Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

ANALYSE FONCTIONNELLE

Claude Portenier

Semestre d'hiver 2003/2004
et
semestre d'été 2004

Version du 1 juillet 2005

TABLE DES MATIÈRES

INDEX

Version du 1 juillet 2005

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hans Wilhelm Alt, *Lineare Funktionalanalysis,* Springer, 1992.

[2] Jean Pierre Aubin, *Analyse fonctionnelle appliquée,* Tomes 1 et 2, Presses Universitaires de France, 1987

[3] Nicolas Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques,* Chap. 1 à 5, Masson, 1981.

[4] Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications,* Masson, Paris, 1983.

[5] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Laloë, *Mécanique quantique I,* Hermann, Paris, 1973.

[6] Jean Dieudonné, *Eléments d'Analyse, vol. 1,* Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[7] Jean Dieudonné, *Eléments d'Analyse, vol. 2,* Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[8] A. Dvoretzky and C.A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 36 (1950), p. 192-197.

[9] P.A. Fillmore and J.P. Williams, *On operator ranges,* Advances in Math. 7 (1971), p. 254-281.

[10] Jürgen Heine, *Topologie und Funktionalanalysis,* Oldenbourg, 2002.

[11] Harro Heuser, *Funktionalanalysis,* Teubner, Stuttgart, 1986.

[12] Friedrich Hirzebruch und Winfried Scharlau, *Einführung in die Funktionalanalysis,* BI-Hochschultaschenbücher, Band 296, Mannheim, 1971.

[13] O. Lehto, *Some remarks on the kernel functions in Hilbert space,* Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A 1 (1950), p. 144.

[14] Herbert Meschkowski, *Hilbertsche Räume mit Kernfunktion,* Springer, Berlin, 1962.

[15] Xavier Mary, Denis De Brucq, Stephane Canu, *Sous-dualités et noyaux (reproduisants) associés,* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 336 (2003), p. 949–954

[16] Yves Meyer, *Ondelettes et opérateurs II : Opérateurs de Calderón-Zygmund,* Hermann, 1990.

[17] Claude Portenier, *Cours d'Analyse,* Marburg, 2004.

[18] Walter Rudin, *Functional Analysis,* Mc Graw Hill, 1973.

[19] Michael Reed and Barry Simon, Methods of modern mathematical physics, I : Functional analysis, II : Fourier analysis, self-adjointness, Academic Press, New-York, 1972/1975.

[20] Helmut Schaefer, *Topological vector spaces,* MacMillan, New York, 1966.

Chapitre 1

ESPACES DE HILBERT

Dans tout ce qui suit F est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ des nombres réels ou complexes.

Version du 29 novembre 2004

1.1 Formes sesquilinéaires et produits scalaires

DEFINITION 1 Soient F, G, H des espaces vectoriels. Une application $T : F \longrightarrow G$ est dite *linéaire* , respectivement *semi-linéaire* , si pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\varphi, \psi \in F$, on a

$$T(\alpha \cdot \varphi) = \alpha \cdot T\varphi \quad \text{, respectivement} \quad T(\alpha \cdot \varphi) = \overline{\alpha} \cdot T\varphi$$

et

$$T(\varphi + \psi) = T\varphi + T\psi \ .$$

On dit qu'une une application $\mathfrak{s} : F \times G \longrightarrow H$ est *bilinéaire* si elle est séparément linéaire, et *sesquilinéaire (à gauche* , respectivement *à droite* s'il faut préciser) si elle est semi-linéaire en la première variable, respectivement en la seconde, et linéaire en l'autre.

Une application bilinéaire ou sesquilinéaire (à gauche) à valeur dans $\mathbb{K}$ est dite une *forme* bilinéaire ou sesquilinéaire.

Soit $\mathfrak{s} : F \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire. On dit qu'elle est

(a) *hermitienne* si

$$\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = \overline{\mathfrak{s}(\psi, \varphi)} \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in F \ ,$$

(b) *positive* si

$$\mathfrak{s}(\varphi, \varphi) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in F$$

et

(c) *non-dégénérée* si

$$\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = 0 \quad \text{pour tout } \psi \in F \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 0$$

et

$$\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in F \quad \Longrightarrow \quad \psi = 0 \ .$$

Une forme hermitienne positive non-dégénérée s'appelle un *produit scalaire* .

On a tout d'abord la

PROPOSITION (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Si $\mathfrak{s}$ est une forme hermitienne positive sur F , alors*

$$|\mathfrak{s}(\varphi, \psi)|^2 \leqslant \mathfrak{s}(\varphi, \varphi) \cdot \mathfrak{s}(\psi, \psi) \quad \textit{pour tout } \varphi, \psi \in F \ .$$

Pour tout $\varphi, \psi \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a

$$0 \leqslant \mathfrak{s}(\varphi + \alpha \cdot \psi, \varphi + \alpha \cdot \psi) = \mathfrak{s}(\varphi, \varphi) + \alpha \cdot \mathfrak{s}(\varphi, \psi) + \overline{\alpha} \cdot \mathfrak{s}(\psi, \varphi) + |\alpha|^2 \cdot \mathfrak{s}(\psi, \psi) \ .$$

Si $\mathfrak{s}(\varphi,\varphi) = \mathfrak{s}(\psi,\psi) = 0$, alors en prenant $\alpha := -\overline{\mathfrak{s}(\varphi,\psi)}$, on obtient $-2 \cdot |\mathfrak{s}(\varphi,\psi)|^2 \geqslant 0$, donc $\mathfrak{s}(\varphi,\psi) = 0$. En échangeant au besoin φ et ψ , nous pouvons supposer que $\mathfrak{s}(\psi,\psi) \neq 0$. On prend alors

$$\alpha := -\frac{\overline{\mathfrak{s}(\varphi,\psi)}}{\mathfrak{s}(\psi,\psi)}$$

et il vient

$$0 \leqslant \mathfrak{s}(\varphi,\varphi) - \frac{|\mathfrak{s}(\varphi,\psi)|^2}{\mathfrak{s}(\psi,\psi)} - \frac{\mathfrak{s}(\varphi,\psi) \cdot \mathfrak{s}(\psi,\varphi)}{\mathfrak{s}(\psi,\psi)} + \frac{|\mathfrak{s}(\varphi,\psi)|^2}{\mathfrak{s}(\psi,\psi)} = \mathfrak{s}(\varphi,\varphi) - \frac{|\mathfrak{s}(\varphi,\psi)|^2}{\mathfrak{s}(\psi,\psi)} ,$$

d'où l'inégalité. ——— □

DEFINITION 2 Une fonctionnelle $p : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ est dite

(a) *positivement homogène* si

$$p(\alpha \cdot \varphi) = \alpha \cdot p(\varphi) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \varphi \in F ,$$

(b) *absolument homogène* si

$$p(\alpha \cdot \varphi) = |\alpha| \cdot p(\varphi) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{K} \text{ et } \varphi \in F ,$$

et

(c) *sous-additive* si

$$p(\varphi + \psi) \leqslant p(\varphi) + p(\psi) \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in F .$$

On dit que p est une *semi-norme* si p est à valeur dans $\mathbb{R}_+$, absolument homogène et sous-additive ; on dit que c'est une *norme* si en plus elle est

(d) *séparante*

$$p(\varphi) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in F .$$

Dans ce cas on dit que F est un espace *semi-normé* , respectivement *normé* .

Pour les propriétés élémentaires des espaces normés le lecteur est prié de consulter le cours d'Analyse [17], § 10.1 à 10.7. La continuité d'une application linéaire entre espaces normés est caractérisée dans le paragraphe 11.8 du même cours. Nous généraliserons ces notions plus tard (cf. 2.1 - 2.2 et 3.1 - 3.2).

PROPOSITION (Inégalité de Minkowsky) *Si $\mathfrak{s}$ est une forme hermitienne positive sur F , alors*

$$\varphi \longmapsto \mathfrak{s}(\varphi,\varphi)^{\frac{1}{2}} : F \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

est une semi-norme sur F .

Il nous suffit de prouver la sous-additivité. Pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a

$$\mathfrak{s}(\varphi+\psi,\varphi+\psi) = \mathfrak{s}(\varphi,\varphi) + \mathfrak{s}(\varphi,\psi) + \mathfrak{s}(\psi,\varphi) + \mathfrak{s}(\psi,\psi) =$$

$$= \mathfrak{s}(\varphi,\varphi) + 2 \cdot \operatorname{Re} \mathfrak{s}(\varphi,\psi) + \mathfrak{s}(\psi,\psi) \leqslant \mathfrak{s}(\varphi,\varphi) + 2 \cdot |\mathfrak{s}(\varphi,\psi)| + \mathfrak{s}(\psi,\psi) \leqslant$$

$$\leqslant \mathfrak{s}(\varphi,\varphi) + 2 \cdot [\mathfrak{s}(\varphi,\varphi) \cdot \mathfrak{s}(\psi,\psi)]^{\frac{1}{2}} + \mathfrak{s}(\psi,\psi) = \left[\mathfrak{s}(\varphi,\varphi)^{\frac{1}{2}} + \mathfrak{s}(\psi,\psi)^{\frac{1}{2}}\right]^2 ,$$

ce qu'il fallait démontrer. ——— □

REMARQUE 1 L'égalité

$$\mathfrak{s}(\varphi+\psi,\varphi+\psi) = \mathfrak{s}(\varphi,\varphi) + 2\cdot \operatorname{Re}\mathfrak{s}(\varphi,\psi) + \mathfrak{s}(\psi,\psi)$$

nous sera souvent utile par la suite.

