$ convient.

Remarque 10.4.1. Il est clair qu'un espace normé uniformément convexe est strictement convexe. Par conséquent, les espaces $(\mathbb{K}^n, \| \|_1)$, $(\mathbb{K}^n, \| \|_\infty)$, pour $n \geq 2$, $(\ell^1, \| \|_1)$ et $(\ell^\infty, \| \|_\infty)$ ne sont pas uniformément convexe. Notons aussi qu'il y a des espaces normés strictement convexes qui ne sont pas uniformément convexes, voir exercice 10.31 du supplément.

Proposition 10.4.1 (Clarkson). *Pour tout $1 < p < +\infty$, l'espace de Banach $(\ell^p, \| \|_p)$ est uniformément convexe.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 10 du supplément.

Proposition 10.4.2. *Soit $(E, \| \|)$ un espace normé de dimension finie. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'espace $(E, \| \|)$ est uniformément convexe.

(ii) L'espace $(E, \| \|)$ est strictement convexe.

Démonstration. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte de la remarque 10.4.1.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Comme E est de dimension finie, alors S_E est compacte. Comme $(E, \| \|)$ est strictement convexe, alors pour tous $x, y \in S_E$ tels que $x \neq y$, on a $0 < 1 - \left\| \dfrac{x+y}{2} \right\|$. Soit $\varepsilon > 0$, comme l'ensemble $\big\{(x,y) \in S_E \times S_E \ ; \ \|x-y\| \geq \varepsilon\big\}$ est compact, alors $\delta = \inf \left\{ 1 - \left\| \dfrac{x+y}{2} \right\| \ ; \ x, y \in S_E \text{ et } \|x-y\| \geq \varepsilon \right\} > 0$, donc $(E, \| \|)$ est uniformément convexe. ■

Proposition 10.4.3. *Soit $(E, \| \|)$ un espace normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'espace $(E, \| \|)$ est uniformément convexe.

(ii) Pour toutes suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ dans S_E vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\| \dfrac{x_n+y_n}{2} \right\| = 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

(iii) Pour toutes suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ dans $(E, \| \|)$ telles que $(x_n)_{n\geq 0}$ soit bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \big[2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|x_n+y_n\|^2\big] = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 10 du supplément.

Lemme 10.4.1. *Soit $(E, \| \|)$ un espace normé uniformément convexe. Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans S_E telle que $\lim\limits_{n,m\to+\infty} \left\| \dfrac{x_n+x_m}{2} \right\| = 1$, alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(E, \| \|)$ est uniformément convexe, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in S_E$ vérifiant $\left\| \dfrac{x+y}{2} \right\| > 1 - \delta$, on ait $\|x-y\| < \varepsilon$. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans S_E telle que $\lim\limits_{n,m\to+\infty} \left\| \dfrac{x_n+x_m}{2} \right\| = 1$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$, on ait $1 - \delta < \left\| \dfrac{x_n+x_m}{2} \right\|$. D'où pour tout $n, m \geq N$, on a $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. Autrement dit, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy. ■

Proposition 10.4.4. *Soit C un convexe fermé non vide d'un espace de Banach $(E, \|\ \|)$ uniformément convexe. Alors pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in C$ tel que $d(x, C) = \|x - y\|$.*

Démonstration. Le résultat est évident si $x \in C$. Supposons donc $x \notin C$, et soit $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite dans C telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x - y_n\| = d(x, C)$. On pose $t_n = \dfrac{1}{\|x - y_n\|}$ et $z_n = t_n(x - y_n)$, alors $\|z_n\| = 1$ et on a :

$$z_n + z_m = t_n(x - y_n) + t_m(x - y_m) = (t_n + t_m)\Big[x - \Big(\frac{t_n}{t_n + t_m}y_n + \frac{t_m}{t_n + t_m}y_m\Big)\Big].$$

Comme C est convexe, alors on a $\dfrac{t_n}{t_n + t_m}y_n + \dfrac{t_m}{t_n + t_m}y_m \in C$, d'où :

$$\Big\|x - \Big(\frac{t_n}{t_n + t_m}y_n + \frac{t_m}{t_n + t_m}y_m\Big)\Big\| \geq d(x, C).$$

Par conséquent, on a $d(x, C)(t_n + t_m) \leq \|z_n + z_m\| \leq 2$. Or on a $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \dfrac{1}{d(x, C)}$, d'où $\lim\limits_{n,m\to+\infty} \Big\|\dfrac{z_n + z_m}{2}\Big\| = 1$. Il résulte du lemme précédent que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $(E, \|\ \|)$, donc elle converge vers un $z \in E$. Comme, pour tout $n \geq 0$, on a $y_n = x - \dfrac{z_n}{t_n}$, alors la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est convergente vers un élément $y \in C$, car C est fermé. D'où on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x - y_n\| = \|x - y\|$. Par conséquent, on a $\|x - y\| = d(x, C)$.
L'unicité résulte de la proposition 10.3.3, mais donnons une preuve directe. Soient y, $y' \in C$ tels que $\|x - y\| = d(x, C) = \|x - y'\|$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $y_{2n+1} = y$ et $y_{2n} = y'$. Alors $(y_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans C telle que $\|x - y_n\| = d(x, C)$, pour tout $n \geq 0$. Il résulte de ce qui précède que la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est convergente, d'où on a $y = y'$. ■

Proposition 10.4.5. *Soit $(E, \|\ \|)$ un espace de Banach uniformément convexe. Alors pour tout $f \in E^* \setminus \{0\}$, il existe un unique $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $\|f\| = f(x)$.*

Démonstration. Soit $f \in E^*$, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans E telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|x_n\| = 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \|f\|$. Comme pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{1}{\|f\|}|f(x_n) + f(x_n)| \leq \|x_n + x_m\| \leq 2$, on en déduit que $\lim\limits_{n,m\to+\infty} \Big\|\dfrac{x_n + x_m}{2}\Big\| = 1$. Il résulte du lemme précédent que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $(E, \|\ \|)$, donc elle converge vers un élément $x \in E$. D'où on a $\|x\| = 1$ et $\|f\| = f(x)$.
Unicité. Soit $y \in E$ tel que $\|y\| = 1$ et $\|f\| = f(y)$. Alors on a $\|f\| = \frac{f(x)+f(y)}{2} = f\big(\frac{x+y}{2}\big) \leq \|f\|\,\big\|\frac{x+y}{2}\big\|$, d'où $\big\|\frac{x+y}{2}\big\| = 1$. Comme $(E, \|\ \|)$ est strictement convexe, alors on a $x = y$. ■

Théorème 10.4.1. *Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé uniformément convexe, $x \in E$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans E. Alors $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x pour la norme si et seulement si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers x et $\big(\|x_n\|\big)_{n\geq 0}$ converge vers $\|x\|$.*

Démonstration. On a vu, proposition 10.2.1, que dans tout espace normé, si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x pour la norme, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers x et $\big(\|x_n\|\big)_{n\geq 0}$

converge vers $\|x\|$.
Réciproquement, supposons que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers x et que $\big(\|x_n\|\big)_{n\geq 0}$ converge vers $\|x\|$. Si $x=0$, c'est évident. Supposons donc $x\neq 0$. Alors il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, on ait $x_n\neq 0$. Soit $\varepsilon>0$. Comme $(E,\|\ \|)$ est uniformément convexe, il existe $\delta>0$ tel que pour tout $y,\, z\in S_E$ vérifiant $\left\|\dfrac{y+z}{2}\right\|>1-\delta$, on ait $\|y-z\|<\varepsilon$. Comme $(x_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers x, alors la suite $\left(\frac{1}{2}\Big(\dfrac{x_n}{\|x_n\|}+\dfrac{x}{\|x\|}\Big)\right)_{n\geq N}$ converge faiblement vers $\dfrac{x}{\|x\|}$. D'après la proposition 10.2.1, on a alors $1=\left\|\dfrac{x}{\|x\|}\right\|\leq\liminf\limits_{n\to+\infty}\left\|\frac{1}{2}\Big[\dfrac{x_n}{\|x_n\|}+\dfrac{x}{\|x\|}\Big]\right\|$. Donc, il existe $n_0\geq N$ tel que pour tout $n\geq n_0$, on ait $\left\|\frac{1}{2}\Big[\dfrac{x_n}{\|x_n\|}+\dfrac{x}{\|x\|}\Big]\right\|>1-\delta$. Par conséquent, pour tout $n\geq n_0$, on a $\left\|\dfrac{x_n}{\|x_n\|}-\dfrac{x}{\|x\|}\right\|<\varepsilon$. Autrement dit, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|\dfrac{x_n}{\|x_n\|}-\dfrac{x}{\|x\|}\right\|=0$. Comme pour tout $n\geq N$, on a $x_n=\|x_n\|\Big(\dfrac{x_n}{\|x_n\|}-\dfrac{x}{\|x\|}\Big)+\|x_n\|\dfrac{x}{\|x\|}$, on en déduit que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x pour la norme. ∎

Corollaire 10.4.1. *Soit $(E,\|\ \|)$ un espace normé uniformément convexe. Soient $x, x_n\in S_E$. Alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x pour la norme si et seulement si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers x.*

Remarque 10.4.2. On a vu, proposition 10.2.2, que dans l'espace de Banach $(\ell^1,\|\ \|_1)$, une suite est convergente si et seulement elle est faiblement convergente. Pourtant, $(\ell^1,\|\ \|_1)$ n'est pas uniformément convexe.

Théorème 10.4.2 (Milman-Pettis). *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 10 du supplément.

Notez que l'on aurai pu déduire la proposition 10.4.4 du corollaire 10.3.1 et du théorème précédent, mais la preuve donnée pour cette proposition est directe et simple.

10.5 Exercices

Exercice 10.1. Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de son dual algébrique E' tels que F et G séparent les points de E. Montrer que la topologie $\sigma(E,G)$ est plus fine que la topologie $\sigma(E,F)$ si et seulement si $F\subset G$.
Solution. Supposons d'abord que l'on a $F\subset G$. Puisque $\sigma(E,F)$ est la topologie la moins fine sur E rendant continue tous les éléments de F et comme la topologie $\sigma(E,G)$ rend continue tous les éléments de G, alors on a $\sigma(E,F)\subset\sigma(E,G)$.
Réciproquement, supposons que l'on a $\sigma(E,F)\subset\sigma(E,G)$. Alors toute forme linéaire sur E continue pour $\sigma(E,F)$ est aussi continue pour $\sigma(E,G)$. On déduit du théorème 10.1.1 que l'on a $F\subset G$.

Exercice 10.2. Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de son dual algébrique E'. Montrer que F sépare les points de E si et seulement si F est dense dans

l'espace localement convexe $(E', \sigma(E', E))$.
Solution. Il suffit de combiner le théorème 10.1.1 et le corollaire 9.4.3.

Exercice 10.3. Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et A un sous-ensemble non vide de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) A est précompact.

(ii) Pour tout voisinage V de 0 dans E, il existe un sous-ensemble fini D dans A tel que $A \subset D + V$.

Solution. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) est triviale, voir définition 9.1.5.
Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit V un voisinage de 0 dans E. Alors il existe un voisinage équilibré W de 0 dans E tel que $W+W \subset V$. Par hypothèse, A est précompact, donc il existe $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} x_i + W$. On peut aussi supposer que pour tout i, on a $A \cap (x_i + W) \neq \emptyset$. Pour tout i, il existe $a_i \in A$ et $z_i \in W$ tels que $x_i + z_i = a_i$, d'où $x_i = a_i - z_i \in a_i + W$. Par conséquent, on a $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} a_i + W + W \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} a_i + V$.

Exercice 10.4. Soient (E, F) un système dual et A un sous-ensemble non vide de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) A est borné dans l'espace vectoriel topologique $(E, \sigma(E, F))$.

(ii) A est précompact dans l'espace vectoriel topologique $(E, \sigma(E, F))$.

(iii) Pour tout $f \in F$, on a $\sup\limits_{x \in A} |f(x)| < +\infty$.

(iv) Le polaire A° est absorbant.

Solution. L'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) résulte du théorème 9.2.2 et de la remarque 9.2.5.
L'équivalence (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) est triviale.
Comme tout sous-ensemble précompact dans un espace vectoriel topologique est borné, d'où l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i).
Montrons l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Rappelons d'abord, voir remarque 10.1.1, que la topologie $\sigma(E, F)$ est la topologie image réciproque sur E associée à l'application linéaire injective suivante :

$$\begin{array}{rccc} T : & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^F \\ & x & \longmapsto & (f(x))_{f \in F} \end{array}$$

Par hypothèse, pour tout $f \in F$, on a $\sup\limits_{x \in A} |f(x)| < +\infty$, donc $T(A)$ est relativement compact dans $\mathbb{K}^F$, voir théorème 5.1.1, d'où $T(A)$ est précompact. Soit V un voisinage de 0 dans $(E, \sigma(E, F))$. Alors il existe un voisinage W de 0 dans $\mathbb{K}^F$ tel que $V = T^{-1}(W)$. Comme $T(A)$ est précompact, alors il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que $T(A) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} T(a_i) + W$. D'où on a :

$$A \subset T^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} T(a_i) + W \Big) = \bigcup_{i=1}^{n} T^{-1}\Big(T(a_i) + W\Big) = \bigcup_{i=1}^{n} a_i + T^{-1}(W) = \bigcup_{i=1}^{n} a_i + V .$$

Donc A est précompact dans l'espace vectoriel topologique $(E, \sigma(E, F))$.

Exercice 10.5. Soit $(E,\,F)$ un système dual. Montrer que les polaires dans E des ensembles compacts, convexes et équilibrés dans $(F,\,\sigma(F,E))$ forment une base locale pour la topologie $\mathcal{M}(E,F)$ sur E.
Solution. Si B est un compact, convexe et équilibré dans $(F,\,\sigma(F,E))$, on note p_B la semi-norme sur E définie par $p_B(x) = \max_{f\in B}|f(x)|$, pour tout $x \in E$. D'où on a ${}^\circ B = \{x \in E \;;\; p_B(x) \le 1\}$. Soient $B_1,\dots,B_n$ des compacts, convexes et équilibrés dans $(F,\,\sigma(F,E))$. Soit $B = \mathrm{conv}(B_1 \cup \ldots \cup B_n)$, alors B est évidemment convexe, et il est équilibré, voir exercice 9.24. D'après le théorème 9.5.1, B est aussi compact dans $(F,\,\sigma(F,E))$. Or on a ${}^\circ B = \{x \in E \;;\; p_B(x) \le 1\} = \bigcap_{i=1}^{n}\{x \in E \;;\; p_{B_i}(x) \le 1\}$, alors on déduit de la définition de la topologie $\mathcal{M}(E,F)$ sur E et du théorème 9.2.2 que les polaires dans E des ensembles compacts, convexes et équilibrés dans $(F,\,\sigma(F,E))$ forment une base locale pour la topologie $\mathcal{M}(E,F)$ sur E.

Exercice 10.6. Soient $(E,\,\mathcal{T})$ un espace localement convexe et B une partie du dual topologique E^*. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) B est équicontinue.

(ii) B est contenue dans le polaire d'un voisinage de 0 dans E.

(iii) ${}^\circ B$ est un voisinage de 0 dans E.

Solution. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Par hypothèse, B est équicontinue, donc il existe un voisinage V de 0 dans E tel que pour tout $x \in V$ et pour tout $f \in B$, on ait $|f(x)| \le 1$, d'où on a $B \subset V^\circ$.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Supposons qu'il existe un voisinage V de 0 dans E tel que $B \subset V^\circ$, d'où on a $V \subset {}^\circ(V^\circ) \subset {}^\circ B$. Donc ${}^\circ B$ est un voisinage de 0 dans E.
Montrons l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i). Par hypothèse, ${}^\circ B$ est un voisinage de 0 dans E. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\varepsilon\,{}^\circ B$ est un voisinage de 0 dans E et pour tout $x \in \varepsilon\,{}^\circ B$ et pour tout $f \in B$, on a $|f(x)| \le \varepsilon$, donc B est équicontinue.

Exercice 10.7. Soit $(E,\,\mathcal{T})$ un espace de Mackey. Montrer que toute partie convexe, équilibrée et compacte dans E^* pour la topologie $*$-faible est équicontinue.
Solution. Soit B une partie convexe, équilibrée et compacte dans $(E^*,\,\sigma(E^*,E))$. D'après l'exercice 10.5, ${}^\circ B$ est un voisinage de 0 dans E pour la topologie $\mathcal{M}(E,E^*) = \mathcal{T}$. On déduit de l'exercice précédent que B est équicontinue.

Exercice 10.8. Soit $(E,\,\|\;\|)$ un espace de Banach. Montrer que $(E,\,\|\;\|)$ est un espace de Mackey.
Solution. Soit $\mathcal{T}$ la topologie sur E associée à la norme. D'après le théorème de Mackey, on a $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}(E,E^*)$.
Réciproquement, soit V un voisinage de 0 dans $(E,\,\mathcal{M}(E,E^*))$. D'après l'exercice 10.5, il existe un compact, convexe et équilibré K de E^* pour la topologie $*$-faible tel que ${}^\circ K \subset V$. Comme $(E,\,\|\;\|)$ est un espace de Banach et comme K est $*$-faiblement borné, alors K est aussi borné dans l'espace normé dual $(E^*,\,\|\;\|)$, voir corollaire 10.1.7. Donc il existe $t > 0$ tel que $K \subset tB_{E^*}$. Par conséquent, on a $\frac{1}{t}B_E = {}^\circ(tB_{E^*}) \subset {}^\circ K \subset V$. Donc V est aussi voisinage de 0 dans $(E,\,\|\;\|)$. On en déduit que l'on a $\mathcal{M}(E,E^*) \subset \mathcal{T}$. Par

conséquent, on a $\mathcal{M}(E, E^*) = \mathcal{T}$, donc $(E, \| \|)$ est bien un espace de Mackey.

Exercice 10.9. Soit $(E, \| \|)$ un espace de Banach. Soit $\mathcal{T}_1$ une topologie sur E telle que $(E, \mathcal{T}_1)$ soit un espace localement convexe, $(E, \mathcal{T}_1)^* = E^*$ et telle que $(E, \mathcal{T}_1)$ admette une base locale dénombrable. Montrer que $\mathcal{T}_1$ coïncide avec la topologie associée à la norme sur E.
Solution. Soit $\mathcal{T}$ la topologie sur E associée à la norme. D'après le théorème de Mackey et d'après l'exercice précédent, on a $\sigma(E, E^*) \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$. Soit V un voisinage de 0 dans $(E, \| \|)$. Soit B un ensemble borné dans $(E, \mathcal{T}_1)$. Comme on a $\sigma(E, E^*) \subset \mathcal{T}_1$, alors B est borné dans E pour la topologie faible. D'après le corollaire 10.1.6, B est borné dans $(E, \| \|)$. Donc il existe un $s > 0$ tel que $B \subset sV$. On déduit de l'exercice 9.8 que V est un voisinage de 0 dans $(E, \mathcal{T}_1)$. Par conséquent, on a $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1$. Donc on a bien $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}$.

Exercice 10.10. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique.

1. Soit p une semi-norme continue sur E. Montrer que pour tout $z \in E$, il existe $f \in E^*$ telle que $f(z) = p(z)$ et $|f(x)| \leq p(x)$, pour tout $x \in E$.

2. On suppose, si on veut, que E^* sépare les points de E. Soient U un voisinage convexe et équilibré de 0 dans $(E, \mathcal{T})$ et U° le polaire de U dans E^*. Soit μ_U la jauge de U. Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\mu_U(x) = \sup\big\{|f(x)| \; ; \; f \in U^\circ\big\}$.

Solution. 1. Soient $z \in E$ et $F = \mathbb{K}z$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, soit $g(\lambda z) = \lambda p(z)$. Alors g est une forme linéaire sur le sous-espace vectoriel F telle que $g(z) = p(z)$ et on ait $|g(\lambda z)| \leq p(\lambda z)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. D'après le théorème de Hahn-Banach, théorème 7.7.2, il existe une forme linéaire f sur E prolongeant g et telle que $|f(x)| \leq p(x)$, pour tout $x \in E$. Puisque p est continue, on déduit de la proposition 9.1.12 et du lemme 9.2.1 que f est continue.
2. Soit $x \in E$. Pour tout $r > \mu_U(x)$, on a $x \in rU$, voir remarque 7.6.2, d'où pour tout $f \in U^\circ$, on a $|f(x)| \leq r$. Par conséquent, on a $|f(x)| \leq \mu_U(x)$, d'où $\sup\big\{|f(x)| \; ; \; f \in U^\circ\big\} \leq \mu_U(x)$. D'après la proposition 9.2.2, μ_U est une semi-norme continue sur E. D'après 1, il existe $f \in E^*$ telle que $f(x) = \mu_U(x)$ et $|f(y)| \leq \mu_U(y)$, pour tout $y \in E$. Comme pour tout $y \in U$, on a $\mu_U(y) \leq 1$, alors $f \in U^\circ$. Par conséquent, on a bien $\mu_U(x) = \sup\big\{|f(x)| \; ; \; f \in U^\circ\big\}$.

Exercice 10.11. Soit $(E, \| \|)$ un espace normé de dimension infinie.

1. Soient $a \in E$ et $S_a = \big\{x \in E \; ; \; \|x - a\| = 1\big\}$. Montrer que $a \in \overline{S_a}^w$.

2. Soit $S_E = \big\{x \in E \; ; \; \|x\| = 1\big\}$. Montrer que l'on a $\overline{S_E}^w = B_E$. Donc S_E n'est pas fermé pour la topologie faible.

3. Soit $U = \big\{x \in E \; ; \; \|x\| < 1\big\}$. Montrer que l'intérieur de U pour la topologie faible est vide. Donc U n'est pas ouvert pour la topologie faible.

Solution. 1. Soit V un voisinage de 0 dans E pour la topologie faible. Comme E est de dimension infinie, il résulte du lemme 10.1.1 que V contient un sous-espace vectoriel F de dimension infinie, donc il existe $y \in F$ tel que $\|y\| = 1$. Soit $x = a + y$, alors on a $x \in S_a \cap (a + V)$, donc on a $S_a \cap (a + V) \neq \emptyset$. Par conséquent, $a \in \overline{S_a}^w$.
2. Comme B_E est convexe et fermé dans $(E, \| \|)$, il résulte du théorème 10.1.2 que B_E

est aussi fermé pour la topologie faible, d'où on a $\overline{S_E}^w \subset B_E$.
Réciproquement, Soit $x \in E$ tel que $\|x\| < 1$. D'après 1, il existe une famille filtrante croissante $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'éléments de E telle que $\|x_\lambda - x\| = 1$, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et telle que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge faiblement vers x. Soit D_λ la droite d'équation $(1-t)x+tx_\lambda$, avec $t \in \mathbb{K}$. Comme D_λ est connexe, alors D_λ intersecte la sphère S_E en un point y_λ, voir proposition 4.1.4. Autrement dit, il existe $t_\lambda \in \mathbb{K}$ et $y_\lambda \in S_E$ tels que $y_\lambda = (1-t_\lambda)x + t_\lambda x_\lambda$, d'où on a $y_\lambda - x = t_\lambda(x_\lambda - x)$. Alors on a $|t_\lambda| = \|t_\lambda(x_\lambda - x)\| = \|y_\lambda - x\| \leq 2$, et pour tout $f \in E^*$, on a $f(y_\lambda) - f(x) = t_\lambda f(x_\lambda - x)$. Comme on a $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} f(x_\lambda - x) = 0$ et $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est bornée dans $\mathbb{K}$, alors on a $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} f(y_\lambda) = f(x)$. Donc la famille filtrante croissante $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge faiblement vers x, d'où $x \in \overline{S_E}^w$. Par conséquent, on a $\overline{S_E}^w = B_E$.
3. Comme U est borné dans $(E, \|\ \|)$, il résulte de la proposition 10.1.1 que U est d'intérieur vide pour la topologie faible.

Remarque 10.5.1. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace normé de dimension infinie. On fait le même raisonnement comme dans l'exercice précédent et on montre que l'adhérence de S_{E^*} pour la topologie $*$-faible est B_{E^*}.

Exercice 10.12. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace normé de dimension infinie. Peut-on recouvrir $S_E = \{x \in E\ ;\ \|x\| = 1\}$ par un nombre fini de boules fermées dont aucune ne contient l'origine de E ?
Solution. Non, ceci résulte de l'exercice précédent et du théorème 10.1.2.

Exercice 10.13. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans E. Montrer que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers 0 si et seulement si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 pour la norme.
Solution. D'après la proposition 10.2.1, si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 pour la norme, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 pour la topologie faible.
Réciproquement, supposons que $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans E et que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 pour la topologie faible. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$, on ait $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$. Autrement dit, pour tout $n, m \geq N$, on a $x_n \in x_m + \varepsilon B_E$. Comme $x_m + \varepsilon B_E$ est faiblement fermé et comme $(x_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers 0, alors on a $0 \in x_m + \varepsilon B_E$, pour tout $m \geq N$. Donc pour tout $m \geq N$, on a $\|x_m\| \leq \varepsilon$. Par conséquent, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 pour la norme.

Exercice 10.14. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé séparable et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée dans E^* pour la norme. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ et $f \in E^*$ telles que pour tout $x \in E$, on ait $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$.
Solution. Puisque la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est bornée dans E^* pour la norme, il résulte du corollaire 10.1.2 que l'ensemble $A = \{f_n\ ;\ n \geq 0\}$ est relativement $*$-faiblement compact. Comme $(E, \|\ \|)$ est séparable, il résulte du théorème 10.2.3 que l'adhérence de A pour la topologie $*$-faible est métrisable. Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ admet une sous-suite convergente pour la topologie $*$-faible. Autrement dit, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ de $(f_n)_{n\geq 0}$ et $f \in E^*$ telles que pour tout $x \in E$, on ait $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$.

Exercice 10.15. Soient $E = \ell^\infty$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans E^* définie par $f_n(x) = x_n$, pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est bornée pour la norme et n'admet pas de sous-suite convergeant pour la topologie $*$-faible.

Solution. Pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, on a $|f_n(x)| = |x_n| \leq \|x\|_\infty$, d'où on a $\|f_n\| \leq 1$. Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est bornée pour la norme. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ de $(f_n)_{n\geq 0}$ et $f \in E^*$ telles que pour tout $x \in E$, on ait $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$. Alors il existe une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 0}$ de $\mathbb{N}$ telle que pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, la suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ est convergente dans $\mathbb{K}$ (vers $f(x)$). Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$ défini par $x_n = 0$, si $n \notin \{n_k \ ; \ k \geq 0\}$ et

$$x_{n_k} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k \quad \text{est pair}\,, \\ -1 & \text{si} \quad k \quad \text{est impair}\,. \end{cases}$$

Alors la suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ n'est pas convergente dans $\mathbb{K}$, d'où la contradiction. Donc la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ n'admet pas de sous-suite convergeant pour la topologie $*$-faible.

Rappelons, remarque 10.2.1, que pour tout $p \in]1, +\infty[$, l'espace de Banach ℓ^p contient des suites qui convergent faiblement et non pour la norme. Rappelons aussi, proposition 10.2.2, que dans l'espace de Banach ℓ^1, une suite est faiblement convergente si et seulement si elle est convergente pour la norme.

Exercice 10.16. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $(f_k)_{k\geq 0}$ une suite de formes linéaires continues sur l'espace de Banach ℓ^p. Rappelons, propositions 7.4.2 et 7.4.4, que chaque f_k est donnée par un élément $\xi_k = (y_{k,n})_{n\geq 0} \in \ell^q$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^p$, on a $f_k(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, y_{k,n}$. Soient f une forme linéaire continue sur ℓ^p et $\xi = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^q$ tels que pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^p$, on ait $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, y_n$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) La suite $(f_k)_{k\geq 0}$ converge vers f pour la topologie $*$-faible.

(ii) La suite $(\xi_k)_{k\geq 0}$ est bornée dans l'espace de Banach ℓ^q et pour tout $n \geq 0$, la suite $(y_{k,n})_{k\geq 0}$ converge vers y_n dans $\mathbb{K}$.

Solution. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Puisque la suite $(f_k)_{k\geq 0}$ est convergente pour la topologie $*$-faible, alors $(f_k)_{k\geq 0}$ est bornée pour la topologie $*$-faible. On déduit alors du corollaire 10.1.7 que la suite $(\xi_k)_{k\geq 0}$ est bornée dans l'espace de Banach ℓ^q. D'autre part, $(f_k)_{k\geq 0}$ converge vers f pour la topologie $*$-faible si et seulement si pour tout $x \in \ell^p$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x)$. Soient $n \geq 0$ et $x = \mathbf{e}_n \in \ell^p$, on a $f_k(\mathbf{e}_n) = y_{k,n}$ et $f(\mathbf{e}_n) = y_n$. Par conséquent, la suite $(y_{k,n})_{k\geq 0}$ converge vers y_n dans $\mathbb{K}$.
Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Par hypothèse, la suite $(f_k)_{k\geq 0}$ est bornée pour la norme dans l'espace dual de l'espace de Banach ℓ^p et pour tout $n \geq 0$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(\mathbf{e}_n) = f(\mathbf{e}_n)$ dans $\mathbb{K}$. Comme l'ensemble $D = \{\mathbf{e}_n \ ; \ n \geq 0\}$ est une partie totale de l'espace de Banach ℓ^p, on déduit de l'exercice 7.14 que pour tout $x \in \ell^p$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x)$ dans $\mathbb{K}$. Autrement dit, la suite $(f_k)_{k\geq 0}$ converge vers f pour la topologie $*$-faible.

Exercice 10.17. Soient X un espace compact et $E = C(X)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur X et à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$, muni de la norme $\| \ \|_\infty$. Pour

tout $x \in X$ soit $\delta_x \in E^*$ définie par $\delta_x(f) = f(x)$, pour tout $f \in E$. Montrer que l'application $T : x \longmapsto \delta_x$ est continue de X dans E^*, muni de la topologie $*$-faible.
Solution. Pour tout $f \in E$, soit $J(f)$ la forme linéaire sur E^* définie par $J(f)(\Lambda) = \Lambda(f)$, pour tout $\Lambda \in E^*$. Par définition, la topologie $*$-faible sur E^* est la topologie la moins fine sur E^* rendant continue toutes les formes linéaires $J(f)$, lorsque f parcourt E. D'après la proposition 1.4.1, T est continue si et seulement si pour tout $f \in E$, l'application $J(f) \circ T$ est continue de X dans $\mathbb{K}$. Or on a $J(f) \circ T = f$, donc T est continue de X dans E^*, muni de la topologie $*$-faible.

Exercice 10.18. Soit $E = C([0,\, 1])$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,\, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de la norme $\| \; \|_\infty$. Soit $\Lambda \in B_{E^*}$ définie par $\Lambda(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$, pour tout $f \in E$. Montrer que $\Lambda \notin \overline{\mathrm{conv}}(e(B_{E^*}))$, l'adhérence est par rapport à la norme.
Solution. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'on a $\Lambda \in \overline{\mathrm{conv}}(e(B_{E^*}))$. D'après les propositions 9.5.1 et 10.2.9, il existe $t_1, \ldots, t_n \in [0,\, 1]$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ avec $|\lambda_1| = \cdots = |\lambda_n| = 1$ et il existe $\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_n \geq 0$ avec $\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ tels que $\left\| \Lambda - \displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \delta_{t_i} \right\| < \frac{1}{2}$. Pour tout p suffisant grand, on peut construire facilement une fonction affine positive non nulle f_p sur $[0,\, 1]$ telle que $\|f_p\|_\infty = 1$, $\Lambda(f) \geq 1 - \frac{n}{p}$ et telle que $f_p(t_i) = 0$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Par conséquent, on a $1 - \frac{n}{p} < \frac{1}{2}$, pour tout p suffisant grand. On fait tendre p vers $+\infty$, on obtient $1 \leq \frac{1}{2}$, d'où la contradiction, donc $\Lambda \notin \overline{\mathrm{conv}}(e(B_{E^*}))$.

Exercice 10.19. Soit $(E, \| \; \|)$ un espace normé séparable. Montrer que E^* est isométriquement isomorphe à un sous-espace de ℓ^∞.
Solution. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite dense dans S_E, voir proposition 6.8.3. Alors l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} E^* & \longrightarrow & \ell^\infty \\ f & \longmapsto & (f(x_n))_{n \geq 0} \end{array}$$

est isométrique.

