COURS
ANALYSE FONCTIONNELLE
UNIVERSITÉ DE TEBESSA

Scanned by CamScanner

Partie I

Le théorème de Baire et ses conséquences

1 Le théorème de Baire

Théorème 1.1 "Théorème de Baire"

Dans un espace métrique complet, la réunion d'une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide est encore d'intérieur vide.

Autrement dit:

Soit X un espace métrique complet et $\Phi_n, n \geq 1$ des fermés de X.

Alors si $\left(\bigcup_{n\geq 1} \Phi_n\right)^{\circ} \neq \emptyset$, il existe $N \geq 1$ tel que $\overset{\circ}{\Phi}_N \neq \emptyset$.

Un énoncé équivalent, en passant au complémentaire $\Omega_n = X \setminus \Phi_n$, est:

Théorème 1.2 "Théorème de Baire, $2^{ème}$ version"

Si X est un espace métrique complet, l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses est encore dense dans X.

Démonstration

Soit $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ouverts denses, et soit $G = \bigcap_{n\geq 1} \Omega_n$.

Soit Ω un ouvert non vide arbitraire de X. On va montrer que $\Omega \cap G \neq \emptyset$. Cela prouvera que G est dense dans X.

On notera par respectivement $\overline{B}(x,r)$ et $B(x,r)$ les boules fermée et ouverte de centre x et de rayon r.

Soit $x_0 \in \Omega$ et $r_0 > 0$ tels que: $\overline{B}(x_0,r_0) \subset \Omega$.

Comme Ω_1 est dense, l'ouvert $\Omega_1 \cap B(x_0,r_0)$ n'est pas vide, il existe donc $x_1 \in \Omega_1 \cap B(x_0,r_0)$ et $r_1 > 0$ tels que:

Scanned by CamScanner

$\overline{B}(x_1,r_1) \subset \Omega_1 \cap B(x_0,r_0) \subset \Omega_1 \cap \Omega$, et l'on peut prendre $r_1 \leq r_0/2$.

En continuant ainsi, on obtient des $x_n \in \Omega_n$ et des $r_n > 0$, pour tout $n \geq 1$ tels que :

$\overline{B}(x_{n+1},r_{n+1}) \subset \Omega_{n+1} \cap B(x_n,r_n) \subset \Omega_{n+1} \cap \Omega_n \cap \dots \cap \Omega_1 \cap \Omega$, et $0 < r_{n+1} \leq r_n/2$.

Alors la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy ($r_n \longrightarrow 0$ et $\|x_{n+1} - x_n\| < r_n$)

Comme X est complet, (x_n) possède une limite x'.

Comme $x_{n+p} \in B(x_n,r_n)$, $\forall n \geq 1$, $\forall p \geq 1$, on obtient donc

$x' \in \overline{B}(x_n,r_n)$ $\forall n \geq 1$, d'où $x' \in G \cap \Omega$.

2 Le théorème de Banach_Steinhaus

principe de la borne uniforme

Théorème 2.1 "Théorème de Banach_Steinhaus"

$T_i \in \mathcal{B}(E,F)$

Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T_i : E \longrightarrow F$ des applications linéaires continues ($i \in I$, ensemble d'indice quelconque) telles que : $C_x = \sup_{i\in I} \|T_i x\|_F < +\infty$, $\forall x \in E$. ($\{T_i x ; i \in I\}$ borné)

Alors : $C = \sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$.

En d'autre terme, il existe un nombre positif $C < +\infty$ tel que :

$\|T_i x\|_F \leq C$, $\forall x \in B_E$, $\forall i \in I$, ou encore $\overline{B}_E = \overline{B}(0,1)$

$$\|T_i x\|_F \leq C \|x\|_E, \ \forall x \in E, \forall i \in I$$

Notons que la complétude de F n'est pas indispensable.

Démonstration

Soit $\Phi_n = \{x \in E ; \forall i \in I : \|T_i x\| \leq n\} = \bigcap_{i \in I} \{x \in E ; \|T_i x\| \leq n\}$.

Φ_n est un fermé (car les T_i sont bornés), et l'hypothèse signifie que $\bigcup_{n\geq 1} \Phi_n = E$.

$\{x \ \forall n \ f_n(x) \geq 1\} \subset \{ \text{-0}2\text{-}x \ f_n(x) \geq 1 \}$

Scanned by CamScanner

Puisque E est un espace métrique complet, le théorème de Baire dit qu'il existe $N \geq 1$ tel que $\overset{\circ}{\overline{\Phi}}_N \neq \emptyset$.

Soient $x_0 \in E$ et $r > 0$ tels que $\overline{B}(x_0, r) \subset \overline{\Phi}_N$.

On a : $\|T_i(x_0 + ry)\|_F \leq N$, $\forall i \in I$, $\forall y \in \overline{B}_E = \overline{B}(0,1)$,

donc $r\|T_i y\|_F - \|T_i x_0\|_F \leq N$, $\forall i \in I$, $\forall y \in \overline{B}_E$,

d'où $\|T_i y\|_F \leq \frac{1}{r}\left(N + \sup_{j \in I} \|T_j x_0\|_F\right)$ $\forall i \in I$, $\forall y \in \overline{B}_E$.

Corollaire 2.2

Soient E et F deux espaces de Banach et $T_n : E \longrightarrow F$, $n \geq 1$ une suite d'applications linéaires continues telle que :

$$\lim_{n \to \infty} T_n x = Tx \text{ existe pour tout } x \in E.$$

Alors :

(1) $\sup_{n \geq 1} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$.

