

Centre Universitaire de Mila

Cours
Systemes dynamiques I

Master MFA

Par

Mohammed-Salah Abdelouahab

Année Universitaire 2013-2014

Table des matières

1	Généralités	2
1.1	Introduction	2
1.2	Théorème de Cauchy-Lipschitz	5
1.3	Dépendance aux conditions initiales et aux paramètres	11
2	Systèmes différentiels linéaires	16
2.1	Généralités	16
2.1.1	Cas d'un système homogène $\dot{x} = A(t)x$	17
2.1.2	Cas d'un système non-homogène $\dot{x} = A(t)x + B(t)$	17
2.2	Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants	18
2.2.1	Le cas homogène	18
2.2.2	Le cas non-homogène	20
2.3	Systèmes linéaires dans \mathbb{R}^2	22
3	Notions de stabilité	29
3.1	Méthode indirecte (Linéarisation)	31
3.2	Méthode direct (fonction de Lyapunov)	34
3.3	Exemples d'applications	36
3.3.1	Un modèle de l'écologie	36
3.3.2	Un modèle électrique	39
	Bibliographie	41

Chapitre 1

Généralités

1.1 Introduction

Considérons le système différentiel

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

tel que $f : E \rightarrow R^n$ et E un ouvert de R^n . Nous allons montrer que pour certaines conditions sur la fonction f le système (1.1) admet une solution unique passant par le point $x_0 \in E$ définie dans un intervalle maximal d'existence $(\alpha, \beta) \subset R$. En général, il est impossible de résoudre explicitement le système non-linéaire (1.1) par suite nous donnons un grand intérêt à l'étude qualitative locale, en particulier nous allons introduire le théorème de Hartman-Grobman qui montre que topologiquement le comportement local du système non-linéaire (1.1) au voisinage d'un point d'équilibre x_0 (tel que $f(x_0) = 0$) est typiquement déterminé par le comportement du système linéaire $\dot{x} = Ax$ au voisinage de l'origine avec $A = Df(x_0)$ la dérivée de f à x_0 . Le système (1.1) est dit autonome.

Lorsque la fonction f dépend explicitement de t

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.2}$$

le système est dit non-autonome, en revanche tout système non-autonome (1.2) avec $x \in R^n$ peut s'écrire sous forme d'un système autonome (1.1) avec $x \in R^{n+1}$ en effet on pose $x_{n+1} = t$ alors $\dot{x}_{n+1} = 1$, et la théorie fondamentale de (1.1) et (1.2) ne se différencie plus significativement.

Définition 1.1. La fonction $f : R^n \rightarrow R^n$ est différentiable en $x_0 \in R^n$ s'il existe une transformation linéaire $Df(x_0) \in L(R^n)$ satisfaisant

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h|}{|h|} = 0. \quad (1.3)$$

La transformation linéaire $Df(x_0)$ est appelée la dérivée de f en x_0 . $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne de R^n ($|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$)

Théorème 1.2. Si $f : R^n \rightarrow R^n$ est différentiable en $x_0 \in R^n$, alors toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$ existent en x_0 et pour tout $x \in R^n$ on a

$$Df(x_0)x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} \cdot x_j. \quad (1.4)$$

Par conséquent si f est différentiable alors la dérivée Df est donnée par la matrice jacobienne

$$Df = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right].$$

Exemple 1.1. Trouver la dérivée de la fonction

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2^2 \\ x_1 x_2 - x_2 \end{pmatrix}$$

et évaluer cette dérivée au point $x_0 = (1, -1)^T$.

Solution La dérivée de f est donnée par la matrice Jacobienne

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2x_2 \\ x_2 & -1 + x_1 \end{bmatrix}.$$

$$Df(1, -1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans la suite nous supposons que la fonction f est continument différentiable (i.e la dérivée $Df(x)$ considérée comme une application $Df : R^n \rightarrow L(R^n)$ est continue dans un ouvert $E \subset R^n$). Les espaces R^n et $L(R^n)$ sont munies de la norme euclidienne $|\cdot|$ et la norme des opérateurs $\|\cdot\|$ définies par $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ et $\|T\| = \sup_{|x| \leq 1} |T(x)|$ respectivement.

Définition 1.3. Soient V_1, V_2 deux espaces vectoriels normés munis des normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$, alors la fonction $f : V_1 \rightarrow V_2$ est continue en $x_0 \in V_1$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $x \in V_1$ et $\|x - x_0\| < \delta$ implique $\|f(x) - f(x_0)\|_2 < \epsilon$ et on dit que f est continue sur l'ensemble $E \subset V_1$, si elle est continue en chaque point $x \in E$. Si f est continue sur l'ensemble $E \subset V_1$, on note $f \in C(E)$.

Définition 1.4. Soit $f : E \rightarrow R^n$ une fonction différentiable en E , alors $f \in C^1(E)$ si la dérivée $Df : E \rightarrow L(R^n)$ est continue sur E .

Théorème 1.5. Soient E un ouvert de R^n et $f : E \rightarrow R^n$ une fonction. Alors $f \in C^1(E)$ si et seulement si les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$ existent et sont continues sur E .

Exemple 1.2. Trouver le plus grand ouvert $E \subset \mathfrak{R}^2$ pour le quel :

La fonction $f(x) = \begin{pmatrix} \frac{-x_1}{|x|^3} \\ \frac{-x_2}{|x|^3} \end{pmatrix}$ est continument différentiable.

Solution Cherchons le plus grand $E \subset \mathfrak{R}^2$ dans le quel $f(x) \in C^1(E)$.

$$\text{On a : } f(x) = \begin{pmatrix} \frac{-x_1}{|x|^3} \\ \frac{-x_2}{|x|^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{-x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

$$* \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} = \frac{-(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}} + 3x_1x_1(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}{(x_1^2 + x_2^2)^3}$$

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} = \frac{-(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}} + 3x_1^2(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}{(x_1^2 + x_2^2)^3}$$

$$* \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} = \frac{\frac{3}{2}x_1 \cancel{2}x_2(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}{(x_1^2 + x_2^2)^3}$$

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} = \frac{3x_1x_2(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}{(x_1^2 + x_2^2)^3}$$

$$* \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} = \frac{\frac{3}{2}x_2 \cancel{2}x_1(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}{(x_1^2 + x_2^2)^3}$$

$$\frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} = \frac{3x_1x_2(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}{(x_1^2 + x_2^2)^3}$$

$$* \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} = \frac{-(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x_2 \cancel{2}x_2(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}{(x_1^2 + x_2^2)^3}$$

$$\frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} = \frac{-(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}} + 3x_2^2(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}{(x_1^2 + x_2^2)^3}$$

*Le plus grand ouvert $E \subset \mathfrak{R}^2$ tq : $f \in C^1$ est le même ouvert dans le quel toutes les dérivées partielles de f existent et continues.

$$E = \{(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 \neq 0\}$$

Donc : $E = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} - \{(0, 0)\}$ qui est un ouvert car c'est le complémentaire d'un fermé.

Remarque 1.6. Les dérivées $D^k(f(x_0))$ de la fonction $f : E \rightarrow R^n$ sont définies de manière analogue et on a $f \in C^k(E)$ si et seulement si les dérivées partielles

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}, i, j_1, \dots, j_k = 1, \dots, n$$

existent et sont continues sur E . De plus, $D^2(f(x_0)) : E \times E \rightarrow R^n$ et pour $(x, y) \in E \times E$ et on a

$$D^2(f(x_0))(x, y) = \sum_{j_1, j_2=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} x_{j_1} y_{j_2}$$

Des formules similaires existent pour $D^k(f(x_0)) : (E \times \dots \times E) \rightarrow R^n$. Une fonction $f : E \rightarrow R^n$ est dite analytique dans l'ouvert $E \subset R^n$ si chaque composante $f_j(x), j = 1, \dots, n$ est analytique sur E (i.e pour $j = 1, \dots, n$ et $x_0 \in E$, $f_j(x)$ admet une série de Taylor convergeant vers $f_j(x)$ dans un certain voisinage de x_0 dans E).

1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Dans cette section nous allons présenter le théorème fondamentale d'existence et d'unicité pour le système autonome non-linéaire

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.5}$$

pour la preuve de ce théorème nous allons utiliser la méthode des approximations successives qui va servir en même temps à montrer la continuité et la différentiabilité des solutions par rapport aux conditions initiales et aux paramètres.

Définition 1.7. Soit E un ouvert de R^n , la fonction $f : E \rightarrow R^n$ est dite Lipschitzienne sur E s'il existe une constante positive K telle que pour tout $x, y \in E$; $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.

La fonction f est dite localement Lipschitzienne sur E si pour chaque point $x_0 \in E$ il existe un ϵ -voisinage de x_0 , $N_\epsilon(x_0) \subset E$ et une constante $K_0 > 0$ telle que pour tout $x, y \in N_\epsilon(x_0)$: $|f(x) - f(y)| \leq K_0|x - y|$.

(ϵ -voisinage de $x_0 \in R^n$, est une boule ouverte de rayon ϵ i.e $N_\epsilon(x_0) = \{x \in R^n / |x - x_0| < \epsilon\}$)

Lemme 1.8. Soit E un ouvert de R^n , et soit $f : E \rightarrow R^n$. Si $f \in C^1(E)$ alors f est localement Lipschitzienne sur E .