Pour plus d'exercices, voir le supplément associé à ce livre.

Chapitre 11

GROUPES TOPOLOGIQUES

Ce chapitre n'est autre qu'une introduction aux groupes topologiques.

11.1 Groupes topologiques

Définition 11.1.1. On appelle **groupe topologique** un groupe G muni d'une topologie telle que les applications suivantes soient continues.

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

Exemple 11.1.1. Soit G un groupe.

1. Si $\mathcal{T}_d$ est la topologie discrète sur G, alors G muni de $\mathcal{T}_d$ est un groupe topologique appelé **groupe discret**.

2. Si $\mathcal{T}_g$ est la topologie grossière sur G, alors G muni de $\mathcal{T}_g$ est un groupe topologique.

Exemple 11.1.2. 1. Le groupe $\mathbb{R}$ (*resp.* $\mathbb{Q}$) muni de l'addition et de la topologie usuelle est un groupe topologique.

2. Tout espace vectoriel topologique muni de l'addition est un groupe topologique.

3. Soient E un espace de Banach et $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues bijectives de E dans E, alors muni de la composition et de la topologie induite par $\mathscr{L}(E)$ est un groupe topologique. En particulier, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ munis de la multiplication sont des groupes topologiques.

4. Soient H un espace de Hilbert et $\mathcal{U}$ l'ensemble des opérateurs unitaires sur H, alors $\mathcal{U}$ muni de la composition et de la topologie induite par $\mathscr{L}(H)$ est un groupe topologique. En particulier, $\mathbb{S}^1$ muni de la multiplication est un groupe topologique.

5. Si G est un groupe, on introduit une nouvelle loi de composition interne sur G en posant pour tout $g, h \in G$, $g.h = hg$. Alors G muni de cette nouvelle loi est un groupe, appelé **groupe opposé** de G et sera noté G^0. Si G est un groupe topologique, alors G^0 muni de la topologie de G est un groupe topologique, appelé **groupe topologique opposé** de G.

6. Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. Alors H muni de la topologie induite par G est un groupe topologique, appelé **sous-groupe topologique** de G.

7. Soient G et H deux groupes topologiques. Pour tout (g, h), $(g', h') \in G \times H$, on pose $(g, h)(g', h') = (gg', hh')$. Alors $G \times H$ muni de ce produit est un groupe tel que pour tout $(g, h) \in G \times H$, on ait $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$. Il résulte immédiate de la proposition 1.4.7 que le groupe $G \times H$ muni de la topologie produit est un groupe topologique. Dans ce cas, on dit que $G \times H$, muni de la topologie produit, est le **groupe topologique produit** des groupes topologiques G et H.

Remarque 11.1.1. Soit G un groupe topologique.

1. La continuité des applications

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

est équivalente à la continuité de l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & xy^{-1} \end{array}$$

2. Pour $g \in G$, on définit la **translation à gauche** (*resp.* **à droite**) de G, L_g (*resp.* R_g) par :

$$L_g : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gx \end{array} \quad \text{et} \quad R_g : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & xg \end{array}$$

Alors L_g et R_g sont des homéomorphismes de G.

3. De même, pour tous $a, b \in G$, l'application $x \longmapsto axb$, en particulier l'**automorphisme intérieur** $x \longmapsto axa^{-1}$, est un homéomorphisme de G.

Notations. Soit G un groupe topologique. On notera souvent e l'élément neutre de G. Si $x \in G$ et A, B sont deux parties de G, on note :

$$A^{-1} = \big\{a^{-1} \ ; \ a \in A\big\} \quad , \quad AB = \big\{ab \ ; \ a \in A \text{ et } b \in B\big\} ,$$

$$xA = \{x\}A = \big\{xa \ ; \ a \in A\big\} \quad \text{et} \quad Ax = A\{x\} = \big\{ax \ ; \ a \in A\big\} .$$

Remarque 11.1.2. Soit G un groupe topologique. Alors on a :

1. Soit $g \in G$. Lorsque V parcourt un système fondamental de voisinages de e, les ensembles gV (*resp.* Vg) forment un système fondamental de voisinages de g.

2. Pour tout voisinage U de e, il existe un voisinage V de e tel que $VV^{-1} \subset U$.

3. Pour tout voisinage U de e, il existe un voisinage V de e tel que $VV \subset U$.

4. Si U est un voisinage de e, alors U^{-1} est un voisinage de e, et si on pose $V = U \cap U^{-1}$, alors V est un voisinage de e vérifiant $V = V^{-1}$ et $V \subset U$.

5. Pour tout voisinage U de e et tout $g \in G$, il existe un voisinage W de e tel que $gWg^{-1} \subset U$.

Proposition 11.1.1. *Soient G un groupe topologique et e l'élément neutre de G. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) G est séparé.

(ii) Pour tout $g \in G$, $\{g\}$ est fermé dans G.

(iii) L'ensemble $\{e\}$ est fermé dans G.

(iv) $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V = \{e\}$, où $\mathcal{V}$ est l'ensemble des voisinages de e dans G.

Démonstration. Dans un espace topologique séparé, voir corollaire 1.5.1, tout ensemble réduit à un seul élément est fermé. Donc on a bien l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est triviale.
Preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons que $\{e\}$ est fermé dans G. Soit $g : G \times G \longrightarrow G$ définie par $g(x, y) = xy$, alors g est continue et on a $\Delta = \{(x, y) \in G \times G\ ;\ x = y\} = g^{-1}(\{e\})$, donc Δ est fermé dans $G \times G$. D'après la proposition 1.5.4, G est alors séparé.
L'implication (i) $\Longrightarrow$ (iv) résulte de la proposition 1.5.4.
Preuve de (iv) $\Longrightarrow$ (iii). Puisque pour tout voisinage V de e dans G, $\overline{V}$ est aussi un voisinage de e dans G, alors on a $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} \overline{V}$. Donc $\{e\}$ est fermé dans G. ■

Proposition 11.1.2. *Soient G un groupe topologique et A, B deux parties de G.*

1. *On a $\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} AV$, où $\mathcal{V}$ est l'ensemble des voisinages de e dans G.*
2. *Si U est un ouvert de G, alors U^{-1}, AU et UA sont des ouverts de G.*
3. *Si A est une partie fermée de G et B est une partie compacte de G, alors AB et BA sont des parties fermées de G.*
4. *Si G est séparé et si A et B sont des parties compactes de G, alors AB et BA sont des parties compactes de G.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 11 du supplément.

Remarque 11.1.3. Si G est un groupe topologique et si A et B sont des fermés dans G, alors AB n'est pas nécessairement fermé dans G. Par exemple, si θ est un irrationnel, et considérons les deux sous-groupes fermés $\mathbb{Z}$ et $\theta\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$; alors le sous-groupe $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$, voir exercice 11.1.

Proposition 11.1.3. *Soit G un groupe topologique séparé. Alors on a :*

1. *G est un espace régulier*[†]*.*
2. *Soient A un compact de G et B un fermé de G tels que $A \cap B = \emptyset$. Alors il existe un voisinage ouvert W de e dans G tel que $AW \cap BW = \emptyset$.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 11 du supplément.

[†] En fait, tout groupe localement compact est un espace normal.

Proposition 11.1.4. *Soient G_1, G_2 deux groupes topologiques et $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupes. Alors φ est continue si et seulement si φ est continue en un point.*

Démonstration. Supposons φ continue en $a \in G$. Soient $x \in G$ et W un voisinage de $\varphi(x)$ dans G. Alors $\varphi(a)(\varphi(x)^{-1})W$ est voisinage de $\varphi(a)$, donc il existe un voisinage V de a dans G tel que $\varphi(V) \subset \varphi(a)(\varphi(x)^{-1})W$. D'où $xa^{-1}V$ est un voisinage de x dans G et on a $\varphi(xa^{-1}V) = \varphi(x)(\varphi(a)^{-1})\varphi(V) \subset W$. Donc φ est continue en x. ■

11.2 Sous-groupes et groupes quotients

Théorème 11.2.1. *Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. On a :*

1. *Si H est ouvert dans G, alors H est aussi fermé dans G.*
2. *Si $\overset{\circ}{H} \neq \emptyset$, alors H est à la fois ouvert et fermé dans G.*
3. *L'adhérence $\overline{H}$ de H est un sous-groupe fermé de G.*
4. *Si H est distingué, il en est de même de $\overline{H}$.*
5. *Si G est séparé et si H est discret, alors H est fermé dans G.*
6. *Si G est séparé et si H est commutatif, alors $\overline{H}$ est commutatif.*
7. *Si G est séparé, le centre de G, $Z(G) = \{g \in G \; ; \; gh = hg \, , \text{pour tout } h \in G\}$ est un sous-groupe fermé de G.*

Démonstration. 1. D'après la proposition 11.1.2, on a $\overline{H} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} HV$, où $\mathcal{V}$ est l'ensemble des voisinages de e dans G. Comme H est un ouvert de G et on a $e \in H$, alors $H \in \mathcal{V}$. Par conséquent, on a $\overline{H} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} HV \subset HH \subset H$, d'où $\overline{H} = H$. Donc H est fermé dans G.
2. Si $\overset{\circ}{H} \neq \emptyset$, alors il existe $y \in H$ et un voisinage ouvert V de e dans G tels que $yV \subset H$. Par conséquent, pour tout $x \in H$, xV est un voisinage ouvert de x dans G et on a $xV = xy^{-1}yV \subset xy^{-1}H \subset H$. Donc H est ouvert dans G. Il résulte de 1 que H est aussi fermé dans G.
3. Puisque l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (x, y) & \longmapsto & xy^{-1} \end{array}$$

est continue, alors $f^{-1}(\overline{H})$ est fermé dans $G \times G$. Or on a $H \times H \subset f^{-1}(\overline{H})$, d'où $\overline{H} \times \overline{H} \subset f^{-1}(\overline{H})$. Autrement dit, on a $f(\overline{H} \times \overline{H}) \subset \overline{H}$, donc $\overline{H}$ est un sous-groupe de G.
4. Soit $g \in G$. Comme l'application $x \longmapsto gxg^{-1}$ est un homéomorphisme de G, alors on a $\overline{gHg^{-1}} = g\overline{H}g^{-1}$. Comme H est distingué, alors on a $gHg^{-1} = H$, d'où $g\overline{H}g^{-1} = \overline{H}$. Par conséquent, le sous-groupe $\overline{H}$ est distingué.
5. Puisque H est discret, il existe un voisinage ouvert V de e dans G tel que $V = V^{-1}$ et $V \cap H = \{e\}$. On en déduit que pour tout $x \in H$, on a $xV \cap H = \{x\}$. Soit $y \in \overline{H}$, alors on a $yV \cap H \neq \emptyset$. Soit $x \in yV \cap H$, d'où $y \in xV$. Si $y \neq x$, alors $xV \setminus \{x\}$ est un ouvert

de G, car G est séparé, contenant y et on a $(xV \setminus \{x\}) \cap H = \emptyset$. Ce qui est impossible. Donc on a $y = x \in H$. Par conséquent, on a $\overline{H} = H$. Donc H est fermé dans G.
6. Comme l'application

$$\begin{array}{rccc} h: & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (x, y) & \longmapsto & xyx^{-1}y^{-1} \end{array}$$

est continue et G est séparé, alors $h^{-1}(\{e\})$ est fermé dans $G \times G$. Comme H est commutatif, alors on a $H \times H \subset h^{-1}(\{e\})$, d'où $\overline{H} \times \overline{H} \subset h^{-1}(\{e\})$. Autrement dit, on a $h(\overline{H} \times \overline{H}) \subset \{e\}$, donc $\overline{H}$ est commutatif.
7. Il est clair que $Z(G)$ est un sous-groupe de G. Soit $h \in G$. Puisque les applications $g \longmapsto gh$ et $g \longmapsto hg$ sont continues de G dans G et puisque G est séparé, il résulte de la proposition 1.5.5 que l'ensemble $Z_h(G) = \{g \in G \; ; \; gh = hg\}$ est fermé dans G. Comme on a $Z(G) = \bigcap_{h \in G} Z_h(G)$, alors $Z(G)$ est fermé dans G. ∎

Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. On introduit alors sur G la relation d'équivalence suivante : pour $x, y \in G$,

$$x \,\mathcal{R}\, y \iff x^{-1}y \in H\,.$$

La classe d'équivalence d'un élément $x \in G$ est l'ensemble xH. Les classes d'équivalences sont appelées les classes à gauche de G modulo H, ce qui est naturel puisque chacune d'elles est de la forme $L_x(H)$. L'ensemble quotient sera noté G/H et muni de la topologie quotient sera appelé **espace homogène** des classes à gauche suivant H. On note $q : G \longrightarrow G/H$ l'application quotient. Rappelons qu'un sous-ensemble U de G/H est ouvert si et seulement si $q^{-1}(U)$ est ouvert dans G. Alors, toute application continue de G dans un espace topologique X, qui est constante sur les classes d'équivalences, passe au quotient en une application continue de G/H dans X, voir remarque 1.4.13.

Proposition 11.2.1. *Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. On a :*

1. *L'application quotient $q : G \longrightarrow G/H$ est continue et ouverte.*
2. *L'espace homogène G/H est séparé si et seulement si H est fermé dans G.*
3. *L'espace homogène G/H est discret si et seulement si H est ouvert dans G.*
4. *Si de plus H est distingué dans G, alors l'espace homogène G/H est un groupe topologique, appelé **groupe topologique quotient** de G par H, et l'application quotient $q : G \longrightarrow G/H$ est un morphisme de groupes.*

Démonstration. 1. Par définition de la topologie quotient sur G/H, l'application q est continue. Soit V un ouvert de G, alors on a $q^{-1}(q(V)) = \bigcup_{h \in H} hV$, donc $q^{-1}(q(V))$ est un ouvert de G. Par conséquent, $q(V)$ est ouvert dans G/H. Donc l'application q est ouverte.
2. Si G/H est séparé, alors $\{q(e)\}$ est fermé dans G/H. Or on a $q^{-1}(\{q(e)\}) = H$, donc H est fermé dans G. Réciproquement, supposons H fermé dans G. Puisque l'application q est ouverte, d'après la proposition 1.5.6, l'espace quotient G/H est séparé si et seulement

si l'ensemble $R = \{(x,y) \in G \times G \ ; \ x^{-1}y \in H\}$ est fermé dans $G \times G$. Considérons l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x,y) & \longmapsto & x^{-1}y \end{array}$$

On a $R = f^{-1}(H)$. Comme f est continue et H est fermé dans G, alors R est fermé dans $G \times G$. Par conséquent, l'espace homogène G/H est séparé.
3. Si G/H est discret, alors $\{q(e)\}$ est ouvert dans G/H. Par conséquent, $H = q^{-1}(\{q(e)\})$ est ouvert dans G. Réciproquement, si H est ouvert dans G, alors pour tout $g \in G$, gH est ouvert dans G. Or on a $gH = q^{-1}(\{q(g)\})$, donc, pour tout $g \in G$, $\{q(g)\}$ est un ensemble ouvert de G/H. Autrement dit, G/H est discret.
4. On suppose de plus que H est distingué dans G. Alors G/H est un groupe et l'application q est un morphisme de groupes. Il s'agit maintenant de montrer que les applications suivantes :

$$\widetilde{g} : \begin{array}{ccc} (G/H) \times (G/H) & \longrightarrow & G/H \\ (q(x), q(y)) & \longmapsto & q(xy) \end{array} \quad \text{et} \quad \widetilde{h} : \begin{array}{ccc} G/H & \longrightarrow & G/H \\ q(x) & \longmapsto & q(x^{-1}) \end{array}$$

sont continues. L'application $\widetilde{h}$ est continue si et seulement si $\widetilde{h} \circ q$ est continue. Pour tout $x \in G$, soit $h(x) = x^{-1}$, alors h est continue de G dans G et on a $\widetilde{h} \circ q = q \circ h$, donc $\widetilde{h} \circ q$ est continue, d'où la continuité de $\widetilde{h}$. Soient $x, y \in G$. Montrons la continuité de $\widetilde{g}$ en $(q(x), q(y))$. Soit U un ouvert de G/H contenant $q(xy)$, alors $q^{-1}(U)$ est un ouvert de G contenant xy. Alors il existe des ouverts V et W de G contenant respectivement x et y tels que $VW \subset q^{-1}(U)$. Puisque q est une application ouverte, alors $q(V)$ et $q(W)$ sont des ouverts de G/H contenant respectivement $q(x)$ et $q(y)$ et on a $\widetilde{g}((q(V), q(W))) = q(V)q(W) = q(VW) \subset q(q^{-1}(U)) = U$. Par conséquent, $\widetilde{g}$ est continue. Donc G/H muni de la topologie quotient est un groupe topologique. ■

Corollaire 11.2.1. *Soit H un sous-groupe fermé d'un groupe topologique G. Si G est compact (resp. localement compact), alors l'espace homogène G/H est compact (resp. localement compact)*[†]*.*

Remarque 11.2.1. Si G est un groupe topologique et si H est un sous-groupe de G, alors l'application quotient $q : G \longrightarrow G/H$ n'est pas en général fermée. Par exemple, l'application quotient $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ n'est pas fermée car $F = \{n + \frac{1}{n} \ ; \ n \geq 1\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ mais $q(F)$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, voir aussi l'exemple 3.2.1. Par contre, si G est un groupe topologique séparé et si H est un sous-groupe compact de G, alors l'application quotient $q : G \longrightarrow G/H$ est fermée, comme cela est montré dans le corollaire 11.3.4.

Proposition 11.2.2. *Soient G un groupe topologique et Γ un sous-groupe discret de G. Soit $q : G \longrightarrow G/\Gamma$ l'application quotient. Alors on a :*

1. *Tout $x \in G$ admet un voisinage ouvert V tel que la restriction de q à V soit un homéomorphisme de V sur le voisinage ouvert $q(V)$ de $q(x)$ dans G/Γ.*

2. *Pour tout $y \in G/\Gamma$, il existe un voisinage ouvert U de y dans G/Γ tel que $q^{-1}(U) = \bigcup_{h \in \Gamma} hV$, où V est un ouvert de G, les hV sont des ouverts dans G deux à deux*

[†]Voir également corollaire 11.3.4.

disjoints et la restriction de q à chaque hV est un homéomorphisme de hV sur U. Autrement dit, l'application quotient $q : G \longrightarrow G/\Gamma$ est un « revêtement ».

Démonstration. 1. Comme Γ est discret, il existe un voisinage ouvert W de e dans G tel que $W \cap \Gamma = \{e\}$. Soit V_0 un voisinage ouvert de e dans G tel que ${V_0}^{-1}V_0 \subset W$. Alors pour tout $x \in G$, la restriction de q à $V = xV_0$ est injectif ; car si $a, b \in V_0$ sont tels que $q(xa) = q(xb)$, alors il existe $h \in \Gamma$ tel que $xa = xbh$, d'où on a $h = b^{-1}a \in {V_0}^{-1}V_0 \subset W$. Donc on a $h \in W \cap \Gamma = \{e\}$, d'où $h = e$ et alors $a = b$. Comme l'image par q de tout ouvert dans V est un ouvert dans $q(V)$ et comme q est continue, alors la restriction de q à V est un homéomorphisme de V sur le voisinage ouvert $q(V)$ de $q(x)$ dans G/Γ.
2. Soit $y \in G/\Gamma$, il existe $x \in G$ tel que $q(x) = y$. Soit V un voisinage ouvert de x dans G tel que la restriction de q à V soit un homéomorphisme de V sur le voisinage ouvert $U = q(V)$ de y dans G/Γ. On a $q^{-1}(U) = \bigcup\limits_{h \in \Gamma} hV$. Soient $h, h' \in \Gamma$. Si $hV \cap h'V \neq \emptyset$, alors il existe $a, b \in V$ tels que $ha = h'b$, d'où on a $q(a) = q(b)$. Par conséquent, $a = b$, donc on a $h = h'$. Autrement dit, les hV sont des ouverts dans G deux à deux disjoints. Comme les applications

$$\begin{array}{ccccc} hV & \longrightarrow & V & \longrightarrow & U = q(V) \\ ha & \longmapsto & a & \longrightarrow & q(a) \end{array}$$

sont des homéomorphismes, alors la restriction de q à chaque hV est un homéomorphisme de hV sur U. ■

Proposition 11.2.3. *Soient G_1, G_2 deux groupes topologiques et $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupes continue. Alors $\ker(\varphi) = \{x \in G_1 \; ; \; \varphi(x) = e_2\}$ est un sous-groupe distingué de G_1 et il existe un unique morphisme de groupes continue $\widetilde{\varphi} : G_1/\ker(\varphi) \longrightarrow G_2$ tel que $\widetilde{\varphi} \circ q = \varphi$. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "q"'] & & G_2 \\ & G_1/\ker(\varphi) \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Si de plus, φ est une application ouverte et surjective, alors $\widetilde{\varphi}$ est un homéomorphisme.

Démonstration. Puisque φ est un morphisme de groupes, alors $\ker(\varphi)$ est un sous-groupe distingué de G_1. Soient x, $y \in G_1$ tels que $q(x) = q(y)$. Alors on a $x^{-1}y \in \ker(\varphi)$, d'où $\varphi(x) = \varphi(y)$. Pour tout $x \in G_1$, On pose $\widetilde{\varphi}(q(x)) = \varphi(x)$. Alors $\widetilde{\varphi}$ est bien défini et il est clair que $\widetilde{\varphi}$ est un morphisme de groupes tel que $\widetilde{\varphi} \circ q = \varphi$. Puisque $\widetilde{\varphi} \circ q$ est continue, il résulte de la proposition 1.4.10 que $\widetilde{\varphi}$ est continue. Supposons maintenant que φ est de plus une application ouverte et surjective. Alors $\widetilde{\varphi}$ est bijective. Soit V un ouvert de $G_1/\ker(\varphi)$, alors on a $\widetilde{\varphi}(V) = \widetilde{\varphi}(q(q^{-1}(V))) = \varphi(q^{-1}(V))$. Comme φ est une application ouverte et que q est continue, alors $\varphi(q^{-1}(V))$ est un ouvert de G_2. Par conséquent, $\widetilde{\varphi}$ est un homéomorphisme. ■

Théorème 11.2.2. *Soient G un groupe topologique connexe et U un voisinage de e dans G tel que $U = U^{-1}$. Alors pour tout $g \in G$, il existe $g_1, \ldots, g_k \in U$ tels que $g = g_1 ... g_k$. Autrement dit, tout groupe topologique connexe est engendré par chacun des voisinages de l'élément neutre.*

Démonstration. Pour $n \geq 1$, on pose $U^n = \underbrace{UU \cdots U}_{n \text{ fois}} = \{g_1 ... g_n \ ; \ g_i \in U\}$ et soit $H = \bigcup_{n \geq 1} U^n$, alors H est un sous-groupe de G. Comme on a $U \subset H$, alors $\overset{\circ}{H} \neq \emptyset$. D'après le théorème 11.2.1, H est alors à la fois ouvert et fermé dans G. Comme G est connexe, on en déduit que l'on a $G = H$, d'où le résultat. ■

Remarque 11.2.2. Si G est un groupe topologique connexe et compact, et U un voisinage ouvert de e tel que $U = U^{-1}$. Alors il existe $n \geq 1$ tel que pour tout $g \in G$, il existe $g_1, \dots, g_n \in U$ tels que $g = g_1 ... g_n$.

Théorème 11.2.3. *Soit G un groupe topologique localement compact et connexe. Alors G est dénombrable à l'infini.*

Démonstration. Soit U un voisinage de e dans G tel que $U = U^{-1}$ et tel que $\overline{U}$ soit compact. D'après la démonstration du théorème précédent, on a $G = \bigcup_{n \geq 1} U^n$. Puisque l'application

$$\begin{array}{rccc} f \ : & G \times G \times \cdots \times G & \longrightarrow & G \\ & (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto & x_1 x_2 \cdots x_n \end{array}$$

est continue, alors $f\big(\overline{U} \times \overline{U} \times \cdots \times \overline{U}\big)$ est compact. Or on a $U^n \subset f\big(\overline{U} \times \overline{U} \times \cdots \times \overline{U}\big)$, donc $\overline{U^n}$ est compact. Par conséquent, G est dénombrable à l'infini. ■

Proposition 11.2.4. *Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. Si H et G/H sont connexes, alors G est connexe.*

Démonstration. Soient U_1 et U_2 deux ouverts non vides de G tels que $G = U_1 \cup U_2$. D'après la proposition 11.2.1, l'application quotient $q : G \longrightarrow G/H$ est ouverte, donc $q(U_1)$ et $q(U_2)$ sont des ouverts non vides de G/H tels que $G/H = q(U_1) \cup q(U_2)$. Par hypothèse, G/H est connexe, donc on a $q(U_1) \cap q(U_2) \neq \emptyset$. Soient $x \in U_1$ et $y \in U_2$ tels que $q(x) = q(y)$. Alors on a $x^{-1}y \in H$, d'où $y \in xH$. On a $xH = (xH \cap U_1) \cup (xH \cap U_2)$ et $xH \cap U_1$, $xH \cap U_2$ sont des ouverts non vides de xH. Comme H est connexe, alors xH est connexe. Par conséquent, on a $xH \cap U_1 \cap xH \cap U_2 \neq \emptyset$, d'où $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Donc G est connexe. ■

Proposition 11.2.5. *Soient G un groupe topologique et G_0 la composante connexe de e dans G. Alors on a :*

1. *G_0 est sous-groupe distingué et fermé dans G.*
2. *Pour tout $x \in G$, la composante connexe de x dans G est $xG_0 = G_0 x$.*
3. *Le groupe topologique quotient G/G_0 est séparé et totalement discontinu.*
4. *Si G est localement connexe, alors G/G_0 est un groupe discret.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 11 du supplément.

11.3 Action d'un groupe topologique sur un espace topologique

Définition 11.3.1. Soient G un groupe topologique et X un espace topologique. Une **action continue à gauche de** G **sur** X est la donnée d'une application continue

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. Pour tout $x \in X$, on a $ex = x$.

2. Pour tous $x \in X$ et $g, h \in G$, on a $g(hx) = (gh)x$.

Dans ce cas, on dit aussi G **opère continûment à gauche sur** X, et même simplement G opère sur X.

Remarque 11.3.1. Soit G un groupe topologique opérant continûment à gauche sur un espace topologique X. Pour tout $g \in G$, l'application $\varphi(g) : x \longmapsto gx$ est alors un homéomorphisme de X ayant pour inverse l'application $\varphi(g^{-1}) : x \longmapsto g^{-1}x$. On obtient ainsi un morphisme de groupes $\varphi : g \longmapsto \varphi(g)$ de G dans le groupe des homéomorphismes de X.
Inversement, si G est un groupe discret, la donnée d'un morphisme de groupes φ de G dans le groupe des homéomorphismes de X détermine une action continue à gauche de G sur X, en posant pour tous $g \in G$ et $x \in X$, $gx = \varphi(g)(x)$.

Remarque 11.3.2. Une **action continue à droite** d'un groupe topologique G sur un espace topologique X est la donnée d'une application continue

$$\begin{array}{ccc} X \times G & \longrightarrow & X \\ (x, g) & \longmapsto & xg \end{array}$$

telle que pour tous $x \in X$ et $g, h \in G$, on ait $xe = x$ et $(xg)h = x(gh)$.
Pour tout $g \in G$, l'application $\psi(g) : x \longmapsto xg$ est alors un homéomorphisme de X. L'inconvénient de cette action à droite est que l'application $\psi : g \longmapsto \psi(g)$ de G dans le groupe des homéomorphismes de X n'est pas un morphisme de groupe. En fait, pour tous $g, h \in G$, on a $\psi(g) \circ \psi(h) = \psi(hg)$.
Si on pose $g.x = xg$, alors le groupe topologique opposé G^0 de G détermine une action continue à gauche de G^0 sur X. Par conséquent, il suffit d'étudier les actions continues à gauche des groupes topologiques sur les espaces topologiques.
Dans la suite, sauf indication contraire, on conviendra de dire qu'un groupe topologique G opère continûment sur un espace topologique X, si G opère continûment à gauche sur X.

Définition 11.3.2. Soit G un groupe topologique opérant continûment sur un espace topologique X.

1. Pour tout point $x \in X$, l'ensemble $Gx = \{gx \; ; \; g \in G\}$ est appelé l'**orbite** ou la **trajectoire** du point x. L'ensemble $S_x = \{g \in G \; ; \; gx = x\}$ est un sous-groupe distingué de G, appelé **sous-groupe d'isotropie** du point x ou **stabilisateur** du point x.

2. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur X dont les classes sont les orbites des points de X. Autrement dit, pour tous $x, y \in X$, on a :

$$x \,\mathcal{R}\, y \iff \text{il existe } g \in G \text{ tel que } y = gx\,.$$

L'espace quotient $X/\mathcal{R}$, noté aussi X/G, est appelé l'**espace des orbites de** G **dans** X.

Définition 11.3.3. Soit G un groupe topologique opérant continûment sur un espace topologique X. On dit que G opère **transitivement** sur X si pour tous $x, y \in X$, il existe $g \in G$ tel que $y = gx$. Autrement dit, l'espace des orbites X/G est réduit à un seul élément. Dans ce cas, X est appelé un **espace homogène** du groupe topologique G

Remarque 11.3.3. Soit G un groupe topologique opérant continûment sur un espace topologique X.

1. Si X est séparé, alors pour tout $x \in X$, le stabilisateur S_x est fermé dans G.

2. Si G opère transitivement sur X, alors pour tous $x, y \in X$, il existe $h \in G$, h vérifie $hx = y$, tel que $hS_xh^{-1} = S_y$. Autrement dit, les sous-groupes distingués S_x et S_y sont conjugués.

Exemple 11.3.1. Soient G un groupe topologique et X un espace topologique. L'application

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & x \end{array}$$

définit une action continue de G sur X. Dans ce cas, on dit que G opère **trivialement** sur X.

Exemple 11.3.2. Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. Alors G opère continûment et transitivement sur l'espace homogène G/H. L'action est définie par :

$$\begin{array}{ccc} G \times G/H & \longrightarrow & G/H \\ (g, q(x)) & \longmapsto & q(gx) \end{array}$$

où $q : G \longrightarrow G/H$ est l'application quotient.

Exemple 11.3.3. Soit H un sous-groupe d'un groupe topologique G. Alors on a :

1. H opère continûment sur G par translation à gauche. Autrement dit, l'action de H sur G est définie par :

$$\begin{array}{ccc} H \times G & \longrightarrow & G \\ (h, g) & \longmapsto & hg \end{array}$$

Notons que cette action de H sur G est transitive si et seulement si $H = G$.

2. H opère continûment sur G par conjugaison. Autrement dit, l'action de H sur G est définie par :

$$\begin{array}{ccc} H \times G & \longrightarrow & G \\ (h, g) & \longmapsto & hgh^{-1} \end{array}$$

Exemple 11.3.4. Soit H un sous-groupe d'un groupe topologique G. Alors l'espace homogène G/H est l'espace des orbites de G pour l'action continûment à droite de H sur G suivante :

$$\begin{array}{ccc} G \times H & \longrightarrow & G \\ (x,h) & \longmapsto & xh \end{array}$$

Exemple 11.3.5. Soient G_1, G_2 deux groupes topologiques et $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupes continue. Si pour tous $g \in G_1$ et $x \in G_2$, on pose $gx = \varphi(g)x$, alors G_1 opère continûment sur G_2. Si de plus φ est surjectif, l'action est transitive.

