Géométrie différentielle

Programme :

1 - Rappel sur les formes différentielles

2 - a - Les Champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

b - La formule de Green et de sous variété.

Chapitre I : Les formes différentielles

I _ Forme différentielle défini dans un ouvert U de $\mathbb{R}^3$:

a _ Formes différentielles de degré 1 :

P_1, P_2, P_3 sont trois applications de U dans $\mathbb{R}$
dx_1, dx_2, dx_3 designes trois formes linéaires définie comme suit :

$dx_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ (c'est une projection)

$x = (x_1, x_2, x_3)$ $\quad i = \overline{1,3}$

- autrement dit dx_1, dx_2, dx_3 représentent la base canonique de $\mathbb{R}^{3*}$ (de dual $\mathbb{R}^3$)

on considére alors l'application

$W : U \longrightarrow \mathbb{R}^{3*}$

$x(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow W(x) = P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + P_3 dx_3.$

- on dit que W est une forme différentielle de degré 1.

W est de classe C^1 si les P_i de C^1 aussi

b _ Formes différentielles de degré 2 :

P_1, P_2, P_3 sont trois application de $U \rightarrow \mathbb{R}$

$dx_i \wedge dx_j$ désigne la forme bilinéaire alternée

ie ($dx_i \wedge dx_j = dx_j \wedge dx_i$)

$dx_i \wedge dx_j : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(X, Z) \longrightarrow y_i z_j - y_j z_i$

$dx_1 \wedge dx_2 = y_1 z_2 - y_2 z_1$

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

- autrement dit que $dx_i \wedge dx_j$ est la base dual de l'espace $\mathbb{R}^{3*} \times \mathbb{R}^{3*}$

$w : U \longrightarrow \mathbb{R}^{3*} \times \mathbb{R}^{3*}$

$x \longrightarrow w(x) = P_1 \, dx_1 \wedge dx_2 + P_2 \, dx_2 \wedge dx_3 + P_3 \, dx_3 \wedge dx_1.$

w est de C^1 si les P_i sont de C^1.

c- Formes différentielles de degré 3 :

P est une application de $U \rightarrow \mathbb{R}$

$dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$ désigne la forme trilinéaire alternée.

$dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$(Y, Z, T) \to \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & T_1 \\ y_2 & z_2 & T_2 \\ y_3 & z_3 & T_3 \end{vmatrix}$

- autrement dit que $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$ est la base duale de $\mathbb{R}^{3*} \times \mathbb{R}^{3*} \times \mathbb{R}^{3*}$.

$W : U \longrightarrow \mathbb{R}^{3*} \times \mathbb{R}^{3*} \times \mathbb{R}^{3*}$

$x \longrightarrow W(x) = P_1 \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

W est C^1 si les P_i sont de C^1.

d_ formes différentielles de degré 0 :

C'est une application $P : U \mapsto \mathbb{R}$ (c'est une surface).

Remarque :

- une forme différentielle (non nulle) définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ est nécessairement de degré Inf ou égal à 3
- une forme diff de degré 4 définie sur $U \in \mathbb{R}^3$ est nulle

L'écriture générale d'une forme différentielle de degré $(n-1)$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$W = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i P_i \, dx_1 \wedge \ldots dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots dx_n$$

II - Dérivé d'un forme diff :

(W def et de de C^1 dans U)

1- Déf :

ⓐ W est une forme diff de degré 0.

W = P où P est une app de U de $\mathbb{R}$.

$$dW = dP = \frac{\partial P}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial P}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial P}{\partial x_3} dx_3$$

$$dW = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial P}{\partial x_i} dx_i$$

ⓑ W est de degré 1 avec $W = P_1 dx_1 + P_2 dx_2$

$$dW = dP_1 \wedge dx_1 + dP_2 \wedge dx_2 + dP_3 \wedge dx_3$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial P_1}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_1 +$$

$$\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial P_2}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_2 +$$

$$\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial P_3}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_3 .$$

$$dw = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1$$
$$+ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2$$
$$+ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3.$$
$$= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 +$$
$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_3 +$$
$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3.$$

c) w est une forme diff de degré 2.

$$w = f_1\, dx_2 \wedge dx_3 + f_2\, dx_1 \wedge dx_3 + f_3\, dx_1 \wedge dx_2.$$

$$dw = df_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + df_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + df_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_3}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_1 \wedge dx_2$$

Par simplification on trouve :

$$dw = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

d) Soit w une forme diff de degré 3 dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$

alors $dw = 0$ car le deg de $dw > 3$.