Démonstration. Comme E est un ouvert de R^n alors pour un $x_0 \in E$ donné il existe un $\epsilon > 0$ tel que $N_\epsilon(x_0) \subset E$.

Soit $K = \sup_{|x-x_0|<\epsilon} \|Df(x)\|$ (i.e k est le maximum de $Df(x)$ sur le compact $|x - x_0| < \epsilon$).

Pour $x, y \in N_\epsilon(x_0)$ on pose $u = y - x$ alors $x + su \in N_\epsilon(x_0)$ pour $0 \leq s \leq 1$ car $N_\epsilon(x_0)$ est un ensemble convexe.

Définissons la fonction $F : [0, 1] \rightarrow R^n$ par $F(s) = f(x + su)$ alors $F'(s) = Df(x + su)u$ et donc

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= F(1) - F(0) \\ &= \int_0^1 F'(s)ds = \int_0^1 Df(x + su)uds \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq \int_0^1 |Df(x + su)u|ds \\ &\leq \int_0^1 \|Df(x + su)\| |u|ds \\ &\leq K|u| = K|y - x| \end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration. □

Théorème 1.9. (Théorème fondamentale d'existence et d'unicité) Soit E un ouvert de R^n Contenant x_0 et supposons que $f \in C^1(E)$, alors il existe $a > 0$ tel que

le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x), \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (1.6)$$

admet une solution unique sur l'intervalle $[-a, a]$.

Démonstration. Comme $f \in C^1(E)$ alors d'après le lemme (1.8) f est localement Lipschitzienne (i.e pour chaque $x_0 \in E$ il existe un voisinage $N_\epsilon(x_0) \subset E$ et une constante $K > 0$ telle que pour tout $x, y \in N_\epsilon(x_0)$ on a $|f(y) - f(x)| \leq K|y - x|$) Soit $b = \frac{\epsilon}{2}$ alors la fonction continue $f(x)$ est bornée dans le compact

$$N_0 = \{x \in R^n / |x - x_0| \leq b\},$$

soit

$$M = \max_{x \in N_0} |f(x)|.$$

Soit $u_k(t)$ la suite définie par :

$$\begin{aligned} u_0(t) &= x_0 = x(0) \\ u_{k+1}(t) &= x_0 + \int_0^t f(u_k(s)) ds \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (1.7)$$

Soit $a > 0$ tel que $u_k(t)$ soit définie et continue sur $[-a, a]$ et satisfaisant

$$\max_{t \in [-a, a]} |u_k(t) - x_0| \leq b. \quad (1.8)$$

Il s'en suit que $f(u_k(t))$ est définie et continue sur $[-a, a]$ de plus $u_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(u_k(s)) ds$ est définie et continue sur $[-a, a]$ et satisfaisant

$$|u_{k+1}(t) - x_0| \leq \int_0^t |f(u_k(s))| ds \leq Ma$$

pour $t \in [-a, a]$.

Choisissons alors $0 < a \leq \frac{b}{M}$ il en résulte par induction que $u_k(t)$ est définie et continue et satisfaisant (1.8) pour tout $t \in [-a, a]$ et $k = 1, 2, 3, \dots$ donc $u_k(t) \in N_0$ et comme f est localement Lipschitzienne on aura pour tout $t \in [-a, a]$

$$\begin{aligned}
|u_2(t) - u_1(t)| &\leq \int_0^t |f(u_1(s)) - f(u_0(s))| ds \\
&\leq K \int_0^t |u_1(s) - u_0(s)| ds \\
&\leq Ka \max_{t \in [-a, a]} |u_1(t) - x_0| \\
&\leq Kab.
\end{aligned}$$

Supposons que pour un certain $j \geq 2$ on a

$$\max_{t \in [-a, a]} |u_j(t) - u_{j-1}(t)| \leq (Ka)^{j-1} b \quad (1.9)$$

alors pour tout $t \in [-a, a]$

$$\begin{aligned}
|u_{j+1}(t) - u_j(t)| &\leq \int_0^t |f(u_j(s)) - f(u_{j-1}(s))| ds \\
&\leq K \int_0^t |u_j(s) - u_{j-1}(s)| ds \\
&\leq Ka \max_{t \in [-a, a]} |u_j(t) - u_{j-1}(t)| \\
&\leq (Ka)^j b.
\end{aligned}$$

Par induction l'inégalité (1.9) est vrai pour tout $j = 2, 3, 4, \dots$

Posons $\alpha = Ka$ et choisissons $0 < \alpha < 1$, on aura pour $m > k \geq N$ et $t \in [-a, a]$

$$\begin{aligned}
|u_m(t) - u_k(t)| &\leq \sum_{j=k}^{m-1} |u_{j+1}(t) - u_j(t)| \\
&\leq \sum_{j=N}^{\infty} |u_{j+1}(t) - u_j(t)| \\
&\leq \sum_{j=N}^{\infty} \alpha^j b = \frac{\alpha^N}{1 - \alpha} b
\end{aligned} \quad (1.10)$$

on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha^N}{1 - \alpha} b \right) = 0$$

alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier positif N tel que $m, k > N$ implique $\|u_m - u_k\| = \max_{t \in [-a, a]} |u_m(t) - u_k(t)| < \epsilon$ donc u_k est une suite de Cauchy dans $C([-a, a])$ et comme $C([-a, a])$ est un espace complet alors u_k converge

uniformément vers une fonction continue $u(t)$. Prenons alors la limite des deux cotés de (1.7) on obtient $u(t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(t)$ satisfaisant l'équation intégrale

$$u(t) = x_0 + \int_0^t f(u(s)) ds, \quad (1.11)$$

pour tout $t \in [-a, a]$ (le signe de la limite et de l'intégral, sont interchangeable car la convergence est uniforme), à partir de l'équation (1.8) on déduit que $u(t) \in N_\epsilon(x_0)$ pour tout $t \in [-a, a]$. Comme $u(t)$, $f(u(t))$ sont continues alors (1.11) est différentiable et on a

$$u'(t) = f(u(t)),$$

pour tout $t \in [-a, a]$, de plus $u(0) = x_0$. Par suite $u(t)$ est solution du problème de Cauchy (1.6).

Il ne reste qu'à montrer que c'est l'unique solution, pour cela supposons que $u(t)$ et $v(t)$ sont deux solutions du problème (1.6) sur $[-a, a]$.

La fonction continue $|u(t) - v(t)|$ atteint son maximum en un certain $t^* \in [-a, a]$.

Il s'en suit

$$\begin{aligned} \|u - v\| &= \max_{[-a, a]} |u(t) - v(t)| \\ &= \left| \int_0^{t^*} (f(u(s)) - f(v(s))) ds \right| \\ &\leq \int_0^{|t^*|} |f(u(s)) - f(v(s))| ds \\ &\leq K \int_0^{|t^*|} |u(s) - v(s)| ds \\ &\leq Ka \max_{[-a, a]} |u(t) - v(t)| \\ &\leq Ka \|u - v\|. \end{aligned}$$

Mais $Ka < 1$ alors la dernière inégalité est vérifiée seulement si $\|u - v\| = 0$, ce qui veut dire $u(t) = v(t)$ pour tout $t \in [-a, a]$, d'où l'unicité de la solution. \square

Exemple 1.3. Montrer que le problème à conditions initiales suivant :

$$\begin{cases} x' = |x|^{\frac{1}{2}} \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

possède quatre solutions (passant par le point $(0;0)$) et tracer ces solutions dans le plan $(t - x)$

Solution

On remarque que $(x_1 = 0)$ est une solution globale (définie sur \mathbb{R}).

Deux cas sont possibles :

– Si $x > 0$ alors la première équation dans (1.12) s'écrit

$$\frac{dx}{dt} = x^{\frac{1}{2}} \text{ alors } \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = dt$$

après l'intégration on obtient $2\sqrt{x} = t + c$

$$\text{alors } \sqrt{x} = \frac{t + c}{2} \text{ avec } t \geq -c$$

$$x = \left(\frac{t + c}{2}\right)^2 \text{ avec } t \geq -c.$$

$$x(0) = 0 \text{ implique } \frac{c^2}{4} = 0 \text{ d'où } c = 0$$

$$\text{donc } x_2(t) = \frac{t^2}{4} \text{ sur } [0, +\infty[$$

– Si $x < 0$ alors la première équation dans (1.12) s'écrit

$$\frac{dx}{dt} = (-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{alors } \frac{dx}{(-x)^{\frac{1}{2}}} = dt$$

après l'intégration on obtient

$$-2\sqrt{-x} = t + c$$

$$\text{d'où } \sqrt{-x} = \frac{-t - c}{2} \text{ avec } t \leq -c$$

$$\text{alors } x = -\left(\frac{t + c}{2}\right)^2 \text{ avec } t \leq -c$$

$$x(0) = 0 \text{ implique } \frac{-c^2}{4} = 0 \text{ d'où } c = 0$$

$$\text{donc } x_3(t) = -\frac{t^2}{4} \text{ sur }]-\infty, 0].$$

On construit la quatrième solution x_4 de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_4 = x_2, & \text{si } t \geq 0 \\ x_4 = x_3, & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

il est clair que x_4 est différentiable sur \mathbb{R} et vérifie (1.12).