THEOREME *Soit $\mathfrak{s}$ une forme hermitienne positive sur F . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathfrak{s}$ *est non-dégénérée, i.e. un produit scalaire.*

(ii) $\mathfrak{s}(\varphi,\varphi) > 0$ *pour tout* $\varphi \in F \smallsetminus \{0\}$.

(iii) $\varphi \longmapsto \mathfrak{s}(\varphi,\varphi)^{\frac{1}{2}} : F \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une norme sur* F .

Les conditions (ii) et (iii) sont évidemment équivalentes et (ii) entraîne (i). Réciproquement si $\mathfrak{s}(\varphi,\varphi) = 0$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$|\mathfrak{s}(\varphi,\psi)|^2 \leqslant \mathfrak{s}(\varphi,\varphi)\cdot\mathfrak{s}(\psi,\psi) = 0 \ ,$$

donc $\varphi = 0$, puisque $\mathfrak{s}$ est non-dégénérée. □

REMARQUE 2 Un produit scalaire est en général noté $(\cdot|\cdot)$. Si $\|\cdot\|$ désigne la norme associée, i.e.

$$\|\varphi\|^2 := (\varphi|\,\varphi) \ ,$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit

$$|(\varphi|\,\psi)| \leqslant \|\varphi\|\cdot\|\psi\| \quad \text{pour tout } \varphi,\psi \in F \ .$$

En adaptant la démonstration de la continuité de la multiplication dans $\mathbb{K}$ (cours d'Analyse [17], théorème 5.5.iii), on montre facilement que le produit scalaire

$$(\cdot|\cdot) : F\times F \longrightarrow \mathbb{K} : (\varphi,\psi) \longmapsto (\varphi|\,\psi)$$

est (globalement) continu (cf. exemple 2.4). La proposition 2.4 généralise ce résultat.

REMARQUE 3 Pour qu'on ait égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il faut et il suffit que φ et ψ soient linéairement dépendants.

Nous redémontrons en même temps l'inégalité. Nous pouvons supposer que $\|\varphi\| = 1$ en remplaçant au besoin φ par $\frac{\varphi}{\|\varphi\|}$. On a alors

$$0 \leqslant \|\psi - (\varphi|\,\psi)\cdot\varphi\|^2 = (\psi - (\varphi|\,\psi)\cdot\varphi|\,\psi - (\varphi|\,\psi)\cdot\varphi) = \|\psi\|^2 - |(\varphi|\,\psi)|^2 \ ,$$

donc l'inégalité. On a l'égalité si, et seulement si, $\psi = (\varphi|\,\psi)\cdot\varphi$. □

EXEMPLE 1 Si E,F,G,H sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $\mathfrak{s} : F\times G \longrightarrow H$ une application sesquilinéaire et $S : E \longrightarrow G$ une application linéaire, alors

$$(\varphi,\epsilon) \longmapsto \mathfrak{s}(\varphi,S\epsilon) : F\times E \longrightarrow H$$

est une application sesquilinéaire.

La vérification est immédiate. □

EXEMPLE 2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A = (a_{k,l}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$(x, y) \longmapsto (x|\, Ay) := \sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l} \cdot \overline{x_k} \cdot y_l : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

est une forme sesquilinéaire. Elle est hermitienne si, et seulement si, la matrice A est hermitienne, i.e. $A = A^*$. Elle est positive si, et seulement si, A est *positive* , i.e. $(x|\, Ax) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{K}^n$. C'est un produit scalaire si, et seulement si, la matrice A est hermitienne et *strictement positive* , i.e. $(x|\, Ax) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{K}^n \smallsetminus \{0\}$.

Attention dans la litérature, on utilise souvent pour une matrice les expressions semi-définie positive pour positive et définie positive pour strictement positive.

Si A est hermitienne et strictement positive, la norme associée au produit scalaire qu'elle définit est

$$x \longmapsto \left(\sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l} \cdot \overline{x_k} \cdot x_l\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Nous montrerons (théorème 2.7) que cette norme est équivalente à la norme euclidienne $|\cdot|_2$.

EXEMPLE 3 Soient X un espace topologique et μ une intégrale de Radon sur X . Alors

$$(\xi, \eta) \longmapsto (\xi|\, \eta)_\mu := \int \overline{\xi} \cdot \eta \, d\mu : \mathbf{L}^2(\mu) \times \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est évidemment une forme sesquilinéaire hermitienne positive. C'est un produit scalaire. La norme associée sera désignée par $\|\cdot\|_{2,\mu} := (\cdot|\,\cdot)^{\frac{1}{2}}$. Nous écrirons souvent $\|\cdot\|_2$ pour simplifier.

En effet $(\xi|\, \xi)_\mu = \int |\xi|^2 \, d\mu = 0$ entraîne $\xi = 0$ μ-p.p. , i.e. $\xi = 0$ dans $\mathbf{L}^2(\mu)$. ——— □

DEFINITION 3 Une *section commençante* de $\mathbb{N}$ est une partie I telle que, pour tout $n \in J$ et $m \in \mathbb{N}$, on ait $m \in I$ si $m \leqslant n$. Ce sont les ensembles de la forme

$$n = \{0, \ldots, n-1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{N} .$$

Une *énumération* d'un ensemble dénombrable (fini ou infini dénombrable) A est une bijection $\sigma : I \longrightarrow A$, où I est une section commençante de $\mathbb{N}$.

LEMME *Soient X un ensemble et $(\alpha_x)_{x\in X} \subset \mathbb{R}$ une famille de nombres réels telle que*

$$\sup\nolimits_{K\in\mathfrak{K}(X)} \sum_{x\in K} |\alpha_x| < \infty .$$

Alors $\{x \in X \mid \alpha_x \neq 0\}$ est dénombrable.

Si D est une partie dénombrable contenant $\{x \in X \mid \alpha_x \neq 0\}$ et si $\sigma : I \longrightarrow D$ une énumération de D , alors la série $\sum_{l=0}^{\sup I} \alpha_{\sigma(l)}$ est convergente et sa somme est indépendante de D et σ . On écrit

$$\sum_{x\in X} \alpha_x := \sum_{l=0}^{\sup I} \alpha_{\sigma(l)}$$

et on dit que c'est la somme de la famille $(\alpha_x)_{x\in X}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble

$$\left\{ x \in X \;\middle|\; |\alpha_x| \geqslant \frac{1}{k} \right\}$$

est fini, donc

$$\{x \in X \mid |\alpha_x| > 0\} = \bigcup_{k \geqslant 1} \left\{ x \in X \;\middle|\; |\alpha_x| \geqslant \frac{1}{k} \right\}$$

est dénombrable. La série $\sum_{l=0}^{\sup I} \alpha_{\sigma(l)}$ est alors absolument convergente et le lemme découle du théorème de réarrangement 6.14 du cours d'Analyse [17]. □

On dit que $(\alpha_x)_{x \in X}$ est sommable, notion que nous introduirons dans le cadre des espaces localement convexes en 2.6. Les interrelations seront explicitées dans le corollaire 2.11.

EXEMPLE 4 Soit X un ensemble et $\#$ l'intégrale de comptage. Alors

$$(\xi, \eta) \longmapsto (\xi | \, \eta)_\# := \sum_{x \in X} \overline{\xi(x)} \cdot \eta(x) : \ell^2(X) \times \ell^2(X) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est un produit scalaire.

Remarquons que, pour tout $\xi, \eta \in \ell^2(X)$, il existe une partie dénombrable $D \subset X$ telle que $\xi(x) = \eta(x) = 0$ pour tout $x \notin D$. Si $\sigma : I \longrightarrow D$ est une énumération de D , alors la série $\sum_{l=0}^{\sup I} \overline{\xi(\sigma(l))} \cdot \eta(\sigma(l))$ est absolument convergente, puisque en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{K}^n$ on a

$$\sum_{l=0}^{\sup I} \left| \overline{\xi(\sigma(l))} \cdot \eta(\sigma(l)) \right| = \sup\nolimits_{k \in I} \sum_{l=0}^{k} |\xi(\sigma(l))| \cdot |\eta(\sigma(l))| \leqslant$$

$$\leqslant \sup\nolimits_{k \in I} \left(\sum_{l=0}^{k} |\xi(\sigma(l))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{l=0}^{k} |\eta(\sigma(l))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\xi\|_2 \cdot \|\eta\|_2 < \infty \; .$$

On pose alors

$$\sum_{x \in X} \overline{\xi(x)} \cdot \eta(x) := \sum_{l=0}^{\sup I} \overline{\xi(\sigma(l))} \cdot \eta(\sigma(l)) \;\; ,$$

le membre de droite ne dépendant évidemment pas de D et σ . Les vérifications sont alors immédiates. □

EXERCICE Montrer qu'une forme hermitienne positive $\mathfrak{s}$ induit naturellement un produit scalaire sur le quotient de F par le sous-espace vectoriel des $\varphi \in F$ tels que $\mathfrak{s}(\varphi, \varphi) = 0$.