2 - Théorème fondamentale :

Soit w une forme diff définie et de C^2 dans un ouvert U

on a la relation suivante :

$d(dw) = 0$ ie $d^2 w = 0$.

III - Primitives d'une forme diff :

une forme diff α est dite primitive d'une forme si : $d\alpha = w$.

Théorème :

Soit w une forme diff de degré 1

U. $w = P_1\, dx_1 + P_2\, dx_2 + P_3\, dx_3$

alors w est une forme Total exacte.

$$\Leftrightarrow \frac{\partial P_i}{\partial x_j} - \frac{\partial P_j}{\partial x_i} = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{rot } w = 0.$$

Chapitre II : Champ de vecteur :

un champ de vecteur sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est une application $X : U \to \mathbb{R}^n$ tq $\forall M \in U \quad X(M) = (X_1(M), \dots X_n(M))$

• Pour une base $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$

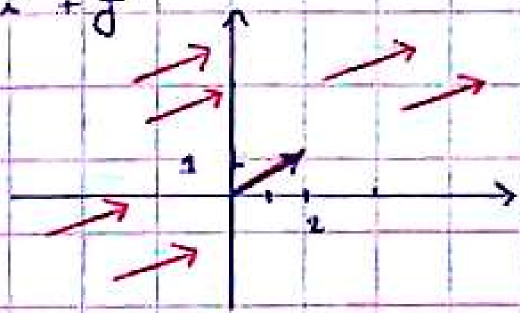
$$X(M) = X_1(M)\, e_1 + \dots X_n(M)\, e_n = \sum_{i=1}^{n} X_i M(e_i) = \text{Span}(\dots$$

• Un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^2$:

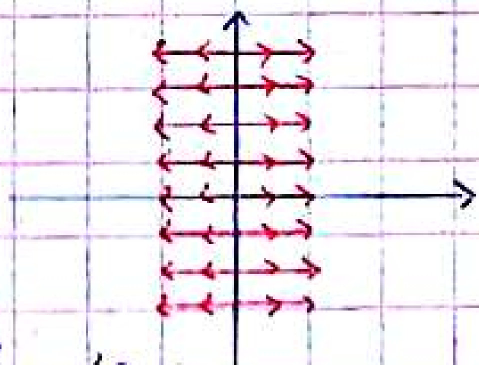
$$\vec{F} = M \vec{i} + N \vec{j} = \langle M, N \rangle$$

• Par exemple :

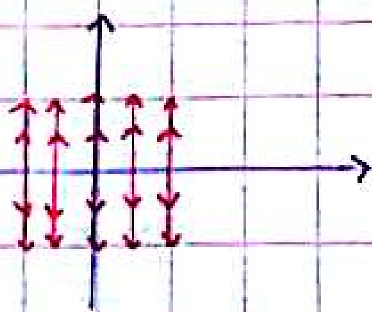
• $\vec{F} = 2\vec{i} + \vec{j}$



• $\vec{F} = x\vec{i} + 0\,\vec{j} = \langle x, 0 \rangle$

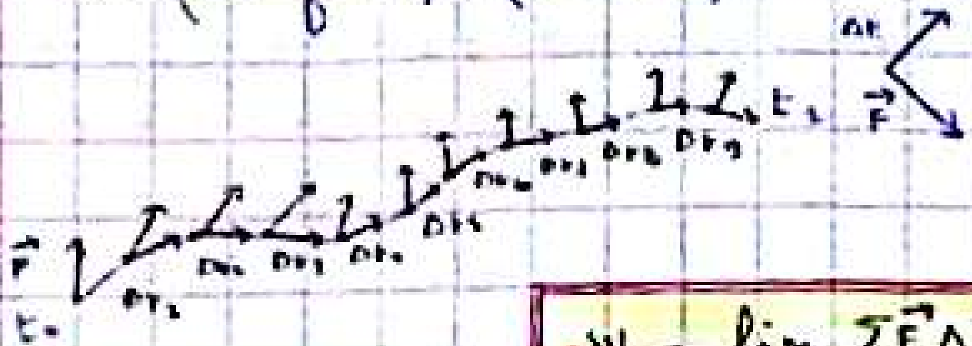


• $\vec{F} = y\,\vec{j} = \langle 0, y \rangle$



Le Travail et l'intégrale curviligne.