1.3 Dépendance aux conditions initiales et aux paramètres

Dans cette section nous allons étudier la dépendance de la solution du problème de Cauchy (1.13) aux conditions initiales y et aux paramètres $\mu \in R^m$ (i.e étudier la différentiabilité de la solution $u(t, x_0, \mu)$ par rapport à y et à μ)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \mu) \\ x(0) = y \end{cases} \quad (1.13)$$

Lemme 1.10. (Gronwall) *Supposons que $g(t)$ est une fonction continue positive et satisfaisant*

$$g(t) \leq C + K \int_0^t g(s) ds$$

pour tout $t \in [0, a]$ telle que C et K sont des constantes positives. Alors pour tout $t \in [0, a]$,

$$g(t) \leq Ce^{Kt}$$

Démonstration. Soit $G(t) = C + K \int_0^t g(s) ds$ pour $t \in [0, a]$. Clairement $G(t) \geq g(t)$ et $G(t) > 0$ pour tout $t \in [0, a]$. Alors $G'(t) = Kg(t)$ d'où

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{Kg(t)}{G(t)} \leq \frac{KG(t)}{G(t)} = K$$

pour tout $t \in [0, a]$. Donc

$$\frac{d}{dt} \ln(G(t)) \leq K$$

et après intégration

$$\ln(G(t)) \leq Kt + \ln(G(0))$$

ou

$$G(t) \leq G(0)e^{Kt}$$

pour tout $t \in [0, a]$, ce qui implique

$$g(t) \leq Ce^{Kt}$$

pour tout $t \in [0, a]$. □

Théorème 1.11. (*Dépendance aux conditions initiales*)

Soit E un ouvert de R^n contenant x_0 et supposons que $f \in C^1(E)$. Alors il existe $a > 0$ et $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in N_\delta(x_0)$ le problème à condition initiale

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = y \end{cases} \quad (1.14)$$

admet une solution unique $u(t, y)$ avec $u \in C^1(G)$ et $G = [-a, a] \times N_\delta(x_0) \subset R^{n+1}$ de plus pour chaque $y \in N_\delta(x_0)$, $u(t, y)$ est deux fois continument différentiable par rapport à $t \in [-a, a]$.

Démonstration. La démonstration de l'existence et l'unicité est analogue à la démonstration du théorème (1.9).

Si $u(t, y)$ est la solution de (1.14) sur $G = [-a, a] \times N_\delta(x_0) \subset R^{n+1}$ alors

$$\dot{x}(t, y) = f(x(t, y))$$

et comme $f \in C^1(E)$ alors $f(x(t, y))$ est différentiable par rapport à t et on a :

$$\ddot{x}(t, y) = Df(x(t, y))\dot{x}(t, y)$$

pour tout $(t, y) \in G$, d'où $u(t, y)$ est deux fois continument différentiable par rapport à $t \in [-a, a]$.

Maintenant nous allons démontrer que la solution $u(t, y)$ est continument différentiable par rapport à y .

Fixons $y_0 \in N_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ et choisissons $h \in R^n$ tel que $|h| < \frac{\delta}{2}$. Donc $y_0 + h \in N_\delta(x_0)$. Considérons $u(t, y_0)$ et $u(t, y_0 + h)$ les deux solutions du problème (1.14) aux conditions initiales $y = y_0$ et $y = y_0 + h$ respectivement. On a :

$$\begin{aligned} |u(t, y_0 + h) - u(t, y_0)| &\leq |h| + \int_0^t |f(u(s, y_0 + h)) - f(u(s, y_0))| ds \\ &\leq |h| + K \int_0^t |u(s, y_0 + h) - u(s, y_0)| ds \end{aligned}$$

pour tout $t \in [-a, a]$. Alors d'après le lemme de Gronwall

$$|u(t, y_0 + h) - u(t, y_0)| < |h|e^{K|t|} \quad (1.15)$$

pour tout $t \in [-a, a]$. Notons $\Phi(t, y_0)$ la matrice fondamentale des solutions du problème

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = A(t, y_0)\Phi \\ \Phi(0) = I \end{cases} \quad (1.16)$$

avec $A(t, y_0) = Df(u(t, y_0))$ et I la matrice identité. Il est clair que $\Phi(t, y_0)$ est unique et continue sur un intervalle $[-a, a]$ comme solution du problème (1.16). Le développement de Taylor d'ordre 1 de la fonction f au voisinage de u_0 donne

$$f(u) - f(u_0) = Df(u_0)(u - u_0) + R(u - u_0)$$

avec $\frac{|R(u - u_0)|}{|u - u_0|} \rightarrow 0$ lorsque $|u - u_0| \rightarrow 0$ donc

$$\begin{aligned} |u(t, y_0 + h) - u(t, y_0) - \Phi(t, y_0)h| &\leq \int_0^t |f(u(s, y_0 + h)) - f(u(s, y_0)) - Df(u(s, y_0))\Phi(t, y_0)h| ds \\ &\leq \int_0^t \|Df(u(s, y_0))\| |u(s, y_0 + h) - u(s, y_0) - \Phi(t, y_0)h| ds \\ &\quad + \int_0^t |R(u(s, y_0 + h) - u(s, y_0))| ds. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Comme $\frac{|R(u - u_0)|}{|u - u_0|} \rightarrow 0$ lorsque $|u - u_0| \rightarrow 0$ et $u(s, y)$ continue sur G alors pour tout $\epsilon_0 > 0$ il existe $\delta_0 > 0$ tel que $|h| < \delta_0$ implique :

$$|R(u(s, y_0 + h) - u(s, y_0))| < \epsilon_0 |u(s, y_0 + h) - u(s, y_0)| \text{ pour tout } t \in [-a, a].$$

Posons

$$g(t) = |u(s, y_0 + h) - u(s, y_0) - \Phi(t, y_0)h|$$

alors d'après (1.15) et (1.17) pour tout $t \in [-a, a]$, $y_0 \in N_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ et $|h| < \min(\frac{\delta}{2}, \delta_0)$ on a :

$$g(t) \leq M_1 \int_0^t g(s) ds + \epsilon_0 |h| a e^{Ka}$$

avec $M_1 = \sup_{x \in N_{\frac{\delta}{2}}(x_0)} \|Df(x)\|$.

Alors d'après le lemme de Gronwall pour tout $\epsilon_0 > 0$ on a

$$g(t) \leq \epsilon_0 |h| a e^{aK} e^{aM_1} = \epsilon_0 |h| a e^{a(K+M_1)}$$

pour tout $t \in [-a, a]$ et $|h| < \min(\frac{\delta}{2}, \delta_0)$. Donc

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|u(s, y_0 + h) - u(s, y_0) - \Phi(t, y_0)h|}{|h|} = 0$$

uniformément pour tout $t \in [-a, a]$. Alors d'après la définition de la dérivée de u par rapport à y on a

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t, y_0) = \Phi(t, y_0) \quad (1.18)$$

pour tout $t \in [-a, a]$, et comme $\Phi(t, y_0)$ est continue sur $[-a, a] \times N_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ alors u est continument différentiable par rapport à y sur $[-a, a] \times N_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$. \square

Corollaire 1.12. *Sous les mêmes hypothèses du théorème précédent*

$$\Phi(t, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(t, y)$$

pour tout $t \in [-a, a]$ et $y \in N_{\delta}(x_0)$ si et seulement si $\Phi(t, y)$ est la matrice fondamentale des solutions du problème

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = Df(u(t, y))\Phi \\ \Phi(0, y) = I \end{cases} \quad (1.19)$$

pour tout $t \in [-a, a]$ et $y \in N_{\delta}(x_0)$.

Remarque 1.13. - De la même manière si $f \in C^k(E)$, alors la solution $u(t, y)$ du problème (1.13) est de classe $C^k(G)$. Et si $f(x)$ est une fonction analytique pour $x \in E$ alors $u(t, y)$ est analytique à l'intérieur de G .

Exemple 1.4. *Concédons le problème (1.14) et supposons que x_0 est un point d'équilibre alors*

$$\Phi(t, x_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(t, y)|_{y=x_0}$$

satisfis

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = Df(x_0)\Phi \\ \Phi(0, x_0) = I \end{cases}$$

d'où

$$\Phi(t, x_0) = e^{Df(x_0)t}.$$

Théorème 1.14. (*Dépendance aux paramètres*)

Soit E un ouvert de R^{n+m} contenant (x_0, μ_0) et supposons que $f \in C^1(E)$. Alors il existe $a > 0$ et $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in N_\delta(x_0)$ et $\mu \in N_\delta(\mu_0)$ le problème aux conditions initiales

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \mu) \\ x(0) = y \end{cases} \quad (1.20)$$

admet une solution unique $u(t, y, \mu)$ avec $u \in C^1(G)$ et $G = [-a, a] \times N_\delta(x_0) \times N_\delta(\mu_0)$.

Ce théorème ressort directement du théorème précédant en remplaçant les vecteurs x_0, x, \dot{x} et y par $(x_0, \mu_0), (x, \mu), (\dot{x}, 0)$ et (y, μ) respectivement.