1.2 Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert

DEFINITION 1 Un espace vectoriel F muni d'un produit scalaire s'appelle un *espace préhilbertien* . On le considère comme un espace normé en le munissant de la norme associée. Si F est complet pour cette norme, on dit que c'est un *espace de Hilbert* .

EXEMPLE 1 Les exemples 2 à 4 du numéro précédent sont des espaces de Hilbert.

EXEMPLE 2 Soient X un espace localement compact et μ un intégrale de Radon sur X . La forme hermitienne positive sur $\mathcal{K}(X)$

$$(\varphi, \psi) \longmapsto (\varphi|\,\psi) := \int \overline{\varphi} \cdot \psi \, d\mu : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est non-dégénérée si, et seulement si, pour tout ouvert $O \neq \emptyset$ de X , on a $\mu(O) > 0$. Dans ce cas $\mathcal{K}(X)$ est un espace préhilbertien, en général non-complet.

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X) \smallsetminus \{0\}$, il existe $x \in X$ tel que $|\varphi(x)|^2 > 0$, donc un voisinage ouvert O de x tel que l'on ait

$$|\varphi(y)|^2 \geqslant \frac{|\varphi(x)|^2}{2} \quad \text{pour tout } y \in O \ .$$

Le théorème 1.1 montre alors que la condition est suffisante, puisque

$$(\varphi|\,\varphi) = \int |\varphi|^2 \, d\mu \geqslant \int_O \frac{|\varphi(x)|^2}{2} \, d\mu \geqslant \frac{|\varphi(x)|^2}{2} \cdot \mu(O) > 0 \ .$$

Réciproquement X étant complètement régulier, il existe $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ tel que $0 < \varphi \leqslant 1$ et $\varphi = 0$ hors de O , donc

$$\mu(O) \geqslant \int |\varphi|^2 \, d\mu = (\varphi|\,\varphi) > 0 \ .$$

□

REMARQUE 1 La condition ci-dessus signifie que l'application canonique

$$\varphi \longmapsto [\varphi] : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$$

est injective. On dit que le *support* de μ est X .

REMARQUE 2 Dans le cas général on considère l'image $[\mathcal{K}(X)]$ de $\mathcal{K}(X)$ dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ formée des classes modulo les fonctions μ-négligeables contenant au moins une fonctions continues à support compact.

Rappelons que

$$\mathbf{L}^2(\mu) = \mathcal{L}^2(\mu) / \mathcal{N}(\mu) \ ,$$

où $\mathcal{N}(\mu) = \{f \in \mathbf{L}^2(\mu) \mid f = 0 \ \mu\text{-p.p.}\} = \{f \in \mathbf{L}^2(\mu) \mid \|f\|_2 = 0\}$ (cf. exercice 1.1).

DEFINITION 2 On dit que l'ensemble fermé complément du plus grand ouvert qui est μ-négligeable est le *support* de μ . On le désigne par $\operatorname{supp} \mu$.

Cette définition est consistante. Soit O la réunion de tous les ouverts U de X tels que $\mu(U) = \mu(1_U) = 0$. La famille de tous ces ouverts est filtrante croissante, puisque pour deux tels ouverts U, V , on a

$$\mu(U \cup V) \leqslant \mu(U) + \mu(V) = 0 \ .$$

Mais comme

$$1_O = \sup_{U \text{ ouvert}, \ \mu(U)=0} 1_U \ ,$$

la propriété de Bourbaki (cours d'Analyse [17], théorème 14.5) montre que

$$\mu(O) = \mu\left(\sup_{U \text{ ouvert}, \ \mu(U)=0} 1_U\right) = \sup_{U \text{ ouvert}, \ \mu(U)=0} \mu(1_U) = 0 \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

REMARQUE 3 Dans beaucoup de situation, si l'espace de base X ne joue pas un très grand rôle, on peut supposer que le support de μ est X en remplaçant X par $\operatorname{supp} \mu$ et μ par l'intégrale de Radon induite $\mu_{\operatorname{supp} \mu}$. Si $j : \operatorname{supp} \mu \hookrightarrow X$ est l'injection canonique, on a

$$j\left(\mu_{\operatorname{supp} \mu}\right) = 1_{\operatorname{supp} \mu} \cdot \mu$$

(cf. cours d'Analyse [17], proposition 16.10).

EXEMPLE 3 Soient X un espace topologique et μ une intégrale de Radon sur X . Rappelons que $\mathbf{M}(\mu)$ désigne l'espace vectoriel des classes, modulo les fonctions μ-négligeables, de fonctions μ-mesurables sur X (cf. cours d'Analyse [17], remarque 15.14.2) . Si

$$\rho : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

est une fonction μ-mesurable, il est clair que la fonctionnelle

$$f \longmapsto \|f\|_{2,\mu,\rho} := \left(\int^* |f|^2 \cdot \rho \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} : \mathbb{K}^X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

est sous-linéaire. L'ensemble $\mathcal{L}^2(\mu, \rho)$ des fonctions $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ qui sont μ-mesurables et telles que $\|f\|_{2,\mu,\rho} < \infty$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^X$; on a

$$\|f\|_{2,\mu,\rho} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0 \quad \mu\text{-p.p. sur } \{\rho > 0\}$$

et

$$f = 0 \quad \mu\text{-p.p. sur } \{\rho = \infty\} \ .$$

Nous désignerons par

$$\mathbf{L}^2(\mu, \rho) = \mathcal{L}^2(\mu, \rho) \Big/ \left\{\|\cdot\|_{2,\mu,\rho} = 0\right\}$$

l'espace quotient muni de la norme définie par

$$\|[f]\|_{2,\mu,\rho} := \|f\|_{2,\mu,\rho} \ .$$

Nous ne ferons en général pas de distintinction entre une classe de fonctions et l'un de ses représentants. L'application

$$f \longmapsto 1_{\{\rho \neq 0\}} \cdot f : \mathbf{L}^2(\mu, \rho) \longrightarrow \mathbf{M}(\mu)$$

est évidemment injective. Il est immédiat de vérifier que

$$f \longmapsto f \cdot \sqrt{\rho} : \mathbf{L}^2(\mu, \rho) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$$

est une isométrie sur le sous-espace vectoriel fermé de $\mathbf{L}^2(\mu)$ formé des f tels que $f = 0$ μ-p.p. sur $\{\rho = 0\} \cup \{\rho = \infty\}$. Ceci montre en particulier que $\mathbf{L}^2(\mu, \rho)$ est un espace de Hilbert, dont le produit scalaire est

$$(f|\, g)_{\mu,\rho} := \int \overline{f} \cdot g \cdot \rho \, d\mu \ .$$

Si $\mathfrak{A}$ est une tribu d'ensembles μ-mesurables, on peut également considérer le sous-espace vectoriel $\mathbf{L}^2(\mu, \rho, \mathfrak{A})$ de $\mathbf{L}^2(\mu, \rho)$ formé des classes de fonctions contenant un représentant $\mathfrak{A}$-mesurable. On vérifie facilement qu'il est fermé.

REMARQUE 4 On a $\mathbf{L}^2(\mu, \rho) = \mathbf{L}^2(\rho \cdot \mu)$ si $\rho \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Sans cette hypothèse on ne peut pas définir une intégrale de Radon $\rho \cdot \mu$.

EXEMPLE 4 Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sont des espaces de Hilbert, alors $\mathcal{H} \times \mathcal{G}$, muni du produit scalaire

$$((\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)) \longmapsto (\xi_1|\, \xi_2)_{\mathcal{H}} + (\eta_1|\, \eta_2)_{\mathcal{G}} \ ,$$

est un espace de Hilbert.

EXEMPLE 5 Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et $\mathcal{G}$ un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$, on écrit $\mathcal{G} \sqsubset \mathcal{H}$, alors $\mathcal{G}$ est un espace de Hilbert.

1.3 Formules de polarisation

PROPOSITION *Soit $\mathfrak{s}$ une forme sesquilinéaire sur F . Pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a*

(i)

$$2 \cdot [\mathfrak{s}(\varphi, \psi) + \mathfrak{s}(\psi, \varphi)] = \sum_{\varepsilon^2=1} \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\varphi + \varepsilon \cdot \psi, \varphi + \varepsilon \cdot \psi) \ .$$

(ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $\mathfrak{s}$ est hermitienne, alors

$$\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{\varepsilon^2=1} \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\varphi + \varepsilon \cdot \psi, \varphi + \varepsilon \cdot \psi) \ .$$

(iii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors

$$\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{\varepsilon^4=1} \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\varphi + \overline{\varepsilon} \cdot \psi, \varphi + \overline{\varepsilon} \cdot \psi) \ .$$

En particulier si $\mathfrak{s}(\varphi, \varphi) \in \mathbb{R}$ pour tout $\varphi \in F$, alors $\mathfrak{s}$ est hermitienne.