(2) $T : E \longrightarrow F$ est linéaire et continue.

De plus : $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \underline{\lim} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Démonstration

La convergence de la suite $(T_n x)$ $\forall x \in E$, entraîne que :

$C_x = \sup_{n \geq 1} \|T_n x\| < +\infty$ pour tout $x \in E$, d'où la première assertion par le théorème de Banach–Steinhaus. On voit ensuite facilement que T est linéaire.

Si $C = \sup_{n \geq 1} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$, alors $\forall n \geq 1$ $\|T_n x\| \leq C\|x\|$. $\|T_n x\| \leq C\|x\|$ $\forall x \in E$,

donc T est continue et $\|T\| \leq C$. Ensuite, comme $\|T_n x\| \leq \|T_n\|\|x\|$ on obtient $\|Tx\| = \lim \|T_n x\| = \underline{\lim} \|T_n x\| \leq (\underline{\lim} \|T_n\|)\|x\|$.

نرجو ادخال النهاية

3 Le théorème de l'application ouverte

Théorème 3.1 Théorème de l'application ouverte

Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue surjective. Alors, il existe $c > 0$ tel que

$$T[B_E(0,1)] \supset B_F(0,c). \qquad (*)$$

En particulier T est une application ouverte.

Remarques

(1) Il est nécessaire que les deux espaces E et F soient complets.

(2) Si T vérifie $(*)$, alors elle est ouverte. En effet : soit U un ouvert de E (non vide) et soit $y_0 \in T(U)$, alors il existe $x \in U$ tel que $y_0 = Tx$. Soit $r > 0$ tel que $B_E(x,r) \subset U$, alors :

$$y_0 + T[B_E(0,r)] = Tx + T[B_E(0,r)] = T[B_E(x,r)] \subset T(U),$$

d'où par $(*)$

$$B_F(y_0, rc) = y_0 + B_F(0,rc) \subset y_0 + T[B_E(0,r)] \subset T(U).$$

(3) T continue surjective équivalent à :

$$\forall y \in F, \exists x \in E ; \quad y = Tx \text{ et } \|y\| \leq c\|x\|.$$

Démonstration

- **Étape 1 :** On cherche $\alpha > 0$ tel que $B_F(0,\alpha) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$.

On note $F_n = \overline{T(B_E(0,n))}$ pour tout $n \geq 1$. Comme T est surjective on a,

$$F = T(E) = T\Big(\bigcup_{n\geq 1} B_E(0,n)\Big) = \bigcup_{n \geq 1} T(B_E(0,n)) = \bigcup F_n.$$

Comme F est complet, le théorème de Baire dit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que F_{n_0} soit d'intérieur non vide.

Scanned by CamScanner

Soient $y_0 \in F_{n_0}$ et $r_0 > 0$ tels que $B_F(y_0; r_0) \subset \overline{T(B_E(0,n_0))}$.

Comme T est linéaire on a: $B_F(-y_0; r_0/n_0) \cup B_F(y_0; r_0/n_0) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$

et par convexité de $\overline{T(B_E(0,1))}$

$$\tfrac{1}{2} B_F(y_0, r_0/n_0) + \tfrac{1}{2} B_F(-y_0, r_0/n_0) = B_F(0, r_0/n_0) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$$

<u>Etape 2</u>: Prenons $c = \frac{r_0}{4n_0}$ et montrons que $B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1))$

On a: $B_F(0,c) \subset \overline{T(B_E(0,1/4))}$. Soit $y \in B_F(0,c)$, alors $y \in \overline{T(B_E(0,1/4))}$, donc il existe une suite (z_n) de $B_E(0,1/4)$ telle que $Tz_n \longrightarrow y$, i.e $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \geq 1, \forall n \geq n_1\ \|Tz_n - y\| < \varepsilon$.

Pour $\varepsilon = c/2$, posons $x_1 = z_{n_1}$, i.e $\|x_1\| < 1/4$ et $\|Tx_1 - y\| < \frac{c}{2}$.

Alors $(y - Tx_1) \in B_F(0, c/2) = \frac{1}{2} B_F(0,c) \subset \frac{1}{2}\overline{T(B_E(0,1/4))}$.

avec même raisonnement $\exists\, x_2 \in E$ tel que

$$\|x_2\| < 1/8 \quad \text{et} \quad \|y - Tx_1 - Tx_2\| < c/4.$$

En continuant on obtient une suite (x_n) d'éléments de E telle que $\forall n \geq 1\ \|x_n\| < \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\|y - T(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\| < \frac{c}{2^n}$.

Posons $u_n = \sum_{p=1}^{n} x_p\ \forall n \geq 1$. On a $\|u_{n+1} - u_n\| = \|x_{n+1}\| < \frac{1}{2^{n+2}}$, donc (u_n) est une suite de Cauchy dans E, et comme E est complet, elle est donc convergente.

Si $x = \sum_{n \geq 1} x_n$, alors $\|x\| = \|\lim_n \sum_{i=1}^{n} x_i\| = \lim \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|$

$$\leq \lim \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \leq \lim_n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2}$$

Comme T est continue, $Tx = \sum_{n \geq 1} Tx_n = y$.

D'où $B_F(0,c) \subset T(\bar{B}_E(0,1/2)) \subset T(B_E(0,1))$.

Théorème 3.2 **Théorème des isomorphismes de Banach**

Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue bijective. Alors T^{-1} est automatiquement continue, T est donc un isomorphisme.

