1. Les espaces $H^{k,s}(]0,T[\ltimes\mathbb{R}^d)$, $\mathscr{C}^{k,s}(]0,T[\ltimes\mathbb{R}^d)$, $W^\mu(]0,T[\ltimes\mathbb{R}^d)$ sont les espaces étudiés en cours. On écrit que $u = (u_1, u_2, \cdots, u_d) \in H^{k,s}, \mathscr{D}, \cdots$ etc, pour exprimer que toutes les composantes $u_j, (j = 1, \cdots, d)$ sont dans $H^{k,s}(]0,T[\ltimes\mathbb{R}^d)$, $\mathscr{D}(]0,T[\ltimes\mathbb{R}^d), \cdots$.

PARTIE I

Exercice 1.

1. Soit $s \in \mathbb{R}$ tel que $s > \frac{d}{2}$ et soient $r_1, r_2, \cdots, r_k$ des nombres positifs tels que $r_1 + r_2 + \cdots + r_k \leq s$. Soient $u_1, u_2, \cdots, u_k$ des fonctions telles que pour tout $j = 1, \cdots, k$ on ait $u_j \in H^{s-r_j}(\mathbb{R}^d)$.
   Prouver que le produit $u_1.u_2.\cdots.u_k \in H^{s-(r_1+r_2+\cdots+r_k)}(\mathbb{R}^d)$ et qu'il existe une constante $C > 0$,telle que
   $$\|u_1.u_2.\cdots.u_k\|_{s-\sum_{j=1}^k r_j} \leq C\|u_1\|_{r_1}.\|u_2\|_{r_2}.\cdots.\|u_k\|_{r_k}$$
   $s-r_1$ $s-r_2$ $s-r_k$
2. Soit $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^m telle que $F(0) = 0$.
   (1) Prouver qu'il existe une fonction $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^{m-1} telle que pour tout $y \in \mathbb{R}$ on ait $F(y) = yG(y)$.
   (2) Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Posons $R = \|u\|_{L^\infty}$. Prouver que $G \circ u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et que
   $$\|G \circ u\| \leq \|G\|_{L^\infty([-R,+R])}.$$
   (3) Prouver que la fonction $F(u) := F \circ u \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$.
   (4) On suppose maintenant que $s > \frac{d}{2}$ et que $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$.
   Dans le cas où $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ on admettra la formule de composition suivante : Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $0 < |\alpha|$
   $$\partial^\alpha(F(u)) = \sum c_q(\alpha) F^{(q)}(u)\partial^{\alpha_1}u.\partial^{\alpha_2}u.\cdots\partial^{\alpha_q}u,$$
   où la sommation porte sur tous les indices $q = 1, 2, \cdots, |\alpha|$ et tous les multi-indices $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q \in \mathbb{N}^d$ tels que $|\alpha_j| > 0$ et vérifiant $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_q = \alpha$.
   Montrer que $\partial^\alpha F(u) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
   $$\|\partial^\alpha F(u)\|_{L^2} \leq C\|F\|_{C^m([-R,+R])}\left(\|u\|_s + \|u\|_s^{|\alpha|}\right).$$
   En déduire que $F(u) \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et que
   $$\|F(u)\|_s \leq C(\|u\|_s)$$
   où $y \mapsto C(y)$ désigne une fonction continue dans $\mathbb{R}_+$.

PARTIE II

Considérons le problème de Cauchy quasi-linéaire

$$(1)\qquad \begin{cases} L(u)u := \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=1}^d A_j(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} + B(t,x,u) = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

On fait les hypothèses suivantes

Hypothèse 1.

1. Les A_j sont des matrices carrées de type N, à céfficients de classe $\mathscr{C}^\infty$ en $(t,x,y) \in [0,T_0]\mathbb{R}^d\mathbb{R}^N$, bornés et à dérivées bornées sur tout ensemble de type $[0,T_0]\mathbb{R}^d K$, où K est un compact de $\mathbb{R}^N$.
2. Les matrices A_j sont symétriques et réelles.
3. La fonction B est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en $(t,x,y) \in [0,T_0]\mathbb{R}^d\mathbb{R}^N$, à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, bornée et à dérivées bornées sur tout ensemble de type $[0,T_0]\mathbb{R}^d K$, où K est un compact de $\mathbb{R}^N$.
4. Pour tout $(t,x) \in [0,T_0]\mathbb{R}^d$, $A_j(t,x,0) = B(t,x,0) = 0$

Dans tout ce qui suivra nous ferons usage du résultat suivant traitant de la composition de fonctions de régularité Sobolev

Proposition. *Soit $(t,x,y) \mapsto F(t,x,y)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans $[0,T_0]\mathbb{R}^d\mathbb{R}^N)$, bornée ainsi que ses dérivées sur tout ensemble de la forme$[0,T]\mathbb{R}^d K$ où K est un compact de $\mathbb{R}^N$ et $T \leq T_0$ et vérifiant $F(t,x,0) = 0$.*
Alors pour tout $T \leq T_0$ et $\mu \in \mathbb{N}$, $\mu > \frac{d}{2}+1$ et $u = (u_1,u_2,\cdots,u_N) \in W^\mu([0,T]\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^N)$, la fonction $(t,x) \mapsto F(t,x,u(t,x))$ est dans $W^\mu([0,T]\mathbb{R}^d)$ et vérifie

$$\forall R > 0, \quad \|u\|_{W^\mu} \leq R \quad \exists\, C(R) > 0 \quad \|F(.,.,u)_{W^\mu}\| \leq C(R).$$

Le problème Linéarisé

Soit $u_0 \in H^\mu(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^N$ à valeurs réelles et $R > 0$ tel que $\|u_0\|_\mu < R$ et $T \in]0,T_0]$. On pose

$$V_T = \{u \in C^{0,\mu-1}([0,T] \ltimes \mathbb{R}^d,\mathbb{R}^N) \quad \forall t \in [0,T], \quad u(t) \in H^\mu(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^N) \quad \|u(t)\|_\mu < R\}.$$

Soit $u \in V_T$.

1. Vérifier qu'il existe une constante $M(R) > 0$ (qui ne dépend que de R) telle que pour tout $T \in]0,T_0]$ et tout $u \in V_T$ on ait
$$\sum_{j=1}^{d}\|A_j(u)\|_{W^\mu} + \|B(u)\|_{W^\mu} \leq M.$$
2. Considérons le problème de Cauchy linéaire
$$(2) \qquad \begin{cases} L(u)v := \dfrac{\partial v}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_j(t,x,u)\dfrac{\partial v}{\partial x_j} + B(t,x,u) = 0 \\ v_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$
Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $T \in]0,T_0]$ et tout $u \in V_T$, le problème (2) admet une unique solution $v \in C^{0,\mu}([0,T] \ltimes \mathbb{R}^d,\mathbb{R}^N)$ à valeurs réelles, qui vérifie l'estimation : Pour tout $t \in [0,T]$
$$\|v(t)\|_\mu^2 \leq e^{\lambda t}\|u_0\|_\mu^2 + te^{\lambda t}M^2.$$
On notera cette solution $v = S(u)$.
3. Prouver qu'il existe $T_1 \in]0,T_0]$ tel que
$$e^{\lambda T_1}\|u_0\|_\mu^2 + T_1 e^{\lambda T_1}M^2 \leq R^2$$
et que pour tout $u \in V_{T_1}$ on ait $v = S(u) \in V_{T_1}$.

Notations

1. Les espaces $H^{k,s}(]0,T[\times\mathbb{R}^d)$, $\mathscr{C}^{k,s}(]0,T[\times\mathbb{R}^d)$, $W^{\mu}(]0,T[\times\mathbb{R}^d)$ sont les espaces étudiés en cours. On écrit que $u = (u_1, u_2, \cdots, u_d) \in H^{k,s}, \mathscr{D}, \cdots$ etc, pour exprimer que toutes les composantes $u_j, (j = 1, \cdots, d)$ sont dans $H^{k,s}(]0,T[\times\mathbb{R}^d)$, $\mathscr{D}(]0,T[\times\mathbb{R}^d)$, $\cdots$

2. Pour $u = (u_1, u_2, \cdots, u_d) \in \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^d)$ on note $\operatorname{div} u = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$.

3. Pour $p \in \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, on note $\operatorname{grad} p = (\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial p}{\partial x_d})$.