W = (la force) × (distance) = $\vec{F} \times \Delta r$



Le Travail :

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ W = \lim\limits_{\Delta r_i \to 0} \sum\limits_{i} \vec{F}_{t_i} \Delta \vec{r}_i \\ \bullet\ W = \int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{\text{Vitesse}} dt \end{array}}$$

Exemple.

trouver le travail sur le chemin c

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

du chemin $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} = \langle -y, x \rangle$

$\vec{F} = \langle -y, x \rangle = \langle -t^2, t \rangle$

$dr = \langle dx, dy \rangle$

$\frac{dr}{dt} = \langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \rangle = \langle 1, 2t \rangle$

$$W = \int_0^1 \langle -t^2, t \rangle \cdot \langle 1, 2t \rangle \, dt = \int_0^1 -t^2 + 2t^2 \, dt = \frac{1}{3}$$

ou bien

$$W = \int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \int_C \langle -y, x \rangle \langle dx, dy \rangle = \int_C -y\, dx + x\, dy$$

$$= \int_C -t^2\, dt + t(2t)\, dt$$

$$W = \int_C t^2\, dt = \int_0^1 t^2\, dt = 1/3$$

ou bien : $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = a^2 , x y > 0 \}$
$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{array}{l} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{array} \}$

$C' : \begin{cases} x = \sin\theta \\ y = \sin^2\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$w = \int ... dt$

$$W = \int_0^{\pi/2} -\sin^2\theta \cos\theta\, d\theta + 2\sin\theta\cos\theta\sin\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sin^3\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Remarque : Le Travail ne dépend pas de paramétrisation, il dépend de chemin

Exemple :

1 - C le cercle de rayon a à l'origine.
$\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$
trouver le Travail de $\vec{F}$ sur C

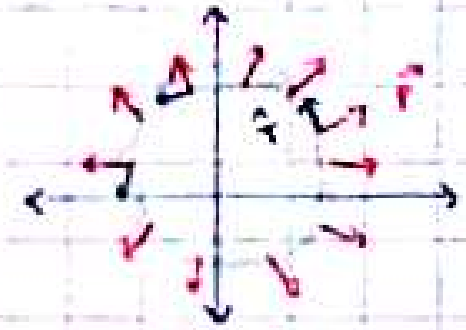
② - le ma trajectoire avec $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$

Solution :

① $W = \int_C x\,dx + y\,dy$

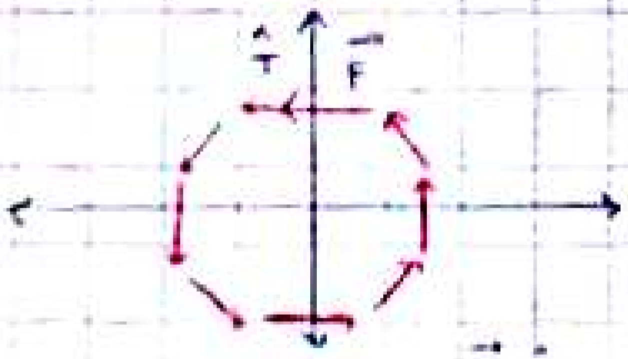
$C : \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$

$W = \int_C a\cos\theta(-a\sin\theta)\,d\theta + a\sin\theta(a\cos\theta)\,d\theta = 0$



$\vec{F} \cdot \vec{T} = 0$

$\vec{F} \cdot \vec{T} = |\vec{F}|\,|\vec{T}|\cos\theta$
$= a \cdot 1 \cdot 0$
$= 0$



$\vec{F} \parallel \vec{T}$

$\vec{F} \cdot \vec{T} = |\vec{F}|\,|\vec{T}|\cos\theta$
$= a \cdot 1 \cdot 1$
$= a$

$W = \int_C -y\,dx + x\,dy = \int_C -a\sin\theta(-a\sin\theta)\,d\theta + a\cos\theta(a\cos\theta)\,d\theta$.

Scanned by CamScanner

$$W = \int_C a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$W = \int_0^{2\pi} a^2\,d\theta$$

$$W = 2\pi a^2$$

exemple :

Trouver le travail de champ

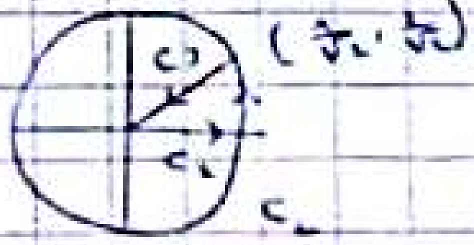
$$\vec{F} = y\,dx + x\,dy = \langle y, x \rangle$$

sur le chemin C

$\left(\begin{array}{l}\text{une partie du cercle} \\ \text{unicité i.e } r = 1\end{array}\right)$ $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$