Chapitre 2

Systèmes différentiels linéaires

De nombreux phénomènes naturels peuvent se modéliser en première approximation par des systèmes différentiels linéaires. D'autre part on sait résoudre complètement les systèmes linéaires à coefficients constants. Ceci a donné une grande importance pratique à de tels systèmes.

2.1 Généralités

Un système différentiel linéaire du premier ordre dans R^n est une équation de la forme

$$\dot{x} = A(t)x + B(t) \tag{2.1}$$

où $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in R^n$ est la fonction inconnue

$A(t) = (a_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(R)$ et $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n(t) \end{pmatrix} \in R^n$ sont des fonctions

continues données.

Théorème 2.1. *Si la fonction matricielle A et la fonction vectorielle B sont continues sur un intervalle I alors le problème aux conditions initiales*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

avec $t_0 \in I$ et x_0 est un vecteur constant, admet une solution unique sur tout l'intervalle I .

Pour la démonstration il suffit de voir que la fonction $F(t, x) = A(t)x + B(t)$ est continue sur I est lipschitzienne de rapport $K = \|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$.

Pour résoudre le système non-homogène (2.2) on a besoin d'abord de résoudre le système homogène associé.

2.1.1 Cas d'un système homogène $\dot{x} = A(t)x$

Concédons le système homogène associé au système (2.2)

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

Soit \mathbf{S} l'ensemble des solutions maximales. Alors pour tout $x, y \in \mathbf{S}$ et tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ on a $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in \mathbf{S}$, donc \mathbf{S} est un sous espace vectoriel.

Corollaire 2.2. *L'ensemble \mathbf{S} des solutions maximales est un sous espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{R} .*

2.1.2 Cas d'un système non-homogène $\dot{x} = A(t)x + B(t)$

Revenons au système plus général (2.2), il existe au moins une solution maximale y . Si x est une solution quelconque, alors $z = x - y$ satisfait l'équation homogène (2.3), et réciproquement. Par conséquent, l'ensemble des solutions maximales est donné par

$$y + \mathbf{S} = \{y + z; z \in \mathbf{S}\},$$

où \mathbf{S} est l'ensemble des solutions maximales de l'équation homogène (2.3) associée. L'ensemble $y + \mathbf{S}$ des solutions maximales de (2.2) est un translaté de \mathbf{S} , c'est donc un espace affine de dimension n sur \mathbb{R} , admettant \mathbf{S} comme direction vectorielle.

2.2 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

2.2.1 Le cas homogène

Concédons le système homogène à coefficients constants

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Utilisant les itérations de Picard (1.7) on obtient

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 \\ x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t Ax_0(s)ds = x_0 + Ax_0 \int_0^t ds = x_0 + tAx_0 \\ x_2(t) &= x_0 + \int_0^t Ax_1(s)ds = x_0 + Ax_0 \int_0^t ds + A^2x_0 \int_0^t sds = x_0 + tAx_0 + \frac{t^2}{2}A^2x_0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Par induction

$$x_m(t) = \sum_{i=0}^m \frac{t^i}{i!} A^i x_0.$$

passant à la limite on obtient

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x_m(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{t^i}{i!} A^i x_0.$$

Dans le cas unidimensionnel ($n = 1$) cette série n'est autre que la fonction exponentielle donc nous écrivons

$$x(t) = \exp(tA)x_0$$

et on définit la matrice exponentielle par

$$\exp(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} A^i.$$

Nous avons déjà présenté cette matrice en détail (au niveau L3 [10]).

Lemme 2.3. *Soit A une matrice carrée, alors*

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}.$$

Démonstration. Comme A commute avec elle même alors on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{At} \frac{e^{Ah} - I}{h} \\ &= e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(A + \frac{A^2 h}{2!} + \dots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right) \\ &= e^{At} \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \left(A + \frac{A^2 h}{2!} + \dots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right) \quad (2.6) \\ &= A e^{At}, \end{aligned}$$

nous avons permuté les limites dans la relation (2.6) car la convergence de la série est uniforme. \square

Théorème 2.4. *Soit A une matrice carrée. Alors pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ donné le problème aux conditions initiales (2.4) admet une solution unique donnée par*

$$x(t) = e^{At} x_0.$$

Démonstration. \Rightarrow) D'après le lemme (2.3) si $x(t) = e^{At} x_0$ alors $x'(t) = A e^{At} x_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x(0) = I x_0 = x_0$. Donc $x(t) = e^{At} x_0$ est solution de (2.4)
 \Leftarrow) Supposons que $x(t)$ est une solution de (2.4) et posons $y(t) = e^{-At} x(t)$, alors d'après le lemme (2.3) on a

$$\begin{aligned} y'(t) &= -A e^{-At} x(t) + e^{-At} x'(t) \\ &= -A e^{-At} x(t) + e^{-At} A x(t) \\ &= 0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ (car } A \text{ et } e^{-At} \text{ commutent)} \end{aligned}$$

donc $y(t)$ est constant par suite $y(t) = y(0) = x(0)$.

Alors toute solution de (2.4) est donnée par

$$x(t) = e^{At} y(t) = e^{At} x_0$$

□

Exemple 2.1. Résoudre le problème

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\text{avec } A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rappel

$$e^{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}} = e^a \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}} = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Le cas non-homogène

Considérons le système non-homogène à coefficients constants

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(t) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.8)$$

avec A une matrice $(n \times n)$ et $B(t)$ une fonction vectorielle continue

Définition 2.5. Soit le système homogène associé à (2.8)

$$\dot{x} = Ax. \quad (2.9)$$

Toute fonction matricielle $(n \times n)$ non-singulière $\Phi(t)$, satisfaisant $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ est appelée matrice fondamentale des solutions du système homogène (2.9).

Remarque 2.6. La fonction $\Phi(t) = e^{At}$ est une matrice fondamentale de (2.9) satisfaisant $\Phi(0) = I$. De plus toute matrice fondamentale $\Phi(t)$ de (2.9) est donnée

par :

$$\Phi(t) = e^{At}C$$

avec C une matrice non-singulière.

Théorème 2.7. Si $\Phi(t)$ est une matrice fondamentale de (2.9) alors l'unique solution du système linéaire non-homogène (2.8) est donnée par :

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)B(s)ds. \quad (2.10)$$

Démonstration. Supposons que $x(t)$ soit donnée par (2.10) alors

$$x'(t) = \Phi'(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)B(t) + \int_0^t \Phi'(t)\Phi^{-1}(s)B(s)ds.$$

et comme $\Phi(t)$ est une matrice fondamentale de (2.9), il en résulte que $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ d'où

$$\begin{aligned} x'(t) &= A \left[\Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)B(s)ds \right] + B(t) \\ &= Ax(t) + B(t), \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. □

Remarque 2.8. Avec $\Phi(t) = e^{At}$ la solution du système linéaire non-homogène (2.8) est donnée par :

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)ds$$

Exemple Résoudre le problème d'oscillateur harmonique forcé

$$\ddot{x} + x = f(t). \quad (2.11)$$

cette équation se ramène au système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + f(t) \end{cases} \quad (2.12)$$

qui s'écrit sous forme matricielle $\dot{x} = Ax + B(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

on a $e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ et $e^{-At} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ donc la solution du système avec la condition initiale $x(0) = x_0$ est

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)ds \\ &= e^{At}X_0 + \int_0^t \begin{pmatrix} f(s)\sin(s-t) \\ f(s)\cos(t-s) \end{pmatrix} ds \end{aligned} \quad (2.13)$$

donc la solution de l'équation (2.11) est $x(t) = -x_1(t) = x(0)\cos(t) - \dot{x}(0)\sin(t) - \int_0^t f(s)\sin(s-t)ds$.

2.3 Systèmes linéaires dans \mathbb{R}^2

Dans cette section nous discutons les différents portraits de phase possibles dans le plan \mathbb{R}^2 pour le système linéaire plan

$$\dot{x} = Ax \quad (2.14)$$

avec $x \in \mathbb{R}^2$ et A une matrice carré (2×2). Pour cela on s'intéresse dans un premier temps au système

$$\dot{y} = By \quad (2.15)$$

avec $B = P^{-1}AP$ (B a l'une des formes $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ou

$$B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}).$$

Le portrait de phase de (2.14) est alors obtenu à partir du portrait de phase de (2.15) en utilisant la transformation linéaire des coordonnées $x = Py$.