4. Pour $a = (a_1, a_2, \cdots, a_d) \in W^{\mu}$, on note l'opérateur

$$\nabla_a = \sum_{k=1}^{d} a_k \frac{\partial .}{\partial x_k}.$$

Préliminaires

Notant $\hat{\ }$ la transformation de Fourier partielle en x, soit P l'opérateur qui à $u = (u_1, u_2, \cdots, u_d) \in \mathscr{S}'(]0,T[\times\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^d)$ associe $v = (v_1, v_2, \cdots, v_d)$), avec

$$\hat{v}_j(t,\xi) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \hat{u}_k(t,\xi).$$

1. Monter que l'opérateur P est continu de $H^{0,s}$ dans $H^{0,s}$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. Vérifier que $Pu = 0$ si $\operatorname{div} u = 0$, et que $Pu = u$ si $u = \operatorname{grad} g$ où $g \in \mathscr{S}'(]0,T[\times\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$.
2. Montrer que l'on peut écrire $Pu = \operatorname{grad} p$ si p vérifie $\Delta p = \operatorname{div} u$.
3. Montrer que pour $u \in H^{0,s}$ et $v \in H^{0,-s}$ on a

$$< Pu, v >_{H^{0,s}\times H^{0,-s}} = < u, Pv >_{H^{0,s}\times H^{0,-s}} = < Pu, Pv >_{H^{0,s}\times H^{0,-s}}.$$

4. Soit $u = (u_1, u_2, \cdots, u_d) \in H^{0,0}$ tel que $\operatorname{div} u = 0$ et soit $\varphi \in \mathscr{D}(]0,T[\times\mathbb{R}^d)$. Vérifier que

$$< \frac{\partial u}{\partial t}, \operatorname{grad} \varphi >_{\mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^d)\times\mathscr{D}} := \sum_{j=1}^{d} < \frac{\partial u_j}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} >_{\mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{R}^d,\mathbb{C})\times\mathscr{D}} = 0.$$

Partie I

Soit $\mu \in \mathbb{N}$ tel que $\mu > \frac{d}{2} + 1$. On se donne $a = (a_1, a_2, \cdots, a_d) \in W^{\mu}$, à valeurs réelles et vérifiant $\operatorname{div} a = 0$. On considère le système de $(d+1)$ équations à $(d+1)$ inconnues $(u_1, u_2, \cdots, u_d, p) = (u, p)$:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_j}{\partial t} + \nabla_a u_j + \dfrac{\partial p}{\partial x_j} = f_j \quad \text{pour} \quad j = 1, \cdots d, \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

On notera $f = (f_1, f_2, \cdots, f_d)$.

1. (1) En calculant $\operatorname{div} f$, montrer que si (u, p) est solution de (1), on a

$$\operatorname{grad} p = P(f - \nabla_a u) = P(F)$$

où $F = (F_1, F_2, \cdots, F_d)$, avec $F_k = f_k - \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} u_j$.

(2) Montrer pour $\sigma = 0$ et $\sigma = \mu$ que l'on a une estimation :

(2) $$\exists C > 0 \quad \forall u \in H^{0,\sigma} \quad \|P(\nabla_a u)\|_{H^{0,\sigma}} \leq C\|a\|_{W^\mu}\|u\|_{H^{0,\sigma}}.$$

2. Soit $u \in \mathscr{C}^{1,1}$ et p tel que $\operatorname{grad} p \in \mathscr{C}^{0,0}$.

(1) Montrer que $\Re e \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_a u_j(t,x)\overline{u_j(t,x)}dx = 0$

(2) Établir que l'on a des estimations du type :

(3) $$\begin{cases} \|u(t)\|_0 \leq \|u(0)\|_0 + 2\int_0^t \|f(s)\|_0 ds, \\ \|\operatorname{grad} p\|_{H^{0,0}} \leq C\|f\|_{H^{0,0}} + \|a\|_{W^\mu}\|u\|_{H^{0,0}}. \end{cases}$$

(3) Montrer que (3) est encore vrai lorsque $u \in H^{1,1}$ et $\operatorname{grad} p \in H^{0,0}$.

3. Montrer qu'il existe $C > 0$ et $\lambda > 0$ tels que pour tout $u \in H^{1,\mu+1}$ et $\operatorname{grad} p \in H^{0,\mu}$, on ait :

(4) $$\begin{cases} \|u(t)\|_\mu \leq \|u(0)\|_\mu + 2\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\|f(s)\|_\mu ds, \\ \|\operatorname{grad} p\|_{H^{0,\mu}} \leq C\|f\|_{H^{0,\mu}} + \|a\|_{W^\mu}\|u\|_{H^{0,\mu}}. \end{cases}$$

4. σ valant soit 0, soit μ, on se donne $f \in H^{0,\sigma}$, $u \in H^{0,\sigma}$ vérifiant (1).

(1) Montrer que $u \in H^{1,\sigma}$ et $u \in \mathscr{C}^{0,\sigma-\frac{1}{2}}$.

(2) Si de plus, $u(0) \in H^\sigma(\mathbb{R}^d)$, montrer que $u \in \mathscr{C}^{0,\sigma}$ et que l'on a soit l'estimation (3), soit l'estimation (4).

$u \in H^{1,\sigma} \iff u \in H^{0,\sigma}$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in H^{0,\sigma-1}$

$H^{1,\sigma} \hookrightarrow \mathscr{C}^{0,\sigma-\frac{1}{2}}$

Soit $s \in \mathbb{R}$, on dit que $u \in H^{0,s}(]0,T[, \mathbb{R}^d)$

si $u \in \mathcal{S}'_0(]0,T[, \mathbb{R}^d)$ telle que :

$(t,\xi) \mapsto (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(t,\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d_\xi)$

$\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi\right) dT < +\infty$

d'après Fubini

p.p. $t \in]0,T[$ $\quad \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(t,\xi)|^2 < +\infty$

Préliminaires

1. L'opérateur de Fourier $\mathcal{F}$ étant un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ dans lui même, l'opérateur P est bien défini dans $\mathcal{S}'(]0,T[\times\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^d)$ comme opérateur linéaire. Soit $s\in\mathbb{R}$ et $u\in H^{0,s}$, alors $u\in\mathcal{S}'(]0,T[\times\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^d)$ telle que ??

$$\|u\|^2_{H^{0,s}}=\int_0^T\|u(t)\|^2_{H^s}dt=\int_0^T\sum_{j=1}^d\|u_j(t)\|^2_{H^s}dt<+\infty.$$

où pour p.p.t $\in[0,T]$ et $j=1,\cdots d$ $\|u_j(t)\|^2_{H^s}=\int_{\mathbb{R}^d}<\xi>^{2s}|\hat{u}_j(t,\xi)|^2d\xi$ avec $<\xi>=(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$.

En posant $Pu=v$, on estime $<\xi>^s|\hat{v}_j(t,\xi)|\le\sum_{k=1}^d\frac{|\xi_j\xi_k|}{|\xi|^2}<\xi>^s|\hat{u}_k(t,\xi)|\le\sum_{k=1}^d<\xi>^s|\hat{u}_k(t,\xi)|$.

Le second membre de l'inégalité est un élément de $L^2(\mathbb{R}^d)$), par conséquent le premier aussi et en élevant au carré et en intégrant sur $\mathbb{R}^d$ on voit que il existe une constante $C>0$ telle que $\|v_j(t)\|^2_{H^s}\le C^2\|u(t)\|^2_{H^s}$ et en sommant sur tous les $j=1,d$ on obtient

$$\|(Pu)(t)\|^2_{H^s}=\|v(t)\|^2_{H^s}\le dC^2\|u(t)\|^2_{H^s}$$

le second membre étant intégrable sur $[0,T]$ par hypothèse, il vient alors en intégrant sur $[0,T]$

$$\|Pu\|_{H^{0,s}}\le\sqrt{d}C\|u\|_{H^{0,s}}$$

ce qui prouve que l'opérateur linéaire P est continu de $H^{0,s}$ dans $H^{0,s}$.

Pour $u\in\mathcal{S}'(]0,T[\times\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^d)$ et $j=1,d$ remarquons que l'on peut écrire en vertu des propriétés de l'opérateur de Fourier et sa relation avec l'opérateur de dérivation :Pour p.p.t $\in[0,T]$ et p.p$\xi\in\mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}\hat{v}_j(t,\xi)&=\frac{\xi_j}{|\xi|^2}\sum_{k=1}^d\frac{1}{i}i\xi_k\hat{u}_k(t,\xi)=\frac{-i\xi_j}{|\xi|^2}\sum_{k=1}^d\mathcal{F}(\frac{\partial u_k}{\partial x_k})(t,\xi)=\frac{-i\xi_j}{|\xi|^2}\mathcal{F}(\sum_{k=1}^d\frac{\partial u_k}{\partial x_k})(t,\xi)\\&=\frac{-i\xi_j}{|\xi|^2}\mathcal{F}(\operatorname{div}u)(t,\xi)=\frac{-1}{|\xi|^2}\mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial x_j}\operatorname{div}u)(t,\xi).\end{aligned}$$

Il est clair alors que si div u est la distribution nulle alors $\mathcal{F}(Pu)_j=0$ pour tout $j=1,d$ et par l'opérateur de Fourier inverse on obtient que la distribution vectorielle Pu est nulle.

Si $u=\operatorname{grad}g$ où $g\in\mathcal{S}'(]0,T[\times\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ alors pour $k=1,d$ au sens des distributions on a $u_k=\frac{\partial}{\partial x_k}g$ et par l'opérateur de Fourier $\hat{u}_k(t,\xi)=i\xi_k\hat{g}(t,\xi)$ d'où

$$\hat{v}_j(t,\xi)=i\xi_j\frac{\sum_{k=1}^d\xi_k^2}{|\xi|^2}\hat{g}(t,\xi)=i\xi_j\hat{g}(t,\xi)=\mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial x_j}g)(t,\xi)$$

et par l'opérateur de Fourier inverse on obtient que $v_j=\frac{\partial}{\partial x_j}g$ ce qui se traduit par $Pu=\operatorname{grad}g=u\quad(\mathcal{S}')$

2. Si $p\in\mathcal{S}'(]0,T[\times\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ vérifie $\Delta p=\operatorname{div}u\quad(\mathcal{S}')$, alors par l'opérateur de Fourier $\mathcal{F}(\Delta p)(t,\xi)=-|\xi|^2\hat{p}(t,\xi)=\sum_{k=1}^d i\xi_k\hat{u}_k(t,\xi)$ et donc que $\hat{p}(t,\xi)=-\sum_{k=1}^d\frac{i\xi_k}{|\xi|^2}\hat{u}_k(t,\xi)$ ce qui fait que ??