En effet

$$\sum_{\varepsilon} \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\varphi + \overline{\varepsilon} \cdot \psi, \varphi + \overline{\varepsilon} \cdot \psi) =$$

$$= \sum_{\varepsilon} \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\varphi, \varphi) + \varepsilon \cdot \overline{\varepsilon} \cdot \mathfrak{s}(\varphi, \psi) + \varepsilon \cdot \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\psi, \varphi) + \varepsilon \cdot \varepsilon \cdot \overline{\varepsilon} \cdot \mathfrak{s}(\psi, \psi) \ ,$$

d'où les formules de polarisation en remarquant que $\overline{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1$,

$$\sum_{\varepsilon^2=1} \varepsilon = 0 \quad , \quad \sum_{\varepsilon^2=1} 1 = \sum_{\varepsilon^2=1} \varepsilon^2 = 2 \quad , \quad \sum_{\varepsilon^4=1} \varepsilon = \sum_{\varepsilon^4=1} \varepsilon^2 = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\varepsilon^4=1} 1 = 4 \ .$$

Finalement si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathfrak{s}(\varphi, \varphi) \in \mathbb{R}$ pour tout $\varphi \in F$, on a

$$\overline{\mathfrak{s}(\varphi, \psi)} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{\varepsilon^4=1} \overline{\varepsilon} \cdot \mathfrak{s}(\overline{\varepsilon} \cdot \varepsilon \cdot \varphi + \overline{\varepsilon} \cdot \psi, \overline{\varepsilon} \cdot \varepsilon \cdot \varphi + \overline{\varepsilon} \cdot \psi) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sum_{\varepsilon^4=1} \overline{\varepsilon} \cdot \varepsilon \cdot \overline{\varepsilon} \cdot \mathfrak{s}(\varepsilon \cdot \varphi + \psi, \varepsilon \cdot \varphi + \psi) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{\varepsilon^4=1} \varepsilon \cdot \mathfrak{s}(\psi + \overline{\varepsilon} \cdot \varphi, \psi + \overline{\varepsilon} \cdot \varphi) = \mathfrak{s}(\psi, \varphi) \ ,$$

donc $\mathfrak{s}$ est hermitienne. □

COROLLAIRE (Egalité du parallélogramme ou identité de la médiane)
Soit (F, p) un espace semi-normé. Il existe une unique forme hermitienne positive $\mathfrak{s}$ sur F induisant la semi-norme p si, et seulement si, pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a

$$p(\varphi + \psi)^2 + p(\varphi - \psi)^2 = 2 \cdot \left[p(\varphi)^2 + p(\psi)^2\right] \ .$$

La nécessité se démontre immédiatement en développant le membre de gauche. L'unicité découle des formules ci-dessus, que l'on peut écrire sous la forme

$$\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{\varepsilon^{2 \cdot \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}} = 1} \varepsilon \cdot \|\varphi + \overline{\varepsilon} \cdot \psi\|^2 \ . \tag{$*$}$$

Réciproquement, cette formule permettent de définir une application continue

$$\mathfrak{s} : (\varphi, \psi) \longmapsto \mathfrak{s}(\varphi, \psi) : F \times F \longrightarrow \mathbb{K} \ .$$

On vérifie immédiatement que $\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = \mathfrak{s}(\psi, \varphi)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathfrak{s}(\varphi, \psi) = \overline{\mathfrak{s}(\psi, \varphi)}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donc que $\mathfrak{s}$ est hermitienne. L'égalité du parallélogramme montre alors que cette application est additive en les deux variables, i.e. $\mathbb{Z}$-bilinéaire. On en déduit qu'elle est $\mathbb{Q}$-bilinéaire, puis par continuité qu'elle est $\mathbb{R}$-bilinéaire. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on montre facilement que

$$(\varphi | \, i \cdot \psi) = i \cdot (\varphi | \, \psi) \ ,$$

ce qui finit de prouver la sesquilinéarité. Finalement les formules de polarisation montrent que $\mathfrak{s}$ induit bien la semi-norme p , et en particulier que $\mathfrak{s}$ est positive. $\square$

REMARQUE Une isométrie d'un espace préhilbertien dans un autre conserve le produit scalaire, puisque celui-ci s'exprime à l'aide de la norme grâce à la formule de polarisation $(*)$.

EXERCICE Si $(\varphi_j)_{j=1,\ldots,n}$ est une suite finie dans un espace préhilbertien F , alors

$$\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{\varepsilon \in \{\pm 1\}^n} \left(\left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon(j) \cdot \varphi_j \right\|^2 \right) = \sum_{j=1}^n \|\varphi_j\|^2 \ .$$

1.4 Théorème de la projection

Dans ce paragraphe F désigne un espace préhilbertien, muni de la norme déduite du produit scalaire.

Rappelons tout d'abord que si G, H sont des espaces normés et $T : G \longrightarrow H$ est une application (semi-)linéaire, alors la plus petite constante M satisfaisant à

$$\|T\gamma\|_H \leqslant M \cdot \|\gamma\|_G \quad \text{pour tout } \gamma \in G \tag{$*$}$$

est

$$\|T\| := \sup_{\gamma \in G, \|\gamma\|_G \leqslant 1} \|T\gamma\|_H \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

Si $L(G, H)$ désigne l'espace vectoriel des applications linéaires $T : G \longrightarrow H$, alors

$$T \longmapsto \|T\| : L(G, H) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

est une fonctionnelle absolument homogène et sous-additive. On dit que $\|T\|$ est la norme de T .

Pour quer T soit continue, il faut et il suffit qu'il existe une constante $M < \infty$ satisfaisant à $(*)$, i.e. que $\|T\| < \infty$. On dit aussi que T est *bornée* .

Ceci fut démontré dans le cours d'Analyse [17], § 11.8.

Si $\mathcal{L}(G, H)$ désigne l'ensemble des applications linéaires $T : G \longrightarrow H$ qui sont continues, on a

$$\mathcal{L}(G, H) = \{T \in L(G, H) \mid \|T\| < \infty\} \ ,$$

et les propriétés de la norme montrent que c'est un sous-espace vectoriel de $L(G, H)$ et que

$$T \longmapsto \|T\| : \mathcal{L}(G, H) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

est une norme.

DEFINITION 1 Pour tout $\xi, \eta \in F$, on dit que ξ et η sont *orthogonaux* et on écrit $\xi \perp \eta$, si $(\xi|\, \eta) = 0$. Si A est une partie de F , on désigne par $A^{\perp}$ l' *ensemble orthogonal* formé des $\eta \in F$ tels que $(A|\, \eta) = 0$, i.e. $(\xi|\, \eta) = 0$ pour tout $\xi \in A$.

LEMME (Egalité de Pythagore) *Si $\xi, \eta \in F$ sont orthogonaux, alors*

$$\|\xi + \eta\|^2 = \|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 \ .$$

La réciproque est vrai si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

C'est immédiat, puisque

$$\|\xi + \eta\|^2 = \|\xi\|^2 + (\xi|\, \eta) + (\eta|\, \xi) + \|\eta\|^2 \ .$$

□

EXEMPLE 1 Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la réciproque est fausse ; on a par exemple

$$|1 + i|^2 = |1|^2 + |i|^2 \quad \text{et} \quad (1|\, i) = i \ .$$

Nous allons maintenant généraliser le théorème 15.16 de meilleure approximation que nous avons démontré dans le cours d'Analyse [17].

THEOREME *Soient F un espace préhilbertien et $\mathcal{G}$ une partie convexe complète $\neq \emptyset$ de F .*

(i) Pour tout $\xi \in F$, il existe un unique $\theta \in \mathcal{G}$ tel que

$$\inf_{\gamma \in \mathcal{G}} \|\xi - \gamma\| = d(\xi, \mathcal{G}) = \|\xi - \theta\| \ . \tag{$*$}$$

On le note $P_{\mathcal{G}}\xi$ et on dit c'est la meilleure approximation de ξ par un élément de $\mathcal{G}$.