Démonstration

D'après le théorème de l'application ouverte, il existe $c > 0$ tel que $B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1))$ i.e $T^{-1}(\overline{B}_F(0,\frac{c}{2})) \subset T^{-1}(B_F(0,c)) \subset B_E(0,1)$.

Pour $y \in \overline{B}_F(0,\frac{c}{2})$, $\|T^{-1}y\| \leq 1$, et par conséquent $\|y\| \leq 1 \Rightarrow \|T^{-1}y\| \leq 2/c$.

Donc $\forall y \in F \quad \|T^{-1}y\| \leq (2/c)\|y\|$, d'où la continuité de T^{-1}.

Corollaire 3.3

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes telles que E soit complet pour chacune d'elles. Alors si ces deux normes sont comparables, elles sont équivalentes.

Démonstration

Les deux normes sont comparables signifie que l'une d'elles est plus fine que l'autre ($\forall x \in E \quad |||x||| \leq C\|x\|$). Cette inégalité signifie que l'application identité $Id : (E, \|\cdot\|) \longrightarrow (E, |||\cdot|||)$, qui est linéaire et bijective, est continue, c'est donc un isomorphisme d'où l'équivalence de ces normes

Théorème 3.4 **Théorème du graphe fermé**

Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ une

Scanned by CamScanner

application linéaire. Alors T est continue si et seulement si le graphe de T : $G(T)$ est fermé dans $E \times F$.

<u>Démonstration</u> :

Il est facile de verifier que T continue entraîne que $G(T)$ est fermé.

Supposons que $G(T)$ est fermé dans $E \times F$. Comme E et F sont complets, on verifie aisément que $E \times F$ muni de la norme $\|(x,y)\|_{E\times F} = \max(\|x\|_E, \|y\|_F)$ est aussi complet.

$G(T)$ est un fermé dans l'espace complet $E \times F$, donc l'e.v.n $G(T)$ muni de la norme induite est complet.

Définissons
$$P : G(T) \longrightarrow E$$
$$(x,y) \longmapsto x$$

L'application P est bijective. De plus, pour tout $(x,y) \in G(T)$ on a $\|P(x,y)\|_E = \|x\|_E \leqslant \|(x,y)\|_{E\times F}$.

Donc P est continue. Le théorème des isomorphismes de Banach assure donc que P^{-1} est aussi continue. Autrement dit, il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in E$, $\|Tx\|_F \leqslant \max(\|x\|_E, \|Tx\|_F) \leqslant c\|x\|_E$ d'où la continuité de T.

<u>Remarque</u>

Soient E et F des Banach et T linéaire de E dans F. Pour montrer la continuité de T, il suffit donc d'établir que pour toute suite (x_n) de E telle que (x_n, Tx_n) converge vers (x,y), on a $y = Tx$.

Scanned by CamScanner

Partie II

Le théorème de Hahn-Banach et ses conséquences

1 Théorème de Hahn-Banach, forme analytique

Théorème 1.1 « Hahn-Banach, version analytique »

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et p une fonction de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant : (i) $\forall \lambda \geq 0, \forall x \in E, \ p(\lambda x) = \lambda p(x)$.

(ii) $\forall (x,y) \in E^2, \ p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Soit F un s.e.v de E et L une forme linéaire sur F telle que

$$\forall x \in F; \ L(x) \leq p(x).$$

Alors il existe une forme linéaire $\tilde{L}$ sur E, qui prolonge L et telle que $\forall x \in E; \ \tilde{L}(x) \leq p(x)$. $\tilde{L}|_F = L$

La démonstration de ce théorème repose sur un résultat célèbre de la théorie des ensembles, le lemme de Zorn qui est lui-même équivalent à l'axiome du choix.

Définitions 1.2

(1) Soit X un ensemble. On dit que $\leq$ est une relation d'ordre sur X si elle est reflexive, antisymétrique et transitive.

On dit que l'ordre est total si de plus pour tout $(x,y) \in X^2$ on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

(2) Le couple $(X, \leq)$ est appelé ensemble ordonné

(3) Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné et G une partie de X.

On dit que $x \in X$ un majorant de G si $\forall y \in G; \ y \leq x$.

Scanned by CamScanner

maximum $\Rightarrow$ maximal ?

On dit que $x \in X$ est un élément maximal si $\forall y \in G,\ x \leqslant y \Rightarrow y = x$.

(4) On dit qu'un ensemble ordonné $(X, \leqslant)$ est inductif si toute partie totalement ordonnée de X admet un majorant

Lemme 1.3 "Lemme de Zorn"

Tout ensemble non vide inductif admet un élément maximal.

Démonstration du théorème 1.1

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples (V, u) tels que V soit un s.e.v de E contenant F, et u une forme linéaire sur V qui coïncide avec L sur F et vérifie $u(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in V$. $u \in V^*$, $u|_F = L$

On munit $\mathcal{E}$ de la relation $\leqslant$ définie par :

$$(V_1, u_1) \leqslant (V_2, u_2) \text{ si } V_1 \subset V_2 \text{ et } u_2 = u_1 \text{ sur } V_1 .$$

montrons que $(\bigcup V_i, u)$ avec $u(x) = u_i(x)$ pour $x \in V_i$ est majorant

Par construction, l'ensemble $(\mathcal{E}, \leqslant)$ est ordonné. De plus, il est non vide car contient (F, L) et inductif car si $\{(V_i, u_i), i \in I\}$ est une partie totalement ordonnée de $\mathcal{E}$ alors $\bigcup_{i \in I} V_i$ est un s.e.v de E contenant F et la forme linéaire u défini sur $\bigcup_{i \in I} V_i$ par $u(x) = u_i(x)$ si $x \in V_i$ est bien un majorant de la partie $\{(V_i, u_i);\ i \in I\}$. $(\bigcup_{i \in I} V_i, u)$ $\quad F \subset \bigcup V_i$

D'après le lemme de Zorn, $\mathcal{E}$ admet un élément maximal $(V, \tilde{L})$. Supposons par l'absurde que $V \neq E$, alors $E \setminus V$ contient au moins un élément x non nul.