$\mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial x_j}p)(t,\xi) = i\xi_j\hat{p}(t,\xi) = \sum_{k=1}^{d}\frac{\xi_j}{|\xi|^2}\xi_k\hat{u}_k(t,\xi) = \mathcal{F}((Pu)_j)(t,\xi)$. et par l'opérateur de fourier inverse on obtient que $\frac{\partial}{\partial x_j}p(t,\xi) = (Pu)_j$pour chaque indice $j = 1, d$, ce qui prouve que $\mathrm{grad}\, p = Pu$.

3. Soient $u \in H^{0,s}$ et $v \in H^{0,-s}$. Posons $w = Pu$. Nous avons

$$< w, v >_{H^{0,s}\times H^{0,s}} = \sum_{j=1}^{d} < w_j, v_j > = \sum_{j=1}^{d} << \xi >^s \sum_{k=1}^{d}\frac{\xi_j.\xi_k}{|\xi|^2}\hat{u}_k, < \xi >^{-s}\hat{v}_j >_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

En faisant une interversion d'indices j et k et compte tenu des propriétés des intégrales en faisant porter le terme $\frac{\xi_j.\xi_k}{|\xi|^2}$ par $\hat{v}_j$ on obtient

$$< w, v >_{H^{0,s}\times H^{0,-s}} = \sum_{k=1}^{d} << \xi >^s \hat{u}_k, < \xi >^{-s}\sum_{j=1}^{d}\frac{\xi_j.\xi_k}{|\xi|^2}\hat{v}_j >_{L^2(\mathbb{R}^d)} =< u, Pv >_{H^{0,s}\times H^{0,-s}}.$$

Par ailleurs il faut remarquer que la définition de P implique que $P^2 = P \circ P = P$. En effet, si $Pu = v$ dans $\mathcal{S}'$, alors par définition pour $l = 1, d$, nous avons

$$\mathcal{F}(P^2u)_l(t,\xi) = \sum_{j=1}^{d}\frac{\xi_l.\xi_j}{|\xi|^2}\hat{v}_j(t,\xi) = \xi_l\sum_{j=1}^{d}\frac{\xi_j}{|\xi|^2}(\sum_{k=1}^{d}\frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2}\hat{u}_k(t,\xi)) =$$

$$\xi_l\frac{1}{|\xi|^2}\sum_{j=1}^{d}\xi_j^2(\sum_{k=1}^{d}\frac{\xi_k}{|\xi|^2}\hat{u}_k(t,\xi)) = \sum_{k=1}^{d}\frac{\xi_l\xi_k}{|\xi|^2}\hat{u}_k(t,\xi) = \mathcal{F}(Pu)_l(t,\xi).$$

Il s'en suit par l'opérateur de Fourier inverse que $P^2u = Pu \quad (\mathcal{S}')$ d'où $< u, Pv >=< u, P^2v >=< Pu, Pv >$.

4. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[\times\mathbb{R}^d)$ et $u \in H^{0,0}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathrm{div}\, u = 0$. En vertu de la dérivation des distributions nous avons pour chaque $j = 1, d$

$$< \frac{\partial u_j}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} >_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = - < \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}), \varphi >_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}}$$

En sommant sur tous les $j = 1, d$, on a : $\sum_{j=1}^{d} < \frac{\partial u_j}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} >_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = - < \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\, u), \varphi >_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = 0.$

Partie I

Soit (u, p) une solution du problème (1) dans $\mathcal{S}'$.

1. (1) Pour prouver que $\mathrm{grad}\, p = P(f - \nabla_a u)$, il suffit, en vertu de la question 2. des Préliminaires de vérifier que $\Delta p = \mathrm{div}(f - \nabla_a u)$. Comme (u, p) une solution du problème (1) alors $\frac{\partial p}{\partial x_j} = f_j - \frac{\partial u_j}{\partial t} - \nabla_a u_j$.

   En dérivant une seconde fois pa rapport à x_j, il vient : $\frac{\partial^2 p}{\partial x_j^2} = \frac{\partial f_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}) - \frac{\partial}{\partial x_j}\nabla_a u_j$.

   En sommant sur tous les indices $j = 1, d$ on obtient

$$\Delta p = \sum_{j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_j}(f_j - \nabla_a u_j) - \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\mathrm{div}\, u}_{=0} = \mathrm{div}\,(f - \nabla_a u).$$

(2) Pour vérifier que $P(f - \nabla_a u) = P(F)$, il suffit de prouver que $P(f - \nabla_a u - F) = 0$, pour cela, en vertu de la question 1. des Préliminaires de tester $\operatorname{div} w$ où $w = f - \nabla_a u - F$. Nous avons pour chaque $k = 1, d$

$$w_k = f_k - \nabla_a u_k - F_k = -\nabla_a u_k + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} u_j = \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_j} u_j - a_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)$$

En dérivant par rapport à x_j et en sommant ensuite sur tout les $k = 1, d$ il vient :

$$\operatorname{div} w = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{d} u_j \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{div} a + \sum_{k=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial a_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) - \sum_{j=1}^{d} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \operatorname{div} u.$$

Ces trois sommes sont toutes nulles car $\operatorname{div} a = \operatorname{div} u = 0$, d'une part et d'autre part les coefficients de la somme double s'annullent deux à deux car les indices j et k jouent des rôles symétriques.
Comme $\operatorname{div} w = 0$, en vertu de la question 1. des préliminaires $P(w) = 0$ et donc que $P(f - \nabla_a u) = P(F)$.

(3) Du calcul précédent, on peut remarquer que au passage que $w = \nabla_u a - \nabla_a u$. Comme $P(w) = 0$ alors $P(\nabla_a u) = P(\nabla_u a)$.
Pour chaque $k = 1, d$, et pour chaque $t \in [0, T]$ $a_k(t) \in H^\mu(\mathbb{R}^d)$, par conséquent $\dfrac{\partial a_k(t)}{\partial x_j} \in H^{\mu-1}(\mathbb{R}^d)$. Comme $\mu - 1 > \frac{d}{2}$, en vertu des algèbres de Sobolev si $u_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$

alors le terme $\nabla_u a_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} u_j \frac{\partial a_k(t)}{\partial x_j}$ est bien défini dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, et il existe une constante (ne dépendant que de μ et de la dimension d'espace) telle que

$$\|\nabla_u a(t)\| \leq C \|a(t)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^d)} . \|u(t)\|_{H^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^d)}.$$

En élevant au carré et en intégrant en t sur $[0, T]$ et sachant que $\|a\|_{W^\mu} = \sup_{t \in [0,T]} \|a(t)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^d)} < +\infty$, on en déduit que $\|\nabla_u a\|_{H^{0,0}} \leq C \|a\|_{W^\mu} \|u\|_{H^{0,0}}$..
L'opérateur P étant continu de $H^{0,0}$ dans lui même, on conclut qu'il existe une constante positive (encore notée C telle que $\|P(\nabla_a u)\|_{H^{0,0}} = \|P(\nabla_u a)\|_{H^{0,0}} \leq C' \|\nabla_u a\|_{H^{0,0}} \leq C'.C \|a\|_{W^\mu} \|u\|_{H^{0,0}}$.

2. (1) Soit $u \in \mathcal{D}(]0, T[\times\mathbb{R}^d)$. Évaluons pour $t \in [0, T]$, l'expression $D_j = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_a u_j(t, x) \overline{u_j}(t, x) dx$, pour $j = 1, d$.

$$D_j = \sum_{k=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} a_k \overline{u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx = < \sum_{k=1}^{d} a_k \overline{u_j}, \frac{\partial u_j}{\partial x_k} >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = - \sum_{k=1}^{d} < \frac{\partial}{\partial x_k}(a_k \overline{u_j}), u_j >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} =$$

$$- < \operatorname{div} a . \overline{u_j}, u_j >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} - \sum_{k=1}^{d} < a_k \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k}, u_j >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = - \int_{\mathbb{R}^d} a_k \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} u_j dx = -\overline{D_j},$$

puisque $\operatorname{div} a = 0$ et a est à valeurs réelles. Par conséquent $2\Re e(D_j) = 0$.
Si maintenant $u \in \mathcal{C}^{1,1}$, alors pour tout $j = 1, d$ et $k = 1, d$, nous avons $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_k} \in \mathcal{C}^{0,0}$ et $\dfrac{\partial u_j}{\partial t} \in \mathcal{C}^{0,0}$. En particulier pour tout $\sup_{t \in [0,T]} \|u_j(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < +\infty$. Comme $(]0, T[\times\mathbb{R}^d)$ est dense dans $C^{0,1}$, il existe une suite $(u_j^n)_{n \geq 1} \mathcal{D}(]0, T[\times\mathbb{R}^d)$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \sup_{t \in [0,T]} \|u_j^n - u_j(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = 0$. En outre, en vertu des théorèmes des algèbres de

Sobolev, l'opérateur ∇_a est bien défini dans $L^2([0,T] \ltimes \mathbb{R}^d)$ et

$$\|\nabla_a u_j^n - \nabla_a u_j\|_{L^2} \leq C\|a\|_{W^\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|u_j^n - u_j(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

En écrivant ??

$$2\mathfrak{Re} < \nabla_a u_j, u_j >_{L^2} = -2\mathfrak{Re} < \nabla_a(u_j^n - u_j), u_j >_{L^2} + 2\mathfrak{Re} < \nabla_a(u_j^n), u_j >_{L^2} =$$

$$-2\mathfrak{Re} < \nabla_a(u_j^n - u_j), u_j >_{L^2} - 2\mathfrak{Re} < \underbrace{\nabla_a(u_j^n), u_n^j}_{} - u_j >_{L^2} + 2\mathfrak{Re} < \nabla_a(u_j^n), u_j^n >_{L^2}$$

Le dernier terme de la $2^{\text{ème}}$ est nul en vertu de ce qui précède. En prenant le module de l'expression est en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|2\mathfrak{Re} < \nabla_a u_j, u_j >_{L^2}| \leq \|\nabla_a u_j^n - \nabla_a u_j\|_{L^2}\|u_j\|_{L^2} + \|\nabla_a u_j^n\|_{L^2}\|u_j^n - u_j\|_{L^2}.$$

Le second terme tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, il s'en suit que $2\mathfrak{Re} < \nabla_a u_j, u_j >_{L^2} = 0$.