(ii) Pour tout $\xi \in F$, l'élément $P_{\mathcal{G}}\xi$ est l'unique $\theta \in \mathcal{G}$ tel que

$$\mathrm{Re}\,(\gamma - \theta|\, \theta - \xi) \geqslant 0 \quad \textit{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} \ . \tag{$**$}$$

On a

$$\|P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta\| \leqslant \|\xi - \eta\| \quad \textit{pour tout } \xi, \eta \in F \ .$$

Si $\mathcal{G}$ est sous-espace vectoriel, alors

(iii) Pour tout $\xi \in F$, l'élément $P_{\mathcal{G}}\xi$ est l'unique $\theta \in \mathcal{G}$ tel que $(\xi - \theta) \perp \mathcal{G}$, i.e. tel que

$$(\gamma|\, \xi) = (\gamma|\, \theta) \quad \textit{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} \ .$$

(iv) L'application $P_{\mathcal{G}} : F \longrightarrow F$ est linéaire. C'est une projection, i.e. $P_{\mathcal{G}}^2 = P_{\mathcal{G}}$, et elle est de norme 1 si $\mathcal{G} \neq \{0\}$. Son noyau est le sous-espace vectoriel $\mathcal{G}^{\perp}$, supplémentaire orthogonal de $\mathcal{G}$; il est fermé et on a

$$F = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^{\perp} \ .$$

(v) On a

$$\mathcal{G}^{\perp\perp} = \mathcal{G} \ .$$

Dmonstration de (i) Etant donné $\xi \in F$, il existe une suite $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$ telle que $d(\xi, \mathcal{G}) = \lim_k \|\xi - \gamma_k\|$. Nous allons montrer que $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Par l'égalité du parallélogramme (corollaire 3.3), on a

$$\|\gamma_k - \gamma_l\|^2 = 2 \cdot \left(\|\xi - \gamma_k\|^2 + \|\xi - \gamma_l\|^2\right) - 4 \cdot \left\|\xi - \frac{\gamma_k + \gamma_l}{2}\right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cdot \left(\|\xi - \gamma_k\|^2 + \|\xi - \gamma_l\|^2\right) - 4 \cdot d(\xi, \mathcal{G})^2 \ ,$$

puisque $\mathcal{G}$ est convexe :

$$\frac{\gamma_k + \gamma_l}{2} \in \mathcal{G} \ .$$

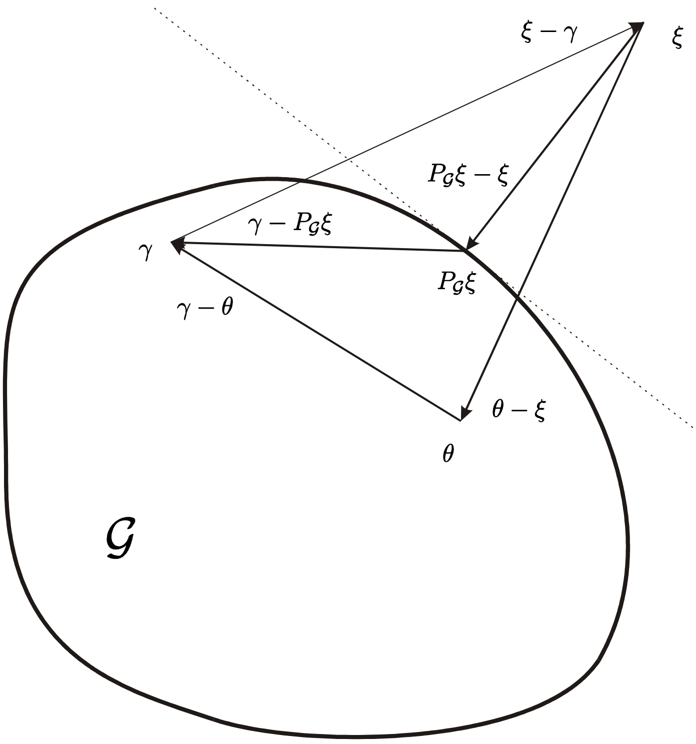
Comme le membre de droite tend vers 0 lorsque k, l tendent vers l'infini, notre assertion est prouvée et $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\theta \in \mathcal{G}$ tel que

$$\|\xi - \theta\| = \lim_k \|\xi - \gamma_k\| = d(\xi, \mathcal{G}) \ .$$

Si $\widetilde{\theta} \in \mathcal{G}$ est tel que $d(\xi, \mathcal{G}) = \left\|\xi - \widetilde{\theta}\right\|$, alors

$$\left\|\theta - \widetilde{\theta}\right\|^2 = 2 \cdot \left(\|\xi - \theta\|^2 + \left\|\xi - \widetilde{\theta}\right\|^2\right) - 4 \cdot \left\|\xi - \frac{\theta + \widetilde{\theta}}{2}\right\|^2 \leqslant 0 \ ,$$

d'où l'on obtient $\theta = \widetilde{\theta}$.



Dmonstration de (ii) Pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$ et $\alpha \in \left]0, 1\right]$, on a $\alpha \cdot \gamma + (1 - \alpha) \cdot P_{\mathcal{G}}\xi \in \mathcal{G}$, donc

$$\|P_{\mathcal{G}}\xi - \xi\|^2 \leqslant \|\alpha \cdot \gamma + (1 - \alpha) \cdot P_{\mathcal{G}}\xi - \xi\|^2 = \|\alpha \cdot (\gamma - P_{\mathcal{G}}\xi) + P_{\mathcal{G}}\xi - \xi\|^2 =$$

$$= \alpha^2 \cdot \|\gamma - P_{\mathcal{G}}\xi\|^2 + 2\alpha \cdot \operatorname{Re}(\gamma - P_{\mathcal{G}}\xi | P_{\mathcal{G}}\xi - \xi) + \|P_{\mathcal{G}}\xi - \xi\|^2$$

et par suite

$$\operatorname{Re}(\gamma - P_{\mathcal{G}}\xi | P_{\mathcal{G}}\xi - \xi) \geqslant -\frac{\alpha}{2} \cdot \|\gamma - P_{\mathcal{G}}\xi\|^2 \ ,$$

d'où $(**)$ en faisant tendre α vers 0 .

Réciproquement soit θ vérifiant $(**)$. Pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$, il vient

$$\|\gamma - \xi\|^2 = \|\gamma - \theta + \theta - \xi\|^2 = \|\gamma - \theta\|^2 + 2\operatorname{Re}(\gamma - \theta | \theta - \xi) + \|\theta - \xi\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \|\theta - \xi\|^2 \ ,$$

ce qui montre que θ vérifie $(*)$. On a bien $\theta = P_{\mathcal{G}}\xi$.

Finalement pour prouver l'inégalité, puisque $P_{\mathcal{G}}\eta, P_{\mathcal{G}}\xi \in \mathcal{G}$, constatons que

$$\operatorname{Re}(P_{\mathcal{G}}\eta - P_{\mathcal{G}}\xi | P_{\mathcal{G}}\xi - \xi) \ , \ \operatorname{Re}(P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta | P_{\mathcal{G}}\eta - \eta) \geqslant 0 \ .$$

En additionnant on obtient

$$0 \leqslant \operatorname{Re}(P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta | \xi - P_{\mathcal{G}}\xi + P_{\mathcal{G}}\eta - \eta) =$$

$$= \operatorname{Re}(P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta | \xi - \eta) - \|P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta\|^2 \leqslant |(P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta | \xi - \eta)| - \|P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|\xi - \eta\| \cdot \|P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta\| - \|P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\eta\|^2 \ ,$$

d'où le résultat.

Dmonstration de (iii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\gamma \in \mathcal{G}$, on a $\overline{\alpha} \cdot \gamma \in \mathcal{G}$, donc

$$0 \leqslant \operatorname{Re}(\overline{\alpha} \cdot \gamma - P_{\mathcal{G}}\xi | P_{\mathcal{G}}\xi - \xi) = \operatorname{Re} \alpha \cdot (\gamma | \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) - \operatorname{Re}(P_{\mathcal{G}}\xi | P_{\mathcal{G}}\xi - \xi) \ .$$

En faisant après division tendre $\alpha \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ vers $\pm\infty$, on obtient $\operatorname{Re}(\gamma | \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = 0$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en remplaçant α par $i \cdot \alpha$, on obtient $\operatorname{Im}(\gamma | \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = 0$, donc $(\gamma | \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = 0$. Nous avons donc prouvé que $(\xi - P_{\mathcal{G}}\xi) \perp \mathcal{G}$.

Réciproquement étant donné $\theta \in \mathcal{G}$ tel que $(\xi - \theta) \perp \mathcal{G}$, pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$, on a

$$\|\xi - (\theta + \gamma)\|^2 = \|\xi - \theta\|^2 + \|\gamma\|^2$$

par le lemme de Pythagore, donc

$$d(\xi, \mathcal{G})^2 = \inf_{\gamma \in \mathcal{G}} \|\xi - (\theta + \gamma)\|^2 = \|\xi - \theta\|^2 \ .$$

Grâce à (i), on obtient $\theta = P_{\mathcal{G}}\xi$.

Dmonstration de (iv) La linéarité découle immédiatement de (iii). Par exemple pour tout $\xi \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a évidemment

$$\alpha \cdot \xi - \alpha \cdot P_{\mathcal{G}}\xi = \alpha \cdot (\xi - P_{\mathcal{G}}\xi) \perp \mathcal{G} \ ,$$

donc $P_{\mathcal{G}}(\alpha \cdot \xi) = \alpha \cdot P_{\mathcal{G}}\xi$. C'est une projection, car $(P_{\mathcal{G}}\xi - P_{\mathcal{G}}\xi) \perp \mathcal{G}$! D'autre part

$$\|\xi\|^2 = \|P_{\mathcal{G}}\xi\|^2 + \|\xi - P_{\mathcal{G}}\xi\|^2 \ ,$$

d'où l'on tire $\|P_{\mathcal{G}}\xi\| \leqslant \|\xi\|$, et par suite $\|P_{\mathcal{G}}\| \leqslant 1$. Si $\mathcal{G} \neq \{0\}$, soit $\gamma \in \mathcal{G}$ tel que $\|\gamma\| = 1$. On a alors $\|P_{\mathcal{G}}\gamma\| = \|\gamma\| = 1$, donc $\|P_{\mathcal{G}}\| = 1$. Finalement, on a $\operatorname{Ker} P_{\mathcal{G}} = \mathcal{G}^{\perp}$ par (iii) ; c'est donc un sous-espace vectoriel fermé puisque $P_{\mathcal{G}}$ est continue, et la décomposition $\xi = P_{\mathcal{G}}\xi + (\xi - P_{\mathcal{G}}\xi)$ montre que $F = \mathcal{G} + \mathcal{G}^{\perp}$. Comme manifestement $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}^{\perp} = \{0\}$, nous avons finit de prouver (iv).