$\tilde{L}$ ... E et $V = E$ ... $\tilde{L}|_F = L$, $\tilde{L} \leqslant p$ $\quad \exists x \in E,\ x \notin V$

Pour $a \in \mathbb{R}$ un réel donné, on définit alors une forme linéaire $\tilde{L}_a$ sur $V \oplus \mathbb{R}x$ par :

$\tilde{L}_a : V \oplus \mathbb{R}x \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad y + \lambda x \longmapsto \tilde{L}_a(y + \lambda x) = \tilde{L}(y) + \lambda a$

$\mathbb{R}x = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\tilde{L}_a|_V = \tilde{L}$

$$\forall y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \tilde{L}_a(y+\lambda x) = \tilde{L}(y) + \lambda a$$

Alors $\tilde{L}_a = \tilde{L}$ sur V. Cherchons $a \in \mathbb{R}$ pour lequel

$$\forall y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \tilde{L}_a(y+\lambda x) \leqslant P(y+\lambda x) \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

L'inégalité $(*)$ est clairement vérifiée pour tout $y \in V$ si $\lambda = 0$.

. Pour $\lambda > 0$ $\quad \tilde{L}_a(y+\lambda x) \leqslant P(y+\lambda x) \Leftrightarrow \tilde{L}(y) + \lambda a \leqslant \lambda P(\frac{1}{\lambda} y + x)$

$$\Leftrightarrow \lambda \tilde{L}\left(\tfrac{1}{\lambda} y\right) + \lambda a \leqslant \lambda P(\tfrac{1}{\lambda} y + x)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{L}(\tfrac{1}{\lambda} y) + a \leqslant P(\tfrac{1}{\lambda} y + x).$$

Alors $\forall y \in V \quad \tilde{L}(y) + a \leqslant P(y+x)$.

• Pour $\lambda < 0$ l'inégalité $(*)$ est équivalente à

$$\forall z \in V \quad \tilde{L}(z) - a \leqslant P(z - x).$$

Finalement l'inégalité $(*)$ est vérifiée si est seulement si a est choisi de telle sorte que

$$\sup_{z \in V} \left(\tilde{L}(z) - P(z-x)\right) \leqslant a \leqslant \inf_{y \in V} \left(P(y+x) - \tilde{L}(y)\right)$$

Comme pour tout $(y,z) \in V^2$ on a

$$\tilde{L}(y) + \tilde{L}(z) = \tilde{L}(y+z) \leqslant P(y+z) \leqslant P(y+x) + P(z-x)$$

identiquement $\tilde{L}(z) - P(z-x) \leqslant P(y+x) - \tilde{L}(y)$, un tel choix de a est possible.

On a donc $(V, \tilde{L}) \leqslant (V \oplus \mathbb{R}x, \tilde{L}_a)$, et comme $x \notin V$ $(V \subsetneq V \oplus \mathbb{R}x)$ cela contredit la maximalité de $(V, \tilde{L})$.

Définition 1.4

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit qu'une application $P : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une semi-norme si

Scanned by CamScanner

(1) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$, $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

(2) $\forall (x,y) \in E^2$; $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Corollaire 1.5

Sous les hypothèses du théorème de Hahn-Banach, si de plus p est une semi-norme alors on peut trouver une forme linéaire $\tilde{L}$ prolonge L sur E et telle que $\forall x \in E$, $|\tilde{L}(x)| \leq p(x)$.

Démonstration

Noton $\tilde{L}$ le prolongement fourni par le théorème de Hahn-Banach. Comme $\tilde{L}(-x) = -\tilde{L}(x)$ pour tout $x \in E$, on obtient clairement $|\tilde{L}(x)| \leq p(x)$

et $p(-x) = p(x)$

Corollaire 1.6

Le corollaire précédent reste valable pour les espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ à condition de supposer de plus que $|L(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in F$ et d'interpréter $|\cdot|$ comme le module.

Démonstration

On considère E comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Il est clair que l'application linéaire "$\operatorname{Re} L$" vérifie les hypothèses du corollaire précédent. Soit ℓ une forme linéaire de E dans $\mathbb{R}$ qui prolonge $\operatorname{Re} L$ sur E et vérifie $\forall x \in E$, $|\ell(x)| \leq p(x)$. $\ell|_F = \operatorname{Re} L$

($\mathbb{C}$ e.v)

Pour tout $x \in E$ on pose alors $\tilde{L}(x) = \ell(x) - i\ell(ix)$. Il est immédiat que $\tilde{L}$ est une forme linéaire de E sur $\mathbb{C}$ et que $\tilde{L}$ coïncide avec L sur F. Enfin, si l'on note $\tilde{L}(x) = |\tilde{L}(x)| e^{i\theta}$, on a $e^{-i\theta} \tilde{L}(x) \in \mathbb{R}$

Scanned by CamScanner

donc $\quad |\tilde{L}(x)| = \tilde{L}(e^{-i\theta}x) = \varphi(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = p(x)$.