Lemme 11.3.1. *Soit G un groupe topologique opérant continûment sur un espace topologique X. L'application quotient $q : X \longrightarrow X/G$ est continue et ouverte.*

Démonstration. L'application quotient est toujours continue quand on munit X/G de la topologie quotient. Vérifions que q est aussi ouverte dans ce contexte. Soit U un ouvert de X, alors on a $q^{-1}(q(U)) = \bigcup\limits_{g\in G} gU$, donc $q^{-1}(q(U))$ est un ouvert de X. Autrement dit, $q(U)$ est un ouvert de l'espace topologique quotient X/G. ■

Proposition 11.3.1. *Soit G un groupe topologique opérant continûment sur un espace localement compact X tel que l'espace des orbites X/G soit séparé. Soit $q : X \longrightarrow X/G$ l'application quotient. Alors X/G est localement compact et pour toute partie compacte K' de X/G, il existe une partie compacte K de X telle que $q(K) = K'$.*

Démonstration. Ceci résulte du lemme 11.3.1 et de la proposition 3.4.1. ■

Soit G un groupe topologique opérant continûment et transitivement sur un espace topologique X. Alors pour tout $x \in X$, l'application

$$\begin{array}{cccc} f_x : & G & \longrightarrow & X \\ & g & \longmapsto & gx \end{array}$$

est continue et surjective. Soit S_x le stabilisateur de x, alors S_x est un sous-groupe distingué de G et pour tout $g, h \in G$, on a $g^{-1}h \in S_x$ si et seulement si $f_x(g) = f_x(h)$. On déduit alors de la remarque 1.4.14 qu'il existe une application continue bijective $\psi_x : G/S_x \longrightarrow X$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f_x"] \arrow[dr, "q_x"'] & & X \\ & G/S_x \arrow[ur, "\psi_x"'] & \end{tikzcd}$$

où q_x est l'application quotient. L'application ψ_x n'est pas nécessairement un homéomorphisme de G/S_x sur X. D'après la proposition 11.2.1 et le corollaire 1.4.1, ψ_x est un homéomorphisme si et seulement si f_x est une application ouverte.

Proposition 11.3.2. *Soit G un groupe topologique opérant continûment et transitivement sur un espace topologique X. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) Pour tout $x \in X$, l'application $f_x : g \longmapsto gx$ est ouverte de G dans X.

(ii) Il existe $x_0 \in X$ tel que l'application $f_{x_0} : g \longmapsto gx_0$ transforme tout voisinage de e dans G en un voisinage de x_0 dans X.

Démonstration. L'application (i) $\Longrightarrow$ (ii) est triviale. Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $x \in X$. Comme G opère transitivement sur X, alors il existe $h \in G$ tel que $x = hx_0$. Soit U un ouvert non vide de G. Pour montrer que Ux est un ouvert de X, il suffit de montrer que pour tout $g \in U$, Ux est un voisinage de gx dans X. Comme l'application $y \longmapsto gy$ est un homéomorphisme de X, il suffit de montrer que pour tout $g \in U$, $g^{-1}Ux$ est un voisinage de x dans X. On a $g^{-1}Ux = g^{-1}Uhx_0 = h(h^{-1}g^{-1}Uhx_0)$. Comme $h^{-1}g^{-1}Uh$ est un voisinage de e dans G, alors $h^{-1}g^{-1}Uhx_0$ est un voisinage de x_0 dans X. Puisque l'application $y \longmapsto hy$ est un homéomorphisme de X, alors $h(h^{-1}g^{-1}Uhx_0)$ est un voisinage de x dans X, donc $g^{-1}Ux$ est un voisinage de x dans X. Par conséquent, l'application f_x est ouverte de G dans X. ■

Théorème 11.3.1. *Soient G un groupe topologique localement compact et dénombrable à l'infini et X un espace localement compact sur lequel G opère continûment et transitivement. Alors on a :*

1. *Pour tout $x \in X$, l'application $f_x : g \longmapsto gx$ est ouverte de G sur X.*

2. *Pour tout $x \in X$, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \psi_x : & G/S_x & \longrightarrow & X \\ & gS_x & \longmapsto & gx \end{array}$$

   est un homéomorphisme. De plus pour tous $z \in G/S_x$ et $g \in G$, on a $\psi_x(gz) = g\psi_x(z)$.

Démonstration. 1. Soit $x \in X$. Montrons que f_x est une application ouverte. Soit V un ouvert de G. Montrons que Vx est un ouvert de X. Il s'agit de montrer que pour tout $g \in V$, gx est un point intérieur de Vx ou, ce qui revient au même, que x est un point intérieur de $g^{-1}Vx$. Soit $g \in V$. Comme $g^{-1}V$ est un voisinage de e dans G et comme G est localement compact, alors il existe un voisinage compact U de e dans G tel que $U = U^{-1}$ et $UU \subset g^{-1}V$. Comme $\big(h \overset{\circ}{U}\big)_{h\in G}$ est un recouvrement ouvert de G et comme G est dénombrable à l'infini, alors il existe une suite $(h_n)_{n\geq 0}$ dans G telle que $G = \underset{n\geq 0}{\cup} h_nU$. Comme l'action de G sur X est transitive, alors on a $X = Gx$, d'où $X = \underset{n\geq 0}{\cup} h_nUx$. Or pour tout $n \geq 0$, h_nU est compact dans G, donc h_nUx est compact dans X. En particulier, h_nUx est fermé dans X. Il résulte du théorème de Baire, théorème 3.4.4, qu'il existe $p \geq 0$ tel que h_pUx soit d'intérieur non vide. Soit $a \in U$ tel que h_pax soit un point intérieur de h_pUx. Alors $x = a^{-1}h_p^{-1}h_pax$ est un point intérieur de $a^{-1}h_p^{-1}h_pUx = a^{-1}Ux$. Or on a $a^{-1}Ux \subset UUx \subset g^{-1}Vx$, donc x est un point intérieur de $g^{-1}Vx$. Par conséquent, f_x est bien une application ouverte.
2. Le fait que ψ_x est un homéomorphisme résulte de 1 et du corollaire 1.4.1. Par ailleurs, il est clair que pour tout $z \in G/S_x$ et pour tout $g \in G$, on a $\psi_x(gz) = g\psi_x(z)$, voir exemple 11.3.2. ■

Corollaire 11.3.1. *Soient G_1 et G_2 deux groupes topologiques localement compacts et supposons que G_1 est dénombrable à l'infini. Soit $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupes continue.*

1. *Si φ est surjectif, alors φ est une application ouverte et il existe $\widetilde{\varphi} : G_1/\ker(\varphi) \longrightarrow G_2$ à la fois un morphisme de groupes et un homéomorphisme tel que le diagramme suivant soit commutatif.*

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "q"'] & & G_2 \\ & G_1/\ker(\varphi) \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

2. *Si φ est bijectif, alors φ est un homéomorphisme.*

Démonstration. 1. Pour tout $g \in G_1$ et pour tout $y \in G_2$, on pose $gy = \varphi(g)y$. Ainsi, G_1 opère continûment sur G_2. Comme φ est surjectif, alors l'action est transitive. Soient e_2 l'élément neutre de G_2 et S_{e_2} le stabilisateur de e_2. On a $S_{e_2} = \{g \in G_1 \; ; \; \varphi(g)e_2 = e_2\} = \ker(\varphi)$. D'après la proposition 11.2.3, il existe un unique morphisme de groupes continue $\widetilde{\varphi} : G_1/\ker(\varphi) \longrightarrow G_2$ tel que $\widetilde{\varphi} \circ q = \varphi$. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "q"'] & & G_2 \\ & G_1/\ker(\varphi) \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

D'après le théorème précédent, l'application $\psi_{e_2} : G_1/\ker(\varphi) \longrightarrow G_2$ est un homéomorphisme et pour tout $g \in G_1$, on a $\psi_{e_2}(q(g)) = \varphi(g)e_2 = \varphi(g) = \widetilde{\varphi}(q(g))$, donc $\psi_{e_2} = \widetilde{\varphi}$. Par conséquent, $\widetilde{\varphi}$ est un homéomorphisme. D'après la proposition 11.2.1, q est une application ouverte, on en déduit que φ est une application ouverte.
2. Ceci résulte de 1. ■

Exemple 11.3.6. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit $\varphi(t) = e^{2i\pi t}$, alors φ est un morphisme de groupes continue surjective de $\mathbb{R}$ muni de l'addition dans $\mathbb{S}^1$ muni de la multiplication. De plus, on a $\ker(\varphi) = \mathbb{Z}$. Il résulte du corollaire précédent qu'il existe un unique morphisme de groupes continue $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{S}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "q"'] & & \mathbb{S} \\ & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

De plus, $\widetilde{\varphi}$ est un homéomorphisme. Notons que l'on a déjà montré que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}$, voir exemple 3.2.1.

Définition 11.3.4. Soit G un groupe topologique séparé opérant continûment sur un espace topologique séparé X.

1. On dit que G opère **librement** sur X ou que l'action de G sur X est **libre** si le stabilisateur de tout point de X est réduit à e. Autrement dit, si pour tout $x \in X$, la relation $gx = x$ entraîne $g = e$.

2. On dit que G opère **proprement** sur X ou que l'action de G sur X est **propre**, si l'application suivante est propre.

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \times X \\ (g, x) & \longmapsto & (gx, x) \end{array}$$

Exemple 11.3.7. Soit H un sous-groupe d'un groupe topologique séparé G. On suppose que H opère sur G par translation à gauche. Alors on a :

1. L'action de H sur G est libre.

2. L'action de H sur G est propre si et seulement si H est fermé dans G. En particulier, si H est discret, alors H opère proprement sur G par translation à gauche.

En effet, l'action de H sur G est définie par :

$$\begin{array}{ccc} H \times G & \longrightarrow & G \\ (h, g) & \longmapsto & hg \end{array}$$

Si $h \in H$ et $g \in G$ sont tels que $hg = g$, alors on a $h = e$, donc H opère librement sur G. Par définition, l'action de H sur G est propre si l'application suivante

$$\begin{array}{cccc} T: & H \times G & \longrightarrow & G \times G \\ & (h, g) & \longmapsto & (hg, g) \end{array}$$

est propre. Supposons d'abord que T est propre. Comme $H \times \{e\}$ est fermé dans $H \times G$, alors $H \times \{e\} = T(H \times \{e\})$ est fermé dans $G \times G$. On en déduit que H est fermé dans G.
Réciproquement, supposons que H est fermé dans G. Comme l'application

$$\begin{array}{cccc} L: & G \times G & \longrightarrow & G \times G \\ & (h, g) & \longmapsto & (hg, g) \end{array}$$

est un homéomorphisme, alors c'est une application propre. Puisque $H \times G$ est fermé dans $G \times G$ et T est la restriction de L à $H \times G$, il résulte du lemme 3.7.1 que T est propre.
Si H est discret, il résulte du théorème 11.2.1 que H est fermé dans G, donc l'action de H sur G est propre.

Exemple 11.3.8. 1. L'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (n, x) & \longmapsto & n + x \end{array}$$

est propre et libre et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$, voir exemple 3.2.1.

2. L'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (n, x) & \longmapsto & 2^n x \end{array}$$

n'est ni libre ni propre, et l'espace quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ n'est même pas séparé, car l'orbite de tout point non nul de $\mathbb{R}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

3. L'action de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, -1\}$ sur $\mathbb{R}$ donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \{1,-1\} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (n,x) & \longmapsto & (-1)^n x \end{array}$$

est propre, mais n'est pas libre et $\mathbb{R}/G$ est homéomorphe à $[0, +\infty[$. Par contre, si on prend la même action sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors cette action est propre et libre et $\mathbb{R}^*/G$ est homéomorphe à $]0, +\infty[$.

4. Soit θ un nombre irrationnel, l'action de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}$ donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((m,n),x) & \longmapsto & m\theta + n + x \end{array}$$

est libre, mais n'est pas propre. La topologie quotient sur l'espace des orbites $\mathbb{R}/\mathbb{Z}^2$ est la topologie grossière, donc $\mathbb{R}/\mathbb{Z}^2$ n'est même pas séparé.

Proposition 11.3.3. *Soit G un groupe topologique séparé opérant proprement sur un espace topologique séparé X. Alors on a :*

1. *L'espace des orbites X/G est séparé.*
2. *Pour tout $x \in X$, l'application $g \longmapsto gx$ est propre de G dans X.*
3. *Pour tout $x \in X$, l'orbite $Gx = \{gx \; ; \; g \in G\}$ est fermée dans X.*
4. *Pour tout $x \in X$, le stabilisateur S_x est compact.*
5. *Pour tout $x \in X$, l'application canonique de G/S_x sur Gx est un homéomorphisme.*

Démonstration. 1. Soit C le graphe de la relation $\mathcal{R}$ définie par G dans X, on a $C = \big\{(gx, x) \; ; \; g \in G \text{ et } x \in X\big\}$. C'est l'image de $G \times X$ par l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc} \theta : & G \times X & \longrightarrow & X \times X \\ & (g,x) & \longmapsto & (gx,x) \end{array}$$

Comme θ est propre, alors C est fermé dans $X \times X$. Comme la relation $\mathcal{R}$ est ouverte, voir lemme 11.3.1, il résulte alors de la proposition 1.5.6 que X/G est séparé.
2. Soit $x \in X$. Soit $B = X \times \{x\}$, on a $\theta^{-1}(B) = G \times \{x\}$. Comme θ est propre, on déduit du lemme 3.7.1 que l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times \{x\} & \longrightarrow & X \times \{x\} \\ (g,x) & \longmapsto & (gx,x) \end{array}$$

est propre. Par conséquent, l'application $\theta_x : g \longmapsto gx$ est propre de G dans X.
3. Ceci résulte de 1 ou de 2.
4. Comme on a $S_x = \theta_x^{-1}(\{x\})$, on déduit de 2 que S_x est une partie compacte de G.
5. Soit $x \in X$. D'après 2, l'application

$$\begin{array}{cccc} f_x : & G & \longrightarrow & Gx \\ & g & \longmapsto & gx \end{array}$$

est continue, surjective et fermée. De plus, pour tout $g, h \in G$, on a $g^{-1}h \in S_x$ si et seulement si $f_x(g) = f_x(h)$. On déduit alors de la remarque 1.4.14 et du corollaire 1.4.1 qu'il existe un homéomorphisme $\psi_x : G/S_x \longrightarrow Gx$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f_x"] \arrow[dr, "q_x"'] & & Gx \\ & G/S_x \arrow[ur, "\psi_x"'] & \end{tikzcd}$$

Où q_x est l'application quotient. ■

Proposition 11.3.4. *Soit G un groupe topologique séparé opérant proprement sur un espace topologique non vide séparé X. Si X est compact (resp. localement compact), il en est de même de G et de X/G.*

Démonstration. Par hypothèse, l'application

$$\begin{array}{cccc} \theta : & G \times X & \longrightarrow & X \times X \\ & (g, x) & \longmapsto & (gx, x) \end{array}$$

est propre. Si X est compact (*resp.* localement compact), alors il en est de même de $X \times X$. On déduit du théorème 3.7.3 qu'il en est de même de $G \times X$, donc de G car X est non vide. D'après la proposition précédente, l'espace des orbites G/X est séparé, donc si X est compact (*resp.* localement compact), alors il en est de même de X/G car l'application quotient $q : X \longrightarrow X/G$ est continue, surjective et ouverte. ■

Proposition 11.3.5. *Soit G un groupe topologique séparé opérant continûment sur un espace topologique séparé X. Pour toute partie compacte K de X, considérons l'application suivante :*

$$\begin{array}{cccc} f_K : & G \times K & \longrightarrow & X \\ & (g, x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

1. *Si G opère proprement sur X, alors f_K est une application propre, pour toute partie compacte K de X.*

2. *Si X est localement compact et si f_K est une application propre pour toute partie compacte K de X, alors G opère proprement sur X.*

3. *Si X est localement compact et si l'application*

$$\begin{array}{cccc} f : & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (g, x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

est propre, alors G opère proprement sur X.

Démonstration. 1. Par hypothèse, l'application

$$\begin{array}{cccc} T : & G \times X & \longrightarrow & X \times X \\ & (g, x) & \longmapsto & (gx, x) \end{array}$$

est propre. Comme on a $G\times K = T^{-1}(X\times K)$, il résulte du lemme 3.7.1 que l'application

$$\begin{array}{cccc} S_K : & G\times K & \longrightarrow & X\times K \\ & (g,x) & \longmapsto & (gx,x) \end{array}$$

est propre. D'autre part, d'après la proposition 3.7.4, l'application

$$\begin{array}{cccc} p_1 : & X\times K & \longrightarrow & X \\ & (a,b) & \longmapsto & a \end{array}$$

est propre car K est compact. Comme on a $f_K = p_1\circ S_K$, il résulte du corollaire 3.7.1 que f_K est une application propre.
2. Comme $X\times X$ est localement compact, d'après le théorème 3.7.4, T est propre si et seulement si pour toute partie compacte K de X, $T^{-1}(K\times K)$ est compact. Soit K un compact de X. Comme f_K est propre, alors $f_K^{-1}(K)$ est compact. Or on a $T^{-1}(K\times K) = f_K^{-1}(K)$, donc $T^{-1}(K\times K)$ est compact. Par conséquent, l'action de G sur X est propre.
3. Supposons que l'application

$$\begin{array}{cccc} f : & G\times X & \longrightarrow & X \\ & (g,x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

est propre. Soit K une partie compact de X. Comme $G\times K$ est fermé dans $G\times X$, il résulte du lemme 3.7.1 que l'application

$$\begin{array}{cccc} f_K : & G\times K & \longrightarrow & X \\ & (g,x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

est propre. On déduit alors de 2 que G opère proprement sur X. ■

Corollaire 11.3.2. *Soit G un groupe topologique séparé opérant continûment sur un espace compact X. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) G opère proprement sur X.

(ii) L'application suivante est propre.

$$\begin{array}{cccc} f : & G\times X & \longrightarrow & X \\ & (g,x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

Proposition 11.3.6. *Soit G un groupe topologique séparé opérant continûment sur un espace localement compact X. On suppose que :*

1. *Pour toute partie compacte K de X, l'application suivante est fermée.*

$$\begin{array}{cccc} f_K : & G\times K & \longrightarrow & X \\ & (g,x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

2. *Pour tout $x\in X$, $g\longmapsto gx$ est une application propre de G dans X.*

Alors G opère proprement sur X.

Démonstration. Pour montrer que G opère proprement sur X, d'après la proposition 11.3.5, il suffit de montrer que pour toute partie compacte K de X, l'application

$$\begin{array}{rccc} f_K : & G \times K & \longrightarrow & X \\ & (g,x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

est propre. Soit K une partie compacte de X. Par hypothèse, f_K est une application continue fermée. Pour montrer que f_K est propre, il reste à montrer que pour tout $y \in X$, $f_K^{-1}(\{y\})$ est une partie compacte de $G \times K$. Soit $y \in X$. Comme l'application

$$\begin{array}{rccc} T_y : & G & \longrightarrow & X \\ & g & \longmapsto & gy \end{array}$$

est propre, alors $T_y^{-1}(K) = \{g \in G \ ; \ gy \in K\}$ est compact dans G, voir théorème 3.7.2, d'où $\{g \in G \ ; \ g^{-1} \in T_y^{-1}(K)\}$ est compact dans G. Autrement dit, $K_y = \{g \in G \ ; \ g^{-1}y \in K\}$ est compact dans G. On a $f_K^{-1}(\{y\}) = \{(g,x) \in G \times K \ ; \ gx = y\}$, d'où $f_K^{-1}(\{y\}) \subset K_y \times K$. Comme $K_y \times K$ est compact dans $G \times K$ et $f_K^{-1}(\{y\})$ est fermé dans $G \times K$, alors $f_K^{-1}(\{y\})$ est compact. Par conséquent, G opère proprement sur X. ■

Proposition 11.3.7. *Soit G un groupe topologique séparé opérant continûment sur un espace topologique séparé X. Soit K une partie compacte de G. Alors l'application suivante est propre.*

$$\begin{array}{rccc} f : & K \times X & \longrightarrow & X \\ & (g,x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

Démonstration. L'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & K \times X & \longrightarrow & K \times X \\ & (g,x) & \longmapsto & (g,gx) \end{array}$$

est un homéomorphisme, donc c'est une application propre. Puisque K est compact, il résulte de la proposition 3.7.4 que la projection canonique

$$\begin{array}{rccc} p_2 : & K \times X & \longrightarrow & X \\ & (g,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

est propre. Comme on a $f = p_2 \circ f_1$, on déduit du corollaire 3.7.1 que f est propre. ■

Théorème 11.3.2. *Soit G un groupe topologique compact opérant continûment sur un espace topologique séparé X. Alors on a :*

1. *L'application suivante est propre.*

$$\begin{array}{rccc} f : & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (g,x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

2. *G opère proprement sur X.*

3. *L'application quotient $q : X \longrightarrow X/G$ est propre.*

Démonstration. 1. Ceci résulte immédiatement de la proposition précédente.
2. Comme G est compact, d'après la proposition 3.7.4, la projection canonique

$$\begin{array}{ccc} G\times X & \longrightarrow & X \\ (g,x) & \longmapsto & x \end{array}$$

est propre. On déduit alors de 1 et du corollaire 3.7.2 que l'application

$$\begin{array}{ccc} G\times X & \longrightarrow & X\times X \\ (g,x) & \longmapsto & (gx,x) \end{array}$$

est propre. Autrement dit, G opère proprement sur X.
3. Soit

$$\begin{array}{cccc} f: & G\times X & \longrightarrow & X \\ & (g,x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

l'action de G sur X. L'application quotient q est continue et pour tout $x\in X$, on a $q^{-1}(\{q(x)\})=\{gx\ ;\ g\in G\}=f(G\times\{x\})$, donc $q^{-1}(\{q(x)\})$ est une partie compacte de X. Soit F un fermé de X, on a $q^{-1}(q(F))=\{gx\ ;\ g\in G \text{ et } x\in F\}=GF=f(G\times F)$. Comme $G\times F$ est fermé dans $G\times X$, on déduit de 1 que $f(G\times F)$ est fermé dans X, donc $q(F)$ est fermé dans X/G. Par conséquent, q est une application propre. ■

Corollaire 11.3.3. *Soit G un groupe topologique compact opérant continûment sur un espace topologique séparé X. Alors on a :*

1. *Si X est régulier ou normal ou admet une base dénombrable d'ouverts, ou métrisable alors il en est de même pour X/G.*
2. *X est compact (resp. localement compact) si et seulement si X/G est compact (resp. localement compact).*

Démonstration. Ceci résulte du théorème précédent et des théorèmes 3.7.1 et 3.7.3. ■

Corollaire 11.3.4. *Soient G un groupe topologique séparé et H un sous-groupe compact de G.*

1. *L'application quotient $q: G\longrightarrow G/H$ est propre.*
2. *L'espace homogène G/H est compact (resp. localement compact) si et seulement si G est compact (resp. localement compact).*

Démonstration. Ceci résulte du théorème précédent et du théorème 3.7.3. ■

Théorème 11.3.3. *Soit G un groupe topologique séparé opérant continûment sur un espace localement compact X. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *G opère proprement sur X.*

(ii) *Pour tout compact K de X, l'ensemble $G_K=\big\{g\in G\ ;\ K\cap gK\neq\emptyset\big\}$ est relativement compact dans G.*

(iii) *Pour tous $x,y\in X$, il existe des voisinages ouverts U et V dans X de x et y respectivement tels que l'ensemble $\big\{g\in G\ ;\ U\cap gV\neq\emptyset\big\}$ soit relativement compact dans G.*

(iv) *(a)* *Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que l'ensemble $\{g \in G\ ;\ U \cap gU \neq \emptyset\}$ soit relativement compact dans G.*

(b) *L'espace des orbites X/G est séparé.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 11 du supplément.

Corollaire 11.3.5. *Soit Γ un groupe discret opérant continûment sur un espace localement compact X. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *Γ opère proprement sur X.*

(ii) *Pour tout compact K de X, l'ensemble $\Gamma_K = \{g \in \Gamma\ ;\ K \cap gK \neq \emptyset\}$ est fini.*

(iii) *Pour tous $x, y \in X$, il existe des voisinages ouverts U et V dans X de x et y respectivement tels que l'ensemble $\{g \in \Gamma\ ;\ U \cap gV \neq \emptyset\}$ soit fini.*

(iv) *(a)* *Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que l'ensemble $\{g \in \Gamma\ ;\ U \cap gU \neq \emptyset\}$ soit fini.*

(b) *L'espace des orbites X/Γ est séparé.*

Proposition 11.3.8. *Soit Γ un groupe discret opérant continûment et proprement sur un espace localement compact X. Alors pour tout $x \in X$, S_x, le stabilisateur de x, est fini et il existe un voisinage ouvert U de x tel que $gU = U$ si $g \in S_x$ et $U \cap gU = \emptyset$ si $g \in \Gamma \setminus S_x$.*

Démonstration. Soit $x \in X$. D'après le corollaire précédent, il existe un voisinage ouvert W de x dans X tel que l'ensemble $A_x = \{g \in \Gamma\ ;\ W \cap gW \neq \emptyset\}$ soit fini. Comme on a $S_x = \{g \in \Gamma\ ;\ gx = x\} \subset A_x$, alors S_x est fini. Pour tout $g \in A_x \setminus S_x$, on a $gx \neq x$. Comme l'ensemble $A_x \setminus S_x$ est fini et X est séparé, alors il existe un voisinage ouvert V de x dans X tel que $V \subset W$ et $V \cap gV = \emptyset$, pour tout $g \in A_x \setminus S_x$. Soit $U = \bigcap\limits_{g \in S_x} gV$. Comme S_x est un sous-groupe fini de Γ, alors U est un voisinage ouvert de x dans X et on a $gU = U$, pour tout $g \in S_x$. Comme on a $U \subset V$, alors pour tout $g \in A_x \setminus S_x$, on a $U \cap gU = \emptyset$. D'autre part, pour tout $g \in \Gamma \setminus A_x$, on a $U \cap gU \subset V \cap gV \subset W \cap gW = \emptyset$. Par conséquent, pour tout $g \in S_x$, on a $gU = U$ et pour tout $g \in \Gamma \setminus S_x$, on a $U \cap gU = \emptyset$. ■

Corollaire 11.3.6. *Soit Γ un groupe discret opérant continûment, librement et proprement sur un espace localement compact X, alors pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que pour tout $g \in \Gamma$, on ait $U \cap gU = \emptyset$ si $g \neq e$. Autrement dit, pour tous $g, h \in \Gamma$, on a $hU \cap gU = \emptyset$ si $g \neq h$. Par conséquent, l'application quotient $q : X \longrightarrow X/\Gamma$ induit un homéomorphisme de U sur l'ouvert $q(U)$.*

Démonstration. Soit $x \in X$. Comme Γ opère proprement sur X, il résulte de la proposition précédente qu'il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que $U \cap gU = \emptyset$ si $g \in \Gamma \setminus S_x$. Comme Γ opère librement sur X, alors on a $S_x = \{e\}$. Par conséquent, pour tout $g \in \Gamma$ tel que $g \neq e$, on ait $U \cap gU = \emptyset$. Comme q est ouverte et continue, pour montrer que la restriction de q à U est un homéomorphisme de U sur l'ouvert $q(U)$, il suffit de montrer que la restriction de q à U est injective. Soient $a, b \in U$ tels que $q(a) = q(b)$, alors il existe $g \in \Gamma$ tel que $b = ga$, on en déduit $U \cap gU \neq \emptyset$, donc on a $g = e$, d'où $a = b$. ■

Remarque 11.3.4. Il résulte du corollaire précédent que si Γ un groupe discret opérant continûment, librement et proprement sur un espace localement compact X et si X est séparable, alors Γ est dénombrable.

11.4 Groupes classiques

Dans ce paragraphe, le corps des scalaires $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$. Rappelons que $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2. On identifie canoniquement $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ à $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ grâce à la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Ainsi, le choix d'une norme sur $\mathbb{K}^n$ définit une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Notons aussi que toutes les normes sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes car $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie. Donc, on peut choisir n'importe quelle norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$; cela dépend de la propriété que l'on cherche à montrer. Rappelons aussi, voir exemple 8.4.2, que si $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A^* = \begin{cases} {}^{\mathrm{t}}A = [\alpha_{ij}] & \text{si} \quad A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\,, \\ \\ {}^{\mathrm{t}}\bar{A} = [\beta_{ij}] & \text{si} \quad A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})\,. \end{cases}$$

Où $\alpha_{ij} = a_{ji}$ et $\beta_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Notons aussi que l'on peut identifier $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^{n^2}$, par exemple au moyen de l'isomorphisme linéaire ψ, qui à la matrice $[a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ associe l'élément $(x_k)_{1\leq k\leq n^2}$ de $\mathbb{K}^{n^2}$, défini par $x_{(i-1)n+j} = a_{ij}$, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

On note :

- $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \big\{A \in M_n(\mathbb{K}) \ ; \ \det(A) \neq 0\big\}$, c'est l'ensemble des matrices inversibles dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Muni de la loi produit de deux matrices, c'est un groupe dont l'élément neutre est la matrice identité I_n, il est appelé **groupe linéaire**.

- $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) = \big\{A \in M_n(\mathbb{K}) \ ; \ \det(A) = 1\big\}$, c'est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, appelé **groupe spécial linéaire**.

- $\mathrm{O}(n) = \big\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ {}^{\mathrm{t}}AA = I_n\big\}$, c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, appelé **groupe orthogonal**.

- $\mathrm{SO}(n) = \big\{A \in \mathrm{O}(n) \ ; \ \det(A) = 1\big\}$, c'est un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$, appelé **groupe spécial orthogonal** ou **groupe des rotations**.

- $\mathrm{U}(n) = \big\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \ ; \ A^*A = I_n\big\}$, c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, appelé **groupe unitaire**.

- $\mathrm{SU}(n) = \big\{A \in \mathrm{U}(n) \ ; \ \det(A) = 1\big\}$, c'est un sous-groupe de $\mathrm{U}(n)$, appelé **groupe spécial unitaire**.

Exemple 11.4.1. On a :

$$\mathrm{O}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\delta\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \delta\cos(\theta) \end{bmatrix} \ ; \ \theta \in \mathbb{R} \text{ et } \delta = \pm 1 \right\}$$

et

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \; ; \; \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

En effet, il est clair que toute matrice de la forme $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\delta\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \delta\cos(\theta) \end{bmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \{-1, 1\}$, est dans $\mathrm{O}(2)$. Réciproquement, soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, alors $A \in \mathrm{O}(2)$ si et seulement si on a $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ceci est équivalent à : $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$ et $ab + cd = 0$. De l'équation $a^2 + c^2 = 1$, on déduit qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $c = \sin(\theta)$. L'équation $ab + cd = 0$ nous dit que le déterminant $\begin{vmatrix} a & d \\ c & -b \end{vmatrix} = 0$. Donc le vecteur $(d, -b)$ est colinéaire à (a, c). Donc il existe $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $b = -\delta c$ et $d = \delta a$. L'équation $b^2 + d^2 = 1$ entraîne alors $\delta^2 = 1$. Par conséquent, on a $A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\delta\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \delta\cos(\theta) \end{bmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \{-1, 1\}$.
Soit $A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\delta\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \delta\cos(\theta) \end{bmatrix} \in \mathrm{O}(2)$, on a $\det(A) = \delta$. On en déduit que $A \in \mathrm{SO}(2)$ si et seulement si $\delta = 1$. Donc tout élément de $\mathrm{SO}(2)$ est de la forme $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Exemple 11.4.2. On a $\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \; ; \; \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ avec } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$.
En effet, il est clair que la matrice $\begin{bmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{bmatrix}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, est dans $\mathrm{SU}(2)$.
Réciproquement, soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, alors $A \in \mathrm{SU}(2)$ si et seulement si on a :

$$ad - bc = 1 \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ceci est équivalent à :

$$ad - bc = 1, \quad |a|^2 + |c|^2 = 1, \quad |b|^2 + |d|^2 = 1, \quad \overline{a}b + \overline{c}d = 0\,.$$

L'équation $\bar{a}b + \bar{c}d = 0$ nous dit que le déterminant $\begin{vmatrix} \overline{a} & d \\ \overline{c} & -b \end{vmatrix} = 0$. Donc le vecteur $(d, -b)$ est colinéaire à $(\overline{a}, \overline{c})$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $b = -\lambda\overline{c}$ et $d = \lambda\overline{a}$. Par ailleurs, on a $1 = ad - bc = \lambda|a|^2 + \lambda|c|^2 = \lambda$. Par conséquent, on a $A = \begin{bmatrix} a & -\overline{c} \\ c & \overline{a} \end{bmatrix}$, avec $|a|^2 + |c|^2 = 1$.