(2) Pour $u \in \mathcal{D}([0,T] \ltimes \mathbb{R}^d)$, nous allons estimer $\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d}$: En utilisant le Théorème de dérivation sous le signe intégral on a

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 2\mathfrak{Re}\sum_{j=1}^{d} < \frac{\partial u_j(t)}{\partial t}, u_j(t) >_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

En utilisant l'équation (1) on écrit, sachant cela a un sens pour des fonctions très régulières que

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 2\mathfrak{Re}\sum_{j=1}^{d} < f_j(t), u_j(t) >_0 - 2\mathfrak{Re}\sum_{j=1}^{d} < \nabla_a u_j(t), u_j(t) >_0 - 2\mathfrak{Re}\sum_{j=1}^{d} < \frac{\partial p(t)}{\partial x_j}, u_j(t) >_0$$

Comme $\operatorname{div} u = 0$,

$$-\sum_{j=1}^{d} < \frac{\partial p(t)}{\partial x_j}, u_j(t) >_0 = +\sum_{j=1}^{d} < p(t), \frac{\partial u_j(t)}{\partial x_j} >_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = < p(t), \operatorname{div} u(t) >_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = 0$$

.

Finalement, grâce à la question 2.(1), on obtient que $\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 2\mathfrak{Re}\sum_{j=1}^{d} < f_j(t), u_j(t) >_0$.

Une utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour les sommes (finies) et ensuite pour les intégrales implique que $\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq 2\|f(t)\|_0\|u(t)\|_0$. En intégrant sur $[0,t]$, on trouve :

$$\|u(t)\|_0^2 - \|u(0)\|_0^2 \leq 2\int_0^t \|f(s)\|_0\|u(s)\|_0 ds,$$

ou encore

$$\|u(t)\|_0 - \|u(0)\|_0 \leq 2\int_0^t \|f(s)\|_0 \frac{\|u(s)\|_0}{\|u(t)\|_0 + \|u(0)\|_0} ds \leq 2\int_0^t \|f(s)\|_0 ds.$$

Par densité- continuité de $\mathcal{D}([0,T] \ltimes \mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{C}^{1,1}$, cette inégalité reste vraie pour $u \in \mathcal{C}^{1,1}$, comme nous l'avons démontré en 2.(1). ??

De même, si (u,p) est une solution du problème (1), où $u \in \mathcal{C}^{1,1}$ et $p \in \mathcal{C}^{0,0}$, alors nous avons vu que $\operatorname{grad} p = P(f - \nabla_a u)$ où $f \in H^{0,0}$. Il vient alors, sachant que l'opérateur P est borné de $H^{0,0}$ dans lui même, et compte tenu de la question 1.(2)

$$\|\operatorname{grad} p\|_{H^{0,0}} \leq C\|f\|_{H^{0,0}} + \|a\|_{W^\infty}\|u\|_{H^{0,0}}.$$

(3) Si $u \in H^{1,1}$ et $\operatorname{grad} p \in H^{0,0}$, alors pour $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in H^{0,0}$ et donc $\nabla_a u_k \in H^{0,0}$ en vertu des algèbres de Soboblev. Par ailleurs, si $\operatorname{grad} p \in H^{0,0}$ alors $f - \nabla_a u \in H^{0,0}$ et sachant que l'opérateur P est continu de $H^{0,0}$ dans lui même p.p $t \in [0,T]$, les fonctions $u(t)$ et $p(t)$

restent dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et par conséquent la première estimation de (3) reste vraie. Quant à la seconde, elle reste vraie également puisque nous avons $\sup_{t\in[0,T]} \|a(t)\|_{H^\mu} < +\infty$.

3. Soit $u \in \mathcal{D}([0,T] \ltimes \mathbb{R}^d)$ et $\operatorname{grad} p \in H^{0,\mu}$. Estimons $\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d}$: En utilisant le Théorème de dérivation sous le signe intégral on a

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{H^\mu(\mathbb{R}^d)} = 2\Re e \sum_{j=1}^d < \frac{\partial u_j(t)}{\partial t}, u_j(t) >_{H^\mu(\mathbb{R}^d)} = 2\Re e \sum_{j=1}^d < f_j(t) - \nabla_a u_j(t) - \frac{\partial p(t)}{\partial x_j}, u_j(t) >_{H^\mu(\mathbb{R}^d)} .$$

Comme $\operatorname{div} u = 0$, et comme précedemment ,

$$-\sum_{j=1}^d < \frac{\partial p(t)}{\partial x_j}, u_j(t) >_{H^\mu(\mathbb{R}^d)} =< p(t), \operatorname{div} u(t) >_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = 0$$

. Il s'en suit que

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 2\Re e \sum_{j=1}^d < f_j(t), u_j(t) >_{H^\mu(\mathbb{R}^d)} - 2\Re e \sum_{j=1}^d < \nabla_a u_j, u_j(t) >_{H^\mu(\mathbb{R}^d)},$$

comme $f \in H^{0,0}$ par l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans l'espace de Hilbert $H^\mu(\mathbb{R}^d)$ il vient que

$$2\Re e \sum_{j=1}^d < f_j(t), u_j(t) >_{H^\mu(\mathbb{R}^d)} \leq 2\|f(t)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d)} . \|u(t)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d)} .$$

Estimons maintenant le terme $2\Re e \sum_{j=1}^d < \nabla_a u_j(t), u_j(t) >_{H^\mu(\mathbb{R}^d)}$. On utilise le fait que $\mu \in \mathbb{N}$ et on écrit

$$< \nabla_a u_j(t), u_j(t) >_{H^\mu(\mathbb{R}^d)} = \sum_{|\alpha|\leq\mu} < \partial^\alpha \nabla_a u_j(t), \partial^\alpha u_j(t) >_0$$

Or $< \partial^\alpha \nabla_a u_j(t), \partial^\alpha u_j(t) >_0 =< \nabla_a \partial^\alpha u_j(t), \partial^\alpha u_j(t) >_0 + < [\partial^\alpha, \nabla_a] u_j(t)], \partial^\alpha u_j(t) >$.
D'après la question 2.(1) de la partie I, nous avons $2\Re e < \nabla_a \partial^\alpha u_j(t), \partial^\alpha u_j(t) >_0 = 0$.
Par ailleurs, par définition de l'opérateur ∇_a, on peut vérifier que le commutateur $[\partial^\alpha, \nabla_a] u_j(t)]$ s'écrit

$$[\partial^\alpha, \nabla_a] u_j(t) = \sum_{k=1}^d [\partial^\alpha, a_k] \frac{\partial u_j}{\partial x_k}(t).$$

Comme $\frac{\partial u_j}{\partial x_k}(t) \in H^\mu(\mathbb{R}^d)$, et $a \in W^\mu$, on sait (voir le cours) que le commutateur $[\partial^\alpha, a_k]$ est borné de $H^{\mu-1}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Par conséquent, il va exister une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\|[\partial^\alpha, \nabla_a] u_j(t)\|_0 \leq \lambda \|a\|_{W^\mu} \|\frac{\partial u_j}{\partial x_k}(t)\|_{H^{\mu-1}} \leq C\|a\|_{W^\mu} \|u_j\|(t)_{H^\mu}.$$

Ceci entraîne que

$$2\Re e \sum_{j=1}^d < \nabla_a u_j(t), u_j(t) >_{H^\mu(\mathbb{R}^d)} = 2\sum_{j=1}^d \sum_{|\alpha|\leq\mu} < \partial^\alpha \nabla_a u_j(t), \partial^\alpha u_j(t) >_0 \leq 2\lambda \|a\|_{W^\mu} \|u\|(t)_{H^\mu}.$$

Finalement, on peut voir que

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{H^\mu(\mathbb{R}^d)} \leq 2\left(\|f(t)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d)} + \lambda\|u(t)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d)}\right) \|u(t)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d)} .$$

??