$C = C_1 + C_2 + C_3$

$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$



1- Sur C_1 : $y = 0 \Rightarrow dy = 0$ et $x : 0 \to 1$

$$\int_{C_1} y\,dx + x\,dy = \int_0 0 = 0.$$

Sur C_2 : $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$

$$\int_{C_2} y\,dx - x\,dy = \int_0^{\pi/4} \sin\theta(-\sin\theta)\,d\theta + \cos\theta(\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,d\theta$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ i\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases} \Rightarrow \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2} = \cos 2\theta$$

$$\int_{C_2} y\,dx - x\,dy = \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta\,d\theta = \left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$$

Sur C_3 :

$$\int_{C_3} y\,dx - x\,dy$$

$$\vec{S} : (1-t)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + t\,(0,0) \quad , t \in [0,1]$$

$$C_3 : \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{t}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{t}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad , 0 \leq t \leq 1$$

$$C_3' : \begin{cases} x = t/\sqrt{2} \\ y = t/\sqrt{2} \end{cases} \quad , 0 \leq t \leq 1 \qquad C_3 = -C_3'$$

$$\int_{C_3} y\,dx - x\,dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) dt$$

$$- \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) dt$$

$$C_3' \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$$

$$\int_{C_1} y\,dx + x\,dy = \int_0^1 (-1+t)\,dt = \left[-t + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{C_2} y\,dx + x\,dy = \int_0^{1/\sqrt{2}} 2t\,dt = \left[t^2\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{C_3} y\,dx + x\,dy = \int_0^1 2\,\frac{t}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

$$\text{mais } W_3 = -\int_{C_3} = -\frac{1}{2}$$

$$W = \oint_C \vec{F}\,dr = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Rem.

Si on a $\vec{F} = \nabla f$ un champ de gradient avec $f(x,y)$ est leur potentielle. Alors on peut simplifier l'évaluation de $W = \oint_C \vec{F}\,dr$.

$$\int_C \vec{F}\,dr = \int \nabla f\,dr = f(P_1) - f(P_0)$$

Preuve.

$$\int_C \vec{F}\, dr = \int_C f_x\, dx + f_y\, dy = \int \langle M, N \rangle$$

$$= \int_C \left(f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} \right) dt$$

$$= \int_C \frac{df}{dt}\, dt$$

$$\frac{d}{dt}\left[f(x(t), y(t)) \right] = f_x \frac{dx(t)}{dt} + f_y \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\int_C \nabla f\, dr = \left[f(x(t), y(t)) \right]_{t_0}^{t_1} = f(P_1) - f(P_0)$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = \sum \frac{(i\theta)^n}{n!}$$

$$\int_{C_1} \vec{F}\, dr = \int_{C_2} = \int_{C_3} = \int_{C_4}$$

Remarque

un champ de vecteur en général n'est pas
un champ de gradient (le champ

magnétique, n'est pas un champ de gradient.

Conséquence 1 :

Si $\vec{F}$ est un champ de gradient alors on a une indépendance des chemins

i.e

$$\int_{c_1} \nabla f \, dr = \int_{c_2} \nabla f \, dr$$

Conséquence 2 :

Si $\vec{F} = \nabla f$ alors $\vec{F}$ est un champ conservative

c : un trajectoire fermé

$$\oint_c \nabla f \, dr = 0 = f(\text{début}) - f(\text{fin})$$

$\vec{F} = \langle -y, x \rangle$ sur C : cercle unité

$$\int_C \vec{F}\, dr = \iiint \operatorname{div} \vec{F}\, d\Omega$$

$$W = \int_C \hat{F} \cdot \hat{T}\, ds = \int_C ds = 2\pi \neq 0$$

Remarque :

le Conservatisme de l'énergie signifie que l'énergie peut être extraite du champ gratuitement l'énergie totale est conservée.

Q : Comment tester est ce que $\vec{F}$ est un champ de gradient.

Si : $\vec{F} = \nabla f = f_x\, dx + f_y\, dy = M\, dx + N\, dy$

On dit que $\vec{F} = \nabla f$

Ssi : $(f_{xy} = f_{yx} \Leftrightarrow M_y = N_x)$

$\vec{F} = (\underbrace{4x^2 + axy}_{M})\,\vec{i} + (\underbrace{3y^2 + 4x^2}_{N})\,\vec{j}$

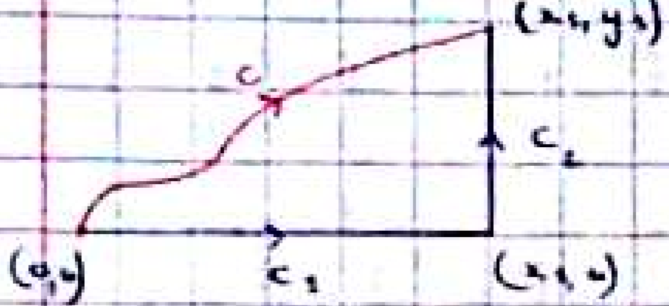
pour quel valeur de a $\vec{F} = \nabla f$?