Rappelons que l'on a montré, voir propositions 8.7.9 et 8.7.10, le résultat suivant :

Proposition 11.4.1 (diagonalisation). *On a les propriétés suivantes :*

1. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $AA^* = A^*A$. Alors il existe une matrice unitaire $U \in U(n)$ et une matrice diagonale D de $M_n(\mathbb{C})$, formée de valeurs propres de A, telles que $A = UDU^*$.*

2. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tA$, alors il existe une matrice orthogonale $P \in O(n)$ et une matrice diagonale D de $M_n(\mathbb{R})$, formée de valeurs propres de A, telles que $A = PDP^*$.*

Remarque 11.4.1. 1. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{bmatrix}$. Alors on a $A = {}^{\mathrm{t}}A$, mais A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Notez que bien sûr $AA^* \neq A^*A$.

2. Soit $A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Alors on a $A{}^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}AA$, mais A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Notez que bien sûr $A \neq {}^{\mathrm{t}}A$.

Proposition 11.4.2. *Soit $A \in O(n)$, alors il existe $P \in O(n)$ et il existe une matrice diagonale par blocs de la forme $D = Diag(I_r, -I_s, R(\theta_1), \ldots, R(\theta_p))$ tels que $A = PDP^*$, où $R(\theta_k) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{bmatrix}$, avec $\theta_k \in]0, \pi[$, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$. Dans le cas où $r = 0$, resp. $s = 0$, resp. $p = 0$, on convient que la notation de l'énoncé représente $Diag(I_s, R(\theta_1), \ldots, R(\theta_p))$, resp. $Diag(I_r, R(\theta_1), \ldots, R(\theta_p))$, resp. $Diag(I_r, I_s)$.*

Démonstration. On considère A comme matrice complexe, on a $A \in \mathrm{U}(n)$. Donc les valeurs propres de A sont dans $\mathbb{S}$ et si λ est une valeur propre non réelle de A, alors $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A, de même multiplicité, car le polynôme $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ est à coefficients réels. D'après la proposition 8.7.9, on a :

$$\mathbb{C}^n = \ker(A - I_n) \oplus \ker(A + I_n) \oplus (E_1 \oplus F_1) \oplus \cdots \oplus (E_p \oplus F_p),$$

où $E_k = \ker(A - \lambda_k I_n)$, $F_k = \ker(A - \overline{\lambda_k} I_n)$, $\lambda_k = \cos(\theta_k) + i\sin(\theta_k)$, $\theta_k \in]0, \pi[$ et les λ_k et $\overline{\lambda_k}$ sont les valeurs propres non réelles de A, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$. Fixons pour l'instant $k \in \{1, \ldots, p\}$ et soit $V_1, \ldots, V_q$ une base orthonormée de E_k, alors $\overline{V_1}, \ldots, \overline{V_q}$ est une base orthonormée de F_k. On pose $W_j = \frac{1}{i\sqrt{2}}\big(V_j - \overline{V_j}\big)$ et $W'_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(V_j + \overline{V_j}\big)$, pour tout $j \in \{1, \ldots, q\}$. Alors $(W_1, W'_1, \ldots, W_q, W'_q)$ est une base orthonormée de $E_k \oplus F_k$, formée de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et on a $A(W_j) = \cos(\theta_j)W_j + \sin(\theta_j)W'_j$ et $A(W'_j) = -\sin(\theta_j)W_j + \cos(\theta_j)W'_j$. On réunit alors une base orthonormée de $\ker(A - I_n)$, une base orthonormée de $\ker(A + I_n)$, toutes deux formées de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et les p bases orthonormées de la forme $(W_1, W'_1, \ldots, W_q, W'_q)$ ainsi construites. On obtient ainsi une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice A est représentée par $D = \mathrm{Diag}(I_r, -I_s, R(\theta_1), \ldots, R(\theta_p))$. Notez que $P \in \mathrm{O}(n)$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{B}'$. Autrement dit, les colonnes de la matrice P représentent les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$. ■

Corollaire 11.4.1. *On déduit de la proposition précédente le résultat suivant :*

1. *Soit $A \in SO(3)$. Si $A \neq I_3$, alors il existe $\theta \in]0, \pi]$ et il existe $P \in O(3)$ tels que :*

$$A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} P^*.$$

2. *Soit $A \in O(3) \setminus SO(3)$. Si $A \neq -I_3$, alors il existe $\theta \in [0, \pi[$ et il existe $P \in O(3)$ tels que :*

$$A = P \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} P^*.$$

Rappelons, voir définition 8.7.1, qu'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **positive** si $A = A^*$ et si pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, on a $\langle A(X), X\rangle \in \mathbb{R}_+$. On déduit de la proposition 11.4.1 que si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = A^*$, alors A est positive si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont positives. Notons également que si A est une matrice positive, alors on a $\det(A) \geq 0$.

Lemme 11.4.1 (**racine carrée d'une matrice positive**). *Soient A et B deux matrices positives de $M_n(\mathbb{K})$.*

1. *Pour tout $\alpha > 0$, $A + \alpha I_n$ est inversible.*
2. *Si $A^2 = B^2$, alors on a $A = B$.*
3. *Il existe une unique matrice positive C de $M_n(\mathbb{K})$ telle que $C^2 = A$. La matrice C est dite **racine carrée** de A.*

Pour une preuve du lemme précédent, voir chapitre 11 du supplément.

Proposition 11.4.3 (**décomposition polaire**). *On a les propriétés suivantes :*

1. *Toute matrice A de $GL(n, \mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme $A = OS$, où $O \in O(n)$ et S est une matrice positive inversible. Si $A \in SL(n, \mathbb{R})$, on a de plus $O \in SO(n)$ et $\det(S) = 1$.*
2. *Toute matrice A de $GL(n, \mathbb{C})$ s'écrit de manière unique sous la forme $A = US$, où $U \in U(n)$ et S est une matrice positive inversible. Si $A \in SL(n, \mathbb{C})$, on a de plus $U \in SU(n)$ et $\det(S) = 1$.*

Démonstration. 1. Comme ${}^{\mathrm{t}}AA$ est une matrice positive et inversible, il résulte du lemme 11.4.1 qu'il existe une unique matrice positive et inversible S telle que $S^2 = {}^{\mathrm{t}}AA$. Soit $O = AS^{-1}$, alors on a $A = OS$ et ${}^{\mathrm{t}}OO = S^{-1}{}^{\mathrm{t}}AAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$, donc $O \in \mathrm{O}(n)$. Par conséquent, on a la décomposition cherchée. L'unicité résulte des relations $O = AS^{-1}$, ${}^{\mathrm{t}}AA = S^2$ et du lemme 11.4.1. Si $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, *i.e.* $\det(A) = 1$, alors on a $1 = \det(O)\det(S)$. Comme on a $\det(S) > 0$ et $\det(O) \in \{-1, 1\}$, on en déduit que l'on a $\det(O) = 1$ et $\det(S) = 1$. Autrement dit, on a $O \in \mathrm{SO}(n)$ et $\det(S) = 1$.
2. On fait exactement le même raisonnement comme dans 1. Comme A^*A est une matrice positive et inversible, il résulte du lemme 11.4.1 qu'il existe une unique matrice positive et inversible S telle que $S^2 = A^*A$. Soit $U = AS^{-1}$, alors on a $A = US$ et $U^*U = S^{-1}A^*AS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$, donc $U \in \mathrm{U}(n)$. Par conséquent, on a la décomposition cherchée. L'unicité résulte des relations $U = AS^{-1}$, $A^*A = S^2$ et du lemme 11.4.1. Si $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, *i.e.* $\det(A) = 1$, alors on a $1 = \det(U)\det(S)$. Comme on a $\det(S) > 0$ et $|\det(U)| = 1$, on en déduit que l'on a $\det(U) = 1$ et $\det(S) = 1$. Autrement dit, on a $U \in \mathrm{SU}(n)$ et $\det(S) = 1$. ∎

Proposition 11.4.4. *On a les propriétés suivantes :*

1. *$GL(n, \mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $M_n(\mathbb{K})$.*
2. *L'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 11 du supplément.

Proposition 11.4.5. *Les groupes topologiques $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$ et $SO(n)$ sont compacts.*

Démonstration. Comme l'application $A \longmapsto (A^*, A)$ est continue de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, voir proposition 8.4.3, et comme l'application $(A, B) \longmapsto AB$ est bilinéaire, donc continue de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, voir proposition 6.6.2, alors l'application $A \longmapsto A^*A$ est continue de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On en déduit que $\mathrm{U}(n)$ est fermé dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Par ailleurs, si on munit $\mathbb{C}^n$ du produit scalaire canonique, alors pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\|A\|^2 = \|A^*A\|$, où $\| \ \|$ est la norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ provenant de l'identification de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ à $\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$, voir proposition 8.4.3. Par conséquent, pour tout $A \in \mathrm{U}(n)$, on a $\|A\| = 1$, donc $\mathrm{U}(n)$ est aussi borné dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Donc $\mathrm{U}(n)$ est compact. Comme $\mathrm{SU}(n)$ est fermé dans $\mathrm{U}(n)$, car l'application déterminant est continue de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, alors $\mathrm{SU}(n)$ est compact. On a $\mathrm{O}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, donc $\mathrm{O}(n)$ est compact. Finalement, comme $\mathrm{SO}(n)$ est fermé dans $\mathrm{O}(n)$, alors $\mathrm{SO}(n)$ est compact. ∎

Proposition 11.4.6. *Les groupes topologiques $GL(n, \mathbb{C})$, $SU(n)$ et $U(n)$ sont connexes par arcs.*

Démonstration. Soient $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Soit $p(z) = \det(zA + (1 - z)B)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors p est un polynôme sur $\mathbb{C}$ de degré $\leq n$. D'après le théorème de d'Alembert, théorème 3.3.5, p a au plus n racines dans $\mathbb{C}$. Par conséquent, l'ensemble $V = \big\{z \in \mathbb{C} \ ; \ p(z) \neq 0\big\}$ est connexe par arcs dans $\mathbb{C}$, et en plus on a $\{0, 1\} \subset V$. Comme l'application $f \ : z \longmapsto zA + (1 - z)B$ est continue de V dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, alors $f(V)$ est connexe par arcs. Or on a $A, B \in f(V)$, donc $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs.
Montrons que $\mathrm{SU}(n)$ est connexe par arcs. Soit $A \in \mathrm{SU}(n)$. D'après les propositions 8.7.7 et 11.4.1, il existe une matrice $U \in \mathrm{U}(n)$ telle que :

$$A = U \begin{bmatrix} e^{2\pi i\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{2\pi i\lambda_n} \end{bmatrix} U^* .$$

Comme on a $\det(A) = 1$, alors on peut supposer que l'on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0$. Soit :

$$A_t = U \begin{bmatrix} e^{2\pi it\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{2\pi it\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{2\pi it\lambda_n} \end{bmatrix} U^* .$$

Alors $t \longmapsto A_t$ est une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathrm{SU}(n)$ et on a $A_0 = I_n$ et $A_1 = A$. Par conséquent, $\mathrm{SU}(n)$ est connexe par arcs.
Pour montrer que $\mathrm{U}(n)$ est connexe par arcs, on fait exactement le même raisonnement comme précédemment. Mais donnons une autre démonstration. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SU}(n) \times \mathbb{S} & \longrightarrow & \mathrm{U}(n) \\ (A, \lambda) & \longmapsto & \lambda A \end{array}$$

est continue et surjective, et même, c'est un morphisme de groupes. Comme $\mathrm{SU}(n) \times \mathbb{S}$ est connexe par arcs, on en déduit que $\mathrm{U}(n)$ est connexe par arcs. ■

Proposition 11.4.7. *On a les propriétés suivantes :*

1. *Le groupe compact $SO(n)$ est connexe par arcs.*
2. *Le groupe compact $O(n)$ a deux composantes connexes dont celle contenant I_n est $SO(n)$.*
3. *Le groupe topologique $GL(n, \mathbb{R})$ a deux composantes connexes dont celle contenant I_n est $GL^+(n, \mathbb{R}) = \big\{A \in M_n(\mathbb{R})\ ;\ \det(A) > 0\big\}$ qui est de plus connexe par arcs.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 11 du supplément.

Proposition 11.4.8. *Le groupe topologique $SL(n, \mathbb{K})$ est connexe par arcs.*

Démonstration. Puisque l'application

$$\begin{array}{ccc}]0, +\infty[\times \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) \\ (\lambda, A) & \longmapsto & \lambda A \end{array}$$

est un homéomorphisme et comme $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ est connexe par arcs, on en déduit que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ est connexe par arcs. Montrons que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs. Soit $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. D'après la proposition 11.4.3, il existe $U \in \mathrm{SU}(n)$ et S une matrice positive inversible tels que $A = US$ et $\det(S) = 1$. D'après la proposition 11.4.1, il existe une matrice unitaire $P \in \mathrm{U}(n)$ et une matrice diagonale D de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, formée de valeurs propres de S, telles que $S = PDP^*$. Comme les valeurs propres de S sont positives et comme on a $\det(S) = 1$, alors $D \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Comme $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ est connexe par arcs, alors il existe une application continue $t \longmapsto D_t$ de $[0,\, 1]$ dans $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ telle que $D_0 = I_n$ et $D_1 = D$. D'après la proposition 11.4.6, $\mathrm{SU}(n)$ est connexe par arcs, donc il existe une application continue $t \longmapsto U_t$ de $[0,\, 1]$ dans $\mathrm{SU}(n)$ telle que $U_0 = I_n$ et $U_1 = U$. Alors l'application $t \longmapsto A_t = U_t P D_t P^*$ est continue de $[0,\, 1]$ dans $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ telle que $A_0 = I_n$ et $A_1 = A$. Donc $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ est bien connexe par arcs. ■

11.5 Exercices

Exercice 11.1. Dans cet exercice, il s'agit de déterminer les sous-groupes de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}$.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $G = a\mathbb{Z}$. Montrer que G est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
2. Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ distinct de $\{0\}$.
   (i) Justifier l'existence de $\alpha = \inf\{x \in G\ ;\ x > 0\}$.
   (ii) On suppose $\alpha > 0$. Montrer que α appartient à G. En déduire que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
   (iii) On suppose $\alpha = 0$, montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.
3. En déduire que tout sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit dense, soit fermé et discret.
4. En déduire que si G est un ensemble non vide de $\mathbb{Z}$, alors on a : G est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $G = n\mathbb{Z}$.

Solution. 1. Ceci est trivial.
2(i). Comme l'ensemble $\{x \in G \ ; \ x > 0\}$ est minoré et non vide, alors $\inf\{x \in G \ ; \ x > 0\} = \alpha$ existe dans $\mathbb{R}$.
2(ii). On suppose $\alpha > 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in G$ tel que $\alpha \leq x_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$. Si $\alpha \notin G$, alors il existe $x, y \in G$ tels que $\alpha < y < x < 2\alpha$. D'où on a $x - y \in G$ et $0 < x - y < \alpha$, ce qui est impossible. Donc on a bien $\alpha \in G$. Par conséquent, on a $\alpha\mathbb{Z} \subset G$.
Réciproquement, soit $x \in G$, en faisant la division euclidienne de x par α, on obtient $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0, \alpha[$ tels que $x = q\alpha + r$. On a $x, q\alpha \in G$, d'où $r \in G$. Or on a $0 \leq r < \alpha$, d'où $r = 0$. Donc on a $x = q\alpha \in \alpha\mathbb{Z}$. Par conséquent, on a $G \subset \alpha\mathbb{Z}$, d'où $G = \alpha\mathbb{Z}$.
2(iii). On suppose $\alpha = 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in G$ tel que $0 < x_n < \frac{1}{n}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $q_n \in \mathbb{Z}$ et $r_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = q_n x_n + r_n$, avec $0 \leq r_n < x_n < \frac{1}{n}$. On a $q_n x_n \in G$ et $|x - q_n x_n| \leq r_n < \frac{1}{n}$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n x_n = x$. Donc G est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Ceci résulte de 2.
4. Si $n \in \mathbb{Z}$ et $G = n\mathbb{Z}$, alors G est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Réciproquement, si G est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, alors G est un sous-groupe non dense de $\mathbb{R}$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $G = \alpha\mathbb{Z}$. Or on a $G \subset \mathbb{Z}$, d'où $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Exercice 11.2. Soient a et b deux réels non nuls. On pose $G_{a,b} = \big\{na + mb \ ; \ m, n \in \mathbb{Z}\big\}$.

1. Montrer que $G_{a,b}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si a, $b \in \mathbb{Z}$ et sont premiers entre eux, on a $G_{a,b} = \mathbb{Z}$.
3. Montrer que si $a = 1$ et $b = \sqrt{2}$, alors $G_{a,b}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $G_{a,b}$ est discret si et seulement si $\frac{a}{b}$ est rationnel.
5. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que l'ensemble $\big\{ \exp(2\pi i\theta m) \ ; \ m \in \mathbb{Z}\big\}$ est dense dans $\mathbb{S}$.
6. Montrer que les sous-ensembles $\big\{ \cos(n) \ ; \ n \in \mathbb{N}\big\}$ et $\big\{ \sin(n) \ ; \ n \in \mathbb{Z}\big\}$ sont denses dans $[-1, 1]$.

Solution. 1. On a $0 \in G_{a,b}$, et pour tous $x = na + mb, y = n'a + m'b \in G$, on a $x - y = (n - n')a + (m - m')b$, avec $n - n', m - m' \in \mathbb{Z}$, donc $x - y \in G_{a,b}$. Par conséquent, $G_{a,b}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
2. Si a, $b \in \mathbb{Z}$, alors on a $G_{a,b} \subset \mathbb{Z}$. Autrement dit, $G_{a,b}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{Z}$. D'après l'exercice précédent, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $G_{a,b} = n_0\mathbb{Z}$. Si a et b sont premiers entre eux, il existe n, $m \in \mathbb{Z}$ tels que $na + mb = 1$, d'où $1 \in G$. Par conséquent, on a $n_0 = 1$, d'où $G_{a,b} = \mathbb{Z}$.
3. On suppose $a = 1$ et $b = \sqrt{2}$. Pour montrer que $G_{1,\sqrt{2}}$ est dense dans $\mathbb{R}$, d'après l'exercice précédent, il suffit de vérifier qu'il n'existe aucun $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $G_{1,\sqrt{2}} = \alpha\mathbb{Z}$. Si $G_{1,\sqrt{2}} = \alpha\mathbb{Z}$, alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $1 = \alpha p$, d'où $\alpha \in \mathbb{Q}$. D'autre part, on a aussi $\sqrt{2} \in G_{1,\sqrt{2}}$, donc il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $\sqrt{2} = \alpha q$. D'où on a $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui est impossible. Donc $G_{1,\sqrt{2}}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Si $G_{a,b}$ est discret, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $G_{a,b} = \alpha\mathbb{Z}$. Par conséquent, il existe $p, q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $a = \alpha p$ et $b = \alpha q$, d'où on a $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Réciproquement, supposons $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, alors on a $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$. Soit $\alpha = \frac{a}{p} = \frac{b}{q}$, alors on a $na + mb = \alpha np + \alpha mq = \alpha(np + mq) \in \alpha\mathbb{Z}$.

Donc on a $G_{a,b} \subset \alpha\mathbb{Z}$. Par conséquent, $G_{a,b}$ est discret.
5. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $\frac{1}{\theta}$ est irrationnel. On déduit de 4 et de l'exercice précédent que $G_{1,\theta} = \{n + m\theta\ ;\ (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Comme l'application $t \longmapsto \exp(2\pi i t)$ est continue et surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}$, alors l'ensemble $\{\exp(2\pi i(n + \theta m))\ ;\ n, m \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{S}$. Or on a $\exp(2\pi i(n + \theta m)) = \exp(2\pi i n)\exp(2\pi i\theta m) = \exp(2\pi i\theta m)$, donc $\{\exp(2\pi i\theta m)\ ;\ m \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{S}$.
6. Puisque π est irrationnel, alors $G_{1,2\pi} = \{n + 2\pi m\ ;\ (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Or les fonctions $t \longmapsto \cos(t)$ et $t \longmapsto \sin(t)$ sont continues et surjectives de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$, donc les ensembles $\{\cos(n+2\pi m)\ ;\ n, m \in \mathbb{N}\}$ et $\{\sin(n+2\pi m)\ ;\ n, m \in \mathbb{Z}\}$ sont denses dans $[-1, 1]$. Or on a $\cos(n+2\pi m) = \cos(n)$, $\cos(-n) = \cos(n)$ et $\sin(n+2\pi m) = \sin(n)$, donc $\{\cos(n)\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\sin(n)\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$ sont denses dans $[-1, 1]$.

Exercice 11.3. Soit (X, d) un espace métrique compact. On note G l'ensemble des applications isométriques de X dans X. D'après l'exercice 3.28, toute application isométrique de X dans X est bijective. Donc G, muni de la composition, est un groupe. On munit $C(X, X)$, l'ensemble des applications continues de X dans X, et G de la topologie de la convergence uniforme. Rappelons, voir paragraphe 5.2, que la topologie de la convergence uniforme sur $C(X, X)$ est définie par la distance $D(f, g) = \sup\limits_{x \in X} d(f(x), g(x))$, pour tout $f, g \in C(X, X)$. Il s'agit de montrer que G est un groupe topologique compact.

1. Montrer que G est fermé dans $C(X, X)$.
2. Montrer que G est compact.
3. Montrer que l'application $f \longmapsto f^{-1}$ est continue de G dans G.
4. Montrer que l'application $(f, g) \longmapsto f \circ g$ est continue de $G \times G$ dans G.

Solution. 1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans G convergeant vers $f \in C(X, X)$. Comme pour tout $z \in X$ et pour tout $n \geq 0$, on a $d(f_n(z), f(z)) \leq D(f_n, f)$, alors la suite $(f_n(z))_{n\geq 0}$ converge vers $f(z)$ dans (X, d). Par conséquent, pour tout $x, y \in X$, on a $d(f(x), f(y)) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(f_n(x), f_n(y))$. Or pour tout $n \geq 0$, on a $d(f_n(x), f_n(y)) = d(x, y)$, d'où $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Autrement dit, on a $f \in G$. Donc G est bien fermé dans $(C(X, X), D)$.
2. Puisque X est compact et comme G est une partie équicontinue fermée de $(C(X, X), D)$, il résulte du théorème d'Ascoli, théorème 5.3.2, que G est compact.
3. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite dans G convergeant vers $f \in G$. Alors pour tout $x, y \in X$, on a $d(x, f(y)) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(x, f_n(y))$. Comme on a $d(f_n^{-1}(x), f^{-1}(x)) = d(x, f_n(f^{-1}(x)))$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} d(f_n^{-1}(x), f^{-1}(x)) = \lim_{n\to+\infty} d(x, f_n(f^{-1}(x))) = d(x, f(f^{-1}(x))) = d(x, x) = 0\,.$$

Autrement dit, pour tout $x \in X$, la suite $(f_n^{-1}(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f^{-1}(x)$ dans (X, d). Comme $\{f_n^{-1}\ ;\ n \geq 0\}$ est une partie équicontinue de G, alors il résulte du théorème 5.3.1 que la suite $\left(f_n^{-1}\right)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f^{-1}. Autrement dit, la suite $(f_n^{-1})_{n\geq 0}$ converge vers f^{-1} dans G. Donc l'application $f \longmapsto f^{-1}$ est continue de G dans G.
4. Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(g_n)_{n\geq 0}$ deux suites dans G convergeant respectivement vers f et g

dans G. Comme $\{f_n \circ g_n \ ; \ n \geq 0\}$ est une partie équicontinue de G, pour montrer que la suite $(f_n \circ g_n)_{n\geq 0}$ converge vers $f \circ g$ dans G, d'après le théorème 5.3.1, il suffit de montrer que pour tout $x \in X$, la suite $(f_n \circ g_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f \circ g(x)$ dans (X, d). On a :

$$\begin{aligned} d(f_n \circ g_n(x), f \circ g(x)) &\leq d(f_n \circ g_n(x), f_n \circ g(x)) + d(f_n \circ g(x), f \circ g(x)) \\ &= d(f_n(g_n(x)), f_n(g(x))) + d(f_n(g(x)), f(g(x))) \\ &= d(g_n(x), g(x)) + d(f_n(g(x)), f(g(x)))\,. \end{aligned}$$

Or on a :

$$\lim_{n\to+\infty} d(g_n(x), g(x)) = d(g(x), g(x)) = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} d(f_n(g(x)), f(g(x))) = d(f(g(x)), f(g(x))) = 0\,.$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} d(f_n \circ g_n(x), f \circ g(x)) = 0$. Autrement dit, la suite $(f_n \circ g_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f \circ g(x)$ dans (X, d). Donc l'application $(f, g) \longmapsto f \circ g$ est continue de $G \times G$ dans G.

Exercice 11.4. Soit G un groupe topologique compact. On note $C(G)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur G et à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$, muni de la norme $\| \ \|_\infty$. Soit $f \in C(G)$. Pour tout $g \in G$, soit $L_g(f) \in C(G)$ définie par $L_g(f)(h) = f(gh)$, pour tout $h \in G$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage ouvert V de e dans G tel que pour tout $x, y \in G$ vérifiant $yx^{-1} \in V$, on ait $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
2. Montrer que l'application $g \longmapsto L_g(f)$ est continue de G dans $C(G)$.
3. En déduire que $\overline{\mathrm{conv}}\big(\{L_g(f) \ ; \ g \in G\}\big)$ est compact.

Solution. 1. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue, alors pour tout $a \in G$, il existe un voisinage W_a de e dans G tel que pour tout $x \in G$ vérifiant $xa^{-1} \in W_a$, on ait $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit V_a un voisinage ouvert de e dans G tel que $V_a V_a^{-1} \subset W_a$. Comme G est compact et comme on a $G = \bigcup\limits_{a\in G} V_a\, a$, alors il existe $a_1, \ldots, a_n \in G$ tels que $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{a_i}\, a_i$. Soit $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{a_i}$, alors V est un voisinage ouvert de e dans G. Soient $x, y \in G$ tels que $yx^{-1} \in V$. Alors il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $ya_i^{-1} \in V_{a_i}$, d'où $ya_i^{-1} \in W_{a_i}$, donc on a $|f(y) - f(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme on a aussi $xa_i^{-1} = xy^{-1}ya_i^{-1} \in V^{-1}V_{a_i} \subset V_{a_i}V_{a_i}^{-1} \subset W_{a_i}$, alors on a $|f(x) - f(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, on a $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(y)| < \varepsilon$.
2. Soient $a, b \in G$, on a $\|L_a(f) - L_b(f)\|_\infty = \sup\limits_{h\in G} |f(ah) - f(bh)|$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après 1, il existe un voisinage ouvert V de e dans G tel que pour tout $x, y \in G$ vérifiant $yx^{-1} \in V$, on ait $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Alors pour tout $a, b \in G$ vérifiant $ab^{-1} \in V$ et pour tout $h \in G$, on a $ah(bh)^{-1} = ahh^{-1}b^{-1} = ab^{-1} \in V$, d'où $|f(ah) - f(bh)| < \varepsilon$. Donc, pour tout $a, b \in G$ vérifiant $ab^{-1} \in V$, on a $\|L_a(f) - L_b(f)\|_\infty \leq \varepsilon$. Par conséquent, l'application $g \longmapsto L_g(f)$ est continue de G dans $C(G)$.
3. Comme G est compact, on déduit de 2 que l'ensemble $\{L_g(f) \ ; \ g \in G\}$ est compact

dans $C(G)$. Comme $(C(G), \| \|_\infty)$ est un espace de Banach, on déduit du théorème 9.5.1 que $\overline{\mathrm{conv}}\big(\{L_g(f) \; ; \; g \in G\}\big)$ est compact dans $(C(G), \| \|_\infty)$.

Exercice 11.5. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) φ est un morphisme de groupes continue.

(ii) Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait $\varphi(t) = e^{i\theta t}$

Solution. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) est triviale. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). On suppose donc φ un morphisme de groupes continue. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit $f(t) = \displaystyle\int_0^t \varphi(s)\, ds$. Pour tout $t_1,\, t_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(t_1 + t_2) = \int_0^{t_1+t_2} \varphi(s)\, ds = \int_0^{t_1} \varphi(s)\, ds + \int_{t_1}^{t_1+t_2} \varphi(s)\, ds = f(t_1) + \int_0^{t_2} \varphi(u + t_1)\, du\,.$$

Or on a $\varphi(u + t_1) = \varphi(u)\varphi(t_1)$, d'où $f(t_1 + t_2) = f(t_1) + \varphi(t_1) \displaystyle\int_0^{t_2} \varphi(u)\, du = f(t_1) + \varphi(t_1)f(t_2)$. Comme f est dérivable et on a $f' = \varphi \neq 0$, alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) \neq 0$. Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t + t_0) = f(t) + \varphi(t)f(t_0)$, d'où $\varphi(t) = \dfrac{f(t + t_0) - f(t)}{f(t_0)}$. Donc φ est dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi'(t) = \frac{f'(t + t_0) - f'(t)}{f(t_0)} = \frac{\varphi(t + t_0) - \varphi(t)}{f(t_0)} = \frac{\varphi(t)\varphi(t_0) - \varphi(t)}{f(t_0)} = \left[\frac{\varphi(t_0) - 1}{f(t_0)}\right] \varphi(t)\,.$$

Soit $c = \dfrac{\varphi(t_0) - 1}{f(t_0)}$, alors c est une constante dans $\mathbb{C}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi'(t) = c\varphi(t)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit $\psi(t) = \varphi(t)e^{-ct}$, alors ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\psi(0) = 1$ et on a $\psi'(t) = \varphi'(t)e^{-ct} - c\varphi(t)e^{-ct} = c\varphi(t)e^{-ct} - c\varphi(t)e^{-ct} = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, ψ est constante sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(t)e^{-ct} = \psi(t) = \psi(0) = 1$, d'où pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(t) = e^{ct}$. On a $c = x + i\theta$, avec $x, \theta \in \mathbb{R}$, et $e^x e^{i\theta} = e^c = \varphi(1) \in \mathbb{S}$, d'où $e^x = 1$, donc $x = 0$. Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(t) = e^{i\theta t}$, ce que l'on cherche à montrer.

Exercice 11.6. Soient G un groupe topologique séparé et H une partie compacte non vide de G stable par multiplication. Il s'agit de montrer que H est un sous-groupe de G.

1. Soient $x \in H$ et y une valeur d'adhérence de la suite $(x^n)_{n\geq 1}$. Montrer que $yH = \bigcap\limits_{n\geq 1} x^n H$ et en déduire que l'on a $yxH = yH$.

2. En déduire que pour tout $x \in H$, on a $xH = H$.

3. En déduire que H est un sous-groupe de G.

Solution. 1. D'après la proposition 1.7.1, on a $y \in \bigcap\limits_{n\geq 1} \overline{\{x^p \; ; \; p \geq n\}}$, d'où $yH \subset \bigcap\limits_{n\geq 1} \overline{\{x^p \; ; \; p \geq n\}}H$. D'autre part, on a $\{x^p \; ; \; p \geq n\}H \subset x^n H$ et $x^n H$ est fermé, même

compact. Puisque l'application $f\ :(a,b)\longmapsto ab$ est continue de $G\times G$ dans G, alors on a $\overline{\{x^p\ ;\ p\geq n\}H}\subset x^nH$, d'où $yH\subset \bigcap\limits_{n\geq 1} x^nH$. Réciproquement, soit $z\in \bigcap\limits_{n\geq 1} x^nH$. Alors pour tout $n\geq 1$, il existe $b_n\in H$ tel que $z=x^nb_n$. Comme H est compact, alors la suite $(b^n)_{n\geq 1}$ possède au moins une valeur d'adhérence $b\in H$. On déduit de la continuité de l'application f que yb est une valeur d'adhérence de la suite $(x^nb^n)_{n\geq 1}$, d'où $z=yb$. Donc on a $z\in yH$. Par conséquent, on a $yH=\bigcap\limits_{n\geq 1} x^nH$. Comme yx est une valeur d'adhérence de la suite $(x^{n+1})_{n\geq 1}$, alors yx est une valeur d'adhérence de la suite $(x^n)_{n\geq 1}$. D'où on a $yxH=\bigcap\limits_{n\geq 1} x^nH=yH$.
2. Soit $x\in H$. Comme H est compact, alors la suite $(x^n)_{n\geq 1}$ possède au moins une valeur d'adhérence $y\in H$. On déduit de 1 que l'on a $yxH=yH$. Par suite, on a :

$$xH=y^{-1}yxH=y^{-1}yH=H\,.$$

3. Soit $x\in H$. D'après 2, on a $xH=H$, donc il existe $z\in H$ tel que $xz=x$, d'où $e=z\in H$. On utilise de nouveau la relation $xH=H$, on trouve $h\in H$ tel que $xh=e$, d'où $x^{-1}=h\in H$. Par conséquent, H est un sous-groupe de G.