Corollaire 1.7

> Soit F un s.e.v de E et L une forme linéaire continue sur F.
> Alors on peut prolonger L en une forme linéaire continue $\tilde{L}$ sur E et de même norme que L.

Démonstration

On applique l'un des deux corollaires précédent avec

$$: \; p(x) = \|L\|_{\mathcal{L}(F,\mathbb{K})} \|x\|_E.$$

Il est clair que $\forall x \in F \quad |\tilde{L}(x)| \leq \|L\|_{\mathcal{L}(F,\mathbb{K})} \|x\|_E = p(x)$, et que p est une semi-norme. Comme $\tilde{L}$ est une polongement de L sur E, alors $\|\tilde{L}\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})} \geqslant \|L\|_{\mathcal{L}(F,\mathbb{K})}$ d'où l'égalité.

Définition 1.8

On appelle dual topologique de E l'ensemble des formes linéaires continue sur E. On note E' le dual topologique

Corollaire 1.9

> Soit E un e.v.n et $x_0 \in E$. Alors il existe $f \in E'$ telle que
> $$\|f\|_{E'} = \|x_0\|_E \quad \text{et} \quad |f(x_0)| = \|x_0\|_E^2$$

Démonstration

Le cas $x_0 = 0$ est trivial. On applique le corollaire précédent à $F = \mathbb{K}x_0$ et L définie sur F par $L(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|_E^2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Corollaire 1.10

> Soit E un e.v.n. Pour tout $x \in E$, ~~on a~~ $\cancel{\|x\|_E = \sup\{|L(x)|; L \in E', \|L\|_{E'} = 1\}}$

il existe $L \in E'$ tq: $\|L\| = 1$ et $|L(x)| = \|x\|$

Scanned by CamScanner

Corollaire 1.11

Soit E un e.v.n. Pour tout $x \in E$; $\|x\|_E = \sup\{|L(x)| ; L \in E', \|L\|_{E'} = 1\}$

Démonstration :

soit $x \in E$. Pour toute forme linéaire L sur E de norme 1 ;

$|L(x)| \leq \|L\|\|x\| = \|x\|$, alors $\sup\{|L(x)| ; L \in E', \|L\| = 1\} \leq \|x\|$

Reciproquement, le corollaire précédent assure l'existence de $L \in E'$

tel que $\|L\| = 1$ et $|L(x)| = \|x\|$.

---

2 Théorème de Hahn-Banach, forme géométrique

Dans toute cette section, les espaces vectoriels considérés sont réels

Définition 2.1

On dit que $M \subset E$ est un sous-espace affine de E s'il existe $x_0 \in E$ et un s.e.v M_0 de E tels que $\boxed{M = x_0 + M_0}$. On dit que M est le sous-espace affine passant par x_0 et dirigé par M_0.

Définition 2.2

On dit que H est un hyperplan de E s'il existe une forme linéaire L non nulle et un réel α tels que $\boxed{H = \{x \in E ; L(x) = \alpha\}}$.

Remarque

Un hyperplan est donc un sous-espace affine diriger par le noyau d'une forme linéaire. Si de plus cette forme linéaire est continue

ss: ~~alors~~ l'hyperplan est nécessairement fermé.

ferm $H = \{x \in E : g(x) = \alpha\} = \overset{\text{cont}}{g}^{-1}(\overset{\text{ferme}}{\{\alpha\}})$

Scanned by CamScanner

Lemme 2.3

Tout hyperplan de E est ou bien dense dans E ou bien fermé dans E.

Démonstration

Soit $H = \{x \in E \,;\, \varphi(x) = \alpha\}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et φ une forme linéaire sur E (non nulle). Supposons que H ne soit pas dense dans E.

Alors, il existe $x_0 \in E$ et $r_0 > 0$ tels que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset E \setminus H$.

Supposons (pour fixer les idées) que $\varphi(x_0) < \alpha$, alors par convexité de $\varphi(\overline{B}(x_0, r_0))$ $\forall x \in \overline{B}(x_0, r_0)$, $\varphi(x) < \alpha$, et donc

$$\forall x \in \overline{B}(0,1) \quad \varphi(x_0 + r_0 x) < \alpha.$$

Par conséquent φ est continue et $\|\varphi\| \leqslant \frac{1}{r_0}(\alpha - \varphi(x_0))$, il en résulte que $H = \varphi^{-1}(\{\alpha\})$ est fermé. L'image [illegible] [illegible] $\{x \in E,\ L(x) = \alpha\}$

Définition 2.4

L une forme lin sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$. on dit que H hyper

Soient A et B deux sous-ensembles de E ~~et H un hyperplan de E~~.

On dit que H sépare A et B ~~s'il existe une forme linéaire L sur E et un réel α tels que~~ si $\forall x \in A$, $L(x) \leqslant \alpha$ et $\forall x \in B$, $L(x) \geqslant \alpha$.

On dit que H sépare A et B strictement si les inégalités ci-dessus sont strictes.

Théorème 2.5 « Théorème de Hahn-Banach, version géométrique »

Soient A et B deux parties convexes disjointes et non vides de l'espace vectoriel normé E avec A fermé et B compacte. Alors il existe un hyperplan fermé séparant strictement A et B. Plus précisément, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $L \in E'$ tels que $\forall x \in A$, $L(x) < \alpha$ et $\forall x \in B$, $L(x) > \alpha$

[illegible]

[illegible] $\in A \times B$

$L(a) < \alpha < L(b)$

Scanned by CamScanner

La preuve de ce théorème repose sur les deux résultats intermédiaires suivants

(1) Si A est une partie convexe ouverte non vide de E et M un sous-espace affine de E, disjoint de A alors il existe un hyperplan fermé contenant M et disjoint de A.