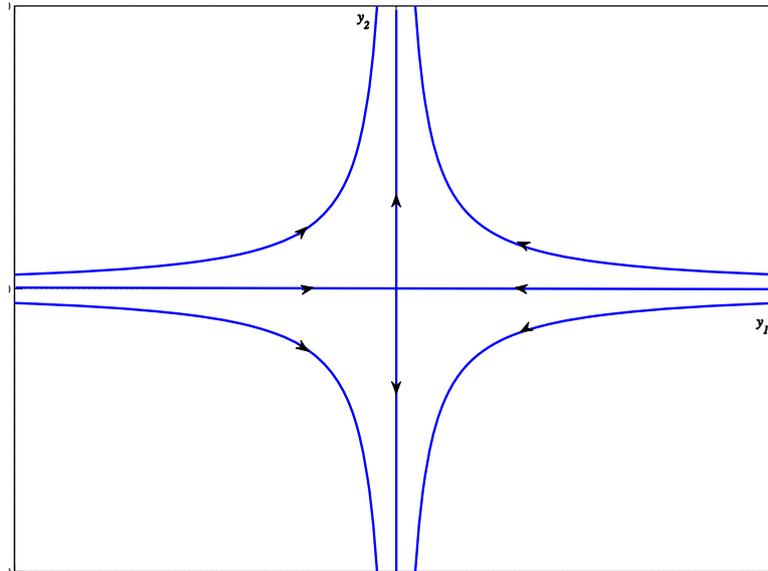


FIGURE 2.1: Point selle (col)

Cas 1 : Valeurs propres réelles de signes opposés

Soit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda < 0 < \mu$.

Dans ce cas la solution de (2.15) avec la condition initiale $y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ est donnée par

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} y_0. \quad (2.16)$$

Alors $y_1(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ et $y_2(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow -\infty$ l'origine est appelé point selle (col).

En éliminant t de y_1 et y_2 on obtient $y_2 = \frac{c}{|y_1|^\alpha}$ avec $c = c_2|c_1|^\alpha$ et $\alpha = -\frac{\mu}{\lambda} > 0$.

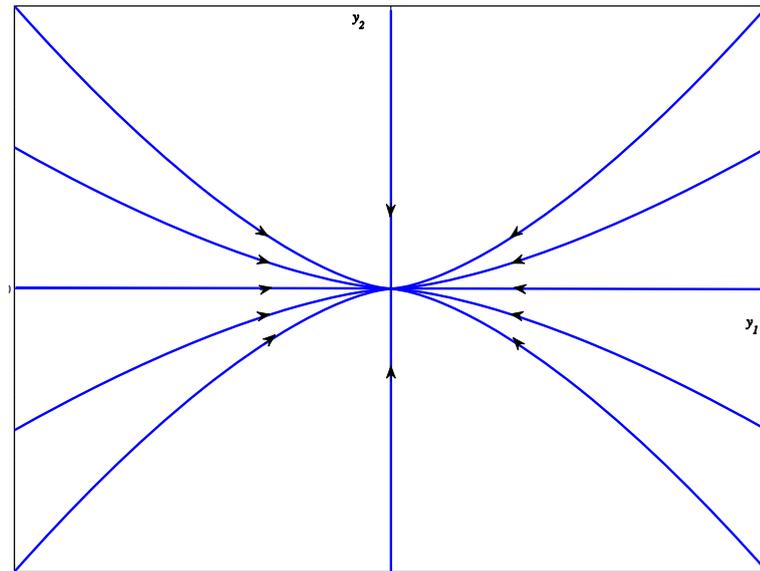
La figure (2.1) illustre ce portrait de phase (si $\mu < 0 < \lambda$ les flèches seront inversés). Le portrait de phase de (2.14) est linéairement équivalent au portrait de phase de (2.15).

Cas 2 : Différentes valeurs propres réelles de mêmes signes

Soit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\mu < \lambda < 0$.

La solution de (2.15) est donnée par (2.16).

Alors $y(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ l'origine est appelé nœud stable.

FIGURE 2.2: Nœud stable $\mu < \lambda < 0$.

En éliminant t de y_1 et y_2 on obtient $y_2 = c|y_1|^\alpha$ avec $c = \frac{c_2}{|c_1|^\alpha}$ et $\alpha = \frac{\mu}{\lambda} > 1$.

La figure (2.2) illustre ce portrait de phase (si $\lambda < \mu < 0$ les axes seront permutés).

Si $\mu, \lambda > 0$ les flèches seront inversés, dans ce cas l'origine est appelé nœud instable.

Le portrait de phase de (2.14) est linéairement équivalent au portrait de phase de (2.15).

Cas 3 : Valeurs propres réelles égales

On distingue deux cas

a) Deux vecteurs propres indépendants

Soit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\mu = \lambda < 0$.

La solution de (2.15) avec la condition initiale $y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ est donnée par

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} y_0. \quad (2.17)$$

Alors $y(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ l'origine est appelée nœud propre stable.

En éliminant t de y_1 et y_2 on obtient $y_2 = c|y_1|$ avec $c = \frac{c_2}{|c_1|}$.

La figure (2.3) illustre ce portrait de phase (si $\lambda = \mu > 0$ les flèches seront inversées, dans ce cas l'origine est appelée nœud propre instable. Le portrait de phase de (2.14) est linéairement équivalent au portrait de phase de (2.15)

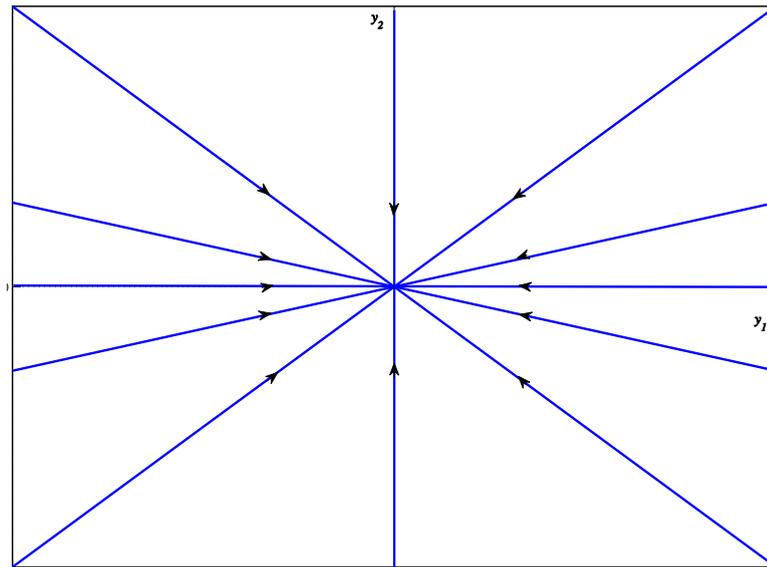


FIGURE 2.3: Nœud propre stable $\mu = \lambda < 0$. avec deux vecteurs propres indépendants

b) Un seul vecteur propre indépendant

Soit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\mu = \lambda < 0$.

La solution de (2.15) avec la condition initiale $y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ est donnée par

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} y_0. \quad (2.18)$$

Alors $y(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ l'origine est appelée nœud impropre stable.

La figure (2.4) illustre ce portrait de phase (si $\lambda = \mu > 0$ les flèches seront inversées, dans ce cas l'origine est appelée nœud impropre instable. Le portrait de phase de (2.14) est linéairement équivalent au portrait de phase de (2.15)

Cas 4 : Valeurs propres complexes

Soit $B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a < 0$.

Introduisant les coordonnées polaires r, θ définis par

$$r^2 = y_1^2 + y_2^2, \quad \tan(\theta) = \frac{y_2}{y_1}$$

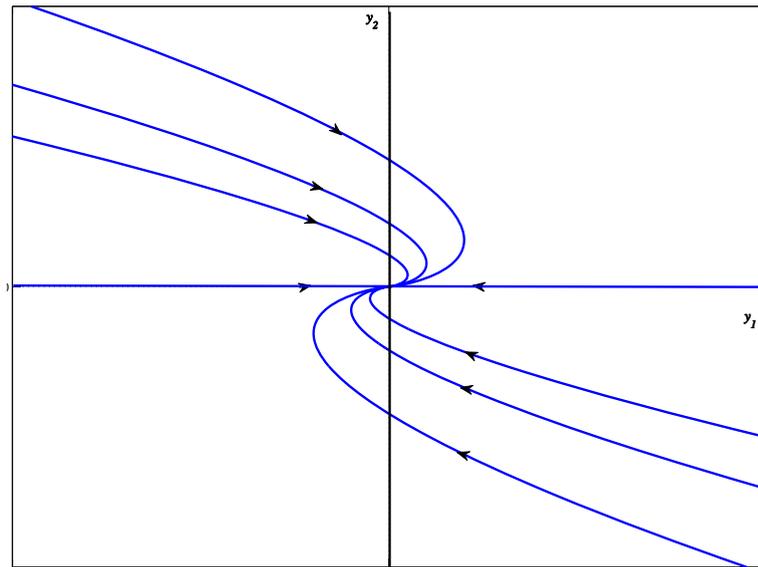


FIGURE 2.4: Nœud impropre stable $\mu = \lambda < 0$, avec un seul vecteur propre indépendant

et dérivant ces équations, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \dot{r} = ar \\ \dot{\theta} = b \end{cases} \quad (2.19)$$

d'où la solution

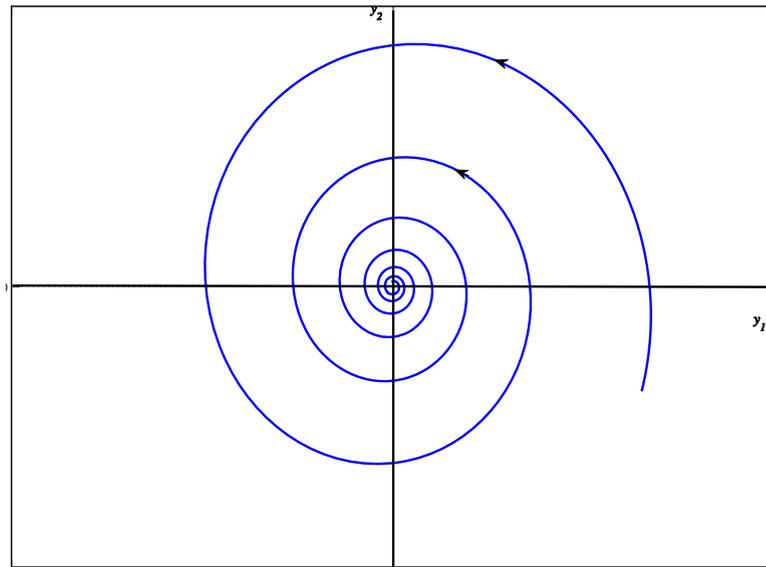
$$\begin{cases} r = r_0 e^{at} \\ \theta = bt + \theta_0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Alors $r(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ et θ augmente lorsque t augmente si $b > 0$, et diminue lorsque t augmente si $b < 0$. Donc les trajectoires s'approchent de l'origine en spirale, dans ce cas l'origine est appelée foyer stable.