En intégrant sur $[0,t]$, on obtient que

$$\|u(t)\|^2_{H^\mu(\mathbb{R}^d} - \|u(0)\|^2_{H^\mu(\mathbb{R}^d} \leq 2\int_0^t \left(\|f(s)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d)} + \lambda\|u(s)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d)}\right) \|u(s)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d)} ds$$

ou encore que

$$\|u(t)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d} - \|u(0)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d} \leq 2\int_0^t \left(\|f(s)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d)} + \lambda\|u(s)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d)}\right) \frac{\|u(s)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d)}}{\|u(t)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d)} + \|u(0)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d)}} ds$$

$$\leq 2\int_0^t \left(\|f(s)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d)} + \lambda\|u(s)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d)}\right) ds.$$

En appliquant le Lemme de Gronwall à l'estimation précédente on obtient

$$\|u(t)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d} \leq \|u(0)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d} + 2\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\|f(s)\|_{H^\mu(\mathbb{R}^d)} ds$$

Si (u,p) est une solution du problème (1), où $u \in H^{\mu+1,\mu}$ et $p \in H^{0,\mu}$, alors nous avons vu que $\operatorname{grad} p = P(f - \nabla_a u)$ où $f \in H^{0,\mu}$. Il vient alors, sachant que l'opérateur P est borné de $H^{0,\mu}$ dans lui même, et compte tenu de la question 1.(2)

$$\|\operatorname{grad} p\|_{H^{0,\mu}} \leq C\|f\|_{H^{0,\mu}} + \|a\|_{W^\mu}\|u\|_{H^{0,\mu}}.$$

4. (1) Soit $f \in H^{0,\sigma}$ et $u \in H^{0,\sigma}$ vérifiant (1). alors d'une part $\frac{\partial u_j}{\partial t} = f_j - \nabla_a u_j - \frac{\partial p_j}{\partial x_j}$ et comme (u,p) est solution de (1), nous avons $\operatorname{grad} p = P(f - \nabla_a u)$, or nous avons

$$\|\operatorname{grad} p\|_{0,\sigma} \leq \|P(f)\|_{0,\sigma} + \|P(\nabla_a u)\|_{0,\sigma} \leq C\|f\|_{0,\sigma} + C\|a\|_{W^\mu}\|u\|_{0,\sigma}$$

, par conséquent $\frac{\partial p_j}{\partial x_j} \in H^{0,\sigma}$, ce qui implique que $u \in H^{0,\sigma}$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \in H^{0,\sigma}$, et donc que $u \in H^{1,\sigma}$. Or on sait que l'espace $H^{1,\sigma}$,s'injecte continument dans $\mathcal{C}^{0,\sigma-\frac{1}{2}}$

(2) Supposons que $u(0) \in H^\sigma(\mathbb{R}^d)$. On procède par régularisation en utilisant les opérateurs R_ε. Posons $u_\varepsilon = R_\varepsilon u \in H^{1,\sigma+1}$. Les suite $(u_\varepsilon(0)_{\varepsilon>0})$ et $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ convergent vers $u(0)$ et u dans respectivement H^σ et $H^{0\sigma}$.

Il faut aussi remarquer que $\operatorname{div} u_\varepsilon = R_\varepsilon(\operatorname{div} u) = 0$ puisque par transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$

$$\mathcal{F}(\operatorname{div} u_\varepsilon) = \sum_{j=1}^d i\xi_j \mathcal{F}(R_\varepsilon u_j) = \frac{1}{1+\varepsilon|\xi|^2}\sum_{j=1}^d i\xi_j\mathcal{F}(u_j) = \frac{1}{1+\varepsilon|\xi|^2}\mathcal{F}(\operatorname{div} u) = \mathcal{F}(R_\varepsilon(\operatorname{div} u)).$$

On applique donc l'estimation (3) ou l'estimation (4) à u_ε pour u_ε aux fonctions $u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}$. Les estimations montrent que la famille $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^{0,\sigma}$ qui est complet pour sa norme, ce qui implique que la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est convergente dans $\mathcal{C}^{0,\sigma}$ vers un élément v. Mais comme de par les propriétés de R_ε, on sait que la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers u dans $\mathcal{C}^{0,\sigma-\frac{1}{2}}$, il s'en suit que $u = v$ dans $\mathcal{C}^{0,\sigma}$

Écrivant l'estimation (3) ou l'estimation (4) pour u_ε et passant à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ on conclut que l'estimation (3) ou l'estimation (4) est satisfaite par u.

Barème :
Préliminaires :1-(4pt), 2-(1pt),3-(2pt),2-(1pt),4-(1pt)=9
Partie I : 1(1)-(1pt), 1(2)-(2pt),2(1)-(1pt),2(2)-(3pt),2(3)-(1pt),3-(3pt), 4(1)-(1pt),4(2)-(3pt)=15
Notation sur 9+15=24 pts

Notations

1. Les espaces $H^{k,s}(]0,T[\ltimes\mathbb{R}^d)$, $\mathscr{C}^{k,s}(]0,T[\ltimes\mathbb{R}^d)$, $W^{\mu}(]0,T[\ltimes\mathbb{R}^d)$ sont les espaces étudiés en cours. On écrit que $u = (u_1, u_2, \cdots, u_d) \in H^{k,s}, \mathscr{D}, \cdots$ etc, pour exprimer que toutes les composantes $u_j, (j = 1, \cdots, d)$ sont dans $H^{k,s}(]0,T[\ltimes\mathbb{R}^d), \mathscr{D}(]0,T[\ltimes\mathbb{R}^d), \cdots$.

2. Pour $u = (u_1, u_2, \cdots, u_d) \in \mathscr{D}'(]0,T[\ltimes\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^d)$ on note $\operatorname{div} u = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$.

3. Pour $p \in \mathscr{D}'(]0,T[\ltimes\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, on note $\operatorname{grad} p = (\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial p}{\partial x_d})$.

4. Pour $a = (a_1, a_2, \cdots, a_d) \in W^{\mu}$, on note l'opérateur

$$\nabla_a = \sum_{k=1}^{d} a_k \frac{\partial .}{\partial x_k}.$$

Préliminaires

Notant $\hat{}$ la transformation de Fourier partielle en x, soit P l'opérateur qui à $u = (u_1, u_2, \cdots, u_d) \in \mathscr{S}'(]0,T[\ltimes\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^d)$ associe $v = (v_1, v_2, \cdots, v_d))$, avec

$$\hat{v}_j(t,\xi) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \hat{u}_k(t,\xi).$$

1. Monter que l'opérateur P est continu de $H^{0,s}$ dans $H^{0,s}$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. Vérifier que $Pu = 0$ si $\operatorname{div} u = 0$, et que $Pu = u$ si $u = \operatorname{grad} g$ où $g \in \mathscr{S}'(]0,T[\ltimes\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$.
2. Montrer que l'on peut écrire $Pu = \operatorname{grad} p$, si p vérifie $\Delta p = \operatorname{div} u$.
3. Montrer que pour $u \in H^{0,s}$ et $v \in H^{0,-s}$ on a
$$< Pu, v >_{H^{0,s}\ltimes H^{0,-s}} = < u, Pv >_{H^{0,s}\ltimes H^{0,-s}} = < Pu, Pv >_{H^{0,s}\ltimes H^{0,-s}}.$$
4. Soit $u = (u_1, u_2, \cdots, u_d) \in H^{0,0}$ tel que $\operatorname{div} u = 0$ et soit $\varphi \in \mathscr{D}(]0,T[\ltimes\mathbb{R}^d)$. Vérifier que
$$< \frac{\partial u}{\partial t}, \operatorname{grad} \varphi >_{\mathscr{D}'(]0,T[\ltimes\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^d)\ltimes\mathscr{D}} := \sum_{j=1}^{d} < \frac{\partial u_j}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} >_{\mathscr{D}'(]0,T[\ltimes\mathbb{R}^d,\mathbb{C})\ltimes\mathscr{D}} = 0.$$

Partie I

Soit $\mu \in \mathbb{N}$ tel que $\mu > \frac{d}{2} + 1$. On se donne $a = (a_1, a_2, \cdots, a_d) \in W^{\mu}$, à valeurs réelles et vérifiant $\operatorname{div} a = 0$. On considère le système de $(d+1)$ équations à $(d+1)$ inconnues $(u_1, u_2, \cdots, u_d, p) = (u, p)$:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_j}{\partial t} + \nabla_a u_j + \dfrac{\partial p}{\partial x_j} = f_j \quad \text{pour} \quad j = 1, \cdots d, \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

On notera $f = (f_1, f_2, \cdots, f_d)$.

1. (1) En calculant $\operatorname{div} f$, montrer que si (u, p) est solution de (1), on a
$$\operatorname{grad} p = P(f - \nabla_a u) = P(F)$$
où $F = (F_1, F_2, \cdots, F_d)$, avec $F_k = f_k - \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} u_j$.

(2) Montrer pour $\sigma = 0$ et $\sigma = \mu$ que l'on a une estimation :

(2) $$\exists C > 0 \quad \|P(\nabla_a u)\|_{H^{0,\sigma}} \leq C\|a\|_{W^\mu}\|u\|_{H^{0,\sigma}}.$$

2. Soit $u \in \mathscr{C}^{1,1}$ et p tel que grad $p \in \mathscr{C}^{0,0}$.

   (1) Montrer que $\Re e \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_a u_j(t,x)\overline{u_j(t,x)}dx = 0$

   (2) Établir que l'on a des estimations du type :

(3) $$\begin{cases} \|u(t)\|_0 \leq \|u(0)\|_0 + 2\int_0^t \|f(s)\|_0 ds, \\ \|\text{grad } p\|_{H^{0,0}} \leq C\|f\|_{H^{0,0}} + \|a\|_{W^\mu}\|u\|_{H^{0,0}}. \end{cases}$$

   (3) Montrer que (3) est encore vrai lorsque $u \in H^{1,1}$ et grad $p \in H^{0,0}$.