Dmonstration de (v) On a $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^{\perp\perp}$ et si $\xi \in \mathcal{G}^{\perp\perp}$, alors comme $\xi - P_{\mathcal{G}}\xi \in \mathcal{G}^{\perp}$ par (iii), il vient

$$(\xi | \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = 0 \quad \text{et} \quad (P_{\mathcal{G}}\xi | \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = 0 \ ,$$

donc

$$\|\xi - P_{\mathcal{G}}\xi\|^2 = (\xi - P_{\mathcal{G}}\xi | \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = (\xi | \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) + (P_{\mathcal{G}}\xi | \xi - P_{\mathcal{G}}\xi) = 0 \ ,$$

i.e. $\xi = P_{\mathcal{G}}\xi \in \mathcal{G}$. □

DEFINITION 2 Si $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel complet, on dit que $P_{\mathcal{G}}$ est la *projection orthogonale* ou l' *orthoprojecteur* de F sur $\mathcal{G}$. Nous écrirons

$$F = \mathcal{G} \boxplus \mathcal{G}^{\perp}$$

pour montrer que cette décomposition est orthogonale et que l'on a l'égalité de Pythagore.

REMARQUE 1 On peut également étendre ce résultat à certains espaces normés, dits *uniformément convexes* , par exemple les espaces $\mathbf{L}^p(\mu)$ pour $p \in \left]1, \infty\right[$.

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $|\cdot|_\infty$, l'assertion (i) est fausse. Par exemple si $\varphi = (1, 0)$, alors tous les points de $\{0\} \times [-1, 1]$ sont meilleure approximation de φ dans $\{0\} \times \mathbb{R}$.

EXEMPLE 2 Etant donné $\epsilon \in F \smallsetminus \{0\}$, alors $\mathbb{K} \cdot \epsilon$ est complet et

$$P_{\mathbb{K} \cdot \epsilon}\xi = \frac{1}{\|\epsilon\|^2} \cdot (\epsilon | \xi) \cdot \epsilon \ .$$

En effet $\mathbb{K} \cdot \epsilon$ est complet, car $\alpha \longmapsto \alpha \cdot \frac{\epsilon}{\|\epsilon\|} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \cdot \epsilon$ est un isomorphisme. Il n'est évidemment pas nécessaire de le savoir pour constater que $\frac{1}{\|\epsilon\|^2} \cdot (\epsilon|\, \xi) \cdot \epsilon$ est la projection de ξ sur $\mathbb{K} \cdot \epsilon$. En effet

$$\left(\xi - \frac{1}{\|\epsilon\|^2} \cdot (\epsilon|\, \xi) \cdot \epsilon \,\middle|\, \frac{1}{\|\epsilon\|^2} \cdot (\epsilon|\, \xi) \cdot \epsilon \right) = \frac{(\epsilon|\, \xi) \cdot (\xi|\, \epsilon)}{\|\epsilon\|^2} - \frac{\overline{(\epsilon|\, \xi)} \cdot (\epsilon|\, \xi) \cdot \|\epsilon\|^2}{\|\epsilon\|^4} = 0 \, .$$

$\square$

COROLLAIRE *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.*

Pour qu'une partie A de $\mathcal{H}$ soit totale, il faut et il suffit que, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $\xi \perp A$, i.e. tel que $(A|\, \xi) = \{0\}$, on ait $\xi = 0$.

Soit $\mathcal{G} := \overline{\operatorname{lin}} A$. Puisque $\mathcal{H}$ est complet, il en est de même de $\mathcal{G}$, donc $\mathcal{H} = \mathcal{G} \boxplus \mathcal{G}^{\perp}$. Par définition A est totale si, et seulement si, $\mathcal{G} = \mathcal{H}$, i.e. $\mathcal{G}^{\perp} = \{0\}$, d'où l'assertion puisque $A^{\perp} = \mathcal{G}^{\perp}$ par linéarité et continuité (cf. remarque 1.1.2). $\square$

EXERCICE 1 Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des sous-espaces vectoriels de F .

(a) Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sont complets, alors $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ si, et seulement si, on a $P_{\mathcal{G}} = P_{\mathcal{G}} P_{\mathcal{H}}$.

(b) Si $\mathcal{H} \perp \mathcal{G}$, alors $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ est complet si, et seulement si, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ le sont. Dans ce cas, on a

$$P_{\mathcal{H}+\mathcal{G}} = P_{\mathcal{H}} + P_{\mathcal{G}} \, .$$

EXERCICE 2 Dans l'espace de Banach $c^0(\mathbb{N})$ des zéro-suites, sous-espace vectoriel fermé de $\ell^{\infty}(\mathbb{N})$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_{\infty}$, il existe des hyperplans fermés H , i.e. $H = \operatorname{Ker} \mu$ pour une forme linéaire continue $\mu \in c^0(\mathbb{N})' = \ell^1(\mathbb{N})$ (cf. exercice 3.8.1), tels que tout $\varphi \in F \setminus H$ n'ait pas de meilleure approximation dans H (cf. exercice 3.8.2).

1.5 Théorème de représentation de Riesz

Si F est un espace vectoriel nous désignerons par $F^{\circledast}$ l'espace vectoriel des formes semi-linéaires μ sur F . La forme sesquilinéaire (à gauche) qui lui est associée sera notée

$$F \times F^{\circledast} \longrightarrow \mathbb{K} : (\varphi, \mu) \longmapsto \langle \varphi | \, \mu \rangle := \mu\,(\varphi)$$

comme généralisation d'un produit scalaire. Nous écrirons la forme semi-linéaire μ sous la forme d'un *vecteur ket*

$$|\mu\rangle : F \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto \langle \varphi | \, \mu \rangle = \mu\,(\varphi) \ .$$

Ce formalisme fait partie de celui de Dirac et sera développé plus tard (cf. 3.4, 3.5 et 3.22).

DEFINITION Si F est un espace normé, on muni l'espace vectoriel $F^{\dagger}$ des formes semi-linéaires continues sur F de la norme

$$\|\mu\| := \sup_{\varphi \in F, \|\varphi\| \leqslant 1} |\langle \varphi | \, \mu \rangle| \ .$$

On dit que c'est le *semi-dual fort* de F .

Si G et H sont des espaces normés, on dit qu'une application sesquilinéaire $\mathfrak{s} : F \times G \longrightarrow H$ est *bornée* s'il existe une constante $M < \infty$ telle que

$$\|\mathfrak{s}\,(\varphi, \gamma)\|_H \leqslant M \cdot \|\varphi\|_F \cdot \|\gamma\|_G \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \gamma \in G \ ,$$

i.e. si

$$\|\mathfrak{s}\| := \sup_{\substack{\varphi \in F, \gamma \in G \\ \|\varphi\|_F, \|\gamma\|_G \leqslant 1}} \|\mathfrak{s}\,(\varphi, \gamma)\|_H < \infty \ ,$$

qui est la plus petite de ces constantes.

On a

$$\|\mathfrak{s}\,(\varphi, \gamma)\|_H \leqslant \|\mathfrak{s}\| \cdot \|\varphi\|_F \cdot \|\gamma\|_G \ .$$

EXEMPLE La forme sesquilinéaire canonique

$$F \times F^{\dagger} \longrightarrow \mathbb{K} : (\varphi, \mu) \longmapsto \langle \varphi | \, \mu \rangle$$

est bornée.

En effet on a

$$|\langle \varphi | \, \mu \rangle| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|\mu\| \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \mu \in F^{\dagger} \ .$$

On peut considérer cette inégalité comme une *inégalité de Hölder abstraite* .

Nous montrerons sous forme plus générale dans la proposition 2.4 qu'une application sesquilinéaire est continue si, et seulement si, elle est bornée. En fait il suffit d'adapter la démonstration de la continuité de la multiplication dans $\mathbb{K}$ (cours d'Analyse [17], théorème 5.5.iii).

Voir aussi 3.1, 3.2 et 3.8 pour d'autres détails.