$M_y = ax = N_x = 8x \Rightarrow a = 8$

$$\begin{cases} \vec{F} = y\, dx + x\, dy \\ M_y = 1 \;,\; N_x = 1 \end{cases}$$

Q2 _ Comment trouver f ?

III _ Méthode de Intégrale curviligne



$f(x,y) = xy + \underbrace{5}_{}$

$$\int \nabla f \, dr = \int_C F \, dr = f(x_1, y_1) - f(0,0)$$

$$\rightarrow f(x_1, y_1) = \int_C \vec{F} \, dr + \underbrace{f(0,0)}_{cst}$$

$$\int_C \vec{F} \, dr = \int_{C_1} \vec{F} \, dr + \int_{C_2} \vec{F} \, dr$$

exp : $\vec{F} = \langle 4x^2 + 8xy , 3y^2 + 4x^2 \rangle$

Sur C_1 : $y = 0$

$\rightarrow dy = 0$ et $x \in [0, x_1]$

$$\int_0^{x_1} 4x^2 \, dx = \frac{4}{3} x_1^3$$

Sur C_2 : $x = x_1$

$\rightarrow dx = 0$ et $y \in [0, y_1]$

$$\int_0^{y_1} 3y^2 + 4x_1^2 \, dy = \left[y^3 + 4x_1^2 y\right]_0^{y_1} = y_1^3 + 4x_1^2 y_1$$

$\Rightarrow$ donc $f(x_1, y_1) = \frac{4}{3} x_1^3 + y_1^3 + 4x_1^2 y_1 + C.$

T2 _ **méthode 2 : les dérivées partielles**

$f_x = 4x^2 + 8xy \quad \dots (1)$

$f_y = 3y^2 + 4x^2 \quad \dots (2)$

(intégration par rapport à x)

de (1) $\quad f(x,y) = \frac{4}{3} x^3 + 4x^2 y + g(y) \quad \dots (3)$

(on dérive par rapport à y)

de (3) $\quad f_y = 4x^2 + g'(y) = 3y^2 + 4x^2$

alors $\quad g'(y) = 3y^2 \quad \rightarrow g(y) = y^3 + c$

donc

$f(x,y) = \frac{4}{3} x^3 + 4x^2 y + y^3 + C.$

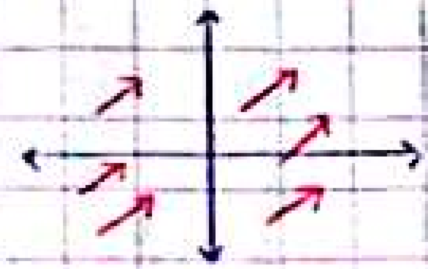
Déf.

Soit $\vec{F} = \langle M, N \rangle$ est un champ de gradient dans une région du plan, différentiable

$\Updownarrow$

$N_x = M_y \Longleftrightarrow \oint_C \vec{F}\, d\vec{r} = 0$

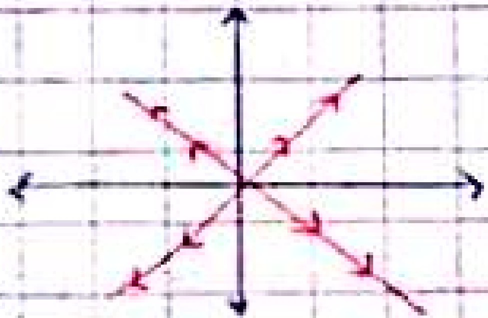
(rot $\vec{F} = 0$ car $\vec{F} = \nabla$)



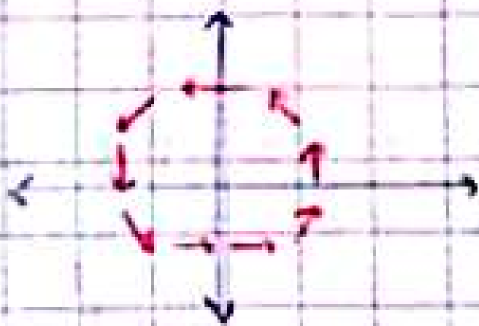
$\vec{F} = \langle \frac{n}{n} , \frac{1}{n} \rangle$

$rot\,\vec{F} = N_x - M_y$

donc $rot\,\vec{F} = 0$.



$rot\,\vec{F} = 0$.