(2) Si A et B sont convexes, disjoints et non vides avec A ouvert, alors il existe un hyperplan fermé séparant A et B.

Preuve du premier résultat

Supposons pour simplifier que $0 \in A$. On introduit la fonction de Minkowski p définie par

$$\forall x \in E \quad p(x) = \inf\{\lambda > 0 \,;\, \lambda^{-1} x \in A\}.$$

a) Il est facile de vérifier que

$$\forall x \in E, \forall \alpha > 0 \quad p(\alpha x) = \alpha p(x).$$

b) Montrons que $A = p^{-1}([0,1[)$.

Soit $x \in A$, alors comme A est ouvert, $(1+\varepsilon)x \in A$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Donc $p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$.

Inversement si $p(x) < 1$, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $\alpha^{-1} x \in A$ et donc $x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1-\alpha)0 \in A$.

c) Montrons que $\forall x, y \in E \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

Soient $x, y \in E$ et $\varepsilon > 0$. D'après (a) et (b) on sait que $\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in A$ et $\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in A$ $\left(p\left(\frac{x}{p(x)+\varepsilon}\right) = \frac{p(x)}{p(x)+\varepsilon} < 1\right)$.

Donc $\frac{tx}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y)+\varepsilon} \in A$ pour tout $t \in [0,1]$. En particulier

Scanned by CamScanner

pour $t = \dfrac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$ on obtient $\dfrac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in A$. On en déduit grâce à (a) et (b) que $p(x+y) < p(x)+p(y)+2\varepsilon$, $\forall \varepsilon>0$. D'où le résultat.

d) Soit $x_0 \in E$ et M_0 un s.e.v de E tels que $M = x_0 + M_0$.

Comme $0 \in A$ et $M \cap A = \emptyset$, alors $x_0 \notin M_0$. Soit $V = M_0 \oplus \mathbb{R}x_0$ le s.e.v engendré par x_0 et M_0, on définit une forme linéaire L sur V par : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall y \in M_0 \quad L(y+\lambda x_0) = \lambda$.

Si $\lambda \leq 0$ et $y \in M_0$, alors $L(y+\lambda x_0) \leq p(y+\lambda x_0)$ puisque $L(y+\lambda x_0) = \lambda \leq 0 \leq p(y+\lambda x_0)$.

Si $\lambda > 0$, on a $p(y+\lambda x_0) = \lambda p(x_0+\lambda^{-1}y) \geq \lambda = L(y+\lambda x_0)$ puisque $x_0+\lambda^{-1}y \notin A$ (i.e $p(x_0+\lambda^{-1}y)\geq 1$). (c à $x_0+\lambda^{-1}y \in M$)

Le théorème de Hahn-Banach nous permet donc de prolonger L en $\tilde{L}$ sur E telle que $\tilde{L} \leq p$ sur E.

Soit $H = \{x \in E ;\ \tilde{L}(x) = 1\}$. Comme $M = x_0 + M_0$, alors $\tilde{L}(M) = \{1\}$ donc $M \subset H$, et comme $\tilde{L} \leq p$ sur E et $A = \{x \in E ;\ p(x) < 1\}$ donc $H \cap A = \emptyset$, ainsi H n'est pas dense puisque A est ouvert. Alors H est un hyperplan fermé contenant M et est disjoint de A.

Le cas général où A ne contient pas 0 peut se ramener au cas précédent par translation.

Remarque

De ce premier résultat, on déduit que si $0 \in M$ alors il existe une forme linéaire L sur E telle que $L = 0$ sur M et $L > 0$ sur A.

Scanned by CamScanner

Preuve du deuxième résultat

Sous les hypothèse A ouvert convexe, B convexe et $A \cap B = \emptyset$, l'ensemble $C = A - B$ est ouvert, convexe, non vide et ne contient pas 0.

Grâce à la remarque précedente (appliquée avec $M = \{0\}$ et $A = C$), il existe une forme linéaire L sur E telle que $L > 0$ sur C.

Autrement dit, $\forall (a,b) \in A \times B$, $L(a) > L(b)$.

On pose $\alpha = \inf_{a \in A} L(a)$. L'hyperplan $L^{-1}(\{\alpha\})$ répond alors à la question.

Demonstration du théorème 2.5 :

Soient A et B vérifiant les hypothèses du théorème.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $\quad A_\varepsilon = A + B(0,\varepsilon)$ et $B_\varepsilon = B + B(0,\varepsilon)$

Les ensembles A_ε et B_ε sont ouverts, convexes et non vides. De plus, les hypothèses B compact, A fermé et $A \cap B = \emptyset$ assurent que $d(A,B) > 0$.

Donc A_ε et B_ε sont disjoints pour ε suffisamment petit.