PROPOSITION *Soit F un espace préhilbertien. Pour tout $\xi \in F$, la forme semi-linéaire*

$$|\xi) : \varphi \longmapsto (\varphi | \, \xi) : F \longrightarrow \mathbb{K}$$

est continue sur F *, et l'application linéaire, dite de Riesz,*

$$R : F \longrightarrow F_\beta^\dagger : \xi \longmapsto |\xi)$$

est une isométrie.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$|(\varphi|\,\xi)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|\xi\| \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

Ceci montre que $\||\xi)\| \leqslant \|\xi\|$. Si $\xi \neq 0$, on a

$$\left\| \frac{\xi}{\|\xi\|} \right\| = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\xi}{\|\xi\|} \middle| \, \xi \right) = \|\xi\| \ ,$$

ce qui prouve que $\||\xi)\| = \|\xi\|$. □

REMARQUE 1 L'application de Riesz est en général non-surjective, mais on a le

THEOREME (de représentation de Riesz) *Soit* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert. L'application de Riesz* $R : \xi \longmapsto |\xi)$ *est une isométrie de* $\mathcal{H}$ *sur* $\mathcal{H}_\beta^\dagger$ *. En outre si* $\mu \in \mathcal{H}^\dagger$ *, alors la fonction réelle sur* $\mathcal{H}$

$$\varphi \longmapsto \frac{1}{2} \cdot \|\varphi\|^2 - \operatorname{Re} \langle \varphi|\, \mu \rangle : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$$

atteint son minimum en $\xi \in \mathcal{H}$ *tel que* $\mu = |\xi)$ *.*

Il nous reste à montrer que l'application de Riesz est surjective. Etant donné $\mu \in \mathcal{H}^\dagger \smallsetminus \{0\}$, on a $(\operatorname{Ker} \mu)^\perp \neq \{0\}$ et le théorème de la projection 1.4 montre que $\mathcal{H} = \operatorname{Ker} \mu \boxplus (\operatorname{Ker} \mu)^\perp$. Il existe donc $\widetilde{\xi} \in (\operatorname{Ker} \mu)^\perp$ tel que $\left(\widetilde{\xi} \middle| \, \mu \right) = 1$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, on a alors $\varphi - \overline{\langle \varphi|\, \mu \rangle} \cdot \widetilde{\xi} \in \operatorname{Ker} \mu$ et en posant

$$\xi := \frac{\widetilde{\xi}}{\left\|\widetilde{\xi}\right\|^2} \in (\operatorname{Ker} \mu)^\perp \ ,$$

il vient

$$(\varphi|\, \xi) = \left(\varphi - \overline{\langle \varphi|\, \mu \rangle} \cdot \widetilde{\xi} \middle| \, \xi \right) + \left(\overline{\langle \varphi|\, \mu \rangle} \cdot \widetilde{\xi} \middle| \, \xi \right) = \left(\overline{\langle \varphi|\, \mu \rangle} \cdot \widetilde{\xi} \middle| \, \frac{\widetilde{\xi}}{\left\|\widetilde{\xi}\right\|^2} \right) = \langle \varphi|\, \mu \rangle \ ,$$

i.e. $\mu = |\xi)$.

Finalement, on a

$$\|\varphi - \xi\|^2 = \|\varphi\|^2 - 2 \operatorname{Re} (\varphi|\, \xi) + \|\xi\|^2 = \|\varphi\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle \varphi|\, \mu \rangle + \|\xi\|^2 \ ,$$

d'où la seconde assertion. □

REMARQUE 2 On peut donc munir le semi-dual fort $\mathcal{H}_\beta^\dagger$ de $\mathcal{H}$ d'un produit scalaire compatible avec sa norme en posant

$$(\mu|\, \nu)_{\mathcal{H}_\beta^\dagger} := \left(R^{-1}\mu \middle| \, R^{-1}\nu \right)_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \mu, \nu \in \mathcal{H}_\beta^\dagger \ ,$$

qui en fait un espace de Hilbert isomorphe à $\mathcal{H}$.

Attention, ce théorème pourrait nous inciter à identifier le semi-dual fort $\mathcal{H}_\beta^\dagger$ à $\mathcal{H}$, mais dans les applications on rencontre souvent d'autres représentations, plus intéressantes, de $\mathcal{H}_\beta^\dagger$ (cf. exemple 3.4.5).

COROLLAIRE *Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des espaces de Hilbert. Il y a correspondance biunivoque entre les applications linéaires continues*

$$S : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$$

et les formes sesquilinéaires bornées

$$\mathfrak{s} : \mathcal{H} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{K}$$

donnée par

$$\mathfrak{s}(\xi, \gamma) = (\xi | S\gamma)_\mathcal{H} \ .$$

Dans ce cas

$$\|S\| = \|\mathfrak{s}\| \ .$$

Si S est linéaire continue, il est clair que $\mathfrak{s}$ est sesquilinéaire (cf. exemple 1.1). Elle est bornée car

$$|\mathfrak{s}(\xi, \gamma)| = |(\xi | S\gamma)| \leqslant \|\xi\| \cdot \|S\gamma\| \leqslant \|S\| \cdot \|\xi\| \cdot \|\mu\| \ .$$

Réciproquement si $\mathfrak{s}$ est une forme sesquilinéaire bornée, pour tout $\gamma \in G$

$$\xi \longmapsto \mathfrak{s}(\xi, \gamma) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$$

est une forme semi-linéaire continue, représentée par $S\gamma \in \mathcal{H}$, puisque

$$|\mathfrak{s}(\xi, \gamma)| \leqslant \|\mathfrak{s}\| \cdot \|\gamma\| \cdot \|\xi\| \ .$$

Par construction $\mathfrak{s}(\xi, \gamma) = (\xi | S\gamma)$ et $\|S\gamma\| \leqslant \|\mathfrak{s}\| \cdot \|\gamma\|$. D'autre part

$$S : \gamma \longmapsto S\gamma : G \longrightarrow \mathcal{H}$$

est linéaire et

$$\|S\| = \sup_{\gamma \in G, \|\gamma\| \leqslant 1} \|S\gamma\| \leqslant \|\mathfrak{s}\| \ ,$$

ce qui prouve la continuité. Mais comme

$$\|\mathfrak{s}\| = \sup_{\|\xi\|, \|\gamma\| \leqslant 1} |\mathfrak{s}(\xi, \gamma)| = \sup_{\|\xi\|, \|\gamma\| \leqslant 1} |(\xi | S\gamma)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|\xi\|, \|\gamma\| \leqslant 1} \|\xi\| \cdot \|S\gamma\| \leqslant \sup_{\|\gamma\| \leqslant 1} \|S\gamma\| = \|S\| \ ,$$

on obtient l'autre inégalité. □

EXERCICE Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$. Montrer que pour toute forme semi-linéaire continue μ sur F , il existe une unique forme semi-linéaire continue ν sur $\mathcal{H}$ telle que $\nu_{|F} = \mu$ und $\nu_{|F^\perp} = 0$.

1.6 Les théorèmes de Stampacchia et Lax-Milgram

Dans ce paragraphe $\mathcal{H}$ désigne un espace hilbertien

DEFINITION Une forme sesquilinéaire bornée $\mathfrak{s} : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite *strictement positive* ou *coercitive* s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathfrak{s}(\xi,\xi) \geqslant \varepsilon \cdot \|\xi\|^2 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H} \ .$$

L'application linéaire continue $S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui lui est associée est aussi dite strictement positive.

THEOREME (de Stampacchia) *Soient $\mathfrak{s}$ une forme sesquilinéaire bornée coercitive sur $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$ une partie convexe fermée $\neq \emptyset$ de $\mathcal{H}$ et $\mu \in \mathcal{H}^\dagger$. Alors*

(i) Il existe un unique $\theta \in \mathcal{G}$ tel que

$$\operatorname{Re}\langle \gamma - \theta | \mu\rangle \leqslant \operatorname{Re}\mathfrak{s}(\gamma-\theta,\theta) \quad \textit{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} \ . \tag{$*$}$$

(ii) Si de plus $\mathfrak{s}$ est hermitienne, alors θ est caractérisé par la propriété

$$\theta \in \mathcal{G} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{2}\mathfrak{s}(\theta,\theta) - \operatorname{Re}\langle\theta|\mu\rangle = \min\nolimits_{\gamma\in\mathcal{G}}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{s}(\gamma,\gamma) - \operatorname{Re}\langle\gamma|\mu\rangle\right) \ .$$

Dmonstration de (i) Utilisons l'application linéaire continue S associé à la forme sesquilinéaire $\mathfrak{s}$ (corollaire 1.5), donc telle que $\mathfrak{s}(\xi,\eta) = (\xi|S\eta)$. On a

$$\varepsilon \cdot \|\xi\|^2 \leqslant \mathfrak{s}(\xi,\xi) = (\xi|S\xi) \leqslant \|S\| \cdot \|\xi\|^2 \ , \tag{$**$}$$

ce qui montre que $\varepsilon \leqslant \|S\|$. Soit d'autre part $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $|\mu\rangle = |\xi)$ (théorème de Riesz 1.5).