La figure (2.5) illustre ce portrait de phase (si $a > 0$ les flèches seront inversés, dans ce cas l'origine est appelée foyer instable). Le portrait de phase de (2.14) est linéairement équivalent au portrait de phase de (2.15).

Cas 5 : Valeurs propres imaginaires pures

Dans ce cas on suppose $a = 0$ et on procède de la même manière comme dans le cas 4. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$

FIGURE 2.5: Foyer stable, $a < 0$. et $b > 0$.

Introduisant les coordonnées polaires r, θ on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = b \end{cases} \quad (2.21)$$

d'où la solution

$$\begin{cases} r = r_0 \\ \theta = bt + \theta_0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Alors $r(t) = \text{constante}$ et θ augmente lorsque t augmente si $b > 0$ et diminue lorsque t augmente si $b < 0$. Donc les trajectoires sont des cercles centrés à l'origine, dans ce cas l'origine est appelée centre.

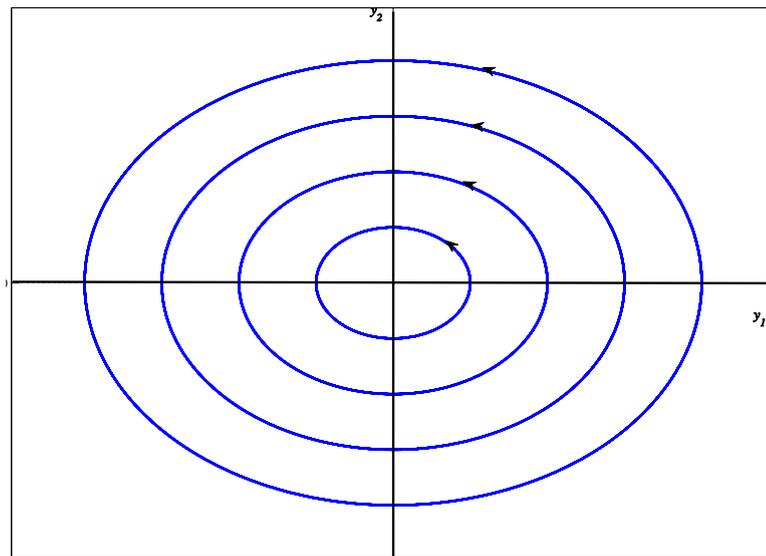
La figure (2.6) illustre ce portrait de phase. Le portrait de phase de (2.14) est linéairement équivalent au portrait de phase de (2.15)

Exemple 2.2. (Système linéaire avec un centre à l'origine)

Considérons le système (2.14) avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de A sont $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ avec les vecteurs propres $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'où $B = P^{-1}AP =$

FIGURE 2.6: Centre à l'origine, $b > 0$.

$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. La solution est :

$$\begin{aligned} x(t) &= P \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} P^{-1} x_0 \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2t) & -2\sin(2t) \\ \frac{1}{2}\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} x_0 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 \cos(2t) - 2c_2 \sin(2t) \\ x_2(t) = \frac{1}{2}c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t) \end{cases} .$$

La solution vérifie

$$x_1^2(t) + 4x_2^2(t) = c_1^2 + 4c_2^2, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Alors les trajectoires résident dans des ellipses.

Chapitre 3

Notions de stabilité

La question de la stabilité se pose de la façon suivante :

Si on écarte le système de sa position d'équilibre y reviendra-t-il ? ou bien une petite perturbation, qui éloigne le système légèrement de son régime stationnaire peut avoir des conséquences importantes et être amplifiée au cours du temps ?

Considérons le système autonome suivant

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.1}$$

tel que $f \in C^1(E)$ et E un ouvert de \mathbb{R}^n .

Un point a dans E vérifiant $f(a) = 0$ est appelé point d'équilibre ou point critique du système (3.1).

Les points critiques correspondent aux solutions constantes du système différentiel. Nous utilisons la notation $\phi(t, x_0)$ pour noter l'unique solution $x(t)$ de (3.1) qui satisfait $x(0) = x_0$.

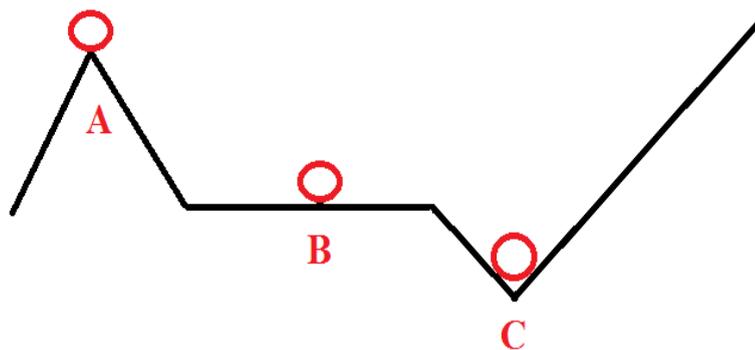


FIGURE 3.1: A) Instable B) localement stable C) Asymptotiquement stable.

L'application paramétrée $\phi_t = \phi(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelée flot du système (3.1). Une propriété importante des orbites est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 3.1. (*Propriété des semi-groupes*)

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et (α, ω) l'intervalle maximal d'existence de $\phi(t, x_0)$.

Alors

$$\phi(t + \tau, x_0) = \phi(t, \phi(\tau, x_0)),$$

pour $t, \tau, t + \tau \in (\alpha, \omega)$.

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et (α, ω) l'intervalle maximal d'existence de $\phi(t, x_0)$. Supposons que $t, \tau, t + \tau \in (\alpha, \omega)$.

La fonction $\psi(t) = \phi(t + \tau, x_0)$ est solution de (3.1) sur $(\alpha - \tau, \omega - \tau)$ (voir théorème (3.4) dans [2]) mais $\psi(\cdot)$ et $\phi(\cdot, \phi(\tau, x_0))$ sont des solutions de (3.1) vérifiant la même condition initial en $t = 0$.

Par l'unicité de la solution on en déduit que

$$\psi(t) = \phi(t + \tau, x_0) = \phi(t, \phi(\tau, x_0)),$$

□

Définition 3.2. (Stabilité locale)

- Un point d'équilibre a de (3.1) est stable au sens de Lyapunov si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in E$ vérifiant $\|x - a\| \leq \eta$, on a $\|\phi(t, x) - a\| \leq \epsilon$ pour tout $t \geq 0$.
- Un point d'équilibre a de (3.1) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov s'il est stable au sens de Lyapunov et de plus pour tout x suffisamment proche de a on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) = a.$$

Maintenant nous présentons deux méthodes pour étudier la stabilité d'un système non-linéaire

- Méthode indirecte basée sur la linéarisation.

- Méthode directe basée sur l'utilisation d'une fonction appelée fonction de Lyapunov.

3.1 Méthode indirecte (Linéarisation)

Le point critique de (3.1) se ramène à l'origine ($f(0) = 0$) par le changement de variable ($x = x - a$) et le développement de Taylor de $f(x)$ autour de $x = 0$ donne

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x) + \dots$$

Lorsque x est très proche de 0 les termes non-linéaires devient négligeables devant le terme linéaire et la méthode indirecte de Lyapunov pour étudier la stabilité autour du point d'équilibre 0, consiste à étudier le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \tag{3.2}$$

avec

$$A = Df(0) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{array} \right)_{x=0}$$

la matrice Jacobienne de f en 0. Le système (3.2) s'appelle le linéarisé du système non-linéaire (3.1) au point d'équilibre 0.

Définition 3.3. Un point d'équilibre a de (3.1) est dit point hyperbolique si aucune valeur propre de la matrice $A = Df(a)$ n'a la partie réelle nulle.

Définition 3.4. Un point d'équilibre a de (3.1) est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(a)$ ont les parties réelles négatives, il est appelé source si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(a)$ ont les parties réelles positives et il est appelé point selle (col) si en moins une valeurs propres de la matrice $A = Df(a)$ a la partie réelle positive et en moins une valeurs propre a la partie réelle négative.