3. Montrer qu'il existe $C > 0$ et $\lambda > 0$ tels que pour tout $u \in H^{1,\mu+1}$ et grad $p \in H^{0,\mu}$,on ait :

(4) $$\begin{cases} \|u(t)\|_\mu \leq \|u(0)\|_\mu + 2\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\|f(s)\|_\mu ds, \\ \|\text{grad } p\|_{H^{0,\mu}} \leq C\|f\|_{H^{0,\mu}} + \|a\|_{W^\mu}\|u\|_{H^{0,\mu}}. \end{cases}$$

4. σ valant soit 0, soit μ, on se donne $f \in H^{0,\sigma}$, $u \in H^{0,\sigma}$ vérifiant (1).

   (1) Montrer que $u \in H^{1,\sigma}$ et $u \in \mathscr{C}^{0,\sigma-\frac{1}{2}}$.

   (2) Si de plus, $u(0) \in H^\sigma(\mathbb{R}^d)$, montrer que $u \in \mathscr{C}^{0,\sigma}$ et que l'on a soit l'estimation (3), soit l'estimation (4).

PARTIE II

On considère le problème :

(5) $$\begin{cases} \dfrac{\partial v_j}{\partial t} + \nabla_a v_j + \dfrac{\partial q}{\partial x_j} = \phi_j \quad \text{pour} \quad j = 1, \cdots d, \\ \text{div } v = 0 \\ v(T) = 0 \end{cases}$$

1. Soit $\mathscr{E}$ l'espace des fonctions (v,q) tels que $v \in H^{1,1}([0,T] \ltimes \mathbb{R}^d, \mathbb{C}^d)$ et $q \in H^{0,0}([0,T] \ltimes \mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, avec $v(T) = 0$. On note $T(v,q) = \phi$, où $\phi = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_d)$ est donné par (5) et $\mathscr{F} = T(\mathscr{E})$, l'image directe de l'espace $\mathscr{E}$ par l'opérateur T.

   (1) Vérifier que $\mathscr{F} \subset H^{0,0}$.

   (2) Établir que pour $(v,q) \in \mathscr{E}$, on a :

$$\|v(t)\|_0 \leq 2\int_t^T \|\phi(s)\|_0 ds$$

   et en déduire que

$$\|v(0)\|_0 + \|v\|_{H^{0,0}} \leq \|\phi\|_{H^{0,0}}.$$

2. Soient $f = (f_1, f_2, \cdots, f_d) \in H^{0,0}$ et $g = (g_1, g_2, \cdots, g_d) \in L^2(\mathbb{R}^d)$, vérifiant div $g = 0$. Considérant la forme antilinéaire

$$\phi \mapsto l(\phi) = \sum_{j=1}^d \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f_j(t,x)\overline{v_j(t,x)}dxdt + \int_{\mathbb{R}^d} g_j(x)\overline{v_j(0,x)}dxdt,$$

   montrer qu'il existe $u \in H^{0,0}$ tel que pour tout $(v,q) \in \mathscr{E}$

$$< u, \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla_a v + \text{grad } q >_{H^{0,0}} = - < f, v >_{H^{0,0}} - < g, v(0) >_0 .$$

Département de Mathématiques.
Faculté des Sciences.
U.H.L Batna.

29.04.2012

Contrôle Final de la Matière
Systèmes Symétriques Hyperboliques
2ème année Master 2011-2012.

On considère $N \in \mathbb{N}^*$, $d \in \mathbb{N}^*$ et l'espace $\mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N)$ où

$$\mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N) = \left\{ v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N) : \frac{\partial}{\partial x_j} v \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N) \right\}$$

. on considère $T > 0$ et $A_1, A_2, \dots, A_d$ et B des matrices carrées de type N à coefficients à valeurs réelles dépendant des variables $(t, x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathcal{C}^1_b([0,T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$

. On considère le problème de Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} Lu = \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_j(t,x) \dfrac{\partial u}{\partial x_j} + B(t,x) u = f(t,x) \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

où $u = (u_1, \dots, u_N)$ est une fonction inconnue, et f et u_0 des données qui seront précisées plus tard.

On suppose que le système (1) est symétrisable au sens suivant

Hypothèse :

Il existe une matrice $S_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^1_b(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$

telle que ① Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $S_0(t,x)$ est symétrique.

② Pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, les matrices $S_0(t,x) . A_j(t,x)$ sont symétriques. pour $j = \{1 \dots, d\}$.

③ Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$

$$\alpha \left(u(t,x), u(t,x) \right)_{\mathbb{C}^N} \leq \underbrace{\left(S_0 u(t,x), u(t,x) \right)_{\mathbb{C}^N}}_{\geq 0} \leq \frac{1}{\alpha} \left(u(t,x), u(t,x) \right)_{\mathbb{C}^N}$$

pour tout u à valeurs dans $\mathbb{C}^N$

1. Soit $u \in \mathcal{D}([0,T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N)$. Prouver que l'on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \langle S_0 u, u \rangle_{L^2} = 2 \operatorname{Re} \langle S_0 u, Lu \rangle + \langle Ru, u \rangle$$

où $Ru = \dfrac{\partial}{\partial t} S_0 u + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \dfrac{\partial}{\partial x_j} (S_0 A_j) u + S_0 B u + B^T S_0 u$

et $\langle \; , \; \rangle_{L^2}$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N)$.

2. En déduire qu'il existe $\gamma > 0$ ne dépendant que des normes L^∞ des coefficients et de leurs dérivées, et de α tel que

$$\begin{cases} \langle S_0 u(t), u(t) \rangle_{L^2} \leq e^{\gamma t} \langle S_0 u(0), u(0) \rangle + \int_0^t e^{\gamma(t-s)} \langle S_0 Lu(s), Lu(s) \rangle_{L^2} ds \\ t \in [0,T] \end{cases}$$

3. En déduire qu'il existe $\gamma_0 > 0$ assez grand tel que :

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha \| u(t) \|^2_{L^2} \leq e^{\gamma_0 t} \| u(0) \|^2_{L^2} + \int_0^t e^{\gamma_0 (t-s)} \| Lu(s) \|^2_{L^2} ds \\ \forall\, t \in [0,T] \end{cases}$$

4. En déduire que l'estimation (2) reste vraie pour tout

$$u \in \mathcal{C}^1([0,T], L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N)) \cap \mathcal{C}([0,T], H^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N))$$

4. Considérons l'opérateur adjoint formel.

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^d A_j^T(t,x) \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_j(t,x)\, \cdot \right)$$

$$- B^T(t,x)$$

Prouver qu'il existe $\gamma^* > 0$ tel que pour tout
$u \in \mathcal{C}^1([0,T], L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N)) \cap \mathcal{C}([0,T], H^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N))$
on a l'estimation

$$\| u(t) \|^2_{L^2} \leq \gamma^* \left(\| u(T) \|^2_{L^2} + \int_0^T \| L^* u(s) \|^2_{L^2} ds \right.$$

5. Soit $\mathcal{E} = \{ \varphi \in \mathcal{C}^1([0,T], L^2) \cap \mathcal{C}([0,T], H^1) : \varphi(T) = 0 \}$
soit $f \in L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N)$ et $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N)$
En déduire l'existence d'une solution $u \in \mathcal{C}([0,T], L^2(\mathbb{R}^d))$ du problème de Cauchy (1) qui vérifie l'estimation (2).

RAPPELS.

Mesure produit Soient $(X, \mathscr{F}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{G}, \nu)$ deux espaces de mesure σ−finis. On définit par $\mathscr{S}$ la famille des pavés mesurables dans l'espace produit $X \ltimes Y$ par

$$A \in \mathscr{S} \quad \Leftrightarrow \quad \exists A_1 \in \mathscr{F}, \exists A_2 \in \mathscr{G} \; : \quad A = A_1 \ltimes A_2.$$

On définit par $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$ la σ− algèbre sur $X \ltimes Y$ engendrée par la famille des pavés mesurables $\mathscr{S}$.

Théorème 1 (Mesure produit). *Il existe une unique mesure sur $(X \ltimes Y, \mathscr{F} \otimes \mathscr{G})$ notée $\mu \otimes \nu$ et appelée mesure produit, telle que pour tout $A = A_1 \ltimes A_2 \in \mathscr{S}$, on ait $\mu \otimes \nu(A) = \mu(A_1)\nu(A_2)$.*

Théorème de Fubini. *Soit $f \in L^1(X \ltimes Y, \mu \otimes \nu)$. Alors*

1. *Pour $\mu - p.p.$ $x \in X$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur (Y, ν).*
2. *Pour $\nu - p.p.$ $y \in Y$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur (X, μ).*
3. *la fonction $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ est intégrable sur (X, μ) et la fonction $y \mapsto \int_X f(x,y)d\mu(x)$ est intégrable sur (Y, ν).*
4. $$\int_{X \ltimes Y} f(x,y)d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_X \Big(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\Big)d\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X f(x,y)d\mu(x)\Big)d\nu(y).$$

Théorème 2 (Théorème de Fubini-Tonnelli). *Soit $f : X \ltimes Y \to \mathbb{C}$ $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$− mesurable. Supposons que l'un des trois nombres suivants soit fini*

$$1) \int_X \Big(\int_Y |f(x,y)|d\nu(y)\Big)d\mu(x) \quad .2) \int_Y \Big(\int_X |f(x,y)|d\mu(x)\Big)d\nu(y).$$

$$3) \int_{X \ltimes Y} |f(x,y)|d(\mu \otimes \nu)(x,y)$$

Alors les deux autres sont également finis et sont égaux au premier.