Exercice 11.7. Soient G un groupe topologique connexe et H un sous-groupe distingué et totalement discontinu de G. Montrer que H est inclus dans le centre de G.
Solution. Soit $h\in H$. L'application

$$\begin{array}{rccc} f\ : & G & \longrightarrow & H\\ & g & \longmapsto & ghg^{-1}\end{array}$$

est continue. Comme G est connexe, alors $f(G)$ est connexe dans H. Puisque H est totalement discontinu et on a $h\in f(G)$, alors $f(G)=\{h\}$. Autrement dit, pour tout $g\in G$, on a $ghg^{-1}=h$, d'où $gh=hg$. Donc on a $h\in Z(G)$. Par conséquent, on a $H\subset Z(G)$.

Exercice 11.8. Soient G un groupe topologique localement compact et G_0 la composante connexe de e dans G. On suppose que le groupe topologique quotient G/G_0 est compact. Montrer que G est dénombrable à l'infini.
Solution. Comme G_0 est fermé dans G, alors G_0 est localement compact. Donc G_0 est un groupe topologique localement compact et connexe. On déduit du théorème 11.2.3 que G_0 est dénombrable à l'infini. Autrement dit, il existe une suite $(K_n)_{n\geq 0}$ de compacts dans G tels que $G_0=\bigcup\limits_{n\geq 0} K_n$. Comme G/G_0 est compact, d'après la proposition 11.3.1, il existe un compact K de G tel que $G=KG_0$. Alors on a $G=\bigcup\limits_{n\geq 0} KK_n$ et pour tout $n\geq 0$, KK_n est compact, voir proposition 11.1.2, donc G est dénombrable à l'infini.

Exercice 11.9. Soit G un groupe localement compact.

1. Supposons que G est totalement discontinu. Montrer que tout voisinage de e dans G contient un sous-groupe ouvert de G. En déduire que $\{e\}$ est l'intersection des sous-groupes ouverts de G.
2. En déduire que G_0, la composante connexe de e dans G, est l'intersection des sous-groupes ouverts de G.

3. En déduire que si G est engendré, en tant qu'un groupe, par chacun des voisinages de l'élément neutre, alors G est connexe.

Solution. 1. Soit V un voisinage compact de e dans G. Comme G est localement compact et totalement discontinu, d'après le théorème 4.2.2, il existe un voisinage U de e à la fois ouvert et fermé dans G tel que $U \subset V$. Soit $B = G \setminus U$. Comme U est compact et B est fermé dans G tels que $U \cap B = \emptyset$, d'après la proposition 11.1.3, il existe un voisinage ouvert W de e dans G tel que $W \subset U$, $W = W^{-1}$ et $WU \cap BW = \emptyset$. En particulier, on a $WU \subset U$. On en déduit, par récurrence sur n, que pour tout $n \geq 1$, on a $W^n = \underbrace{WW \cdots W}_{n \text{ fois}} \subset U$. Soit $H = \bigcup\limits_{n\geq 1} W^n$, alors H est un sous-groupe ouvert de G et on a $H \subset V$.
Comme on a $\bigcap\limits_{V\in\mathcal{V}} V = \{e\}$, où $\mathcal{V}$ est l'ensemble des voisinages de e, voir proposition 11.1.1, on déduit de ce qui précède que $\{e\}$ est l'intersection des sous-groupes ouverts de G.
2. Soit G_0 la composante connexe de e dans G. D'après la proposition 11.2.5 et le corollaire 11.2.1, G_0 est un sous-groupe distingué fermé dans G et G/G_0 est un groupe localement compact et totalement discontinu. Soit H un sous-groupe ouvert de G. D'après le théorème 11.2.1, H est aussi fermé dans G. Comme on a $G_0 \cap H \neq \emptyset$ et comme G_0 est connexe, alors on a $G_0 \subset H$. Soit $q : G \longrightarrow G/G_0$ l'application quotient. Soit $(H_i)_{i\in I}$ la famille des sous-groupes ouverts de G. Alors pour tout $i \in I$, $g(H_i)$ est un sous-groupe ouvert de G/G_0 car q est un morphisme de groupes et est une application ouverte. D'autre part, si G' est un sous-groupe ouvert de G/G_0, alors $q^{-1}(G')$ est un sous-groupe ouvert de G et on a $q(q^{-1}(G')) = G'$. Par conséquent, $q\big(\bigcap\limits_{i\in I} H_i\big)$ est inclus dans l'intersection des sous-groupes ouverts de G/G_0. D'après 1, l'intersection des sous-groupes ouverts de G/G_0 est réduite à l'élément neutre de G/G_0, donc on a $q\big(\bigcap\limits_{i\in I} H_i\big) = \{q(e)\}$. Par conséquent, on a $\bigcap\limits_{i\in I} H_i \subset G_0$, d'où $\bigcap\limits_{i\in I} H_i = G_0$.
3. Si G est engendré, en tant qu'un groupe, par chacun des voisinages de l'élément neutre, alors tout sous-groupe ouvert de G est égal à G. On déduit de 2 qu'alors on a $G = G_0$, donc G est connexe.

Exercice 11.10. Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) H est discret.

(ii) H possède un point isolé.

Solution. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est triviale. Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit x un point isolé de H. Alors il existe un voisinage V de e dans G tel que $xV \cap H = \{x\}$. Vérifions que pour tout $y \in H$, on a $yV \cap H = \{y\}$. Soient $y \in H$ et $z \in yV \cap H$. Alors on a $xy^{-1}z \in xV \cap H$, d'où $xy^{-1}z = x$. Donc on a $z = y$, d'où $yV \cap H = \{y\}$. Par conséquent, H est discret.

Exercice 11.11. Soit G un groupe topologique.

1. Soit A une partie non vide connexe de G telle que $e \in A$. Soit H le sous-groupe de G engendré par A. Montrer que H est connexe.

2. En déduire que si G est connexe, alors le groupe des commutateurs de G est connexe.

Solution. 1. Soit $B = A \cup A^{-1}$. Comme A est connexe et comme l'application $x \longmapsto x^{-1}$ est continue, alors A^{-1} est connexe. Puisque $A \cap A^{-1} \neq \emptyset$, car $e \in A \cap A^{-1}$, alors B est connexe. On a $H = \bigcup_{n \geq 1} B^n$, où $B^n = \underbrace{BB \cdots B}_{n \text{ fois}} = \{g_1 ... g_n \ ; \ g_i \in B\}$. D'autre part, l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times \cdots \times G & \longrightarrow & G \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1 x_2 \cdots x_n \end{array}$$

est continue, donc B^n est connexe, pour tout $n \geq 1$. Comme pour tout $n, m \geq 1$, $B^n \cap B^m \neq \emptyset$, car $e \in B^n \cap B^m$, alors on déduit du théorème 4.1.1 que H est connexe.
2. Le groupe des commutateurs de G est le sous-groupe de G engendré par l'ensemble $A = \{xyx^{-1}y^{-1} \ ; \ x, y \in G\}$. Comme G est connexe et comme l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & xyx^{-1}y^{-1} \end{array}$$

est continue, alors A est connexe. Puisque $e \in A$, on déduit de 1 que le groupe des commutateurs de G est connexe.

Exercice 11.12. Soit Γ un groupe discret opérant continûment et proprement sur un espace localement compact X. Montrer que chaque orbite est fermée et discrète dans X.
Solution. Soient $x, y \in X$ et V un voisinage compact de x dans X, alors $K = \{y\} \cup V$ est un compact dans X. Comme Γ opère proprement sur X, il résulte du corollaire 11.3.5 que l'ensemble $\{g \in \Gamma \ ; \ K \cap gK \neq \emptyset\}$ est fini, donc l'ensemble $\{g \in \Gamma \ ; \ V \cap \{gy\} \neq \emptyset\}$ est fini. Par conséquent, l'ensemble $V \cap \Gamma y$ est fini. On en déduit que chaque orbite est fermée et discrète dans X.

Exercice 11.13. Soit G un groupe topologique séparé opérant continûment sur un espace topologique séparé X. Soit K un compact de X. Montrer que l'ensemble $G_K = \{g \in G \ ; \ K \cap gK \neq \emptyset\}$ est fermé dans G.
Solution. Puisque l'application

$$\begin{array}{cccc} f : & G \times K & \longrightarrow & X \\ & (g, x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

est continue, alors $f^{-1}(K)$ est fermé dans $G \times K$. Comme K est compact, d'après la proposition 3.7.4, la projection canonique

$$\begin{array}{cccc} p_1 : & G \times K & \longrightarrow & G \\ & (g, x) & \longmapsto & g \end{array}$$

est une application propre. Donc $p_1(f^{-1}(K))$ est fermé dans G. Comme on a $p_1(f^{-1}(K)) = G_K$, alors G_K fermé dans G.

Exercice 11.14. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.

1. On suppose G compact. Montrer que si $A \in G$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A, alors on a $|\lambda| = 1$.

2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que $\mathrm{Vect}(G) = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si pour tout $A \in G$, toute valeur propre de A est de module 1, alors G est relativement compact.

Solution. 1. Soit $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $x \neq 0$ et $Ax = \lambda x$. Alors $\lambda \neq 0$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $A^p x = \lambda^p x$. Comme la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ est bornée, car elle est dans G, alors la suite $(\lambda^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ est bornée. Par conséquent, on a $|\lambda| = 1$.
2. Pour tout $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, soit $E_{pq} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $E_{pq} = [t_{ij}]$, où :

$$t_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i,j) = (p,q)\,, \\ \\ 0 & \text{si} \quad (i,j) \neq (p,q)\,. \end{cases}$$

Comme on a $\mathrm{Vect}(G) = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, alors pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un ensemble fini $G_{ji} \subset G$ tel que $E_{ji} = \sum_{B\in G_{ji}} \lambda_B\, B$, avec $\lambda_B \in \mathbb{C}$. L'hypothèse sur les valeurs propres implique que pour tout $A \in G$, on a $|\mathrm{tr}(A)| \leq n$. Soit $A = [a_{ij}] \in G$, avec $a_{ij} \in \mathbb{C}$. On a :

$$|a_{ij}| = |\mathrm{tr}(AE_{ji})| \leq \sum_{B\in G_{ji}} |\lambda_B|\, |\mathrm{tr}(AB)| \leq n \sum_{B\in G_{ji}} |\lambda_B| \leq n \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{B\in G_{ji}} |\lambda_B|\,.$$

Par conséquent, G est borné dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, donc G est relativement compact.

Exercice 11.15. Soient $\alpha \geq 0$ et $E = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})\ ;\ |\det(A)| = \alpha\}$.

1. Montrer que E est d'intérieur vide dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
2. En déduire que le groupe topologique $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ est d'intérieur vide dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
3. En déduire que les groupes compacts $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ sont d'intérieurs vides dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
4. En déduire que les groupes compacts $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{SU}(n)$ sont d'intérieurs vides dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution. 1. Supposons d'abord $\alpha = 0$. Alors on a :

$$E = \big\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})\ ;\ \det(A) = 0\big\} = \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})\,.$$

D'après la proposition 11.4.4, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on en déduit que E est d'intérieur vide dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, voir proposition 1.2.2. On suppose maintenant $\alpha > 0$. Supposons que E est d'intérieur non vide dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, alors il existe $A \in E$ et il existe $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\|A - B\| < \varepsilon$, on ait $B \in E$. On en déduit que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|1-\lambda| < \dfrac{\varepsilon}{\|A\|}$, on ait $\lambda A \in E$, car $\|A - \lambda A\| \leq |1-\lambda|\, \|A\| < \varepsilon$, d'où $|\lambda|^n \alpha = |\det(\lambda A)| = \alpha$ ou encore $|\lambda|^n = 1$, ce qui est impossible car si $\lambda = 1 + \dfrac{\varepsilon}{2\|A\|}$, alors on a $|1 - \lambda| = \dfrac{\varepsilon}{2\|A\|} < \dfrac{\varepsilon}{\|A\|}$ et $|\lambda|^n \geq \lambda > 1$. Par conséquent, E est d'intérieur vide dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Les propriétés 2, 3 et 4 résultent immédiatement de 1.

Exercice 11.16.

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} R: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathrm{SO}(2) \\ & \theta & \longmapsto & \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \end{array}$$

   est un morphisme de groupes continue et surjective dont le noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.

2. En déduire que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SO}(2) & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$$

   est un morphisme de groupes et aussi un homéomorphisme.

Solution. 1. Il est clair que R est un morphisme de groupes continue. La surjectivité de R résulte de l'exemple 11.4.1. Il est clair que $R(\theta) = I_2$ si et seulement si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. Donc on a $\ker(R) = 2\pi\mathbb{Z}$.
2. D'après le corollaire 11.3.1, il existe une application $\widetilde{R} : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{SO}(2)$ qui est à la fois un morphisme de groupes et un homéomorphisme telle que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "R"] \arrow[dr, "q"'] & & \mathrm{SO}(2) \\ & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \arrow[ur, "\widetilde{R}"'] & \end{tikzcd}$$

De même, l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$$

est un morphisme de groupes continue et surjective dont le noyau est $2\pi\mathbb{Z}$. Par conséquent, il existe une application $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ qui est à la fois un morphisme de groupes et un homéomorphisme telle que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "q"'] & & \mathbb{S}^1 \\ & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

On en déduit que l'application

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{R}^{-1}: & \mathrm{SO}(2) & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$$

est un morphisme de groupes et aussi un homéomorphisme.

Exercice 11.17. Soit $\mathbb{S}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$. Montrer que l'application suivante est un homéomorphisme.

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{S}^3 & \longrightarrow & \mathrm{SU}(2) \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4) & \longmapsto & \begin{bmatrix} x_1 + ix_2 & -(x_3 - ix_4) \\ x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Solution. D'après l'exemple 11.4.2, on a :

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \,;\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{C} \text{ avec } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Donc l'application φ est bijective, et il est clair que φ est un homéomorphisme.

Exercice 11.18. Action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur le **demi-plan de Poincaré** :

$$\mathbb{H} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,;\, \mathrm{Im}(z) > 0 \right\}.$$

Pour tout $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et pour tout $z \in \mathbb{H}$, soit $h_A(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$.

1. Vérifier que l'on a $h_A(z) \in \mathbb{H}$.
2. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ (A, z) & \longmapsto & h_A(z) \end{array}$$

   est une action continue de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$.
3. Montrer que l'action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$ est transitive.
4. Montrer que le stabilisateur de i est le groupe $\mathrm{SO}(2)$. En déduire que $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ est homéomorphe à $\mathbb{H}$.

Solution. 1. Notons d'abord que pour tout $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ et pour tout $z \in \mathbb{H}$, on a $cz + d \neq 0$. Soient maintenant $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{H}$. On a :

$$\begin{aligned} 2i\mathrm{Im}(h_A(z)) &= h_A(z) - \overline{h_A(z)} \\ &= \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d} \\ &= \frac{(ad - bc)(z - \overline{z})}{|cz + d|^2} = \frac{2i\mathrm{Im}(z)}{|cz + d|^2}. \end{aligned}$$

Donc on a $\mathrm{Im}(h_A(z)) > 0$. Autrement dit, on a $h_A(z) \in \mathbb{H}$.
2. Notons d'abord que l'application $(A, z) \longmapsto h_A(z)$ est continue de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{H}$ dans

$\mathbb{H}$. Il est clair que pour tout $z \in \mathbb{H}$, on a $h_{I_2}(z) = z$. Soient $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \in$ $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{H}$. On a :

$$\begin{aligned} h_A(h_B(z)) &= \frac{ah_B(z)+b}{ch_B(z)+d} \\ &= \frac{a\dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}+b}{c\dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}+d} \\ &= \frac{(aa'+bc')z+ab'+bd'}{(ca'+dc')z+cb'+dd'} = h_{AB}(z)\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ (A,z) & \longmapsto & h_A(z) \end{array}$$

est bien une action continue de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$.

3. Soit $z \in \mathbb{H}$, on a $z = x + iy^2$, avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $y \neq 0$. Soit $A = \begin{bmatrix} y & \frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{bmatrix}$, alors $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et on a $h_A(i) = z$. On en déduit que l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$ est transitive.

4. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, on a :

$$h_A(i) = i \Longleftrightarrow \frac{ai+b}{ci+d} = i \Longleftrightarrow a = d \text{ et } b = -c \Longleftrightarrow A \in \mathrm{SO}(2)\,.$$

Donc le stabilisateur de i est $\mathrm{SO}(2)$. Comme $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est un groupe localement compact et dénombrable à l'infini et comme $\mathbb{H}$ est localement compact, il résulte du théorème 11.3.1, que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ est homéomorphe à $\mathbb{H}$.

Exercice 11.19. Espaces projectifs $\mathbb{KP}^n$. Le groupe topologique multiplicatif $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ opère continûment sur l'espace topologique $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ selon l'action suivante :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{K} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (\lambda, z) & \longmapsto & \lambda z \end{array}$$

L'espace des orbites $(\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{K} \setminus \{0\}$ est noté $\mathbb{KP}^n$. L'espace $\mathbb{RP}^n$ est appelé l'espace **projectif réel** de dimension n, et l'espace $\mathbb{CP}^n$ est appelé l'espace **projectif complexe** de dimension n. Soit $\|\ \|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{K}^n$. Rappelons que $\mathbb{S}^n = \big\{x \in \mathbb{R}^{n+1}\ ;\ \|x\|_2 = 1\big\}$. Notons aussi que l'on peut aussi définir $\mathbb{S}^{2n+1} = \big\{z \in \mathbb{C}^{n+1}\ ;\ \|z\|_2 = 1\big\}$. Soit :

$$d = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & \mathbb{K} = \mathbb{R}\,, \\ 2 & \text{si} & \mathbb{K} = \mathbb{C}\,. \end{array} \right.$$

Avec cette notation, on a alors $\mathbb{S}^{(n+1)d-1} = \{z \in \mathbb{K}^{n+1} \; ; \; \|z\|_2 = 1\}$. Notons aussi qu'il y a une action continue du groupe topologique $\mathbb{S}^{d-1}$ sur $\mathbb{S}^{(n+1)d-1}$ définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{(n+1)d-1} & \longrightarrow & \mathbb{S}^{(n+1)d-1} \\ (\lambda, z) & \longmapsto & \lambda z \end{array}$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'espace projectif $\mathbb{KP}^n$ est compact et connexe.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'espace $\mathbb{KP}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^{(n+1)d-1}/\mathbb{S}^{d-1}$. Autrement dit, $\mathbb{CP}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{RP}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^0$.

Solution. 1. Soit $q : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{KP}^n$ l'application quotient. Alors q est continue, surjective et ouverte, voir lemme 11.3.1. Vérifions d'abord que l'espace projectif $\mathbb{KP}^n$ est séparé. Soient : $z = (z_0, \ldots, z_n), z' = (z'_0, \ldots, z'_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ tels que $q(z) \neq q(z')$. Alors il existe $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ tels que $z_i z'_j - z_j z'_i \neq 0$, donc on a $|z_i z'_j - z_j z'_i| > 0$. Soient :

$$U = \{\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \; ; \; |z_i \xi_j - z_j \xi_i| < |z'_i \xi_j - z'_j \xi_i|\}$$

et

$$V = \{\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \; ; \; |z_i \xi_j - z_j \xi_i| > |z'_i \xi_j - z'_j \xi_i|\} .$$

Alors U et V sont deux ouverts disjoints dans $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ tels que $z \in U$, $z' \in V$ et $U = q^{-1}(q(U))$, $V = q^{-1}(q(V))$. Par conséquent, $q(U)$ et $q(V)$ sont deux ouverts disjoints dans $\mathbb{KP}^n$ tels que $q(z) \in q(U)$ et $q(z') \in q(V)$. Donc l'espace $\mathbb{KP}^n$ est bien séparé. Soit π la restriction de l'application q à $\mathbb{S}^{(n+1)d-1}$, alors π est une application continue et surjective de $\mathbb{S}^{(n+1)d-1}$ sur $\mathbb{KP}^n$. Comme $\mathbb{S}^{(n+1)d-1}$ est compact et connexe car $n \geq 1$, on en déduit que pour tout $n \geq 1$, l'espace $\mathbb{KP}^n$ est compact et connexe.
2. L'application

$$\begin{array}{cccc} \pi : & \mathbb{S}^{(n+1)d-1} & \longrightarrow & \mathbb{KP}^n \\ & z & \longmapsto & q(z) \end{array}$$

est continue, surjective et fermée car $\mathbb{S}^{(n+1)d-1}$ est compact. De plus, pour tout $z, z' \in \mathbb{S}^{(n+1)d-1}$, on a $q(z) = q(z')$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $z = \lambda z'$. On déduit alors du corollaire 1.4.1 qu'il un homéomorphisme $\widetilde{\pi}$ de $\mathbb{S}^{(n+1)d-1}/\mathbb{S}^{d-1}$ dans $\mathbb{KP}^n$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^{(n+1)d-1} \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "q"'] & & \mathbb{KP}^n \\ & \mathbb{S}^{(n+1)d-1}/\mathbb{S}^{d-1} \arrow[ur, "\widetilde{\pi}"'] & \end{tikzcd}$$

Donc l'espace $\mathbb{KP}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^{(n+1)d-1}/\mathbb{S}^{d-1}$. Autrement dit, $\mathbb{CP}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{RP}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^0$.

Pour plus d'exercices, voir le supplément associé à ce livre.

Chapitre 12

ALGÈBRES DE BANACH

Ce chapitre n'est autre qu'une introduction aux algèbres de Banach. Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif quelconque. Une **algèbre** A sur le corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une application bilinéaire, appelée multiplication et notée

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & A \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

telle que pour tout x, y, $z \in A$, on ait $x(yz) = (xy)z$.
On dit qu'une algèbre A est **unitaire** ou **unifère** s'il existe un élément non nul noté 1_A dans A tel que pour tout $x \in A$, on ait $x1_A = 1_A x = x$. Un tel élément est alors unique, et appelé **l'unité** de A. Dans certains cas, on convient, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, de noter λ l'élément $\lambda\, 1_A$ de A. Cette convention est justifiée par le fait que l'application $\lambda \longmapsto \lambda\, 1_A$ de $\mathbb{K}$ dans A est injective, et par la relation $\lambda\, x = (\lambda\, 1_A)x$.
Soit A une algèbre unitaire. Un élément a de A est dit **inversible** s'il existe un élément b de A tel que $ab = ba = 1_A$. Dans ce cas, b est unique, appelé **l'inverse** de a et noté a^{-1}. On note $\mathrm{GL}(A)$ l'ensemble des éléments inversibles de A. C'est un groupe pour la multiplication, dont l'élément neutre est l'unité de A. On dit qu'une algèbre A est **commutative** si pour tout $x, y \in A$, on a $xy = yx$.
Pour plus de rappels sur les algèbres, le lecteur peut consulter l'Appendice E.

12.1 Algèbres de Banach

Définition 12.1.1. Soit A une algèbre sur $\mathbb{C}$. On dit que A est une **algèbre normée** s'il existe une norme $\| \ \|$ sur A telle que pour tous x, $y \in A$, on ait $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$. Si A est unitaire et si 1_A est l'unité de A, on suppose toujours $\|1_A\| = 1$. Une **algèbre de Banach** est une algèbre normée telle que l'espace normé sous-jacent est complet.

Exemple 12.1.1.

1. Le corps $\mathbb{C}$ muni du module $| \ |$ comme norme est une algèbre de Banach unitaire.
2. Soient $(A, \| \ \|)$ une algèbre normée et B une sous-algèbre de A. Alors B munie de la norme induite est une algèbre normée.

3. Soit $\ell^\infty(X)$ l'espace vectoriel des fonctions bornées définies sur un ensemble X et à valeurs dans $\mathbb{C}$ muni de la norme $\| \; \|_\infty$, pour tout $f \in \ell^\infty(X)$, on a $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$. Pour tout $f, g \in \ell^\infty(X)$, on pose $fg(x) = f(x)g(x)$, pour tout $x \in X$. Alors $\ell^\infty(X)$ est une algèbre de Banach commutative unitaire. En particulier, ℓ^∞ est une algèbre de Banach commutative unitaire.

4. Soient X un espace compact et $C(X)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur X et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors $(C(X), \| \; \|_\infty)$ est une sous-algèbre fermée de $(\ell^\infty(X), \| \; \|_\infty)$, donc $C(X), \| \; \|_\infty)$ est une algèbre de Banach commutative unitaire.

5. De même, si X est un espace localement compact et si $C_0(X)$ est l'espace vectoriel des fonctions de X dans $\mathbb{C}$ continues et tendant vers 0 à l'infini, alors $(C_0(X), \| \; \|_\infty)$ est une sous-algèbre fermée de $(\ell^\infty(X), \| \; \|_\infty)$, donc $(C_0(X), \| \; \|_\infty)$ est une algèbre de Banach commutative.

6. Soient $\mathbb{D} = \big\{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| \leq 1\big\}$ et $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{D})$ constitué par les fonctions holomorphes à l'intérieure de $\mathbb{D}$. Alors $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ muni de la norme $\| \; \|_\infty$ est une algèbre de Banach unitaire, appelée **algèbre du disque**.

Proposition 12.1.1. *Soit $(E, \| \; \|)$ un $\mathbb{C}$-espace normé. On a :*

1. *$(\mathscr{L}(E), \| \; \|)$ est une algèbre normée unitaire.*

2. *Si de plus E est de Banach, alors $(\mathscr{L}(E), \| \; \|)$ est une algèbre de Banach unitaire.*

3. *Si $(H, \langle \; , \; \rangle)$ est un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert, alors $(\mathscr{L}(H), \| \; \|)$ est une algèbre de Banach unitaire. En particulier, $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) = \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ est une algèbre de Banach unitaire.*

Démonstration. Ceci résulte des propositions 6.3.3 et 6.3.4. ■

Théorème 12.1.1. *Soit $(A, \| \; \|)$ une algèbre de Banach unitaire.*

1. *Soit $x \in A$ tel que $\|x\| < 1$, alors $1 - x \in GL(A)$ et on a :*

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \textit{et} \qquad \big\|(1-x)^{-1} - 1 - x\big\| \leq \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}\,.$$

2. *Soit $y \in A$ tel que $\|1 - y\| < 1$, alors $y \in GL(A)$ et on a :*

$$y^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-y)^n \qquad \textit{et} \qquad \big\|y^{-1}\big\| \leq \frac{1}{1 - \|1-y\|}\,.$$

Démonstration. 1. On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \|x^n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x\|^n = \frac{1}{1-\|x\|} < +\infty$. Comme A est de Banach, alors la série $\sum x^n$ est convergente dans A. Soit $z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, et pour tout

$n \geq 0$, soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$. Pour tout $n \geq 0$, on a $(1-x)S_n = S_n(1-x) = 1 - x^{n+1}$, et $\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$, donc on a $(1-x)z = z(1-x) = 1$. Par conséquent, $1 - x \in \mathrm{GL}(A)$ et on a $(1-x)^{-1} = z = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. On a $(1-x)^{-1} - 1 - x = \sum_{n=2}^{+\infty} x^n$, d'où $\|(1-x)^{-1} - 1 - x\| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \|x^n\| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \|x\|^n = \dfrac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}$.

2. Soit $y \in A$ tel que $\|1 - y\| < 1$. D'après 1, $y = 1 - (1-y) \in \mathrm{GL}(A)$ et on a $y^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-y)^n$. D'où on a $\|y^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|(1-y)^n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|1-y\|^n = \dfrac{1}{1 - \|1-y\|}$. ■

Théorème 12.1.2. *Soient $(A, \|\ \|)$ une algèbre de Banach unitaire, $x \in GL(A)$ et $h \in A$ tels que $\|h\| < \dfrac{1}{\|x^{-1}\|}$. Alors $x + h \in GL(A)$ et on a :*

$$\left\|(x+h)^{-1} - \left(x^{-1} - x^{-1}hx^{-1}\right)\right\| \leq \frac{\|h\|^2 \, \|x^{-1}\|^3}{1 - \|h\| \, \|x^{-1}\|}\,.$$

En particulier, si $y \in A$ tel que $\|x - y\| < \dfrac{1}{\|x^{-1}\|}$, alors on a $y \in GL(A)$.

Démonstration. On a $\|-h\| = \|h\| < \dfrac{1}{\|x^{-1}\|}$, d'où $\left\|-hx^{-1}\right\| \leq \|-h\| \, \|x^{-1}\| < 1$. Il résulte du théorème précédent que $1 + hx^{-1} \in \mathrm{GL}(A)$ et que l'on a $\left(1 + hx^{-1}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-hx^{-1}\right)^n$. Or on a $x + h = \left(1 + hx^{-1}\right)x$, donc $x + h \in \mathrm{GL}(A)$ et on a $(x+h)^{-1} = x^{-1}\left(1 + hx^{-1}\right)^{-1}$, d'où $(x+h)^{-1} - \left(x^{-1} - x^{-1}hx^{-1}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} x^{-1}\left(-hx^{-1}\right)^n$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|(x+h)^{-1} - \left(x^{-1} - x^{-1}hx^{-1}\right)\right\| &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} \left\|x^{-1}(-hx^{-1})^n\right\| \\
&\leq \sum_{n=2}^{+\infty} \left\|x^{-1}\right\| \|h\|^n \left\|x^{-1}\right\|^n = \frac{\|h\|^2 \, \|x^{-1}\|^3}{1 - \|h\| \, \|x^{-1}\|}\,.
\end{aligned}$$

■

Corollaire 12.1.1. *Soit $(A, \|\ \|)$ une algèbre de Banach unitaire. Alors on a :*

1. *$GL(A)$ est un ouvert de A et l'application*

$$\begin{array}{rccc} f\ : & GL(A) & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

est différentiable et la différentielle de f au point $x \in GL(A)$ est l'application linéaire continue $h \longmapsto -x^{-1}hx^{-1}$ de A dans A.

2. L'application

$$g : \begin{array}{ccc} GL(A) & \longrightarrow & GL(A) \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

est un homéomorphisme. Donc $GL(A)$ est un groupe topologique.

Démonstration. 1. Il résulte immédiatement du théorème précédent que $\mathrm{GL}(A)$ est un ouvert de A. Soit $x \in \mathrm{GL}(A)$. Pour tout $h \in A$, soit $L(h) = -x^{-1}hx^{-1}$, alors L est une application linéaire continue de A dans A. Soit $\varepsilon(0) = 0$ et pour tout $h \in A$ tel que $0 < \|h\| < \dfrac{1}{\|x^{-1}\|}$, soit $\varepsilon(h) = \dfrac{f(x+h) - [f(x) + L(h)]}{\|h\|}$. Alors on a $f(x+h) = f(x) + L(h) + \|h\|\,\varepsilon(h)$, pour tout $h \in A$ tel que $\|h\| < \dfrac{1}{\|x^{-1}\|}$. D'après le théorème précédent, on a $\|\varepsilon(h)\| \leq \dfrac{\|h\|\|x^{-1}\|^3}{1 - \|h\|\,\|x^{-1}\|}$, si $0 < \|h\| < \dfrac{1}{\|x^{-1}\|}$. Donc on a $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. Par conséquent, f est différentiable en x et la différentielle de f en x est L.
2. D'après 1, g est continue. Puisque g est bijective et que l'on a $g^{-1} = g$, alors g est un homéomorphisme. ■

Remarque 12.1.1. Si $(A, \|\ \|)$ est une algèbre normée unitaire, alors $\mathrm{GL}(A)$ n'est pas forcément ouvert dans A. En effet, soit $A = \mathbb{C}[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes en une seule variable X et à coefficients dans $\mathbb{C}$. Pour tous $P = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i X^i$, $Q = \sum\limits_{i=0}^{m} \mu_i X^i \in A$, on pose $PQ = \sum\limits_{i=0}^{n+m} \alpha_i X^i$, où $\alpha_i = \sum\limits_{k=0}^{i} \lambda_k \mu_{i-k}$, on convient que $\lambda_p = 0$, si $p > n$ et $\mu_q = 0$, si $q > m$. On pose également $\|P\| = \sup\big\{|P(\lambda)|\ ;\ \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } |\lambda| \leq 1\big\}$. Alors A est une algèbre normée unitaire et on a $\mathrm{GL}(A) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pour tout $n \geq 1$, Soit $P_n = 1 + \frac{1}{n}X$. Alors P_n n'est pas inversible et on a $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = 1 \in \mathrm{GL}(A)$. Par conséquent, $\mathrm{GL}(A)$ n'est pas ouvert dans A.