$\vec{F} = \langle -y , x \rangle$

$rot\,\vec{F} = 1 + 1 = 2$

Théorème de Green

• Soit C une courbe fermée entourant une région R, dans le sens anti-horaire, de plus $\vec{F}$ est un vecteur bien défini et différentiable dans R alors :

$$\boxed{\oint_C \vec{F}\, dr = \iint_R \text{rot}\,\vec{F}\, d_R = \iint_R (N_x - M_y)\, d_R}$$

Rem.

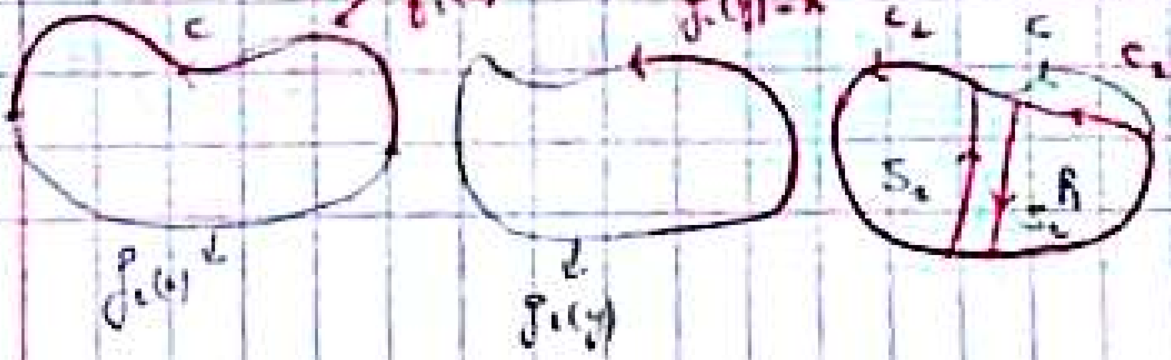
• $\int_a^b f(x)\, dx =$ l'aire si $f(x) \neq 1$

• $\int_a^b f(x)\, dx =$ segment si $f(x) = 1$

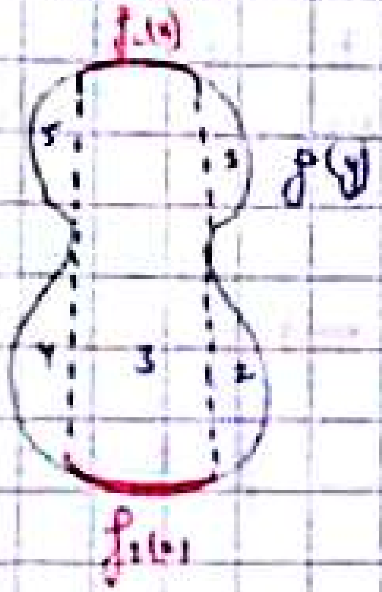
• $\iint f(x,y)\, dx\, dy =$ volume si $f(x,y) \neq 1$

• $\iint f(x,y)\, dx\, dy =$ surface si $f(x,y) = 1$.

• $\iiint f(x,y,z)\, dv =$ volume mobile si $f(x,y,z) \neq 1$.



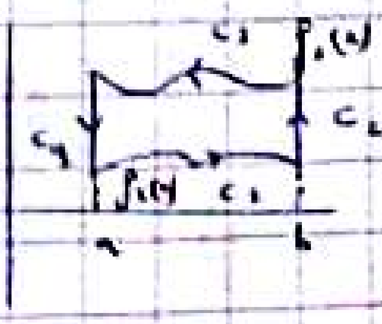
$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + (\underbrace{S_1 + S_2}_{0})$$



Preuve :

1 Cas : $S_2 \quad N = 0$

$$\oint_C \vec{F}\,dr = -\iint_{IR} M_y \, dA$$



Sur C_1 :

$$\int_{C_1} \vec{F}\,dr = \int_{C_1} M\,dx = \int_a^b M(x,y)\,dx = \int_a^b M(x, f_1(x))\,dx$$

Sur C_4 :

$$\int_{C_4} P\,dx = 0 \quad \text{car } x = b \text{ et } dx = 0 ,$$

Sur C_2 :

$$\int_{C_2} P\,dx = 0 \quad \text{car } x = a \text{ et } dx = 0.$$

Sur C_3 :