Définition 3.5. Deux systèmes autonomes sont dits topologiquement équivalent dans un voisinage de l'origine (ou bien ont la même structure) s'il y a un homéomorphisme H appliquant l'ouvert U contenant l'origine a l'ouvert V contenant l'origine qui transforme les trajectoires du premier système dans U en les trajectoires du deuxième système dans V et préserve leurs orientations via le temps.

Exemple 3.1. *Considérons les deux systèmes linéaires*

$$\dot{x} = Ax \tag{3.3}$$

$$\dot{y} = By \quad (3.4)$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Soit } H(x) = Rx \text{ avec } R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{on a } B = RAR^{-1}.$$

$$\text{Soit } y = H(x) = Rx \text{ ou } x = R^{-1}y \text{ alors}$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= R\dot{x} \\ &= RAx \\ &= RAR^{-1}y \\ &= By, \end{aligned}$$

d'où, si $x(t) = e^{At}x_0$ est la solution du premier système passant par x_0 , alors $y(t) = H(x(t)) = Rx(t) = Re^{At}x_0 = e^{Bt}Rx_0$ est la solution du deuxième système passant par $y_0 = Rx_0$.

L'application $H(x) = Rx$ est une simple rotation de 45° qui est clairement un homéomorphisme.

Théorème 3.6. (Hartman-Grobman)

Soient U, V deux ouverts de \mathbb{R}^n contenant l'origine, soit $f \in C^1(U)$ et ϕ_t le flot du système non-linéaire (3.1). Supposons que l'origine est un point d'équilibre hyperbolique. Alors, il existe un homéomorphisme H de l'ouvert U dans l'ouvert V tel que pour chaque $x_0 \in U$ il y a un intervalle ouvert $I_0 \subset \mathbb{R}$ contenant 0 et pour tout $t \in I_0$

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0)$$

i.e., H applique les trajectoires du système non-linéaire (3.1) vers les trajectoires de son système linéarisé (3.2) et préserve la direction du temps.

Le théorème affirme (sous certaines conditions) que, au voisinage d'un point a tel que $f(a) = 0$, le système non-linéaire (3.1) est équivalent au système linéarisé (3.2) (dans l'énoncé du théorème $a = 0$ mais bien sûr on peut toujours se ramener à ce cas, il suffit de considérer la fonction $x \mapsto f(x + a) - f(a)$).

Démonstration. Voir [1] □

par conséquent nous avons ce corollaire

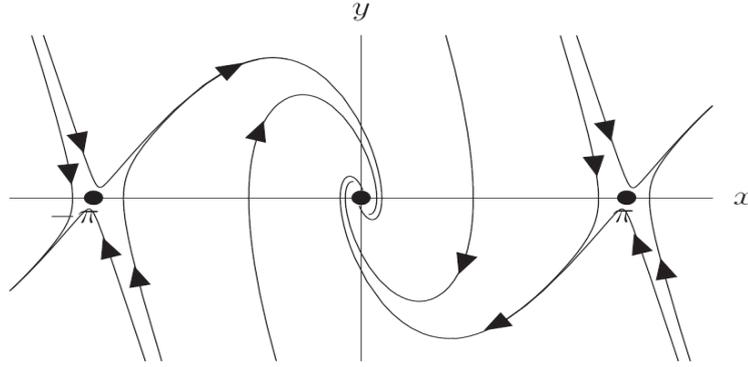


FIGURE 3.2: Portrait de phase du pendule avec frottement

Corollaire 3.7. *Considérons le système (3.1) avec son linéarisé (3.2). Si toutes les valeurs propres de A ont leurs parties réelles négatives alors a est localement asymptotiquement stable.*

S'il existe en moins une valeur propre de A à partie réelle positive, alors a est instable.

Exemple 3.2. *Considérons le système d'un pendule avec frottement*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ry - \frac{g}{L}\sin(x) \end{cases} \quad (3.5)$$

avec les points d'équilibres $(n\pi, 0)$ pour tout entier n . La matrice jacobienne au point $(n\pi, 0)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L}(-1)^{n+1} & -r \end{pmatrix}$$

avec les valeurs propres

$$\lambda_{1,2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + (-1)^{n+1}4g/L}}{2}.$$

Si n est pair alors les deux valeurs propres sont à parties réelles négatives d'où le point d'équilibre est localement asymptotiquement stable.

Si n est impair alors les deux valeurs propres sont réelles de signes opposés

$$\lambda_1 = \frac{-r - \sqrt{r^2 + 4g/L}}{2} < 0 < \lambda_2 = \frac{-r + \sqrt{r^2 + 4g/L}}{2}$$

d'où le point d'équilibre est un point selle (instable). La figure (3.2) illustre le portrait de phase correspondant.

3.2 Méthode direct (fonction de Lyapunov)

La stabilité locale d'un point d'équilibre hyperbolique a de (3.1) est bien déterminée par les signes des parties réelles des valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(a)$.

La stabilité d'un point d'équilibre non-hyperbolique est typiquement plus difficile à déterminer.

Dans cette section nous présentons la seconde méthode de Lyapunov qui est très utile pour déterminer la stabilité d'un point d'équilibre.

Définition 3.8. Si $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles par rapport à chaque composant de x , alors nous définissons le gradient de V comme étant la fonction vectorielle

$$\text{grad}(V(x)) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}(x) \quad \frac{\partial V}{\partial x_2}(x) \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right].$$

Définition 3.9. Soit a un point d'équilibre de (3.1). La fonction continument différentiable V sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant a est appelée fonction de Lyapunov pour le système (3.1) sur U si

$V(a) = 0$, $V(x) > 0$ pour $x \in U - \{a\}$ et

$$\text{grad}(V(x)) \cdot f(x) \leq 0 \tag{3.6}$$

pour $x \in U$.

Si l'inégalité (3.6) est stricte pour $x \in U - \{a\}$, alors V est appelée fonction de Lyapunov stricte pour le système (3.1) sur U .

Notons que (3.6) implique que si $x \in U$, alors

$$\frac{d}{dt}V(\phi(t, x)) = \text{grad}(V(\phi(t, x))) \cdot f(\phi(t, x)) \leq 0$$

le long du trajectoire $\phi(t, x)$ dans U , alors V diminue le long des orbites résidant dans U .

Théorème 3.10. Si V est une fonction de Lyapunov pour le système (3.1) dans l'ouvert U contenant le point d'équilibre a , alors a est stable.

Si V est une fonction de Lyapunov stricte, alors a est asymptotiquement stable.

Démonstration. [2]. Supposons que V est une fonction de Lyapunov pour le système (3.1) dans l'ouvert U contenant le point d'équilibre a .

Fixons $r > 0$ suffisamment petit de tel sort que $B(a, r) \subset U$ et définissons

$$m = \min \{V(x) : |x - a| = r\} > 0$$

Alors

$$W = \left\{x : V(x) < \frac{m}{2}\right\} \cap B(a, r)$$

est un ouvert contenant a . Choisissons $s > 0$ de tel sort que $B(a, s) \subset W$.

Pour $x \in B(a, s)$ on a

$$V(\phi(t, x)) < \frac{m}{2},$$

tan que $\phi(t, x)$ restes dans W car $V(\phi(t, x))$ est décroissante.

Donc $\phi(t, x)$ ne peut pas croiser les frontières de $B(a, r)$ pour $t \geq 0$, alors $\phi(t, x)$ reste dans $B(a, r)$ pour $t \geq 0$, et a est stable.

Maintenant supposons que V est une fonction de Lyapunov stricte pour le système (3.1) dans l'ouvert U contenant le point d'équilibre a , mais a n'est pas asymptotiquement stable.

Alors il existe un $x \in B(a, s)$ tel que $\phi(t, x)$ n'allez pas à a lorsque $t \rightarrow \infty$.

Comme l'orbite est borné il existe $x_1 \neq a$ et une séquence $t_k \rightarrow \infty$ tel que $\phi(t_k, x) \rightarrow x_1$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

Par la propriété des semi-groupes (théorème 3.1) on a

$$\phi(t_k + 1, x) = \phi(1, \phi(t_k, x))$$

et comme $\phi(t, x)$ est continue par rapport à x (théorème 1.11) on a

$$V(\phi((t_k + 1), x)) = V(\phi(1, \phi(t_k, x))) \rightarrow V(\phi(1, x_1)) < V(x_1),$$

alors il existe un entier N pour le quel

$$V(\phi(t_N + 1, x)) < V(x_1)$$

.

Choisissons k tel que $t_k > t_N + 1$. Donc

$$V(x_1) \leq V(\phi(t_k, x)) < V(\phi(t_N + 1, x)),$$

c'est une contradiction. Alors a est asymptotiquement stable.

□

Exemple 3.3. *Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - xy^2 \\ \dot{y} = -y + 3x^2y \end{cases} \quad (3.7)$$

l'origine est un point d'équilibre pour ce système.

Nous proposons la fonction simple $V(x, y) = ax^2 + by^2$, avec a, b deux réels positifs à déterminer.

On a $V(0, 0) = 0$ et $V(x, y) > 0$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.

et $\text{grad}(V(x, y)) \cdot f(x, y) = -2ax^2 - 2ax^2y^2 - 2by^2 + 6bx^2y^2$.