Densité dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$ On définit par $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$, l'espace des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, continues et à support compact dans $\mathbb{R}^d$.

Théorème 3 (Densité de l'espace $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace $L^p(\mathbb{R}^d)$). *Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors, pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $\delta > 0$, il existe $g_\delta \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$ tel que*

$$\|f - g_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \delta.$$

Transformations et Changement de Variables. Soient U et V deux ensembles ouverts de $\mathbb{R}^d$. On dit que ϕ est un difféomorphisme entre U et V si l'application $\phi : U \to V$ est bijective , de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans V et que l'application inverse ϕ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ de V dans U.
Notons pour tout $x \in U$, $d\phi_x$ la différentielle de $\phi = ^t(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_d)$ au point x et par $J_\phi(x)$ le déterminant de la matrice Jacobienne associée à $d\phi_x$. Rappelons que la matrice jacobienne associée à $d\phi_x$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\phi_1(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_d}\phi_1(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\phi_d(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_d}\phi_d(x) \end{pmatrix}.$$

Le fait que ϕ soit un difféomorphisme implique que $J_\phi(x) \neq 0 \quad x \in U$.

Théorème de Changement de Variables. *Soient U et V deux ensembles ouverts de $\mathbb{R}^d$. Supposons qu'il existe un difféomorphisme $\phi : U \to V$.*

La fonction $f : V \to \mathbb{C}$ est intégrable sur V si et seulement si la fonction $y \mapsto f \circ \phi(y)|J_\phi(y)|$ est intégrable dans U et on a pour tout ensemble mesurable $A \subset V$

$$\int_A f(y)dy = \int_{\phi^{-1}(A)} f \circ \phi(x)|J_\phi(x)|dx.$$

Exemple 1 (Changement de variables en Coordonnées polaires).

- **Cas de $\mathbb{R}^2$.** Considérons $U = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0;\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$ et $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0;\ x \geq 0\}$ et l'application $\phi : U \to V$ définie par $\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. L'application ϕ est un difféomorphisme entre U et V. En outre, pour tout (r,θ),le jacobien de ϕ vaut $J_\phi(r,\theta) = r$. Comme l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0;\ x \geq 0\}$ est de mesure nulle, le Théorème du changement de variable s'écrit

  Théorème 4. *La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est intégrable si et seulement si la fonction $(r,\theta) \mapsto rf(\phi(r,\theta))$ est intégrable dans U et on a*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

- **Cas de $\mathbb{R}^3$.** Considérons $U = \{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : r > 0;\ 0 \leq \theta < 2\pi, -\pi/2 \leq \varphi < +\pi/2\}$ et $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0;\ x \geq 0\}$ et l'application $\phi : U \to V$ définie par

$$\phi(r,\theta,\varphi) = (r\cos\varphi cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi).$$

  L'application ϕ est un difféomorphisme entre U et V. En outre, on peut voir que pour tout $(r,\theta,\varphi) \in U$, nous avons $J_\phi(r,\theta,\varphi) = r^2\cos\varphi > 0$. Comme l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0;\ x \geq 0\}$ est de mesure nulle, le Théorème du changement de variable s'écrit

  Théorème 5. *La fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ est intégrable si et seulement si la fonction $(r,\theta,\varphi) \mapsto r^2\sin\theta f(\phi(r,\theta,\varphi))$ est intégrable dans U et on a*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y,z)dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} f(\phi(r,\theta,\varphi))r^2\cos\theta drd\theta d\varphi.$$

- **Cas Général de $\mathbb{R}^d$.** Considérons les ouverts $U = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^{d-1} : \theta = (\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{d-1},);\ \frac{-\pi}{2} < \theta_k < \frac{\pi}{2};\ 1 \leq k \leq d-2;\ 0 < \theta_{d-1} < 2\pi\}$, $V = \mathbb{R}^d \setminus N$ où $N = \{x = (x_1,x_2,\cdots,x_d) : x_1 \geq 0,\ x_2 = 0\}$ et l'application $\phi : U \to V$ définie par

$$\begin{cases} \phi_1(r,\theta) = r\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{d-1}, \\ \phi_2(r,\theta) = r\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{d-2}\sin\theta_{d-1}, \\ \phi_3(r,\theta) = r\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\sin\theta_{d-2}, \\ \cdots\cdots \\ \phi_{d-1}(r,\theta) = r\cos\theta_1\sin\theta_2, \\ \phi_d(r,\theta) = r\sin\theta_1 \end{cases}$$

  Le calcul du déterminant Jacobien de ϕ montre que pour tout $(r,\theta) \in U$, on a

$$J_\phi(r,\theta) = r^{d-1}\cos^{d-2}\theta_1\cos^{d-3}\theta_2\cdots\cos\theta_{d-1}.$$

  Comme l'ensemble N est de mesure nulle, le Théorème du changement de variable s'écrit

  Théorème 6. *La fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est intégrable si et seulement si la fonction $(r,\theta) \mapsto f(\phi(r,\theta,\varphi))r^{d-1}\cos^{d-2}\theta_1\cos^{d-3}\theta_2\cdots\cos\theta_{d-1}$ est intégrable dans U et on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_U f(\phi(r,\theta))r^{d-1}\cos^{d-2}\theta_1\cos^{d-3}\theta_2\cdots\cos\theta_{d-1}drd\theta_1\cdots d\theta_{d-1}.$$

On note par $S_{d-1} := \{w \in \mathbb{R}^d : |w| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^d$ qu'on munit de la mesure superficielle $dw = \cos^{d-2}\theta_1\cos^{d-3}\theta_2\cdots\cos\theta_{d-1}d\theta_1\cdots d\theta_{d-1}$. La définition de l'application ϕ montre que pour $p.p$ $x \in \mathbb{R}^d$ $x = \phi(r,\theta) = r.w$, où $w \in S_{d-1}$. Par conséquent pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_0^{+\infty} (\int_{S_{d-1}} f(r.w)dw)r^{d-1}dr.$$

(3) Prouver que les espaces $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ sont denses dans l'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$.
Rappelons que dans un espace de Hilbert H, si E est un sous espace fermé alors $H = E \oplus E^{\perp}$, où $E^{\perp}$ est le sous espace orthogonal de E.

2. Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi(x) = 0$ pour $|x| \geq 1$ et $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq \frac{1}{2}$.
On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \varphi_n(x) = \chi(\frac{x}{n})\varphi(x)$.
On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} p_k(\varphi_n - \varphi) = 0$.
Prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_s = 0$. Comme $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, en déduire une autre démonstration de la densité de l'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$.
3. Pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{R}$ la fonction $1_{[0,1]}$ est-elle dans $H^s(\mathbb{R})$?
4. Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathscr{F}u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Prouver que pour tout $s \in \mathbb{R}$ nous avons
$$\Delta u \in H^s(\mathbb{R}^d) \quad \Leftrightarrow \quad u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^d).$$
5. Si $K \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est la solution de $(1 - \Delta)K = \delta$, pour quelle valeurs de s, $K \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 7. Soit $s \in \mathbb{R}$ et $F \in (H^s(\mathbb{R}^d))'$ un élément de l'anti-dual topologique de $H^s(\mathbb{R}^d)$.

1. Prouver que l'on définit une application $T(F) \colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C} : \varphi \mapsto < T(F), \varphi >= F(\varphi)$ et que $T(F) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.
2. Prouver qu'il existe un unique élément $g \in H^s(\mathbb{R}^d)$ tel que pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, on ait
$$F(u) = (u, g)_s \quad \text{avec} \quad \|F\|_{(H^s(\mathbb{R}^d))'} = \|g\|_s$$
3. Posons $f = \Lambda_s \overline{\mathscr{F}(g)}$ où Λ_s est la fonction de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ définie pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ par $\Lambda_s(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2}$.
Vérifier que $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et que $\mathscr{F}(f) = T(F) \quad (\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$.
4. En déduire que $T(F) \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ et que l'application $F \mapsto T(F)$ est une isométrie de $(H^s(\mathbb{R}^d))'$ dans $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$.
5. Soit $v \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$. Posons $w = \mathscr{F}^{-1}v \qquad (\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$. Posons pour $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$
$$F_0(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \Lambda_s(\xi)\mathscr{F}(u)(\xi)\Lambda_{-s}\mathscr{F}(w)(\xi)d\xi.$$
Prouver que cette relation définit une forme linéaire continue sur $H^s(\mathbb{R}^d)$.
6. Prouver que l'application $F \mapsto T(F)$ est un isomorphisme de $(H^s(\mathbb{R}^d))'$ dans $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$.
7. Soit $s \in \mathbb{R}$ et $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$. Prouver que
$$\|u\|_{H^{-s}} = \sup_{\substack{\varphi \in H^s(\mathbb{R}^d) \\ \|\varphi\|_{H^s} \leq 1}} |< u, \varphi >_{H^{-s}, H^s}| = \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \\ \|\varphi\|_{H^s} \leq 1}} |< u, \varphi >_{H^{-s}, H^s}|$$

Exercice 8. Soient $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ tels que $s < t$. Prouver que pour tout $u \in H^t(\mathbb{R}^d)$, et tout $\theta \in [0, 1]$ on ait
$$\|u\|_{H^{\theta s + (1-\theta)t}} \leq \|u\|_{H^s}^{\theta} \|u\|_{H^t}^{1-\theta}.$$

Exercice 9.