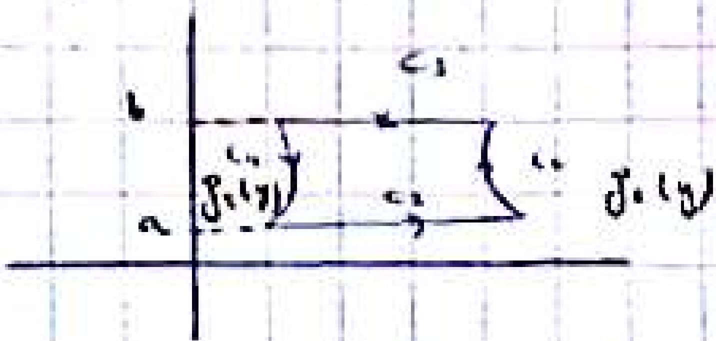
$$\int_{C_3} P\,dx = \int_b^a P(x,y) = -\int_a^b P(x, f_2(x))\,dx$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{F}\,d\vec{r} = \int_a^b P(x, f_1(x)) - P(x, f_2(x))\,dx$$

$$= -\int_a^b \left[P(x,y) \right]_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx$$

$$= -\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy\,dx$$

$$= -\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} P_y\,dy\,dx$$



2 Cas : Si $M = 0$: $\oint F\,dr = \iint_{R} N_x \, dA$.

Sur C_2 : $\int_{C_2} F \, dr = \int_{C_2} N \, dy = \int_{c}^{d} N(x,y) \, dy$

$= \int_{c}^{d} N(g_2(y), y) \, dy$

Sur C_4 : $\int_{d}^{c} N(x,y) \, dy = \int_{d}^{c} N(g_1(y), y) \, dy$

$\Rightarrow \oint_{C} \vec{F} \, dr = \int_{c}^{d} N(g_2(y), y) - N(g_1(y), y) \, dy$

$= \int_{c}^{d} \left[N(x,y) \right]_{g_1(y)}^{g_2(y)}$

$= \int_{c}^{d} \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \, dx \, dy$

$= \iint_{R} N_x \, dA$.

3 Cas : Si $(M, N) = (y, x)$

alors $F = M\,dx + N\,dy$.

d'après 1 et 2

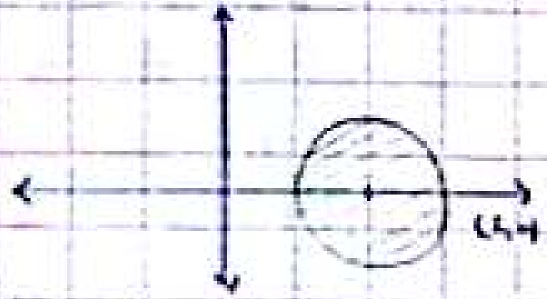
$\oint_{C} \vec{F} \, dr = \iint_{R} \text{rot}\, \vec{F} \, dA$.

Scanned by CamScanner

exp. Soit C un cercle de rayon 1 et de centre $(2,0)$ dans le sens antihoraire avec.

$$W = \oint y e^{-x} \, dx + \left(\frac{1}{2} x^2 - e^{-x} \right) dy .$$

- utiliser le Th de green pour calculer W



$$\begin{cases} x = 2 + \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\theta \, e^{-(2+\cos\theta)} (-\sin\theta) + \left(\frac{1}{2}(2+\cos\theta)^2 - e^{-(2+\cos\theta)} \cos\theta \right) d\theta$$

$$\vec{F} = \langle \underbrace{y e^{-x}}_{M} , \underbrace{\tfrac{1}{2}x^2 - e^{-x}}_{N} \rangle$$

$$\oint_C \vec{F} \, dr = \iint_R \operatorname{rot} \vec{F} \, dA$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = N_x - M_y = (x + e^{-x}) - e^{-x} = x$$

$$\begin{cases} x = 2 + r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\operatorname{Jac}(f) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \, dr \, d\theta$$

$(dA = r\,dr\,d\theta)$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 + r\cos\theta) \, r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[r^2 + \frac{1}{3} r^3 \cos\theta \right]_0^1 d\theta$$

$$= \left[\theta + \frac{1}{3} \sin\theta \right]_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi$$

$$W = \iint_R 2 \, dA = 2 \, l'aire(R) = 2\pi$$

Centre de la masse $= \dfrac{1}{l'aire(R)} \iint x \, dA$.

Rem :

- rot $\vec{F}$ n'est pas défini au pt $(0,0)$

Le Th de green n'est pas applicable car :

rot $F = \nexists$ au pt $(0,0)$

Le Flux d'un champ de vecteur.