Fixons un tel ε. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $L \in E'$ tels que l'hyperplan $H = L^{-1}(\{\alpha\})$ sépare A_ε et B_ε. On a donc

$$\forall (x,y) \in A \times B, \ \forall (z,z') \in B(0,1)^2, \quad L(x+\varepsilon z) \leq \alpha \leq L(y - \varepsilon z').$$

On en déduit alors facilement que

$$\forall (x,y) \in A \times B, \quad L(x) + \underbrace{\varepsilon \|L\|_{E'}} \leq \alpha \leq L(y) - \underbrace{\varepsilon \|L\|_{E'}}$$

d'où $\quad \forall (x,y) \in A \times B, \quad L(x) < \alpha < L(y).$

Corollaire 2.6

$$\boxed{\text{Soit } F \text{ un s.e.v de } E \text{ non dense. Alors } F \text{ est inclus dans un hyperplan fermé de } E.}$$

Scanned by CamScanner

Démonstration

Soit $x_0 \in E \setminus \overline{F}$. On applique le théorème de Hahn-Banach avec $A = \overline{F}$ et $B = \{x_0\}$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ et $L \in E'$ tels que

$$\forall x \in \overline{F}, \quad L(x) < \alpha < L(x_0).$$

On a donc $L(\lambda x) < \alpha$ pour tout $x \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Cela entraîne la nullité de L sur F. Par ailleurs $L \neq 0$ puisque $L(x_0) > L(x)$ $\forall x \in F$.

Donc F est inclus dans l'hyperplan fermé $\operatorname{Ker} L$.

Corollaire 2.7

Soit F un s.e.v de E. Alors F est dense si et seulement si toute forme linéaire $L \in E'$ s'annulant sur F s'annule aussi sur E tout entier.

Démonstration

L'implication directe est évidente car une application continue s'annulant sur une partie dense de E est forcément nulle.

Réciproquement, on suppose que F n'est pas dense dans E. Alors le corollaire précédent assure l'existance d'une forme linéaire continue L non nulle telle que $F \subset \operatorname{Ker} L$, d'où le resultat.

Scanned by CamScanner

Partie III

Théorème d'Ascoli

1. Rappel

Definition 1.1

Une partie A d'un espace topologique séparé X est dite relativement compacte si elle est continue dans une partie compacte de X.

Il est équivalent de dire que $\overline{A}$ est une partie compacte de X.

Définition 1.2

Si X est un espace métrique, on dit que X est précompact si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement de X par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε.

i.e $\forall \varepsilon > 0 \; \exists p \geq 1 \; (x_i)_{i=1}^{p} \subset X \; ; \; X \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon)$

Proposition 1.3

Un espace métrique est compact si et seulement s'il est préecompact et complet.

Corollaire 1.4

Si (X, d) est un espace métrique complet et A une partie de X, alors A est précompacte si est seulement si elle est relativement compacte.

Démonstration

[$\Rightarrow$] La complétude de (X, d) assure que $(\overline{A}, d)$ est complet.

Il est claire que si A est précompact, $\overline{A}$ est aussi précompact.

En effet $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon/2) \Rightarrow \overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$

Scanned by CamScanner

La proposition précedente permet de conclure $\overline{A}$ est compact.

[$\Leftarrow$] Il suffit de remarquer que $\overline{A} \subset \bigcup_{x \in A} B(x,\varepsilon)$. Comme $\overline{A}$ est compact, on peut extraire du recouvrement ci-dessus un sous-recouvrement fini de $\overline{A}$ (a fortiori) de A.

Théorème 1.5

Tout espace métrique compact est séparable (admet un sous ensemble dénombrable dense).

Théorème 1.6 "Théorème de Heine"

Si f est une application continue d'un espace métrique compact X dans un espace métrique Y, f est uniformement continue.

Théorème 1.7

Soient X et Y deux espaces métriques. Si X est compact si Y est complet, alors l'espace $C(X,Y)$ des applications continues de X dans Y muni de la distance uniforme est un espace métrique complet.

$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$

2. Équicontinuité

Définition 2.1

Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques. Soit $\mathcal{F}$ une partie de $C(X,Y)$ et x_0 un point de X. On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall f \in \mathcal{F}, \forall y \in X, \; d_X(x_0, y) < \alpha \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(y)) < \varepsilon.$$

On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue sur X si $\mathcal{F}$ est équicontinue en tout point de X.

Scanned by CamScanner

Si l'on a la condition plus forte

$$\forall \varepsilon>0, \exists \alpha>0, \forall f\in \mathcal{F}, \forall (x,y)\in X^2, d_X(x,y)<\alpha \Rightarrow d_Y(f(x),f(y))<\varepsilon,$$

on dit que $\mathcal{F}$ est *uniformement équicontinue*.

Lemme 2.2

Si X est compact et $\mathcal{F}$ une partie équicontinue de $C(X,Y)$, alors $\mathcal{F}$ est uniformement équicontinue.

Démonstration

Supposons que $\mathcal{F}$ n'est pas uniformement équicontinue, alors il existe $\varepsilon>0$ et des suites (f_n) dans $\mathcal{F}$ et $(x_n),(y_n)$ dans X tels que $d_X(x_n,y_n)\leqslant 1/n$ et $d_Y(f_n(x_n),f_n(y_n))\geqslant \varepsilon$. Par compacité de X, on peut extraire deux sous suites $(x'_n),(y'_n)$ convergent vers un même point x. L'équicontinuité de $\mathcal{F}$ au point x implique que si n est assez grand, alors $d_Y(f_n(x'_n),f_n(x))<\varepsilon/2$ et $d_Y(f_n(y'_n),f_n(x))<\varepsilon/2$. D'où $d_Y(f_n(x'_n),f_n(y'_n))\leqslant d_Y(f_n(x'_n),f_n(x))+d_Y(f_n(x),f_n(y'_n))<\varepsilon$, contradiction.