1. Soient $s, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $s > \lambda \geq 0$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$.Pour $r \in \mathbb{R}$, on note par abus de langage $< \xi >^r$ la fonction $\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{\frac{r}{2}}$.
Prouver que $< \xi >^\lambda \hat{u} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in [1 + \infty]$ vérifiant la relation $\frac{1}{2} \leq \dfrac{1}{p} < \frac{1}{2} + \dfrac{s - \lambda}{d}$ et il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ on ait
$$\|<\xi>^\lambda \hat{u}\|_{L^p} \cancel{\|u\|_{L^p}} \leq C\|u\|_{H^s}.$$
2. On rappelle que l'opérateur de Fourier $\mathscr{F}$ est continu de $L^p(\mathbb{R}^d)$dans $L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ si $1 \leq p \leq 2$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et pour tout $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ on a
$$\|\mathscr{F}\varphi\|_{L^{p'}} \leq (2\pi)^{-d(2-p)/2p}\|\varphi\|_{L^p}.$$

(3) Prouver que les espaces $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ sont denses dans l'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$.
Rappelons que dans un espace de Hilbert H, si E est un sous espace fermé alors $H = E \oplus E^{\perp}$, où $E^{\perp}$ est le sous espace orthogonal de E.

2. Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi(x) = 0$ pour $|x| \geq 1$ et $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq \frac{1}{2}$.
On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \varphi_n(x) = \chi(\frac{x}{n})\varphi(x)$.
On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} p_k(\varphi_n - \varphi) = 0$.
Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_s = 0$. Comme $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, en déduire une autre démonstration de la densité de l'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$.
3. Pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{R}$ la fonction $1_{[0,1]}$ est-elle dans $H^s(\mathbb{R})$?
4. Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathscr{F}u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Prouver que pour tout $s \in \mathbb{R}$ nous avons
$$\Delta u \in H^s(\mathbb{R}^d) \quad \Leftrightarrow \quad u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^d).$$
5. Si $K \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est la solution de $(1-\Delta)K = \delta$, pour quelle valeurs de s, $K \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 7. On rappelle que si H est un espace de Hilbert complexe, une forme anti-linéaire (ou sesquilinéaire) dans H est une application $l\colon H \to \mathbb{C}$ telle que
$$\forall u \in H,\ v \in H \qquad l(u+v) = l(u) + l(v)$$
$$\forall u \in H,\ \lambda \in \mathbb{C} \qquad l(\lambda.u) = \bar{\lambda} l(u).$$

L'espace anti-dual de H est l'espace des formes anti-linéaires continues sur H.
Soit $s \in \mathbb{R}$ et $F \in (H^s(\mathbb{R}^d))'$ un élément de l'anti-dual topologique de $H^s(\mathbb{R}^d)$.

1. Prouver que l'on définit une application $T(F)\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C} : \varphi \mapsto < T(F), \varphi >= F(\bar{\varphi})$ et que $T(F) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.
2. Prouver qu'il existe un unique élément $g \in H^s(\mathbb{R}^d)$ tel que pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, on ait
$$F(u) = (g,u)_s \quad \text{avec} \quad \|F\|_{(H^s(\mathbb{R}^d))'} = \|g\|_s$$
3. Posons $f = (\mathscr{F})^{-1}(\Lambda_{2s}\mathscr{F}(g))$ où Λ_s est la fonction de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ définie pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ par $\Lambda_s(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2}$.
Vérifier que $f \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ et que $\mathscr{R}(f) = T(F) \quad (\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$.
4. En déduire que $T(F) \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ et que l'application $F \mapsto T(F)$ est une isométrie de $(H^s(\mathbb{R}^d))'$ dans $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$.
5. Soit $v \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$. Posons $w = \mathscr{F}^{-1}v \qquad (\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$. Posons pour $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$
$$F_0(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \Lambda_{-s}\mathscr{F}(w)(\xi)\Lambda_s(\xi)\overline{\mathscr{F}(u)}(\xi)d\xi.$$
Prouver que cette relation définit une forme anti-linéaire continue sur $H^s(\mathbb{R}^d)$.
6. Prouver que l'application $F \mapsto T(F)$ est un isomorphisme de $(H^s(\mathbb{R}^d))'$ dans $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$.
7. Soit $s \in \mathbb{R}$ et $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$. Prouver que
$$\|u\|_{H^{-s}} = \sup_{\substack{\varphi \in H^s(\mathbb{R}^d) \\ \|\varphi\|_{H^s} \leq 1}} |< u, \varphi >_{H^{-s},H^s}| = \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \\ \|\varphi\|_{H^s} \leq 1}} |< u, \varphi >_{H^{-s},H^s}|$$

Exercice 8. Soient $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ tels que $s < t$. Prouver que pour tout $u \in H^t(\mathbb{R}^d)$, et tout $\theta \in [0,1]$ on ait
$$\|u\|_{H^{\theta s + (1-\theta)t}} \leq \|u\|^{\theta}_{H^s} \|u\|^{1-\theta}_{H^t}.$$

Exercice 9.

1. On rappelle que l'opérateur de Fourier $\mathscr{F}$ est continu de $L^p(\mathbb{R}^d$ dans $L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ si $1 \leq p \leq 2$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et pour tout $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ on a
$$\|\mathscr{F}\varphi\|_{L^{p'}} \leq (2\pi)^{-d(2-p)/2p}\|\varphi\|_{L^p}.$$

Prouver que si $s \in]0, \frac{d}{2}[$, alors l'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $L^q(\mathbb{R}^d)$ si $\frac{1}{2} - \frac{s}{d} < \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$ et il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ on ait

$$\|u\|_{L^q} \leq C\|u\|_{H^s}.$$

2. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $f \geq 0$ et $< \xi >^{-\frac{1}{2}} f \notin L^1(\mathbb{R})$. posons $u = \mathscr{F}^{-1}(< \xi >^{-\frac{1}{2}} f)$, prouver que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} u(x) n e^{-(nx)^2/2} = +\infty.$$

3. En déduire que $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$, mais $u \notin L^\infty([-1,1])$. Que déduire de ce résultat ?

Exercice 10. Soien trois nombres réels (s, μ, σ) tels que $0 \leq \sigma \leq \mu \leq s$ et vérifiant $s + \mu - \sigma > \dfrac{d}{2}$. Soient $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ muni de la topologie induite par $H^s(\mathbb{R}^d)$ et $v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ muni de la topologie induite par $H^\mu(\mathbb{R}^d)$.

1. Prouver que il existe une constante $C > 0$ telle que on ait pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$

$$< \xi >^\sigma \leq C(< \xi - \eta >^\sigma + < \eta >^\sigma).$$

2. En déduire que

$$< \xi >^\sigma |\mathscr{F}(u.v)(\xi)| \leq C\{w_1(\xi) + w_2(\xi)\}.$$

où

$$w_1(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} < \eta >^\sigma |\hat{u}(\eta)||\hat{v}(\xi - \eta)| d\eta$$

$$w_2(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} < \eta >^\sigma |\hat{v}(\eta)||\hat{u}(\xi - \eta)| d\eta$$

(1) Supposons que $s \geq \mu > \sigma$. Prouver que $w_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et que $\|w_j\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^\mu}$ pour $j = 1, 2$.

(2) Supposons que $s > \mu = \sigma$. Prouver que $w_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et que $\|w_j\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^\sigma}$ pour $j = 1, 2$.

(3) Supposons que $s = \mu = \sigma$. Prouver que $w_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et que $\|w_j\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^\sigma}$ pour $j = 1, 2$.

Indication : Utiliser le résultat de l'exercice n^o 8 question 1) sur les injections de Sobolev et l'inégalité de Young sur le produit de convolution.

3. En déduire que l'opération de multiplication $(u, v) \mapsto u.v$ bien définie de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ se prolonge en un opérateur bilinéaire continu de $H^s(\mathbb{R}^d) \ltimes H^\mu(\mathbb{R}^d)$ dans $H^\sigma(\mathbb{R}^d)$ et il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et tout $v \in H^\mu(\mathbb{R}^d)$ on ait

$$\|u.v\|_{H^\sigma} \leq \|u\|_{H^s}\|v\|_{H^\mu}$$

4. Supposons maintenant que $s > \dfrac{d}{2}$ et que $\sigma \in [-s, s]$. Prouver que l'opération de multiplication $(u, v) \mapsto u.v$ bien définie de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ se prolonge en un opérateur bilinéaire continu de $H^s(\mathbb{R}^d) \ltimes H^\sigma(\mathbb{R}^d)$ dans $H^\sigma(\mathbb{R}^d)$ et il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et tout $v \in H^t(\mathbb{R}^d)$ on ait

$$\|u.v\|_{H^\sigma} \leq C\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^\sigma}.$$

Indication : Dans le cas où $\sigma \in [-s, 0]$. Utiliser les normes duales des espaces de Sobolev établies à l'exercice 7. 7).

Comme F_μ

Produit de convolution

Inégalité de Young

démontrer dans le cours → Si $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $s \geq \lambda \geq 0$ et si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ alors: $<\xi>^\lambda \hat{u} \in L^p(\mathbb{R}^d)$

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2} + \frac{s-\lambda}{d}$

et $\| <\xi>^\lambda \hat{u} \|_{L^p} \leq C \|u\|_s$