Déf :

Le flux c'est un autre Type des intégrale curviligne défini par :

$$\boxed{F = \int \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \int \vec{F} \, d\vec{S}}$$

$$W = \int F \, \hat{T} \, dS$$

$$F = \int_C F \, \hat{n} \, dS = \lim_{\Delta S \to 0} \sum \vec{F} \, \hat{n} \, \Delta S$$

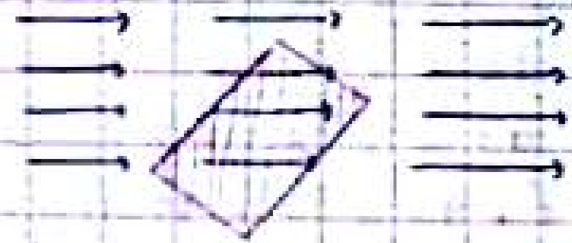
Scanned by CamScanner

• Le travail : c'est l'addition des composant tangentielle de $\vec{F}$ sur la longueur de c.

• Le Flux : c'est l'addition des composants du vecteur normal de $\vec{F}$ sur la longueur de c.

Interprétations : Supp que $\vec{F}$ est un champ de vitesse

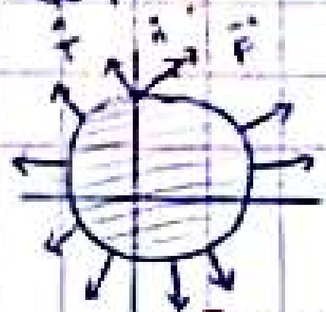
• La mesure de Flux : c'est la quantité de fluide qui passe par c par unité de Temps



$(F) \cdot (\hat{n} \, ds) =$ Surface

Exp : Soit c un cercle de rayon 1 a l'origine dans le sens anti horaire
$\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$
calculer le flux de F ?

Sol :



$\hat{n} = \dfrac{\vec{N}}{\|N\|}$

$\hat{n} = \langle x, y \rangle$

$$F = \int_c \langle x, y \rangle \cdot \langle x, y \rangle \, ds$$

$$F = \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta = 2\pi$$

$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \Rightarrow ds = d\theta$

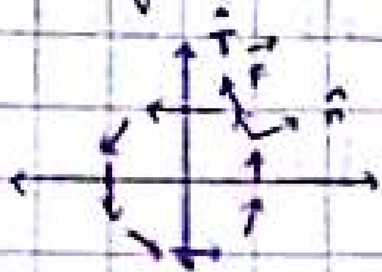
$$\begin{cases} \vec F = \langle x, y \rangle \\ \hat n \, dS = \langle dy, -dx \rangle \end{cases}$$

ou bien :

$$F = \int_C \vec F \cdot \hat n \, ds = \int_C x\,dy - y\,dx = \int_0^{2\pi} 1\,d\theta = 2\pi$$

ex:

Calculer le flux (F) de : $\vec F = -y\,dx + x\,dy$



$\vec F = \langle -y, x \rangle$

puisque :

$$\vec F \perp \hat n \Rightarrow \int \vec F \cdot \hat n \, ds = 0.$$

$dr = \langle dx, dy \rangle = \hat T \, ds$

$\hat T \, ds = \langle dx, dy \rangle$

$\hat n \, ds = \langle dy, -dx \rangle$

$$\int_C \vec F \cdot \hat n \, ds = \int_C \langle M, N \rangle \langle dy, -dx \rangle$$

$$= \int_C -N\,dx + M\,dy.$$

$$F = \int_C \langle -y, x \rangle \langle dy, -dx \rangle$$

$$F = \int_C -x\,dx - y\,dy = \int_0^{2\pi} -\cos\theta(-\sin\theta)\,d\theta - \sin(\theta)(\cos\theta)\,d\theta$$

$$F = 0$$

Théorème de Green pour un Flux.

- Soit C une courbe fermée entourant une région R dans le sens anti-horaire avec $\vec{F}$ champ de vecteur différentiable et bien définie, Alors :

$$\boxed{\oint_C \vec{F}\,\hat{n}\,ds = \iint_R \operatorname{div}\vec{F}\,dA}$$

$\operatorname{div}\vec{F} = M_x + N_y$ $\qquad\qquad \vec{F} = \langle M, N\rangle$

$\operatorname{div}\vec{F} = 1 + 1 = 2$

Remarque.

- La divergence mesure l'extension de flux

Preuve.

$\vec{F}\,\hat{n}\,ds = \langle M, N\rangle \cdot \langle dy, -dx\rangle$

$= -N\,dx + M\,dy.$

$$\oint_C -N\,dx + M\,dy = \iint_R M_x + N_y\,dA = \iint_R \operatorname{div}\vec{F}\,dA$$

Travail	$\oint_C \vec{F}\,\vec{T}\,ds = \iint_R \operatorname{rot}\vec{F}\,dA$
Flux	$\oint_C \vec{F}\,\hat{n}\,ds = \iint_R \operatorname{div}\vec{F}\,dA$