Lemme 2.3

Supposons que X est compact. Soit $\mathcal{F}$ une partie ~~uniformement~~ équicontinue de $C(X,Y)$ et (f_n) une suite dans $\mathcal{F}$. On a l'équivalence suivante: (f_n) converge simplement vers $f \Leftrightarrow (f_n)$ converge uniformement vers f

Démonstration

Il suffit de justifier l'implication directe. Soit $\varepsilon>0$, alors il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on ait $d_X(x,x')<\alpha \Rightarrow d_Y(f_n(x),f_n(x'))<\varepsilon/3$ pour tous $x,x'\in X$

Scanned by CamScanner

Par passage à la limite, on constate que l'inégalité ci-dessus est aussi vérifiée par f. On recouvre ensuite le compact X par une famille finie de boules $\left(B_X(x_j,\alpha)\right)_{j=1}^{N_\varepsilon}$. Soit $x\in X$ et x_j tel que $x\in B(x_j,\alpha)$.

On a $d_Y(f_n(x),f(x)) \leqslant d_Y(f_n(x),f_n(x_j)) + d_Y(f_n(x_j),f(x_j)) + d_Y(f(x_j),f(x))$

$$\leqslant \frac{2}{3}\varepsilon + \max_{1\leq j\leq N_\varepsilon} d_Y(f_n(x_j),f(x_j)).$$

En vertu de la convergence simple, il existe n_0 tel que

$$\forall n\geqslant n_0 \quad \max_{1\leq j\leq N_\varepsilon} d_Y(f_n(x_j),f(x_j)) < \varepsilon/3 .$$

D'où le résultat.

Théorème 2.4 "Théorème d'Ascoli"

Soit (E,d) un espace métrique compact, (F,δ) un espace métrique complet. Une partie A de $C(E,F)$ est relativement compacte si et seulement si:

(1) A est équicontinue

(2) Pour tout $x\in E$, l'ensemble $A(x)=\{f(x), f\in A\}$ est relativement compact.

Démonstration

Supposons que A soit relativement compacte. Comme $C(E,F)$ est un espace métrique complet, A est précompact. Identiquement, pour tout réel $\varepsilon>0$, on peut choisir un nombre fini d'éléments $f_1,f_2,\dots,f_p$ dans A tel que $$A\subset\bigcup_{i=1}^{p}B(f_i,\varepsilon).$$

Cela signifie que toute fonction f dans A se trouve à une distance d'au plus ε de l'un des f_i. Pour x fixé dans E, toute image $f(x)$ se trouve donc à une distance d'au plus ε de l'un des $f_i(x)$.

Scanned by CamScanner

Ainsi: $A(x) \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(f_i(x), \varepsilon)$, et donc $A(x)$ est précompact.

Comme F est complet, $A(x)$ est relativement compact.

Les fonctions f_i sont continues sur le compact E et donc, par le théorème de Heine, elles sont uniformément continues. En particulier,

$$\exists \alpha_i > 0,\ \forall (x,y) \in E,\ d(x,y) < \alpha_i \Rightarrow \delta(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$$

Posons $\alpha = \min_{1 \leq i \leq p} \alpha_i$. Soient x, y deux points quelconques de E vérifiant $d(x,y) < \alpha$, alors pour tout $i = 1, \dots, p$ $\delta(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$.

Pour une fonction f dans A, il existe un indice i pour lequel

$$\max_{z \in E} \delta(f(z), f_i(z)) < \varepsilon.$$

D'où $\delta(f(x), f(y)) \leqslant \delta(f(x), f_i(x)) + \delta(f_i(x), f_i(y)) + \delta(f_i(y), f(y)) < 3\varepsilon$.

Cette inégalité vérifiée pour tous x, y tels que $d(x,y) < \alpha$, reste valable pour toute fonction $f \in A$. D'où l'équicontinuité de A.

* <u>Réciproquement</u>, soit (f_p) une suite de $\overline{A}$. Comme E est un espace métrique compact, il est séparable et on peut donc se donner une partie dénombrable $D = \{a_k, k \in \mathbb{N}\}$ dense dans E.

Posons $X = \prod_{k \in \mathbb{N}} \overline{A(a_k)}$. Par hypothèse, $A(x)$ est relativement compact pour tout $x \in E$, autrement dit que $\overline{A(x)}$ est compact.

L'espace X est défini comme produit dénombrable d'espaces métriques compacts, c'est donc lui-même un espace métrique compact.

A chaque $f \in \overline{A}$, on fait correspondre l'élément $(f(a_k))_k$ de X. Donc, à chaque f_p on fait correspondre $h_p = (f_p(a_k))_k \in X$.

Scanned by CamScanner

De la suite $(h_p)_p$ de X, on peut extraire, par compacité de X une sous-suite convergente $(h_{e(p)})_p$ qui converge vers $h = (h^{(k)})_k$.
La continuité des projection p_k sur chacun des facteurs de X donne $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_k(h_{e(p)}) = f_{e(p)}(a_k) \longrightarrow h^{(k)} \in F$.
Autrement dit, la sous-suite $(f_{e(p)})_p$ est simplement convergente en tout point de E
De plus, comme A est equicontinue, $\overline{A}$ est aussi equicontinue.
Daprès les lemmes (2.2), (2.3) la sous-suite $(f_{e(p)})_p$ est uniformement convergente sur E, donc $(f_{e(p)})_p$ converge dans $C(E,F)$ muni de la topologie de la convergence uniforme et donc A est relativement compact.

Scanned by CamScanner