Choisissons $a = 3, b = 1$ pour éliminer deux termes, dans ce cas

$$\text{grad}(V(x, y)) \cdot f(x, y) = -6x^2 - 2y^2 < 0, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0).$$

Alors $V(x, y) = 3x^2 + y^2$ est une fonction de Lyapunov stricte pour le système (3.7) dans \mathbb{R}^2 et le point d'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

3.3 Exemples d'applications

3.3.1 Un modèle de l'écologie

Dans cette section nous considérons un modèle de l'écologie qui décrit deux populations, des espèces proies notés x et des espèces prédateurs notés y .

Supposons que le taux de croissance des proies sans prédateurs est A .

Si les prédateurs sont présents, nous supposons que le taux de croissance est réduit proportionnellement au nombre de prédateurs, à savoir

$$\dot{x} = (A - By)x, \quad A, B > 0. \quad (3.8)$$

De la même façon, s'il n'y pas de proie, les nombres de prédateurs tomberont en décadence à un taux $-D$.

Si les proies sont présentes, nous supposons que l'augmentation du taux est proportionnel au montant des proies, à savoir

$$\dot{y} = (Cx - D)y, \quad C, D > 0. \quad (3.9)$$

Par un changement de variables aprioris on obtient le système appelé équations proie-prédateurs de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 - y)x \\ \dot{y} = \alpha(x - 1)y \end{cases} \quad (3.10)$$

avec $\alpha > 0$.

Le système (3.10) possède deux points d'équilibre $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

On a $\phi(t, (0, y)) = (0, ye^{-\alpha t})$, et $\phi(t, (x, 0)) = (xe^t, 0)$, alors les deux lignes $x = 0$ et $y = 0$ sont invariant par le flot de ce système. En particulier et comme aucune autre solution ne peut traverser ces lignes, le premier quadrant

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$$

est invariant aussi.

Nous allons étudier le comportement des trajectoires dans cette région.

La matrice jacobienne évaluée à l'origine est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

qui possède deux valeurs propres réelles de signes opposés $\lambda_+ = 1$ et $\lambda_- = -\alpha$, donc l'origine est un point selle (col).

La matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre $(1, 1)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

qui possède deux valeurs propres purement imaginaires $\lambda = \pm\sqrt{\alpha}i$ donc on ne peut pas conclure sur la stabilité à partir du système linéarisé.

Éliminant t dans les équations différentielles on obtient une simple équation des orbites sous la forme $y = y(t)$. En effet on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \alpha \frac{(x-1)y}{(1-y)x}.$$

qui est une équation séparable. les solutions de cette équation sont donnés sous la forme implicite

$$f(y) + \alpha f(x) = c, \quad f(x) = x - 1 - \ln(x).$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

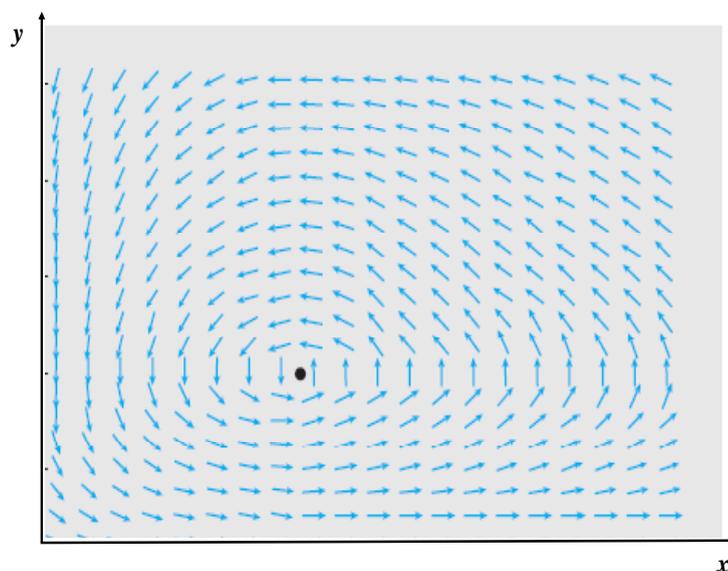
FIGURE 3.3: Tableau des variations de la fonction f .

FIGURE 3.4: Directions du champ de vecteur pour le système proies-prédateurs (3.10).

On ne peut pas écrire une variable en fonction de l'autre en utilisant des fonctions élémentaires mais il est possible de montrer que pour une valeur fixée de c le graphe de l'équation est une courbe fermée encerclant le point critique $(1, 1)$. En effet la fonction f n'est pas inversible, mais c'est une fonction convexe avec un minimum globale en $x = 1$ comme le montre le tableau des variations illustré dans la figure (3.3). Alors le point critique $(1, 1)$ est un centre, et les populations prédateurs et proies varient de manière cyclique. La figure (3.4) illustre les directions du champ de vecteur.

3.3.2 Un modèle électrique

Dans cette section nous concéderons le cas d'une inductance, un condensateur, et une résistance arrangé dans une boucle (Figure. 3.5). Cependant, la résistance considérée est une résistance avec caractéristique arbitraire

$$V_R = R(I_R)$$

Comme il n'y a pas de différence de potentiel en l'absence de courant, il faut avoir $R(0) = 0$.

Pour une résistance classique nous avons $R(I) = RI$, où la résistance R est constante (Loi d'Ohm), mais pour les éléments sophistiqués, comme les semi-conducteurs, la relation est plus complexe.

par exemple une diode laisse passer le courant dans une seule direction.

La loi de Kirchhoff donne

$$I_R = I_L = I_C,$$

et

$$V_R + V_L + V_C = 0.$$

En utilisant les propriétés de nos trois éléments et en éliminant, par exemple, I_R, I_C, V_R, V_L on obtient le système

$$\begin{aligned} L\dot{I}_L &= -V_C - R(I_L) \\ C\dot{V}_C &= I_L \end{aligned} \tag{3.11}$$

avec $R(0) = 0$, $L, C > 0$.

En outre, notons que le changement d'énergie dans chaque élément est donnée par IV .

Par la loi de Kirchhoff on a

$$I_R V_R + I_L V_L + I_C V_C = 0,$$

qui s'écrit

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{L}{2} I_L^2 + \frac{C}{2} V_C^2 \right) = -I_R V_R = -I_R R(I_R). \tag{3.12}$$

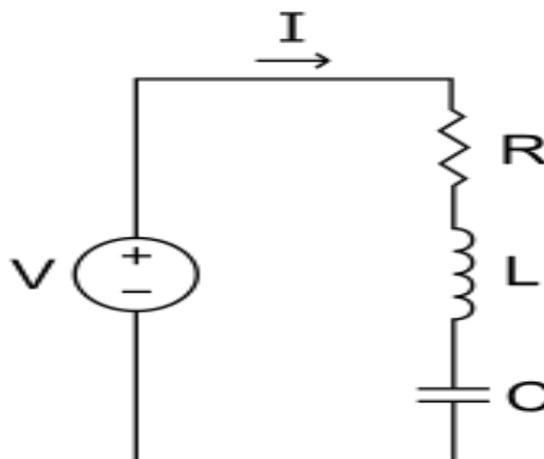


FIGURE 3.5: Circuit RLC

Autrement dit, l'énergie dissipée dans la résistance doit venir de l'inducteur et du condensateur.

Enfin, après mise à l'échelle de V_C et t , on aboutit à l'équation de Liénard

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - f(x) \\ \dot{y} &= -x\end{aligned}\tag{3.13}$$

avec $f(0) = 0$.

L'équation (3.12) devient maintenant

$$\frac{d}{dt}W(x, y) = -xf(x), \quad W(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}.\tag{3.14}$$

Le seul point fixe est $(0, 0)$

Si $xf(x) > 0$ dans un voisinage de 0, alors W est une fonction de Lyapunov stricte et $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

Il est intéressant de considérer la famille des équations de Liénard avec $f_\mu(x) = x^3 - \mu x$.

Pour $\mu \leq 0$ l'origine $(0, 0)$ est stable et devient instable lorsque $\mu > 0$.

Bibliographie

- [1] L. Perko, Differential equations and dynamical systems Texts in applied mathematics, Springer, New York. 2006.
- [2] W. G. Kelley and A. C. Peterson, The theory of differential equations Classical and qualitative, Springer, New York. 2010.
- [3] J. P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, EDP science, France. 2006.
- [4] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, Elementary differential equations and boundary value problems, WILEY, New York. 1996.
- [5] C. Deschamps and A. Warusfel, Mathématiques tout-en-un. Cours et exercices corrigés, Dunod, Paris. 2005.
- [6] H. Dang-Vu and C. Delcarte, Bifurcations et chaos : Introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica, Ellipses. 2000.
- [7] E. R. Scheinerman, Invitation to dynamical systems, Johns Hopkins University. 2000.
- [8] , S. H. Strogatz, Nonlinear dynamics and chaos with applications to physics, biology, chemistry, and engineering, Perseus Books, Reading, Massachusetts, 1994.
- [9] G. Teschl, Ordinary differential equations and dynamical systems, American Mathematical Society, 2011.
- [10] M-S. Abdelouahab, Equations différentielles II, Cours L3, Centre universitaire de Mila, 2011.