Proposition 12.1.2. *Soient $(A, \|\ \|)$ une algèbre normée et I un idéal bilatère fermé de A. Alors l'algèbre quotient A/I munie de la norme quotient est une algèbre normée et l'application quotient $\pi : A \longrightarrow A/I$ est un morphisme d'algèbres continue et on a $\|\pi\| \leq 1$. On a même $\|\pi\| = 1$ si $I \neq A$. Si de plus, $(A, \|\ \|)$ est une algèbre de Banach, alors A/I est aussi une algèbre de Banach.*

Démonstration. Soient $\|\ \|'$ la norme quotient sur A/I et $x, y \in A$. Pour tous $a, b \in I$, on a $xb + ay + ab \in I$, d'où :

$$\|\pi(x)\pi(y)\|' = \|\pi(xy)\|' \leq \|xy + xb + ay + ab\| = \|(x+a)(y+b)\| \leq \|x+a\|\,\|y+b\|\,.$$

Donc on a :

$$\|\pi(x)\pi(y)\|' \leq \inf_{a\in I} \|x+a\|\,\|y+b\| = \Big(\inf_{a\in I} \|x+a\|\Big)\,\|y+b\| = \|\pi(x)\|'\,\|y+b\|\,.$$

Par conséquent, on a :

$$\|\pi(x)\pi(y)\|' \leq \inf_{b\in I} \|\pi(x)\|'\,\|y+b\| = \|\pi(x)\|'\,\inf_{b\in I} \|y+b\| = \|\pi(x)\|'\,\|\pi(y)\|'\,.$$

Donc A/I munie de la norme quotient est une algèbre normée. Les autres résultats annoncés dans cette proposition résultent des propositions 6.4.3 et 6.4.5. ■

12.2 Fonction exponentielle

Proposition 12.2.1. *Soit* $(A, \|\ \|)$ *une algèbre de Banach.*

1. *Soient* $(x_i)_{i\in I}$ *et* $(y_j)_{j\in J}$ *deux familles d'éléments de* A *normalement sommables, de sommes respectives* x *et* y. *Alors la famille* $(x_i y_j)_{(i,j)\in I\times J}$ *est normalement sommable et de somme* $x\,y$. *Autrement dit, dans ce cas, on a :*
$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j = \Big(\sum_{i\in I} x_i\Big)\Big(\sum_{j\in J} y_j\Big).$$

2. *Soient* $\sum x_n$ *et* $\sum y_n$ *deux séries dans* A *normalement convergentes. Alors la série* $\sum\Big(\sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}\Big)$ *est normalement convergente et on a :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}\Big) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} y_n\Big).$$

Démonstration. On calque la démonstration de la proposition 6.7.5. ■

Soient $(A, \|\ \|)$ une algèbre normée unitaire et $p(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n$ un polynôme formel à coefficients dans $\mathbb{C}$ (ou dans A). Alors l'application
$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & p(x) \end{array}$$
est continue. En effet, les applications suivantes
$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A\times A \\ x & \longmapsto & (x,x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} A\times A & \longrightarrow & A \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$$
sont continues, donc leur composée l'est aussi. Autrement dit, l'application $x \longmapsto x^2$ est continue de A dans A, puis par récurrence, pour tout $m \geq 0$, et tout $a_m \in \mathbb{C}$ (ou A), l'application $x \longmapsto a_m x^m$ est continue de A dans A, donc l'application $x \longmapsto p(x)$ est continue de A dans A.

Soient $(A, \|\ \|)$ une algèbre de Banach unitaire et $\sum a_n z^n$ une série entière à coefficients dans $\mathbb{C}$ et de rayon de convergence $\rho > 0$. Alors pour tout $x \in A$ tel que $\|x\| < \rho$, la série $\sum a_n x^n$ est normalement convergente, donc convergente et si on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, alors f est continue dans la boule ouverte $\{x \in A\ ;\ \|x\| < \rho\}$, voir théorème 5.2.1 et remarque 6.7.7. La série entière $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est de rayon de convergence $\rho = +\infty$. Donc, pour tout $x \in A$, la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ est convergente, et on note sa somme par e^x, elle est appelée **l'exponentielle** de x. Autrement dit, pour tout $x \in A$, on a par définition :
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Proposition 12.2.2. *Soit $(A, \| \|)$ une algèbre de Banach unitaire.*

1. *L'application exponentielle suivante est continue.*
$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$$
2. *Pour tous $x, y \in A$ tels que $xy = yx$, on a $e^{x+y} = e^x e^y = e^y e^x$.*
3. *Pour tout $x \in A$, e^x est inversible et on a $(e^x)^{-1} = e^{-x}$.*
4. *Pour tout $x \in A$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ soit inversible dans A.*
5. *Pour tout $x \in A$, on a $e^x = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n$.*

Démonstration. 1. Ceci résulte du commentaire précédant la proposition.
2. D'après la proposition précédente, la série $\displaystyle\sum \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\Big)$ est normalement convergente et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\Big) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\Big) = e^x e^y$. Puisque l'on a $xy = yx$, alors $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}$, d'où on a $\displaystyle\frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$.
Par conséquent, on a :
$$e^{x+y} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\Big) = e^x e^y \,.$$
On a $x + y = y + x$, d'où $e^y e^x = e^{y+x} = e^{x+y} = e^x e^y$.
3. Soit $x \in A$. Alors on a $1 = e^{x-x} = e^x e^{-x} = e^{-x} e^x$. Donc e^x est inversible et on a : $(e^x)^{-1} = e^{-x}$.
4. Ceci résulte de 3 et du fait que $\mathrm{GL}(A)$ est un ouvert dans A.
5. On a $\displaystyle\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \frac{x^k}{n^k} = 1 + x + \sum_{k=2}^{n} \Big(1 - \tfrac{1}{n}\Big)\Big(1 - \tfrac{2}{n}\Big) \cdots \Big(1 - \tfrac{k-1}{n}\Big) \frac{x^k}{k!}$, d'où :
$$e^x - \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n = \sum_{k=2}^{n} \Big[1 - \Big(1 - \tfrac{1}{n}\Big)\Big(1 - \tfrac{2}{n}\Big) \cdots \Big(1 - \tfrac{k-1}{n}\Big)\Big] \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \,.$$
Donc on a :
$$\begin{aligned} \Big\| e^x - \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n \Big\| &\leq \sum_{k=2}^{n} \Big[1 - \Big(1 - \tfrac{1}{n}\Big)\Big(1 - \tfrac{2}{n}\Big) \cdots \Big(1 - \tfrac{k-1}{n}\Big)\Big] \frac{\|x\|^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\|x\|^k}{k!} \\ &= e^{\|x\|} - \Big(1 + \frac{\|x\|}{n}\Big)^n . \end{aligned}$$
Or on a $e^{\|x\|} = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \Big(1 + \frac{\|x\|}{n}\Big)^n$, on en déduit que l'on a $e^x = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n$. ∎

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 1} b_n z^n$ deux séries entières à coefficients dans $\mathbb{C}$ et de rayon de convergence respective $R > 0$ et $\rho > 0$. Pour tout $z \in B(0,R) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < R\}$, on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et pour tout $z \in B(0,\rho) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < \rho\}$, on pose $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$. Comme la fonction $z \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|\,|z|^n$ est continue sur $B(0,\rho)$ et vaut 0 au point $z = 0$, alors il existe un $r \in]0,\ \rho[$ tel que pour tout $z \in B(0,r) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < r\}$, on ait $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|\,|z|^n < R$. Par conséquent, la fonction $h(z) = f(g(z))$ est bien définie sur $B(0,r)$. D'après la théorie des séries entières, il existe une suite $(c_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in B(0,r)$, on ait $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$.

Soient $(A, \|\ \|)$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in A$ tel que $\|x\| < r$. Alors $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ sont définis dans A. Comme on a $\|g(x)\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|\,\|x\|^n < R$, alors $f(g(x))$ est aussi défini dans A. On montre, comme pour la composition des séries entières, que l'on a le résultat suivant.

Lemme 12.2.1. *Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a $h(x) = f(g(x))$.*

Corollaire 12.2.1. *Soient $(A, \|\ \|)$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in A$ tel que $\|1 - x\| < 1$. Alors il existe $y \in A$ tel que $e^y = x$.*

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, la série entière $\sum_{n\geq 1} -\frac{z^n}{n}$ est convergente et on pose $g(z) = \log(1 - z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, soit $f(z) = e^z$. On sait, voir un cours sur les séries entières, que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a $e^{\log(1-z)} = 1 - z$. D'après le lemme précédent, pour tout $a \in A$ tel que $\|a\| < 1$, on a $e^{\log(1-a)} = 1 - a$. Soient $a = 1 - x$ et $y = \log(1 - a)$, alors on a $e^y = 1 - a = x$. ■

Théorème 12.2.1. *Soient $(A, \|\ \|)$ une algèbre de Banach unitaire et G_1 la composante connexe de 1_A dans $GL(A)$. Alors on a :*

1. *G_1 est un sous-groupe distingué de $GL(A)$.*

2. *G_1 est à la fois ouvert et fermé dans $GL(A)$ et le groupe topologique quotient $GL(A)/G_1$ est discret.*

3. *G_1 est le groupe engendré par les e^x, $x \in A$. Autrement dit, pour tout $x \in G_1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_n \in A$ tels que $x = e^{x_1} \cdots e^{x_n}$.*

4. *Si de plus, A est commutative, on a $G_1 = \{e^x\ ;\ x \in A\}$.*

Démonstration. 1. Puisque $\mathrm{GL}(A)$ est un groupe topologique, voir corollaire 12.1.1, on déduit de la proposition 11.2.5 que G_1 est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}(A)$.
2. Soit $x \in G_1$. D'après le théorème 12.1.2, $B\big(x, \frac{1}{\|x^{-1}\|}\big) \subset \mathrm{GL}(A)$. Comme $B\big(x, \frac{1}{\|x^{-1}\|}\big)$ est connexe, alors on a $B\big(x, \frac{1}{\|x^{-1}\|}\big) \subset G_1$. Par conséquent, G_1 est ouvert dans $\mathrm{GL}(A)$. On déduit du théorème 11.2.1 que G_1 est aussi fermé dans $\mathrm{GL}(A)$. Le fait que le groupe topologique quotient $\mathrm{GL}(A)/G_1$ est discret résulte de la proposition 11.2.1.
3. Pour tout $x \in A$, l'application $c : t \longmapsto e^{tx}$ est continue de $[0,\,1]$ dans $\mathrm{GL}(A)$ et on a $c(0) = 1$ et $c(1) = e^x$, donc $e^x \in G_1$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $x_1, \ldots, x_n \in A$, on a $e^{x_1} \cdots e^{x_n} \in G_1$. Soit $H = \big\{e^{x_1} \cdots e^{x_n}\ ;\ n \in \mathbb{N} \text{ et } x_1, \ldots, x_n \in A\big\}$, alors H est un sous-groupe de G_1. D'après le corollaire précédent, on a $B(1,1) = \big\{x \in A\ ;\ \|1 - x\| < 1\big\} \subset H$. Soit $x \in H$, alors $xB(1,1)$ est un ouvert de G_1 contenant x et on a $xB(1,1) \subset H$, donc H est un sous-groupe ouvert de G_1. On déduit du théorème 11.2.1 que H est aussi fermé dans G_1. Comme G_1 est connexe, alors on a $H = G_1$.
4. Supposons de plus que A est commutative. D'après la proposition 12.2.2, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in A$, on a $e^{x_1} \cdots e^{x_n} = e^{x_1 + \cdots + x_n}$. On déduit de 3 que l'on a :
$G_1 = \big\{e^x\ ;\ x \in A\big\}$. ■

12.3 Spectre et rayon spectral

Définition 12.3.1. Soient A une algèbre unitaire et $x \in A$. Le **spectre** de x dans A est l'ensemble

$$\mathrm{Sp}_A(x) = \big\{\lambda \in \mathbb{K}\ ;\ x - \lambda \notin GL(A)\big\}\,.$$

Notons que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\mathrm{Sp}_A(\lambda) = \{\lambda\}$.

Exemple 12.3.1. Si $A = M_n(\mathbb{K})$ et $x \in A$, on a :

$$\mathrm{Sp}_A(x) = \big\{\lambda \in \mathbb{K}\ ;\ \det(x - \lambda\, I_n) = 0\big\} = \big\{\text{valeurs propres de } A\big\}\,.$$

Exemple 12.3.2. Soient X un espace compact et $A = C(X)$, muni de la norme $\|\ \|_\infty$. C'est une algèbre de Banach commutative unitaire. Pour tout $f \in A$, on a $\mathrm{Sp}_A(f) = \big\{f(x)\ ;\ x \in X\big\}$.

Remarque 12.3.1. Soient H un espace de Hilbert complexe et $T \in A = \mathscr{L}(E)$. Si λ est une valeur propre de T, alors $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(T)$.

Proposition 12.3.1 (Jacobson). *Soient A une algèbre unitaire et $x,\ y \in A$. Alors on a :*

$$Sp_A(xy) \setminus \{0\} = Sp_A(yx) \setminus \{0\}\,.$$

Autrement dit, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on a $\lambda \in Sp_A(xy)$ si et seulement si $\lambda \in Sp_A(yx)$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Montrons que $xy - \lambda \in \mathrm{GL}(A)$ si et seulement si $yx - \lambda \in \mathrm{GL}(A)$. Comme, x et y jouent un rôle symétrique, il suffit de montrer que si $xy - \lambda \in \mathrm{GL}(A)$, alors $yx - \lambda \in \mathrm{GL}(A)$. Supposons donc $xy - \lambda \in \mathrm{GL}(A)$. Alors il existe un $z \in A$ tel que $z(xy - \lambda) = (xy - \lambda)z = 1$. D'où on a $yz(xy - \lambda)x = yx$ et $y(xy - \lambda)zx = yx$. Donc on a $(yzx - 1)yx = \lambda yzx$ et $yx(yzx - 1) = \lambda yzx$. On en déduit que l'on a $\frac{1}{\lambda}(yzx - 1)(yx - \lambda) = (yx - \lambda)\frac{1}{\lambda}(yzx - 1) = 1$. Donc on a $yx - \lambda \in \mathrm{GL}(A)$. ■

Proposition 12.3.2. *Soient A une algèbre unitaire sur $\mathbb{C}$ et $x \in A$ tel que $Sp_A(x) \neq \emptyset$.*

1. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme, on a :*
$$Sp_A(P(x)) = P(Sp_A(x)) = \big\{P(\lambda)\ ;\ \lambda \in Sp_A(x)\big\}\,.$$
2. *Si $x \in GL(A)$, on a $Sp_A\big(x^{-1}\big) = \big\{\lambda^{-1}\ ;\ \lambda \in Sp_A(x)\big\}$.*

Pour une preuve de la proposition précédente, voir chapitre 12 du supplément.

Corollaire 12.3.1. *Soient A une algèbre unitaire sur $\mathbb{C}$ et $x \in A$. S'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme non nul tel que $P(x) = 0$, alors $Sp_A(x) \subset \big\{racines\ de\ P\big\}$ et donc $Sp_A(x)$ est un ensemble fini. En particulier, on a*

1. *Si x est **nilpotent**, i.e. il existe $n \geq 1$ tel que $x^n = 0$, alors $Sp_A(x) \subset \{0\}$.*
2. *Si x est **unilpotent**, i.e. il existe $n \geq 1$ tel que $x^n = 1$, alors :*
$$Sp_A(x) \subset \{racines\ n\text{-ième de } 1 \ dans\ \mathbb{C}\}\,.$$
3. *Si x est **idempotent**, i.e. $x^2 = x$, alors $Sp_A(x) \subset \{0, 1\}$.*

Théorème 12.3.1. *Soient $(A, \|\ \|)$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in A$. Alors $Sp_A(x)$ est une partie compacte non vide de $\mathbb{C}$ et pour tout $\lambda \in Sp_A(x)$, on a $|\lambda| \leq \|x\|$.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|x\|$. D'après le théorème 12.1.1, $1 - \frac{1}{\lambda}x \in \mathrm{GL}(A)$, d'où on a $x - \lambda = -\lambda\big(1 - \frac{1}{\lambda}x\big) \in \mathrm{GL}(A)$, donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}_A(x)$. Montrons que $\mathrm{Sp}_A(x)$ est fermé dans $\mathbb{C}$. Soit $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathrm{Sp}_A(x)$, qui converge vers un élément $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $x - \lambda = \lim\limits_{n\to+\infty} x - \lambda_n$, et pour tout $n \geq 0$, on a $x - \lambda_n \in A \setminus \mathrm{GL}(A)$ qui est fermé dans A, corollaire 12.1.1, donc on a $x - \lambda \in A \setminus \mathrm{GL}(A)$. Autrement dit, on a $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)$. Donc $\mathrm{Sp}_A(x)$ est fermé dans $\mathbb{C}$. Par conséquent, $\mathrm{Sp}_A(x)$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$. Il reste à montrer que $\mathrm{Sp}_A(x)$ est non vide. Supposons $\mathrm{Sp}_A(x) = \emptyset$. Montrons que l'application $\lambda \longmapsto (x - \lambda)^{-1}$ est bornée sur $\mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > 2\|x\|$. D'après le théorème 12.1.1, $1 - \frac{1}{\lambda}x \in \mathrm{GL}(A)$ et on a $\big(1 - \frac{1}{\lambda}x\big)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{\lambda^n}$, d'où :

$$\Big\|\big(1 - \tfrac{1}{\lambda}x\big)^{-1} - 1\Big\| = \Big\|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}\Big\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \Big\|\frac{x^n}{\lambda^n}\Big\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\|x\|^n}{|\lambda|^n} = \frac{\|x\|}{|\lambda| - \|x\|} < 1\,.$$

Donc on a $\|\big(1 - \frac{1}{\lambda}x\big)^{-1}\| < 2$. Par conséquent, on a :

$$\|(x-\lambda)^{-1}\| = \Big\| -\tfrac{1}{\lambda}\big(1 - \tfrac{1}{\lambda}x\big)^{-1}\Big\| = \frac{1}{|\lambda|}\Big\|\big(1 - \tfrac{1}{\lambda}x\big)^{-1}\Big\| < \frac{2}{|\lambda|} < \frac{1}{\|x\|} < +\infty, \text{ car } x \neq 0\,.$$

Comme l'application $\lambda \longmapsto (x - \lambda)^{-1}$ est continue sur $\mathbb{C}$, alors elle est bornée sur le compact $\big\{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ |\lambda| \leq 2\|x\|\big\}$. Finalement, il existe une constante $0 < M < +\infty$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on ait $\|(x - \lambda)^{-1}\| \leq M$. Soit f une forme linéaire continue sur A. D'après le corollaire 12.1.1, la fonction $\lambda \longmapsto f\big((x - \lambda)^{-1}\big)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Comme elle est aussi bornée par $M\,\|f\|$, il résulte du théorème de Liouville, voir un cours d'analyse complexe, qu'elle est constante. Donc on a $f\big((x - 1)^{-1}\big) = f\big((x - 0)^{-1}\big)$. Ceci étant vrai pour toute forme linéaire continue sur A, on déduit du théorème de Hahn-Banach, voir corollaire 7.7.1, que l'on a $x^{-1} = (x - 1)^{-1}$, d'où $x = x - 1$, ce qui est impossible. Donc on a $\mathrm{Sp}_A(x) \neq \emptyset$. ∎

Théorème 12.3.2 (Mazur). *Soit $(A, \| \ \|)$ une algèbre de Banach unitaire. Si tout élément non nul de A est inversible, alors on a $A = \mathbb{C}1_A$.*

Démonstration. Soit $x \in A$. D'après le théorème précédent, $\mathrm{Sp}_A(x) \neq \emptyset$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)$. Comme $x - \lambda(x)\,1_A$ n'est pas inversible, alors $x - \lambda(x)\,1_A = 0$, d'où on a $x = \lambda(x)\,1_A$. Par conséquent, on a $A = \mathbb{C}1_A$. ■

Proposition 12.3.3. *Soient A et B deux algèbres unitaires et $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'algèbres unitaires. Soit $x \in A$, alors on a $Sp_B(\varphi(x)) \subset Sp_A(x)$.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}_A(x)$, alors on a $x - \lambda 1_A \in \mathrm{GL}(A)$, d'où $\varphi(x) - \lambda 1_B = \varphi(x - \lambda 1_A) \in \mathrm{GL}(B)$, voir Appendice E. Donc on a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}_B(\varphi(x))$. Par conséquent, on a $\mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}_A(x) \subset \mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}_B(\varphi(x))$, d'où $\mathrm{Sp}_B(\varphi(x)) \subset \mathrm{Sp}_A(x)$. ■

Corollaire 12.3.2. *Soit B une sous-algèbre unitaire d'une algèbre unitaire A telle que $1_B = 1_A$, alors l'injection canonique $i : B \hookrightarrow A$ est un morphisme algèbres unitaires. Ceci implique que l'on a $Sp_A(x) \subset Sp_B(x)$ pour tout $x \in B$.*

Théorème 12.3.3. *Soit B une sous-algèbre fermée unitaire d'une algèbre de Banach unitaire $(A, \| \ \|)$. On suppose de plus que l'on a $1_B = 1_A$. Alors on a :*

1. *$GL(B)$ est ouvert et fermé dans $B \cap GL(A)$.*
2. *Pour tout $x \in B$, on a $Sp_A(x) \subset Sp_B(x)$ et $\mathbb{C} \setminus Sp_B(x)$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{C} \setminus Sp_A(x)$.*
3. *Pour tout $x \in B$, on a $Fr(Sp_B(x)) \subset Fr(Sp_A(x))$.*
4. *Soit $x \in B$. Si $Sp_A(x) \neq Sp_B(x)$, alors $Sp_B(x)$ est la réunion de $Sp_A(x)$ et de quelques composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus Sp_A(x)$.*
5. *Soit $x \in B$. Si $\mathbb{C} \setminus Sp_A(x)$ est connexe, alors on a $Sp_A(x) = Sp_B(x)$.*
6. *Soit $x \in B$. Si $Sp_B(x)$ est d'intérieur vide, alors on a $Sp_A(x) = Sp_B(x)$.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 12 du supplément.

La proposition suivante généralise la proposition 8.7.7.

Proposition 12.3.4. *Soient H un espace de Hilbert complexe et $T \in A = \mathscr{L}(E)$.*

1. *On a $Sp_A(T^*) = \{\overline{\lambda}\ ;\ \lambda \in Sp_A(T)\}$.*
2. *Si T est unitaire, alors on a $Sp_A(T) \subset \mathbb{S}$.*
3. *Si T est auto-adjoint, alors on a $Sp_A(T) \subset \mathbb{R}$.*
4. *Si T est positif, alors on a $Sp_A(T) \subset [0, +\infty[$.*
5. *Si T est un projecteur orthogonal, alors on a $Sp_A(T) \subset \{0, 1\}$. Si de plus T est non trivial, alors on a $Sp_A(T) = \{0, 1\}$.*

Démonstration. 1. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $S \in \mathscr{L}(E)$. Il résulte de la proposition 8.4.3 que S est l'inverse de $T - \lambda\,\mathrm{id}_H$ si et seulement si S^* est l'inverse de $T^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}_H$. Par conséquent, on a $\mathrm{Sp}_A(T^*) = \{\overline{\lambda}\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}_A(T)\}$.
2. Supposons T unitaire. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(T)$. D'après la proposition 12.3.2, on a $\lambda^{-1} \in \mathrm{Sp}_A(T^{-1})$. Comme on a $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$, il résulte du théorème 12.3.1 que l'on a $|\lambda| \leq 1$ et $|\lambda^{-1}| \leq 1$, donc on a $|\lambda| = 1$. Par conséquent, on a $\mathrm{Sp}_A(T) \subset \mathbb{S}$.
3. Supposons T auto-adjoint. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(T)$. D'après le corollaire 8.7.1, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans H telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|x_n\| = 1$ et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|(T - \lambda\,\mathrm{id}_H)(x_n)\| = 0$. On en déduit que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle (T - \lambda\,\mathrm{id}_H)(x_n), x_n\rangle = 0$. Comme on a $\langle (T - \lambda\,\mathrm{id}_H)(x_n), x_n\rangle = \langle T(x_n), x_n\rangle - \lambda\langle x_n, x_n\rangle = \langle T(x_n), x_n\rangle - \lambda$, alors $\lambda = \lim\limits_{n\to+\infty} \langle T(x_n), x_n\rangle$. Or, pour tout $n \geq 0$, on a $\langle T(x_n), x_n\rangle \in \mathbb{R}$, donc $\lambda \in \mathbb{R}$. Par conséquent, on a $\mathrm{Sp}_A(T) \subset \mathbb{R}$.
4. Supposons T positif. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(T)$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans H comme dans 3. Puisque l'on a $\lambda = \lim\limits_{n\to+\infty} \langle T(x_n), x_n\rangle$, et comme pour tout $n \geq 0$, on a $\langle T(x_n), x_n\rangle \geq 0$, alors $\lambda \geq 0$. Par conséquent, on a $\mathrm{Sp}_A(T) \subset [0, +\infty[$.
5. D'après le corollaire 12.3.1, on a $\mathrm{Sp}_A(T) \subset \{0, 1\}$. Si de plus T est non trivial, alors T et $\mathrm{id}_H - T$ ne sont pas inversibles, d'où on a $0 \in \mathrm{Sp}_A(T)$ et $0 \in \mathrm{Sp}_A(\mathrm{id}_H - T)$. Donc on a $\{0, 1\} \subset \mathrm{Sp}_A(T)$. Par conséquent, on a $\mathrm{Sp}_A(T) = \{0, 1\}$. ■

Exemple 12.3.3. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie, $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une base hilbertienne de H et $T \in A = \mathscr{L}(H)$ tel que $T(e_n) = e_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a $\mathrm{Sp}_A(T) = \mathbb{S}$. En effet, comme T est un opérateur unitaire, il résulte de la proposition précédente que l'on a $\mathrm{Sp}_A(T) \subset \mathbb{S}$. Réciproquement, soit $\lambda \in \mathbb{S}$. Pour tout $n \geq 0$, soit $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \lambda^{-k} e_k$, alors on a $\|x_n\| = 1$ et

$$\begin{aligned}
\big\|(T - \lambda\,\mathrm{id}_H)(x_n)\big\| &= \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\Big\| \sum_{k=-n}^{n} \lambda^{-k} e_{k+1} - \sum_{k=-n}^{n} \lambda^{-(k-1)} e_k \Big\| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\big\|\lambda^{-n} e_{n+1} - \lambda^{n+1} e_{-n}\big\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}}\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|(T - \lambda\,\mathrm{id}_H)(x_n)\| = 0$. Il résulte du corollaire 8.7.1 que l'on a $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(T)$. Donc on a $\mathrm{Sp}_A(T) = \mathbb{S}$.

Exemple 12.3.4. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie, $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de H et $T \in A = \mathscr{L}(H)$ tel que $T(e_n) = e_{n+1}$, pour tout $n \geq 0$. Alors on a $\mathrm{Sp}_A(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ |\lambda| \leq 1\}$. En effet, on a $\|T^*\| = \|T\| = 1$, donc $\mathrm{Sp}_A(T^*) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ |\lambda| \leq 1\}$. D'autre part, d'après l'exercice 8.37, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$, λ est une valeur propre de T^*, donc on a $\{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ |\lambda| < 1\} \subset \mathrm{Sp}_A(T^*)$. Par conséquent, on a $\mathrm{Sp}_A(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ |\lambda| \leq 1\}$. On déduit de la proposition précédente que l'on a $\mathrm{Sp}_A(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ |\lambda| \leq 1\}$.

Définition 12.3.2. Soit A une algèbre de Banach unitaire. Soit $x \in A$. Le **rayon spectral** de x est

$$r(x) = \sup\big\{|\lambda|\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)\big\}\,.$$

On déduit du théorème 12.3.1 et des propositions 12.3.1 et 12.3.2 le résultat suivant :

Proposition 12.3.5. *Soit A une algèbre de Banach unitaire.*

1. *Pour tout $x \in A$, on a $r(x) \leq \|x\|$.*
2. *Pour tout $x, y \in A$, on a $r(xy) = r(yx)$.*
3. *Pour tout $x \in A$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $r(1 + \lambda x) \leq 1 + |\lambda|\, r(x)$.*
4. *Pour tout $x \in A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $r(x^n) = (r(x))^n$.*

Exemple 12.3.5. Soient X un espace compact et $A = C(X)$ muni de la norme $\| \ \|_\infty$. C'est une algèbre de Banach commutative unitaire. Pour tout $f \in A$, on a $\mathrm{Sp}_A(f) = \big\{f(x) \ ; \ x \in X\big\}$ et donc $r(f) = \|f\|_\infty$.

Exemple 12.3.6. Considérons l'algèbre de Banach unitaire $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ et soit $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Alors on a $\|x\| = 1$ et $x^2 = 0$, donc $\mathrm{Sp}_A(x) = \{0\}$. D'où on a $r(x) = 0 < \|x\|$.

Théorème 12.3.4 (Beurling). *Soient $(A, \| \ \|)$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in A$. La suite $\big(\|x^n\|^{\frac{1}{n}}\big)_{n \geq 1}$ est convergente dans $\mathbb{R}$ et on a $r(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf\limits_{n \geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 12 du supplément.

Exemple 12.3.7. Soit $A = C^1([0, 1], \mathbb{C}) = \big\{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ de classe } C^1\big\}$ muni de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. C'est une algèbre de Banach commutative unitaire. Soit $f \in A$, définie par $f(t) = t$, pour tout $t \in [0, 1]$. Alors on a $\|f\| = 2$ et $\|f^n\| = 1 + n$, d'où $r(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} (1 + n)^{\frac{1}{n}} = 1 < 2 = \|f\|$.

Proposition 12.3.6. *Soient H un espace de Hilbert complexe et $T \in A = \mathscr{L}(E)$.*

1. *Si T est auto-adjoint, alors ou bien $\|T\| \in Sp_A(T)$ ou bien $-\|T\| \in Sp_A(T)$.*
2. *Si T est normal, alors on a $r(T) = \|T\|$. Donc il existe $\lambda \in Sp_A(T)$ tel que $|\lambda| = \|T\|$.*

Démonstration. 1. On peut supposer $T \neq 0$, sinon le résultat est trivial. Quitte à prendre $\dfrac{T}{\|T\|}$, on peut aussi supposer $\|T\| = 1$. Dans ce cas, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans H telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|x_n\| = 1$ et telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|T(x_n)\| = 1 = \|T\|$. On a :

$$\big\|(T^2 - \mathrm{id}_H)(x_n)\big\|^2 = \big\|T^2(x_n)\big\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\|T(x_n)\|^2 \leq 2 - 2\|T(x_n)\|^2 .$$

On en déduit que l'on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \|(T^2 - \mathrm{id}_H)(x_n)\| = 0$. Il résulte du corollaire 8.7.1 que l'on a $1 \in \mathrm{Sp}_A\big(T^2\big)$. D'après la proposition 12.3.2, on a $\mathrm{Sp}_A\big(T^2\big) = \big\{\lambda^2 \ ; \ \lambda \in \mathrm{Sp}_A(T)\big\}$. Donc ou bien $1 \in \mathrm{Sp}_A(T)$ ou bien $-1 \in \mathrm{Sp}_A(T)$.
2. On suppose T normal. Alors pour tout $n \geq 0$, on a $(T^* \circ T)^n = (T^*)^n \circ T^n = (T^n)^* \circ T^n$, donc $\|(T^* \circ T)^n\| = \|T^n\|^2$. Il résulte du théorème précédent que l'on a $r(T^* \circ T) = r(T)^2$. Comme $T^* \circ T$ est auto-adjoint, il résulte de 1 que l'on a $r(T^* \circ T) = \|T^* \circ T\| = \|T\|^2$. Par conséquent, on a $r(T) = \|T\|$. ∎

12.4 La transformation de Gelfand

Théorème 12.4.1. *Soient* $(A, \| \ \|)$ *une algèbre de Banach et* $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ *un morphisme d'algèbres. Alors* φ *est continue et on a* $\|\varphi\| \leq 1$. *Si de plus, A est unitaire et* φ *est non nul, alors on a* $\varphi(1_A) = 1$ *et donc* $\|\varphi\| = 1$.

Démonstration. Supposons qu'il existe $a \in A$ tel que $|\varphi(a)| > \|a\|$. Soit $x = \dfrac{a}{\varphi(a)}$, alors $x \in A$ tel que $\varphi(x) = 1$ et $\|x\| < 1$. Pour tout $n \geq 1$, soit $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} -x^k$. Comme pour tout $k \geq 1$, on a $\|x^k\| \leq \|x\|^k$ et $\|x\| < 1$, alors la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans A, donc convergente vers un élément $y \in A$. Or pour tout $n \geq 2$, on a $x + s_n = xs_{n-1}$, d'où $x + y = xy$. Par conséquent, on a $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y)$, ce qui est impossible, car $\varphi(x) = 1$. Donc pour tout $a \in A$, on a $|\varphi(a)| \leq \|a\|$. Donc φ est continue et on a $\|\varphi\| \leq 1$. Si A est unitaire et si φ est non nul, alors $\varphi(1_A) = 1$. Donc on a $1 = |\varphi(1_A)| \leq \|\varphi\| \, \|1_A\| = \|\varphi\| \leq 1$, d'où $\|\varphi\| = 1$. ■

Proposition 12.4.1. *Soient A une algèbre de Banach, Y un espace localement compact et* $\varphi : A \longrightarrow C_0(Y)$ *un morphisme d'algèbres. Alors* φ *est continue.*

Démonstration. Pour montrer que φ est continue, il suffit de montrer que le graphe de φ est fermé, voir théorème 7.1.2. Soit donc $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans A telle que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers un élément $x \in A$ et telle que la suite $(\varphi(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers un élément $f \in C_0(Y)$. Soient $t \in Y$ et $\delta_t : C_0(Y) \longrightarrow \mathbb{C}$ défini par $\delta_t(g) = g(t)$, pour tout $g \in C_0(Y)$. Alors δ_t est un morphisme d'algèbres continue. D'après le théorème précédent, $\delta_t \circ \varphi$ est continue. D'où on a :

$$f(t) = \delta_t(f) = \lim_{n\to+\infty} \delta_t(\varphi(x_n)) = \lim_{n\to+\infty} (\delta_t \circ \varphi)(x_n) = (\delta_t \circ \varphi)(x) = \varphi(x)(t)\,.$$

Par conséquent, on a $f = \varphi(x)$. Donc le graphe de φ est fermé ■

Théorème 12.4.2 (Gleason-Kahane-Zelazko). *Soient* $(A, \| \ \|)$ *une algèbre de Banach unitaire et* $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ *une forme linéaire telle que* $\varphi(1) = 1$ *et* $\varphi(x) \neq 0$, *pour tout* $x \in GL(A)$, *alors pour tout* $x, y \in A$, *on a* $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. *Autrement dit,* φ *est un morphisme d'algèbres.*

Pour une preuve du théorème précédent, voir ([28], p. 251).

Définition 12.4.1. Un **idéal bilatère maximal** d'une algèbre A est un idéal bilatère I de A tel que $I \neq A$ et tel que pour tout idéal bilatère I' de A tel que $I \subset I'$ et $I' \neq A$, on ait $I' = I$.

Lemme 12.4.1. *Soient A une algèbre unitaire et I un idéal bilatère de A. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $I \neq A$.

(ii) Pour tout $x \in I$, *on a* $x \notin GL(A)$.

(iii) $1_A \notin I$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $x \in I$. Si $x \in \mathrm{GL}(A)$, alors $1_A = x^{-1}x \in I$, d'où pour tout $a \in A$, on a $a = a1_A \in I$, donc $I = A$, ce qui est impossible. Donc on a bien $x \notin \mathrm{GL}(A)$. Les implications (ii) $\Longrightarrow$ (iii) et (iii) $\Longrightarrow$ (i) sont triviales. ■

Proposition 12.4.2. *Soient A une algèbre unitaire et I un idéal bilatère de A tel que $I \neq A$, alors il existe un idéal bilatère maximal J de A tel que $I \subset J$. En particulier, toute algèbre unitaire possède au moins un idéal bilatère maximal.*

Démonstration. Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des idéaux bilatères distincts de A et contenant I. Alors $\mathcal{I}$ est non vide, car $I \in \mathcal{I}$, et on ordonne l'ensemble $\mathcal{I}$ par l'inclusion. Soit $(I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ une famille totalement ordonnée dans $\mathcal{I}$, *i.e.* pour tout α, $\beta \in \Lambda$, soit on a $I_\alpha \subset I_\beta$ soit on a $I_\beta \subset I_\alpha$. Soit $L = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$, alors L est un idéal bilatère de A contenant I. Comme pour tout $\alpha \in \Lambda$, on a $1_A \notin I_\alpha$, car $I_\alpha \neq A$, alors $1_A \notin L$, donc on a $L \neq A$. Ainsi, on a $L \in \mathcal{I}$ et pour tout $\alpha \in \Lambda$, on a $I_\alpha \subset L$. Donc $\mathcal{I}$ est un ensemble inductif. On déduit du lemme de Zorn, voir Appendice A, que $\mathcal{I}$ contient un élément maximal. ■

Lemme 12.4.2. *Soient A une algèbre commutative unitaire et $x \in A$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $x \notin GL(A)$.

(ii) Il existe un idéal bilatère maximal I de A tel que $x \in I$.

(iii) Il existe un idéal bilatère I de A tel que $I \neq A$ et $x \in I$.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons donc $x \notin \mathrm{GL}(A)$, alors Ax est un idéal bilatère de A contenant x tel que $Ax \neq A$. D'après la proposition précédente, il existe un idéal bilatère maximal I de A contenant Ax, d'où $x \in I$.
L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est triviale. L'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i) résulte du lemme précédent. ■

Remarque 12.4.1. Si A est une algèbre de Banach unitaire non commutative, on peut avoir $x \notin GL(A)$ et il n'existe aucun idéal bilatère maximal I de A tel que $x \in I$.

Exemple 12.4.1. Soient $n \geq 2$ et $A = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\{0\}$ est l'unique idéal bilatère maximal de A, et il existe des éléments non nuls et non inversibles dans A.
(voir exercice 12.16).

Lemme 12.4.3. *Soit I un idéal bilatère d'une algèbre commutative unitaire A tel que $I \neq A$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) I est un idéal bilatère maximal de A.

(ii) Tout élément non nul de l'algèbre quotient A/I est inversible.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Par hypothèse, I est un idéal bilatère maximal de A. Notons d'abord que l'algèbre quotient A/I est commutative et unitaire. Soit $\pi : A \longrightarrow A/I$ l'application quotient, c'est un morphisme d'algèbres unitaires. Soit $x \in A$ tel que $\pi(x) \neq 0$. Soit $J = \pi(x)A/I$, alors J est un idéal bilatère non nul de A/I, d'où $\pi^{-1}(J)$ est un idéal bilatère de A tel que $I \subset \pi^{-1}(J)$ et $I \neq \pi^{-1}(J)$. Comme I est maximal, alors on a $\pi^{-1}(J) = A$, donc on a $J = A/I$. Par conséquent, $\pi(x)$

est inversible dans A/I.
Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit J un idéal bilatère de A tel que $I \subset J$ et $J \neq A$. Alors $\pi(J)$ est un idéal bilatère de A/J tel que $\pi(J) \neq A/J$. Il résulte du lemme 12.4.1 que pour tout $y \in \pi(J)$, y n'est pas inversible dans A/I. Comme, par hypothèse, tout élément non nul de A/I est inversible, alors on a $\pi(J) = \{0\}$, d'où $J = I$. Donc I est un idéal bilatère maximal de A. ■

Définition 12.4.2. Soit A une algèbre de Banach non nulle. On appelle **caractère** de A tout morphisme d'algèbres non nul de A dans $\mathbb{C}$. On note $\widehat{A}$ l'ensemble des caractères de A.

Proposition 12.4.3. *Soit A une algèbre de Banach unitaire.*

1. *Soit I un idéal bilatère de A. Alors $\overline{I}$ est un idéal bilatère de A. Si de plus, on a $I \neq A$, alors $\overline{I} \neq A$. Donc tout idéal bilatère maximal de A est fermé dans A.*
2. *Soit χ un caractère de A. Alors* $\ker(\chi)$ *est un idéal bilatère fermé maximal de A.*
3. *Soient χ_1 et χ_2 deux caractères de A tels que* $\ker(\chi_1) \subset \ker(\chi_2)$. *Alors on a $\chi_1 = \chi_2$.*
4. *Soit $x \in A$. Alors pour tout caractère χ de A, on a $\chi(x) \in Sp_A(x)$.*

Démonstration. 1. Soit I un idéal bilatère dans A. Il est clair que $\overline{I}$ est un idéal bilatère dans A. Si $I \neq A$, il résulte du lemme 12.4.1 que l'on a $I \cap \mathrm{GL}(A) = \emptyset$. Autrement dit, on a $I \subset A \setminus \mathrm{GL}(A)$. Comme $A \setminus \mathrm{GL}(A)$ est fermé dans A, voir corollaire 12.1.1, alors on a $\overline{I} \subset A \setminus \mathrm{GL}(A)$. Donc on a $\overline{I} \neq A$.
2. Puisque χ est un morphisme d'algèbres continue, voir théorème 12.4.1, alors $\ker(\chi)$ est un idéal bilatère fermé de A. Soit J un idéal bilatère dans A, il suffit que J soit un sous-espace vectoriel de A, tel que $\ker(\chi) \subset J$ et $\ker(\chi) \neq J$. Soit $x \in J$ tel que $\chi(x) \neq 0$, alors on a $A = \ker(\chi) + \mathbb{C}\, x$, donc $J = A$. Par conséquent, $\ker(\chi)$ est un idéal bilatère maximal de A.
3. Soit $x \in A$. Alors $x - \chi_1(x)\, 1_A \in \ker(\chi_1)$, car $\chi_1(1_A) = 1$, voir théorème 12.4.1. Or on a $\ker(\chi_1) \subset \ker(\chi_2)$, d'où $\chi_2(x - \chi_1(x)\, 1_A) = 0$. Donc on a $\chi_2(x) = \chi_1(x)$. Par conséquent, on a $\chi_1 = \chi_2$.
4. Soient $x \in A$ et χ un caractère de A, alors on a $\chi(x - \chi(x)\, 1_A) = 0$, d'où $x - \chi(x)\, 1_A \in \ker(\chi)$, donc $x - \chi(x)\, 1_A$ n'est pas inversible, voir lemme 12.4.1. Autrement dit, on a $\chi(x) \in \mathrm{Sp}_A(x)$. ■

Soit A une algèbre de Banach unitaire. D'après le théorème 12.4.1, si χ est un caractère de A, alors χ est continue, $\chi(1_A) = 1$ et on a $\|\chi\| = 1$. Par conséquent, $\widehat{A}$ est contenu dans la boule unité fermée de l'espace de Banach dual A^*. On munit alors $\widehat{A}$ de la topologie induite par la topologie $\star$-faible sur A^*. Comme on a :

$$\widehat{A} = \big\{\chi \in A^* \ ; \ \chi(1_A) = 1\big\} \cap \bigcap_{(x,y)\in A^2} \big\{\chi \in A^* \ ; \ \chi(xy) = \chi(x)\chi(y)\big\}\,.$$

Alors $\widehat{A}$ est $\star$-faible fermé. On déduit du théorème d'Alaoglu, corollaire 10.1.2, que $\widehat{A}$ est un espace compact, appelé **le spectre de** A.
Pour tout $x \in A$, soit $\hat{x} : \widehat{A} \longrightarrow \mathbb{C}$, définie par $\hat{x}(\chi) = \chi(x)$. L'application $\hat{x}$ est continue et appelée **la transformation de Gelfand** de x, et l'application

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C(\widehat{A}\,) \\ x & \longmapsto & \hat{x} \end{array}$$

est appelée **la transformation de Gelfand**.
Notons que si $J : A \longrightarrow A^{**}$ est l'application canonique, voir proposition 7.9.1, pour tout $x \in A$, on a $\hat{x} = J(x)_{|\widehat{A}}$.

Exemple 12.4.2. Si $A = \mathbb{C}$, alors on a $\widehat{\mathbb{C}} = \{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}\}$.

Exemple 12.4.3. Soient $n \geq 2$ et $A = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, alors on a $\widehat{A} = \emptyset$, voir exercice 12.16.

L'exemple précédent montre que si A est une algèbre de Banach unitaire non commutative, le spectre de A ne reflète pas les propriétés de A, et donc $\widehat{A}$ n'est pas intéressant dans ce cas.

Théorème 12.4.3. *Soient X un espace compact et $A = C(X)$ muni de la norme $\| \ \|_\infty$. C'est une algèbre de Banach commutative unitaire.*

1. *Pour tout fermé F de X, on pose $I_F = \big\{f \in A \ ; \ f(x) = 0\,, \text{ pour tout } x \in F\big\}$. Alors I_F est un idéal bilatère fermé de A.*
2. *L'application $T : F \longmapsto I_F$ est bijective de l'ensemble des fermés de X sur l'ensemble des idéaux bilatères fermés de A.*
3. *Tout idéal bilatère fermé de A est l'intersection des idéaux bilatères maximaux de A le contenant.*
4. *Pour tout $x \in X$, l'application suivante est un caractère de A.*
$$\begin{array}{rccc} \delta_x : & A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$
5. *L'application suivante est un homéomorphisme.*
$$\begin{array}{rccc} \delta : & X & \longrightarrow & \widehat{A} \\ & x & \longmapsto & \delta_x \end{array}$$

Pour une preuve du théorème précédent, voir chapitre 12 du supplément.

Théorème 12.4.4 (Gelfand). *Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire.*

1. *L'application $\chi \longmapsto \ker(\chi)$ est bijective de $\widehat{A}$ sur l'ensemble des idéaux bilatères maximaux de A.*
2. *On a $\widehat{A} \neq \emptyset$.*
3. *Pour tout $x \in A$, on a $Sp_A(x) = \big\{\chi(x) \ ; \ \chi \in \widehat{A}\,\big\}$.*
4. *La transformation de Gelfand*
$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C(\widehat{A}\,) \\ x & \longmapsto & \hat{x} \end{array}$$
est un morphisme d'algèbres unitaires tel que pour tout $x \in A$, on ait $\|\hat{x}\|_\infty = r(x) \leq \|x\|$.

5. *Soit $x \in A$, alors $x \in GL(A)$ si et seulement si $\hat{x} \in GL(C(\widehat{A}))$. Autrement dit, soit $y \in A$, alors $y \notin GL(A)$ si et seulement si il existe un caractère χ de A tel que $\chi(y) = 0$.*

Démonstration. 1. D'après la proposition 12.4.3, pour tout caractère χ de A, $\ker(\chi)$ est un idéal bilatère fermé maximal de A et l'application $\chi \longmapsto \ker(\chi)$ est injective de $\widehat{A}$ dans l'ensemble des idéaux bilatères maximaux de A. Soit I un idéal bilatère maximal de A, alors I est fermé dans A et l'algèbre quotient est une algèbre de Banach unitaire. D'après le théorème de Mazur et le lemme 12.4.3, on a $A/I = \mathbb{C}\,1_{A/I}$. Donc on a $A = I + \mathbb{C}\,1_A$ et $I \cap \mathbb{C}\,1_A = \{0\}$. Autrement dit, pour tout $x \in A$, il existe un unique $b \in I$ et un unique $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x = b + \lambda\,1_A$. On pose alors $\chi(x) = \lambda$, et on vérifie facilement que χ est un caractère de A tel que $\ker(\chi) = I$. Ainsi, l'application $\chi \longmapsto \ker(\chi)$ est bijective de $\widehat{A}$ sur l'ensemble des idéaux bilatères maximaux de A.
2. D'après la proposition 12.4.2, A admet au moins un idéal bilatère maximal, donc on a $\widehat{A} \neq \emptyset$.
3. D'après la proposition 12.4.3, on a $\{\chi(x)\ ;\ \chi \in \widehat{A}\} \subset \mathrm{Sp}_A(x)$.
Réciproquement, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)$. Alors on a $x - \lambda\,1_A \notin \mathrm{GL}(A)$. D'après le lemme 12.4.2, il existe un idéal bilatère maximal I de A tel que $x - \lambda\,1_A \in I$. D'après 1, il existe $\chi \in \widehat{A}$ tel que $\chi(x - \lambda\,1_A) = 0$, d'où on a $\chi(x) - \lambda = 0$. Donc on a $\lambda \in \{\chi(x)\ ;\ \chi \in \widehat{A}\}$. Par conséquent, on a $\mathrm{Sp}_A(x) = \{\chi(x)\ ;\ \chi \in \widehat{A}\}$.
4. On vérifie facilement que la transformation de Gelfand est un morphisme d'algèbres unitaires. Soit $x \in A$, on a $\|\hat{x}\|_\infty = \sup\{|\hat{x}(\chi)|\ ;\ \chi \in \widehat{A}\} = \sup\{|\chi(x)|\ ;\ \chi \in \widehat{A}\} = \sup\{|\lambda|\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)\} = r(x) \leq \|x\|$.
5. Soit $x \in A$, alors $x \in \mathrm{GL}(A)$ si et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}_A(x)$. D'après 3, $x \in \mathrm{GL}(A)$ si et seulement si pour tout $\chi \in \widehat{A}$, on a $\chi(x) \neq 0$. Par conséquent, $x \in \mathrm{GL}(A)$ si et seulement si pour tout $\chi \in \widehat{A}$, on a $\hat{x}(\chi) \neq 0$. Autrement dit, $x \in \mathrm{GL}(A)$ si et seulement si $\hat{x} \in \mathrm{GL}(C(\widehat{A}))$. ■

Corollaire 12.4.1. *Soient A une algèbre de Banach unitaire et $x \in A$. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière. Alors on a $Sp_A(f(x)) = f(Sp_A(x)) = \{f(\lambda)\ ;\ \lambda \in Sp_A(x)\}$. En particulier, on a $Sp_A(e^x) = \{e^\lambda\ ;\ \lambda \in Sp_A(x)\}$.*

Démonstration. Comme f est une fonction entière, il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est convergente dans A et on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Soit D la sous-algèbre de A engendrée par 1_A, x, $(x - \lambda)^{-1}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{Sp}_A(x)$ et par $(f(x) - \lambda)^{-1}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{Sp}_A(f(x))$. Soit $B = \overline{D}$, alors B est une sous-algèbre de Banach commutative unitaire de A et on a $\mathrm{Sp}_A(x) = \mathrm{Sp}_B(x)$ et $\mathrm{Sp}_A(f(x)) = \mathrm{Sp}_B(f(x))$. Par conséquent, on peut supposer A commutative. D'après le théorème de Gelfand, on a $\mathrm{Sp}_A(x) = \{\chi(x)\ ;\ \chi \in \widehat{A}\}$ et $\mathrm{Sp}_A(f(x)) = \{\chi(f(x))\ ;\ \chi \in \widehat{A}\}$. Comme pour tout $\chi \in \widehat{A}$, on a $\chi(f(x)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \chi(x)^n = f(\chi(x))$, on déduit que l'on a $\mathrm{Sp}_A(f(x)) = f(\mathrm{Sp}_A(x)) = \{f(\lambda)\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)\}$. ■

Proposition 12.4.4. *Soit A une algèbre de Banach unitaire. Supposons qu'il existe $x \in A$ tel que la sous-algèbre engendrée par x et 1_A soit dense dans A. Alors A est commutative et l'application*

$$\begin{array}{rccc} \hat{x}\, : & \widehat{A} & \longrightarrow & Sp_A(x) \\ & \chi & \longmapsto & \chi(x) \end{array}$$

est un homéomorphisme de $\widehat{A}$ sur $Sp_A(x)$.

Démonstration. Comme la sous-algèbre $D = \{P(x)\ ;\ P \in \mathbb{C}[X]\}$ est commutative et dense dans A, on en déduit que A est commutative. L'application $\hat{x}$ est surjective par le théorème de Gelfand. Comme l'application $\hat{x}$ est continue et $\widehat{A}$ est compact, pour avoir le résultat, il reste à vérifier que $\hat{x}$ est injective. Soient $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{A}$ tels que $\chi_1(x) = \chi_2(x)$. Alors on a aussi $\chi_1(P(x)) = \chi_2(P(x))$, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$. Comme χ_1 et χ_2 sont continues et D est dense dans A, alors on a $\chi_1 = \chi_2$. Donc $\hat{x}$ est injective. ■

La proposition précédente justifie d'appeler $\widehat{A}$ le spectre de A.

Exemple 12.4.4. Soit $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'espace vectoriel des fonctions complexes f définies sur $\mathbb{Z}$ telles la famille $\big(|f(n)|\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit sommable. C'est un espace de Banach pour la norme suivante $\|f\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|$, voir exercice 6.37. Soient $f, g \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Comme f est bornée, alors la famille $\big(f(m-n)g(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. On pose alors $(f \star g)(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(m-n)g(n)$. On définit ainsi une fonction $f \star g\, : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$, appelée le **produit de convolution** de f et g. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{m\in\mathbb{Z}} |(f\star g)(m)| &\leq \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(m-n)|\,|g(n)| \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} |f(m-n)|\,|g(n)| \qquad \text{(corollaire 6.7.5)} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(n)| \Big[\sum_{m\in\mathbb{Z}} |f(m-n)|\Big] \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(n)|\, \|f\|_1 \;=\; \|f\|_1\, \|g\|_1 \,. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $f \star g \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. On vérifie facilement que $\ell^1(\mathbb{Z})$ muni du produit de convolution ci-dessus est une algèbre de Banach commutative. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $\mathbf{e}_n$ la fonction caractéristique du point $\{n\}$. On vérifie que pour tout $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on a $\mathbf{e}_0 \star f = f \star \mathbf{e}_0 = f$. Donc $\ell^1(\mathbb{Z})$ est unitaire et $\mathbf{e}_0$ son unité. On vérifie également que pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$, on a $\mathbf{e}_n \star \mathbf{e}_m = \mathbf{e}_m \star \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_{n+m}$. En particulier, on a $\mathbf{e}_1^n = \mathbf{e}_n$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{e}_n$ est inversible et on a $\mathbf{e}_n^{-1} = \mathbf{e}_{-n}$. Soit $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Comme la famille $\big(|f(n)|\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, alors la famille $\big(f(n)\mathbf{e}_n\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ et on a $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\mathbf{e}_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\mathbf{e}_1^n$. Donc la sous-algèbre engendrée par $\mathbf{e}_0$

et $\mathbf{e}_1$ est dense dans $\ell^1(\mathbb{Z})$. D'après la proposition précédente, l'application

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\ell^1(\mathbb{Z})} & \longrightarrow & \mathrm{Sp}_{\ell^1(\mathbb{Z})}(\mathbf{e}_1) \\ \chi & \longmapsto & \chi(\mathbf{e}_1) \end{array}$$

est un homéomorphisme de $\widehat{\ell^1(\mathbb{Z})}$ sur $\mathrm{Sp}_{\ell^1(\mathbb{Z})}(\mathbf{e}_1)$. Comme on a $\|\mathbf{e}_1\|_1 = \left\|\mathbf{e}_1^{-1}\right\|_1 = 1$, alors on a $\mathrm{Sp}_{\ell^1(\mathbb{Z})}(\mathbf{e}_1) \subset \mathbb{S}$. Soit $\chi \in \widehat{\ell^1(\mathbb{Z})}$. Soit $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Comme on a $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\mathbf{e}_1^n$, alors on a $\chi(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\chi(\mathbf{e}_1)^n$. Réciproquement, soit $z \in \mathbb{S}$. Alors pour tout $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$, la famille $\big(f(n)z^n\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable dans $\mathbb{C}$. On pose $\chi(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)z^n$, alors $\chi \in \widehat{\ell^1(\mathbb{Z})}$ et on a $\chi(\mathbf{e}_1) = z$. Autrement dit, on a $\mathrm{Sp}_{\ell^1(\mathbb{Z})}(\mathbf{e}_1) = \mathbb{S}$ et $\widehat{\ell^1(\mathbb{Z})}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}$. De plus, la transformation de Gelfand est le morphisme d'algèbres unitaires suivant

$$\begin{array}{ccc} \ell^1(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & C(\mathbb{S}) \\ f & \longmapsto & \hat{f} \end{array}$$

où, pour tout $z \in \mathbb{S}$, on a $\hat{f}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)z^n$.

On vérifie que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \hat{f}(e^{it})e^{-int}\,dt$. Autrement dit, les $f(n)$ sont les coefficients de Fourier de $\hat{f}$. Ainsi, l'image de la transformation de Gelfand est la sous-algèbre de $C(\mathbb{S})$ formée des fonctions continues sur $\mathbb{S}$ dont la série de Fourier est absolument convergente. Donc la transformation de Gelfand dans cet exemple n'est pas surjective.
Il y a un théorème bien connu de Wiener qui affirme que si $g \in C(\mathbb{S})$ telle que $g(z) \neq 0$, pour tout $z \in \mathbb{S}$ et si la série de Fourier de g est absolument convergente, alors la série de Fourier de $\frac{1}{g}$ est absolument convergente. En fait, on peut déduire le théorème de Wiener facilement de la transformation de Gelfand. En effet, on a $g = \hat{f}$, avec $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Comme pour tout $z \in \mathbb{S}$, on a $g(z) \neq 0$, alors $g = \hat{f}$ est inversible dans $C(\mathbb{S})$. Il résulte du théorème de Gelfand que f est inversible dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ et on a donc $\frac{1}{g} = \widehat{f^{-1}}$. Par conséquent, la série de Fourier de $\frac{1}{g}$ est absolument convergente. En conclusion, cet exemple à lui seul montre la puissance du théorème de Gelfand et rend la théorie des algèbres de Banach très intéressante.

Proposition 12.4.5. *Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire. La transformation de Gelfand est une isométrie si et seulement si pour tout $x \in A$, on a $\|x^2\| = \|x\|^2$.*

Démonstration. Supposons d'abord que la transformation de Gelfand est une isométrie. Alors, pour tout $x \in A$, on a $r(x) = \|x\|$. D'après la proposition 12.3.5, on a $r(x^2) = r(x)^2$, donc $\|x^2\| = r(x^2) = r(x)^2 = \|x\|^2$.
Réciproquement, supposons que pour tout $x \in A$, on a $\|x^2\| = \|x\|^2$. On déduit, par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$, d'où $\|x^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|x\|$. D'après le théorème de Beurling, on a $r(x) = \lim_{n\to+\infty} \|x^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}}$, d'où $\|\hat{x}\|_\infty = r(x) = \|x\|$. Autrement dit, la transformation de Gelfand est une isométrie. ■

12.5 Exercices

Exercice 12.1. Soient x, y deux éléments d'une algèbre unitaire A.

1. Montrer que si x et xy sont inversibles dans A, alors y est inversible dans A.

2. Montrer que si xy et yx sont inversibles dans A, alors x et y sont inversibles dans A.

3. Montrer que si $xy = 1_A$ alors $z = yx$ est un idempotent non nul, *i.e.* $z^2 = z$ et $z \neq 0$.

Solution. 1. Comme x^{-1} et xy sont inversibles, alors $y = x^{-1}xy$ est inversible dans A.
2. Comme xy et yx sont inversibles, alors il existe $a, b \in A$ tels que $axy = xya = 1_A$ et $byx = yxb = 1_A$. D'où on a $byx = xya = 1_A$. On en déduit que l'on a $by = ya$ et donc x est inversible. De même, on a $axy = yxb = 1_A$, d'où on a $ax = xb$ et donc y est inversible.
3. On a $z^2 = yxyx = y1_Ax = yx = z$. Si $z = 0$, alors $1_A = xzy = 0$, ce qui est impossible. Donc on a bien $z \neq 0$.

Exercice 12.2. Soient A et B deux algèbres unitaires. Considérons l'algèbre produit $A \times B$.

1. Montrer que l'on a $GL(A \times B) = GL(A) \times GL(B)$.

2. Montrer que pour tout $(x, y) \in A \times B$, on a $\mathrm{Sp}_{A\times B}((x, y)) = \mathrm{Sp}_A(x) \cup \mathrm{Sp}_B(y)$.

Solution. 1. Ceci est trivial.
2. Soient $(x, y) \in A \times B$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda \in \mathrm{Sp}_{A\times B}((x, y))$ si et seulement si $(x, y) - \lambda(1_A, 1_B)$ n'est pas inversible dans $A \times B$. Comme on a $(x, y) - \lambda(1_A, 1_B) = (x - \lambda 1_A, y - \lambda 1_B)$, il résulte de 1 que $\lambda \in \mathrm{Sp}_{A\times B}((x, y))$ si et seulement si $x - \lambda 1_A$ n'est pas inversible dans A ou $y - \lambda 1_B$ n'est pas inversible dans B. Par conséquent, on a $\mathrm{Sp}_{A\times B}((x, y)) = \mathrm{Sp}_A(x) \cup \mathrm{Sp}_B(y)$.

Exercice 12.3. Soient A_0 et A_1 les sous-algèbres de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, définies par :

$$A_0 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{et} \quad A_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

Soit A une algèbre unitaire sur $\mathbb{C}$ de dimension 2.

1. Montrer que A_0 et A_1 ne sont pas isomorphes.

2. Montrer qu'il existe une base $(a, 1_A)$ de A telle que $a^2 = \lambda 1_A$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

3. Montrer que ou bien A est isomorphe à A_0 ou bien A est isomorphe à A_0.

Solution. 1. Soit $e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, alors $e \in A_1$ tel que $e \neq 0$ et $e^2 = 0$. Par contre, pour tout $x \in A_0$ tel que $x \neq 0$, on a $x^2 \neq 0$. Donc A_0 et A_1 ne sont pas isomorphes.
2. Comme A est de dimension 2, il existe une base $(b, 1_A)$ de A. Alors on a $b^2 = 2\alpha b + \beta 1_A$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. D'où on a $(b - \alpha 1_A)^2 = (\beta - \alpha^2)1_A$. Soit $a = b - \alpha 1_A$, alors $(a, 1_A)$ est

une base de A telle que $a^2 = \lambda 1_A$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$.
3. Supposons d'abord $\lambda = 0$. Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_1 \\ \beta a + \alpha 1_A & \longmapsto & \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres unitaires.
Supposons maintenant $\lambda \neq 0$. Soit $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda = \mu^2$, d'où on a $\left(\frac{a}{\mu}\right)^2 = 1_A$ et $\left(\frac{a}{\mu}, 1_A\right)$ est aussi une base de A. Par conséquent, on peut supposer $\lambda = 1$. Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_0 \\ \beta a + \alpha 1_A & \longmapsto & \begin{bmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres unitaires.

Exercice 12.4. Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie et $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de H. Soit $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée dans $\mathbb{C}$ et $T \in A = \mathscr{L}(H)$ tel que $T(e_n) = \lambda_n e_n$, pour tout $n \geq 0$. Déterminer $\mathrm{Sp}_A(T)$.
Solution. Comme, pour tout $n \geq 0$, λ_n est une valeur propre de T, alors on a $\lambda_n \in \mathrm{Sp}_A(T)$. Donc on a $\overline{\{\lambda_n \,;\, n \geq 0\}} \subset \mathrm{Sp}_A(T)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda \notin \overline{\{\lambda_n \,;\, n \geq 0\}}$, alors la suite $((\lambda_n - \lambda)^{-1})_{n\geq 0}$ est bornée dans $\mathbb{C}$. Soit $S \in A = \mathscr{L}(H)$ tel que $S(e_n) = (\lambda_n - \lambda)^{-1} e_n$, pour tout $n \geq 0$. Alors on a $S \circ (T - \lambda\,\mathrm{id}_H) = (T - \lambda\,\mathrm{id}_H) \circ S = \mathrm{id}_H$, donc $T - \lambda\,\mathrm{id}_H$ est inversible dans A. Autrement dit, on a $\lambda \notin \mathrm{Sp}_A(T)$. Par conséquent, on a $\mathrm{Sp}_A(T) = \overline{\{\lambda_n \,;\, n \geq 0\}}$.

Exercice 12.5. Soient $(A, \|\ \|)$ une algèbre de Banach unitaire, $x \in A$ et U un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Sp}_A(x) \subset U$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $y \in A$, vérifiant $\|x - y\| < \varepsilon$, on ait $\mathrm{Sp}_A(y) \subset U$. Autrement dit, étant donné un ouvert U de $\mathbb{C}$, l'ensemble $\{x \in A \,;\, \mathrm{Sp}_A(x) \subset U\}$ est un ouvert de A.
Solution. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus U & \longrightarrow & \mathrm{GL}(A) \\ \lambda & \longmapsto & (x - \lambda)^{-1} \end{array}$$

est continue et on a $\left\|(x - \lambda)^{-1}\right\| \leq \dfrac{1}{|\lambda| - \|x\|}$ si $|\lambda| > \|x\|$, d'où $\displaystyle\lim_{|\lambda|\to+\infty} \left\|(x - \lambda)^{-1}\right\| = 0$. Donc il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\lambda| > \alpha$, on ait $\left\|(x - \lambda)^{-1}\right\| < 1$. Comme $K = (\mathbb{C} \setminus U) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \,;\, |\lambda| \leq \alpha\}$ est compact, alors il existe une constante $\beta > 0$ telle que pour tout $\lambda \in K$, on ait $\left\|(x - \lambda)^{-1}\right\| < \beta$. Autrement dit, il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus U$, on ait $\left\|(x - \lambda)^{-1}\right\| < M$. Soit $\varepsilon = \frac{1}{M}$, on a $\varepsilon > 0$. Soit $y \in A$ tel que $\|x - y\| < \varepsilon$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus U$, on a $\|(x - \lambda) - (y - \lambda)\| = \|x - y\| < \frac{1}{M} < \dfrac{1}{\|(x - \lambda)^{-1}\|}$. D'après le théorème 12.1.2, on a alors $y - \lambda \in \mathrm{GL}(A)$, donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}_A(y)$. Par conséquent, on a $\mathrm{Sp}_A(y) \subset U$.

Exercice 12.6. Soit $(A, \|\ \|)$ une algèbre de Banach commutative unitaire.

1. Montrer que pour tout $x, y \in A$, on a :

$$\mathrm{Sp}_A(x + y) \subset \mathrm{Sp}_A(x) + \mathrm{Sp}_A(y) \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}_A(xy) \subset \mathrm{Sp}_A(x)\mathrm{Sp}_A(y)\,.$$

2. Montrer que si A contient un idempotent non trivial, *i.e.* $e \in A$ avec $e^2 = e$, tel que $e \neq 0$ et $e \neq 1_A$, alors $\widehat{A}$ n'est pas connexe.

3. Supposons qu'il existe $x_1, \ldots, x_n \in A$ tels que la sous-algèbre engendrée par les $x_1, \ldots, x_n$ soit dense dans A. Montrer que $\widehat{A}$ est homéomorphe à une partie compacte de $\mathbb{C}^n$.

Solution. 1. Comme A est une algèbre de Banach commutative unitaire, d'après le théorème 12.4.4, pour tout $x \in A$, on a $\mathrm{Sp}_A(x) = \big\{\chi(x) \ ; \ \chi \in \widehat{A}\big\}$. Soit $\chi \in \widehat{A}$, on a $\chi(x+y) = \chi(x) + \chi(y)$ et $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$. Par conséquent, on a :

$$\mathrm{Sp}_A(x+y) \subset \mathrm{Sp}_A(x) + \mathrm{Sp}_A(y) \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}_A(xy) \subset \mathrm{Sp}_A(x)\mathrm{Sp}_A(y)\,.$$

2. D'après le corollaire 12.3.1, on a $\mathrm{Sp}_A(e) \subset \{0,1\}$. Comme e n'est pas inversible, alors on a $0 \in \mathrm{Sp}_A(e)$. On a aussi $(1_A - e)(1_A - e) = 1_A - e$, donc $1_A - e$ est un idempotent non trivial. On a de même $0 \in \mathrm{Sp}_A(1_A - e)$, d'où $1 \in \mathrm{Sp}_A(e)$. Donc on a $\mathrm{Sp}_A(e) = \{0,1\}$. L'application

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A} & \longrightarrow & \mathrm{Sp}_A(e) = \{0,1\} \\ \chi & \longmapsto & \chi(e) \end{array}$$

est continue et surjective, donc $\widehat{A}$ n'est pas connexe.
3. L'application

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ \chi & \longmapsto & (\chi(x_1), \ldots, \chi(x_n)) \end{array}$$

est continue et injective. Comme $\widehat{A}$ est compact, alors $\widehat{A}$ est homéomorphe à son image.

Exercice 12.7. Soient $(A, \|\ \|)$ une algèbre de Banach unitaire et B une sous-algèbre commutative maximale de A.

1. Montrer que B est fermée dans A et que l'on a $1_A \in B$.

2. Soit $y \in B$. Montrer que l'on a $y \in \mathrm{GL}(A)$ si et seulement si $y \in \mathrm{GL}(B)$.

3. Montrer que pour tout $x \in B$, on a $\mathrm{Sp}_A(x) = \mathrm{Sp}_B(x)$.

Solution. 1. Soit D la sous-algèbre engendrée par B et 1_A. Alors D est commutative et on a $B \subset D$. Comme B est maximale, alors on a $B = D$, d'où $1_A \in B$. Comme $\overline{B}$ est une sous-algèbre commutative de A et on a $B \subset \overline{B}$, alors on a $\overline{B} = B$, car B est maximale, donc B est fermée dans A.
2. Soit $y \in B$. Comme on a $1_B = 1_A$, alors si $y \in \mathrm{GL}(B)$, on a $y \in \mathrm{GL}(A)$. Réciproquement, supposons que l'on a $y \in \mathrm{GL}(A)$. Alors il existe $z \in A$ tel que $yz = zy = 1_A$. Alors pour tout $b \in B$, on a $ybz = byz = b$, d'où $bz = zybz = zb$. Soit D la sous-algèbre engendrée par B et z. Alors D est commutative et on a $B \subset D$. Comme B est maximale, alors on a $B = D$, d'où $z \in B$. Par conséquent, on a $y \in \mathrm{GL}(B)$.
3. Soient $x \in B$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $x - \lambda \in B$. D'après 2, on a $x - \lambda \in \mathrm{GL}(A)$ si et seulement si $x - \lambda \in \mathrm{GL}(B)$. Donc on a $\lambda \notin \mathrm{Sp}_A(x)$ si et seulement si $\lambda \notin \mathrm{Sp}_B(x)$. Par conséquent, on a $\mathrm{Sp}_A(x) = \mathrm{Sp}_B(x)$.

Exercice 12.8. Soient A une algèbre de Banach unitaire et $x, y \in A$.

1. Montrer que si $xy = yx$, alors on a $r(x+y) \leq r(x) + r(y)$ et $r(xy) \leq r(x)r(y)$.

2. Montrer que si $xy \neq yx$, alors le résultat de 1 n'est plus valable.

Solution. 1. Soit D la sous-algèbre de A engendrée par x, y et 1_A et soit $B = \overline{D}$, alors B est une sous-algèbre de Banach commutative unitaire de A. Comme pour tout $z \in A$, on a $r(z) = \lim\limits_{n\to+\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$, alors le rayon spectral ne change pas si on remplace A par B. Donc on peut supposer A commutative. D'après le théorème de Gelfand, on a alors :

$$r(x) = \|\hat{x}\|_\infty \quad , \quad r(y) = \|\hat{x}\|_\infty \, ,$$

$$r(x+y) = \|\widehat{x+y}\|_\infty = \|\hat{x} + \hat{y}\|_\infty \leq \|\hat{x}\|_\infty + \|\hat{y}\|_\infty = r(x) + r(y),$$
$$r(xy) = \|\widehat{xy}\|_\infty = \|\hat{x}\hat{y}\|_\infty \leq \|\hat{x}\|_\infty \, \|\hat{y}\|_\infty = r(x)\, r(y)\, .$$

2. Soit $A = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, alors A est une algèbre de Banach unitaire. Soient :

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors on a $xy \neq yx$ et $x^2 = y^2 = 0$, d'où on a $r(x) = r(y) = 0$, mais on a $r(x+y) = r(xy) = 1$.

Exercice 12.9. Soient $(A, \| \, \|)$ une algèbre de Banach unitaire et $x \in A$.

1. Montrer que $r(x) < 1$ si et seulement si la suite $\big(x^n\big)_{n\geq 1}$ converge vers 0 dans A.

2. Montrer que $r(x) = 0$ si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la suite $\big((\lambda x)^n\big)_{n\geq 1}$ converge vers 0 dans A.

Solution. 1. On a $r(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Supposons que $r(x) < 1$, et soit $\alpha \in]r(x), 1[$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} < \alpha$, d'où $\|x^n\| < \alpha^n$. Puisque l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x^n\| = 0$. Autrement dit, la suite $\big(x^n\big)_{n\geq 1}$ converge vers 0 dans A.
Réciproquement, supposons que la suite $\big(x^n\big)_{n\geq 1}$ converge vers 0 dans A. Alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x^n\| = 0$. D'après la proposition 12.3.5, on a $0 \leq (r(x))^n = r(x^n) \leq \|x^n\|$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (r(x))^n = 0$. Par conséquent, on a $r(x) < 1$.
2. Supposons d'abord que $r(x) = 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors on a $r(\lambda x) = |\lambda| r(x) = 0$. Donc, pour tout $0 < \varepsilon < 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\|(\lambda x)^n\|^{\frac{1}{n}} < \varepsilon$, d'où, pour tout $n \geq N$, on a $\|(\lambda x)^n\| < \varepsilon^n < \varepsilon$. Donc la suite $\big((\lambda x)^n\big)_{n\geq 1}$ converge vers 0 dans A.
Réciproquement, supposons que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la suite $\big((\lambda x)^n\big)_{n\geq 1}$ converge vers 0 dans A. Soit $\varepsilon > 0$. Alors la suite $\big(\frac{x^n}{\varepsilon^n}\big)_{n\geq 1}$ converge vers 0 dans A. Par conséquent, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\|\frac{x^n}{\varepsilon^n}\| < 1$, d'où pour tout $n \geq N$, on a $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} < \varepsilon$. Donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$. Autrement dit, on a $r(x) = 0$.

Exercice 12.10. Soient E un $\mathbb{C}$-espace de Banach et $T \in A = \mathscr{L}(E)$. Montrer que si pour tout $x \in E$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T^n(x)\|^{\frac{1}{n}} = 0$, alors on a $r(T) = 0$.

Solution. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et pour tout $x \in E$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left\| \dfrac{T^n(x)}{\lambda^{n+1}} \right\|^{\frac{1}{n}} = 0$, donc la série $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{T^n(x)}{\lambda^{n+1}}$ est normalement convergente, donc convergente dans E, car E est un espace de Banach. Par conséquent, pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et pour tout $x \in E$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{T^n(x)}{\lambda^{n+1}} = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On déduit du théorème de Banach-Steinhaus, corollaire 7.2.1, qu'il existe une constante $M_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, on ait $\left\| \frac{T^n}{\varepsilon^{n+1}} \right\| < M$, d'où $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} < \varepsilon \, \varepsilon^{\frac{1}{n}} M^{\frac{1}{n}}$. Comme on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon^{\frac{1}{n}} M^{\frac{1}{n}} = 1$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} < 2\varepsilon$. Par conséquent, on a $r(T) = 0$.

Exercice 12.11. Soient A une algèbre de Banach unitaire.

1. Montrer que si z est un idempotent de A tel que $z \neq 1_A$, alors on a $\|1_A - z\| \geq 1$.
2. Montrer que si x et y sont deux idempotents de A tels que $xy = yx$ et $x \neq y$, alors on a $\|x - y\| \geq 1$.

Solution. 1. Si $\|1_A - z\| < 1$, d'après le théorème 12.1.1, z est inversible dans A. Comme on a $z^2 = z$, alors $1_A = z^{-1}z = z^{-1}z^2 = z$, ce qui est impossible. Donc on a bien $\|1_A - z\| \geq 1$.
2. Si $x = 1_A$ ou $y = 1_A$, d'après 1, on a alors $\|x - y\| \geq 1$. Donc on peut supposer $x \neq 1_A$ et $y \neq 1_A$. Quitte à prendre l'algèbre de Banach unitaire engendrée par 1_A, x et y, on peut aussi supposer A commutative. Soit $I = yAy$, alors I est un idéal bilatère fermé de A et on a $I \neq A$, car $y \neq 1_A$. Si $x \in I$, alors x est un idempotent dans l'algèbre de Banach unitaire I et y est l'unité de I. On déduit de 1 que l'on a $\|x - y\| \geq 1$. Supposons maintenant $x \notin I$. Considérons l'algèbre de Banach quotient A/I. Alors A/I est commutative et unitaire. Soit $\pi : A \longrightarrow A/I$ l'application quotient. Comme $\pi(1_A) - \pi(x)$ est un idempotent de A/I et on a $\pi(1_A) - \pi(x) \neq \pi(1_A)$, alors $\pi(1_A) - \pi(x)$ n'est pas inversible dans A/I. Il résulte du théorème de Gelfand qu'il existe un caractère χ de A/I tel que $\chi(\pi(1_A) - \pi(x)) = 0$. Soit $\chi_1 = \chi \circ \pi$, alors χ_1 est un caractère de A tel que $\chi_1(x) = 1$ et $\chi_1(y) = 0$. Par conséquent, on a $1 \leq \|\hat{x} - \hat{y}\|_\infty$. Or on a $\|\hat{x} - \hat{y}\|_\infty \leq \|x - y\|$, d'où $\|x - y\| \geq 1$.

Exercice 12.12. Soient A une algèbre de Banach unitaire et G_1 la composante connexe de 1_A dans $\mathrm{GL}(A)$.

1. Soient $y \in A$ et $n \geq 1$ tels que $y^n = 1_A$. Montrer que l'on a $y \in G_1$.
2. On suppose de plus que A est commutative. On a montré, théorème 12.2.1, que G_1 est sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}(A)$. Montrer que le groupe quotient $\mathrm{GL}(A)/G_1$ ne contient aucun élément, différent de l'identité, d'ordre fini.

Solution. 1. Puisque l'on a $y^n = 1_A$, alors $\mathrm{Sp}_A(y) \subset \{z \in \mathbb{C} \; ; \; z^n = 1\}$, voir corollaire 12.3.1, donc $y \in \mathrm{GL}(A)$ et $\mathrm{Sp}_A(y)$ est fini. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, soit $y_\lambda = \lambda y + (1 - \lambda)1_A$. Soit $U = \{\lambda \in \mathbb{C} \; ; \; y_\lambda \in \mathrm{GL}(A)\}$. On a $y_\lambda \notin \mathrm{GL}(A)$ si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $y - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)1_A \notin \mathrm{GL}(A)$. Autrement dit, on a $y_\lambda \notin \mathrm{GL}(A)$ si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $1 - \frac{1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}_A(y)$. Donc $\mathbb{C} \setminus U$ est fini. Par conséquent, il existe une application continue $c : [0, 1] \longrightarrow \mathrm{GL}(A)$ telle que $c(0) = 1_A$ et $c(1) = y$, donc on a $y \in G_1$.

2. Pour montrer que le groupe quotient $\mathrm{GL}(A)/G_1$ ne contient aucun élément, différent de l'identité, d'ordre fini, il suffit de montrer que si $x \in \mathrm{GL}(A)$ et si $n \geq 1$ tels que $x^n \in G_1$, alors $x \in G_1$. D'après le théorème 12.2.1, on a $G_1 = \{e^a \ ; \ a \in A\}$. Soient $x \in \mathrm{GL}(A)$, $a \in A$ et $n \geq 1$ tels que $x^n = e^a$. Soit $y = xe^{\frac{-a}{n}}$, alors $y^n = 1_A$ et on a $x = ye^{\frac{a}{n}}$, avec $e^{\frac{a}{n}} \in G_1$. D'après 1, on a $y \in G_1$, donc $x \in G_1$.

Exercice 12.13. Soient $(A, \| \ \|)$ une algèbre de Banach unitaire et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathrm{GL}(A)$, qui converge vers un élément $x \in A$. Montrer que si la suite $\left(\|x_n^{-1}\|\right)_{n\geq 0}$ est bornée, alors $x \in \mathrm{GL}(A)$.
Solution. Comme la suite $\left(\|x_n^{-1}\|\right)_{n\geq 0}$ est bornée, alors il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|x_n^{-1}\| \leq M$. Comme la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\|x_n - x\| < \frac{1}{M}$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a $\|1 - x_n^{-1}x\| = \|x_n^{-1}(x_n - x)\| \leq \|x_n^{-1}\| \, \|x_n - x\| < 1$. Par conséquent, pour tout $n \geq N$, on a $x_n^{-1}x \in \mathrm{GL}(A)$, donc $x \in \mathrm{GL}(A)$.

Exercice 12.14. On considère l'algèbre de Banach $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\det\left(e^A\right) = e^{tr(A)}$.
Solution. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Si A est diagonalisable, il est clair que l'on a $\det\left(e^A\right) = e^{tr(A)}$. Supposons que A est quelconque, d'après la proposition 11.4.4, il existe une suite de matrices diagonalisables $(A_k)_{k\geq 0}$ convergeant vers A. Pour tout $k \geq 0$, on a $\det\left(e^{A_k}\right) = e^{tr(A_k)}$. Comme les fonction déterminant et trace sont continues, on en déduit que l'on a $\det(e^A) = e^{tr(A)}$.

Exercice 12.15. Soit A une algèbre de Banach unitaire. En utilisant la notion de spectre d'un élément, montrer que pour tout $x, y \in A$, on a $xy - yx \neq 1_A$.
Solution. Supposons qu'il existe $x, y \in A$ tels que $xy - yx = 1_A$. D'après le théorème 12.3.1, $\mathrm{Sp}_A(xy)$ et $\mathrm{Sp}_A(yx)$ sont des ensembles bornés non vides de $\mathbb{C}$. D'après les propositions 12.3.1 et 12.3.2, on a $\mathrm{Sp}_A(xy) = 1 + \mathrm{Sp}_A(yx)$ et $\mathrm{Sp}_A(xy) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}_A(yx) \setminus \{0\}$. On en déduit que $\mathrm{Sp}_A(xy)$ et $\mathrm{Sp}_A(yx)$ ne sont pas bornés, ce qui est impossible. Donc on a $xy - yx \neq 1_A$.

Exercice 12.16. Soit E un $\mathbb{C}$-espace de Banach. Un opérateur $T \in \mathscr{L}(E)$ est dit de **rang fini** si $T(E)$ est de dimension finie. On note $\mathscr{F}(E)$ l'ensemble des opérateurs de rang fini.

1. Montrer que $\mathscr{F}(E)$ est un idéal bilatère de $\mathscr{L}(E)$.
2. Soit I un idéal bilatère non nul de $\mathscr{L}(E)$. Montrer que l'on a $\mathscr{F}(E) \subset I$.

Solution. 1. Il est clair que $\mathscr{F}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(H)$. Soient $T \in \mathscr{F}(E)$ et $S \in \mathscr{L}(E)$. Alors on a $\dim((S \circ T)(E)) = \dim(S(T(E))) \leq \dim(T(E))$ et $\dim((T \circ S)(E)) = \dim(T(S(E))) \leq \dim(T(E))$. Donc on a $T \circ S, S \circ T \in \mathscr{F}(E)$. Par conséquent, $\mathscr{F}(E)$ est un idéal bilatère de $\mathscr{L}(E)$.
2. Soit I un idéal bilatère non nul de $\mathscr{L}(E)$. Alors il existe $S \in I$ tel que $S \neq 0$. D'où il existe $a \in E$ tel que $S(a) \neq 0$. Soient $T \in \mathscr{F}(E)$ non nul et $n = \dim(T(E)) \geq 1$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $T(E)$. D'après le théorème de Hahn-Banach, corollaire 7.7.4, il existe $f_1, \ldots, f_n \in E^*$ tels que pour tout $x \in E$, on ait $T(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i$. Par

conséquent, pour montrer que $\mathscr{F}(E) \subset I$, il suffit de montrer que pour tout $f \in E^*$ non nul et pour tout $y \in E$, l'opérateur $T : x \longmapsto f(x)y$ est dans I. Soit $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 1$, donc E est la somme directe algébrique de $\mathbb{C}x_0$ et de $\ker(f)$. Soient $A, B \in \mathscr{L}(E)$ définis par : $A(x_0) = a$ et $A(x) = 0$, pour tout $x \in \ker(f)$ et $B(S(a)) = y$ et $B(z) = 0$, pour tout $z \in F$, où F est un sous-espace vectoriel de E tel que E soit la somme directe algébrique de $\mathbb{C}S(a)$ et de F, voir proposition 7.3.2. Alors on a $T = B \circ S \circ A$, d'où $T \in I$. Par conséquent, on a $\mathscr{F}(E) \subset I$.

Exercice 12.17. Soient A, B deux algèbres de Banach unitaires et $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'algèbres unitaires continue.

1. Montrer que l'application suivante est continue.

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\varphi} : & \widehat{B} & \longrightarrow & \widehat{A} \\ & \chi & \longmapsto & \chi \circ \varphi \end{array}$$

2. En déduire que si de plus φ est bijectif, alors $\widehat{\varphi}$ est un homéomorphisme.

Solution. 1. Il est clair que $\widehat{\varphi}$ est bien défini. D'après la définition de la topologie sur $\widehat{A}$, pour montrer que $\widehat{\varphi}$ est continue, il suffit de montrer que pour tout $x \in A$, l'application

$$\begin{array}{ccc} \widehat{B} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \chi & \longmapsto & (\chi \circ \varphi)(x) \end{array}$$

est continue. Or on a $(\chi \circ \varphi)(x) = \chi(\varphi(x))$, il résulte alors de la définition de la topologie sur $\widehat{B}$ que $\chi \longmapsto (\chi \circ \varphi)(x)$ est continue sur $\widehat{B}$. Par conséquent, $\widehat{\varphi}$ est continue.
2. Si de plus φ est bijectif, il résulte du théorème de l'application ouverte que φ^{-1} : $B \longrightarrow A$ est aussi un morphisme d'algèbres unitaires continue. Donc $\widehat{\varphi}$ est bijectif et on a $\widehat{\varphi}^{-1} = \widehat{\varphi^{-1}}$. Par conséquent, $\widehat{\varphi}$ est un homéomorphisme.

Exercice 12.18. Soient X et Y deux espaces compacts et $\varphi : C(X) \longrightarrow C(Y)$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) L'application φ est un morphisme d'algèbres unitaires et bijectif.

(ii) Il existe un homéomorphisme $\rho : Y \longrightarrow X$ tel que pour tout $f \in C(X)$, on ait $\varphi(f) = f \circ \rho$.

Solution. Il est clair que l'on a l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons que φ est un morphisme d'algèbres unitaires et bijectif. D'après la proposition 12.4.1, φ est aussi continue. Posons $A = C(X)$ et $B = C(Y)$. D'après le théorème 12.4.3, les applications

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \widehat{A} \\ x & \longmapsto & \delta_x \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \widehat{B} \\ y & \longmapsto & \delta_y \end{array}$$

sont des homéomorphismes. D'après l'exercice précédent, l'application

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\varphi} : & \widehat{B} & \longrightarrow & \widehat{A} \\ & \chi & \longmapsto & \chi \circ \varphi \end{array}$$

est un homéomorphisme. Par composition, on obtient ainsi un homéomorphisme ρ : $Y \longrightarrow X$. On vérifie alors facilement que pour tout $f \in C(X)$, on a $\varphi(f) = f \circ \rho$.

Exercice 12.19. Soit X un espace complètement régulier. Soit $C_b(X)$ l'espace des fonctions complexes continues et bornées sur X. On munit $C_b(X)$ de la norme $\| \|_\infty$.

1. Montrer que $C_b(X)$ est une algèbre de Banach commutative unitaire.

2. Montrer que le spectre de $C_b(X)$ est homéomorphe à l'espace compact $\beta(X)$, le compactifié de Stone-Čech de X.

3. Montrer que la transformation de Gelfand est une isométrie surjective.

Solution. 1. Le fait que $C_b(X)$, muni de la norme $\| \|_\infty$, est un espace de Banach résulte de la proposition 2.6.8. Il est clair que $C_b(X)$ est aussi une algèbre commutative unitaire et que pour tout $f, g \in C_b(X)$, on a $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$. Donc $C_b(X)$ est bien une algèbre de Banach commutative unitaire.
2. D'après le théorème de Stone-Čech, théorème 3.5.2, X est dense dans $\beta(X)$ et pour tout $f \in C_b(X)$, il existe un unique $\tilde{f} \in C(\beta(X))$ prolongeant f. Par conséquent, l'application

$$\begin{array}{rccc} \pi : & (C_b(X), \| \|_\infty) & \longrightarrow & (C(\beta(X)), \| \|_\infty) \\ \\ & f & \longmapsto & \tilde{f} \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres unitaires, bijectif et isométrique. Il résulte de l'exercice 12.17 que le spectre de $C_b(X)$ est homéomorphe au spectre de $C(\beta(X)$ qui est à son tour homéomorphe à $\beta(X)$, par le théorème 12.4.3. Par conséquent, le spectre de $C_b(X)$ est homéomorphe à l'espace compact $\beta(X)$.
3. Après avoir identifié le spectre de $C_b(X)$ à $\beta(X)$, la transformation de Gelfand n'est autre que l'application π. Donc la transformation de Gelfand est une isométrie surjective.

Exercice 12.20. Montrer que le spectre de ℓ^∞ est un espace compact extrêmement discontinu.
Solution. D'après l'exercice précédent, le spectre de ℓ^∞ est homéomorphe à l'espace compact $\beta(\mathbb{N})$. Par ailleurs, $\beta(\mathbb{N})$ est extrêmement discontinu, voir exercice 4.45 du supplément, donc le spectre de ℓ^∞ est extrêmement discontinu.

Exercice 12.21. Soit X un espace compact.

1. Soit $p \in C(X)$. Montrer que p est un idempotent de $C(X)$ si et seulement si il existe un ensemble U à la fois ouvert et fermé dans X tel que p soit la fonction caractéristique de U, *i.e.*

   $$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in U\,, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin U\,. \end{cases}$$

   On note un tel idempotent p_U.

2. Montrer que l'espace vectoriel engendré par les idempotents de $C(X)$ est dense dans $C(X)$ si et seulement si X est totalement discontinu.

Solution. 1. Il est clair que si U est un ensemble à la fois ouvert et fermé dans X, alors p_U est un idempotent de $C(X)$.
Réciproquement, supposons que p est un idempotent de $C(X)$, *i.e.* $p \in C(X)$ et on a $p(x) = (p(x))^2$, pour tout $x \in X$, d'où $p(x) \in \{0, 1\}$. Soient $W = \left\{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| > \frac{1}{2}\right\}$ et $U = p^{-1}(W)$, alors U est un ensemble à la fois ouvert et fermé dans X et on a $p = p_U$.
2. Supposons d'abord que X est totalement discontinu. Puisque X est compact, il résulte du théorème 4.2.2 que X est un espace éparpillé. Donc tout point de X possède un système fondamental de voisinages formé d'ensembles à la fois ouverts et fermés. Soient $f \in C(X)$ et $\varepsilon > 0$. Comme f est continue, alors pour tout $x \in X$, il existe un ensemble U_x à la fois ouvert et fermé dans X tel que $x \in U_x$ et $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, pour tout $y \in U_x$. Comme X est compact, il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. On pose $V_1 = U_{x_1}$ et $V_j = U_{x_j} \setminus \big(\bigcup\limits_{i=1}^{j-1} U_{x_i}\big)$, pour $j \in \{2, \ldots, n\}$. Alors les V_i sont deux à deux disjoints et à la fois ouverts et fermés dans X et on a $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i$. De plus, pour tout $y \in V_i$, on a $|f(y) - f(x_i)| < \varepsilon$. Soit $g = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) p_{V_i}$, alors on a $\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Donc l'espace vectoriel engendré par les idempotents de $C(X)$ est dense dans $C(X)$.
Réciproquement, supposons que l'espace vectoriel engendré par les idempotents de $C(X)$ est dense dans $C(X)$. Soient $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. D'après le théorème d'Urysohn, théorème 3.6.1, il existe $f : X \longrightarrow [0,\, 1]$ continue telle que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ et $U_1, \ldots, U_n$ des ensembles à la fois ouverts et fermés dans X tels que $\Big\| \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i p_{U_i} - f \Big\|_\infty < \frac{1}{2}$. Alors on a $\Big| \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i p_{U_i}(x) \Big| < \frac{1}{2}$ et $\Big| \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i p_{U_i}(y) - 1 \Big| < \frac{1}{2}$. D'où on a $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \big(p_{U_i}(x) - p_{U_i}(y)\big) \neq 0$. Donc il existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $p_{U_{i_0}}(x) \neq p_{U_{i_0}}(y)$. Par conséquent, il existe un ensemble V à la fois ouvert et fermé dans X, en fait $V = U_{i_0}$ ou $V = X \setminus U_{i_0}$, tel que $x \in V$ et $y \notin V$. On en déduit que la composante connexe de x est réduit à $\{x\}$. Donc X est totalement discontinu.

Bibliographie

[1] V. Avanissian, *Initiation à l'analyse fonctionnelle*, Puf, 1996.

[2] H. Boualem et R. Brouzet, *La Planète $\mathbb{R}$, voyage au pays des nombres réels*, Dunod, 2002.

[3] N. Bourbaki, *Topologie Générale, Chapitres 5 à 10*, Diffusion C.C.L.S, nouvelle édition, 1974.

[4] N. Bourbaki, *Espaces Vectoriels Topologiques, Chapitres 1 à 5*, Masson, 1981.

[5] N. Bourbaki, *Topologie Générale, Chapitres 1 à 4*, Masson, nouvelle édition, 1990.

[6] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson, 1973.

[7] N.L. Carothers, *A Short Course on Banach Space Theory*, Cambridge University Press, 2005. London Mathematical Society, Student Texts 64.

[8] G. Christol, A. Cot et C-M. Marle, *Topologie*, Ellipses, 1997.

[9] G. Choquet, *Cours de Topologie*, Masson, 1969, deuxième édition, 1992.

[10] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse 1*, Gauthier-Villars, 1979, troisième édition, traduit du livre intitulé, *Foundations of Modern Analysis*, 1960.

[11] Ronald G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Academic Press, 1972, seconde édition, Springer-Verlag, 1998.

[12] J. Dugundji, *Topology*, Allyn et Bacon, 1966, réédition, Wn.C. Browpublishers, 1989.

[13] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, 1976, réédition, 1989.

[14] M. Fabian, P. Habala et P. Hájek, *Functional analysis and infinite-Dimensional geometry*, Springer-Verlag, 2001, Canadian Mathematical Society.

[15] L. Gillman et M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Van Nostrand, 1960.

[16] C. Godbillon, *Élément de Topologie Algébrique*, Hermann, 1971.

[17] J.L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, 1955, réédition, Springer-Verlag, 1975.

[18] John M. Lee, *Intoduction to Topological Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag, 2000.

[19] J-P. Marco, *Analyse pour la licence*, Dunod, deuxième édition, 2002.

[20] Y. Matsushima, *Differentiable Manifolds*, Marcel Dekker, 1972. Titre original *Tayotai Nyumon*, 1965.

[21] R.E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, 1998.

[22] J.R. Munkres, *Topology*, Prentice-Hall, 1975, seconde édition, 2000.

[23] Gerard J. Murphy, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, 1990.

[24] R. Meise and D. Vogt, *Introduction to Functional analysis*, Oxford University Press, 1997.

[25] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux, *Topologie et éléments d'analyse*, Masson, 1976, deuxième édition, 1988.

[26] H.L. Royden, *Real Analysis*, Prentice-Hall, 1963, troisième édition, 1988.

[27] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, 1953, troisième édition, 1976.

[28] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1973, seconde édition, 1991.

[29] L. Schwartz, *Analyse I*, Hermann, 1991.

[30] L. Schwartz, *Analyse II*, Hermann, 1992, nouvelle édition, 1997.

[31] G. Skandalis, *Topologie et analyse*, Dunod, 2001.

Index