La condition $(*)$ sur θ s'écrit alors

$$\operatorname{Re}(\gamma-\theta|S\theta-\xi) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} \ ,$$

ou encore

$$\operatorname{Re}(\gamma-\theta|\theta-[\alpha\cdot\xi-\alpha\cdot S\theta+\theta]) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} \ ,$$

pour une constante $\alpha > 0$ que nous allons choisir. Grâce au théorème de la projection 1.4.ii, il existe un unique $\theta \in \mathcal{G}$ satisfaisant à $(*)$ si, et seulement si, il existe un unique $\theta \in \mathcal{G}$ tel que

$$\theta = P_{\mathcal{G}}(\alpha\cdot\xi-\alpha\cdot S\theta+\theta) \ .$$

Nous sommes donc ramené à un problème de point fixe dans $\mathcal{G}$, qui est un espace métrique complet, puisque fermé dans $\mathcal{H}$. Montrons que l'application

$$\Phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} : \theta \longmapsto P_{\mathcal{G}}(\alpha\cdot\xi-\alpha\cdot S\theta+\theta)$$

est q-lipschitzienne pour un $q \in [0,1[$. Pour tout $\theta,\gamma \in \mathcal{G}$, l'inégalité du théorème de la projection 1.4.ii montre que

$$\|\Phi\theta-\Phi\gamma\|^2 \leqslant \|\alpha\cdot\xi-\alpha\cdot S\theta+\theta-(\alpha\cdot\xi-\alpha\cdot S\gamma+\gamma)\|^2 =$$

$$= \|\theta-\gamma-\alpha\cdot S(\theta-\gamma)\|^2 = \|\theta-\gamma\|^2 - 2\alpha\cdot\operatorname{Re}(\theta-\gamma|S(\theta-\gamma)) + \alpha^2\cdot\|S(\theta-\gamma)\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 - 2\varepsilon \cdot \alpha + \|S\|^2 \cdot \alpha^2\right) \cdot \|\theta - \gamma\|^2 \ .$$

Le minimum de $\alpha \longmapsto 1 - 2\varepsilon \cdot \alpha + \|S\|^2 \cdot \alpha^2$ est atteint en

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\|S\|^2}$$

et vaut

$$q^2 := 1 - 2\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{\|S\|^2} + \|S\|^2 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\|S\|^2}\right)^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{\|S\|^2} \in [0,1[\ ,$$

puisque $\varepsilon \leqslant \|S\|$. Le théorème du point fixe de Banach (cours d'Analyse [17], exemple 12.5.1) nous permet de conclure.

Dmonstration de (ii) Si $\mathfrak{s}$ est en outre hermitienne, elle définit un nouveau produit scalaire sur $\mathcal{H}$. Mais puisque la nouvelle norme est équivalente à l'ancienne par $(**)$, on obtient un nouvel espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathfrak{s}}$. Utilisant le théorème de représentation de Riesz dans cet espace, il existe $\widetilde{\xi} \in \mathcal{H}_{\mathfrak{s}}$ tel que

$$(\eta|\, \xi) = \mathfrak{s}\left(\eta, \widetilde{\xi}\right) \quad \text{pour tout } \eta \in \mathcal{H}_{\mathfrak{s}} \ .$$

La condition $(*)$ s'écrit alors

$$\operatorname{Re}(\gamma - \theta|\, \xi) \leqslant \operatorname{Re} \mathfrak{s}(\gamma - \theta, \theta) \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} \ . \tag{$*$}$$

$$\operatorname{Re} \mathfrak{s}\left(\gamma - \theta, \theta - \widetilde{\xi}\right) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{G}$$

et le théorème de la projection 1.4.i dans $\mathcal{H}_{\mathfrak{s}}$ montre que θ est la meilleure approximation de $\widetilde{\xi}$ par un élément de $\mathcal{G}$, donc que θ réalise

$$\min\nolimits_{\gamma \in \mathcal{G}} \mathfrak{s}\left(\gamma - \widetilde{\xi}, \gamma - \widetilde{\xi}\right)^{\frac{1}{2}} \ ,$$

ce qui revient à minimiser

$$\mathfrak{s}\left(\gamma - \widetilde{\xi}, \gamma - \widetilde{\xi}\right) = \mathfrak{s}(\gamma, \gamma) - 2 \cdot \operatorname{Re} \mathfrak{s}\left(\gamma, \widetilde{\xi}\right) + \mathfrak{s}\left(\widetilde{\xi}, \widetilde{\xi}\right)$$

ou bien

$$\frac{1}{2}\mathfrak{s}(\gamma, \gamma) - \operatorname{Re}(\gamma|\, \xi) \ .$$

Ceci finit de prouver le théorème. □

COROLLAIRE (Lax-Milgram) *Soit $\mathfrak{s}$ une forme sesquilinéaire bornée coercitive sur $\mathcal{H}$ et $\mu \in \mathcal{H}^\dagger$. Alors*

(i) Il existe un unique $\theta \in \mathcal{H}$ tel que

$$\mathfrak{s}(\gamma, \theta) = \langle \gamma|\, \mu \rangle \quad \textit{pour tout } \gamma \in \mathcal{H} \ .$$

(ii) Si de plus $\mathfrak{s}$ est hermitienne, alors θ est caractérisé par la propriété

$$\theta \in \mathcal{H} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{2}\mathfrak{s}(\theta, \theta) - \operatorname{Re}\langle \theta|\, \mu \rangle = \min\nolimits_{\gamma \in \mathcal{G}} \left(\frac{1}{2}\mathfrak{s}(\gamma, \gamma) - \operatorname{Re}\langle \gamma|\, \mu \rangle\right) \ .$$

Il suffit d'appliquer le théorème de Stampacchia en prenant $\mathcal{G} = \mathcal{H}$ en remarquant, comme dans la démonstration du théorème de la projection (iii), que l'unique solution $\theta \in \mathcal{H}$ est caractérisée par

$$\operatorname{Re}\langle \alpha \cdot \gamma - \theta | \mu \rangle \leqslant \operatorname{Re} \mathfrak{s}(\alpha \cdot \gamma - \theta, \theta) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{K} \text{ et } \gamma \in \mathcal{H} \ ,$$

c'est-à-dire

$$0 \leqslant \operatorname{Re}\Big(\alpha \cdot [\mathfrak{s}(\gamma, \theta) - \langle \gamma | \mu \rangle]\Big) - \operatorname{Re} \mathfrak{s}(\theta, \theta) + \operatorname{Re}\langle \theta | \mu \rangle \ ,$$

ce qui n'est possible que si

$$\mathfrak{s}(\gamma, \theta) - \langle \gamma | \mu \rangle = 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{H} \ .$$

L'existence peut se démontrer directement et de manière plus générale (cf. exercice 3.17). □

REMARQUE 1 L'équation

$$\mathfrak{s}(\gamma, \theta) = \langle \gamma | \mu \rangle \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{H} \ ,$$

est celle d'Euler associée à l'extrémalisation sur $\mathcal{H}$ de la fonction réelle

$$\gamma \longmapsto \frac{1}{2} \cdot \mathfrak{s}(\gamma, \gamma) - \operatorname{Re}\langle \gamma | \mu \rangle \ ,$$

plus précisément que θ en soit un point critique, c'est-à-dire que, pour tout $\gamma \in \mathcal{H}$, 0 soit un point critique de la fonction

$$f_\gamma : t \longmapsto \frac{1}{2} \cdot \mathfrak{s}(\theta + t \cdot \gamma, \theta + t \cdot \gamma) - \operatorname{Re}\langle \theta + t \cdot \gamma | \mu \rangle \ ,$$

i.e. $f_\gamma'(0) = 0$. Mais

$$f_\gamma'(t) = \partial_t \left(\frac{1}{2} \cdot \mathfrak{s}(\theta + t \cdot \gamma, \theta + t \cdot \gamma) - \operatorname{Re}\langle \theta + t \cdot \gamma | \mu \rangle \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \{\mathfrak{s}(\partial_t [\theta + t \cdot \gamma], \theta + t \cdot \gamma) + \mathfrak{s}(\theta + t \cdot \gamma, \partial_t [\theta + t \cdot \gamma])\} - \operatorname{Re}\langle \partial_t [\theta + t \cdot \gamma] | \mu \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \{\mathfrak{s}(\gamma, \theta + t \cdot \gamma) + \mathfrak{s}(\theta + t \cdot \gamma, \gamma)\} - \operatorname{Re}\langle \gamma | \mu \rangle = \operatorname{Re}\Big[\mathfrak{s}(\gamma, \theta + t \cdot \gamma) - \langle \gamma | \mu \rangle\Big] \ ,$$

ce qui nous conduit à l'équation

$$\operatorname{Re}\Big[\mathfrak{s}(\gamma, \theta) - \langle \gamma | \mu \rangle\Big] = 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{H} \ ,$$

et par suite le résultat. □

REMARQUE 2 Ces théorèmes conduisent aux méthodes dites variationnelles de résolution des équations aux dérivées partielles. Rappelons que l'équation d'Euler dans le cadre du principe de moindre action conduit aux équations de Lagrange de la mécanique.

1.7 Les espaces de Sobolev sur un intervalle

Dans ce paragraphe J désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Rappelons la notion de fonction (localement) absolument continue et les résultats importants qui ont été démontrés dans le cours d'Analyse [17] : 15.19, 16.4 et 16.10.

DEFINITION 1 Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, soit

$$1_{a,b} := \begin{cases} 1_{]a,b]} & \text{si} \quad a \leqslant b \\ -1_{]b,a]} & \phantom{\text{si}} \quad b < a \end{cases}$$

la *fonction caractéristique signée* .

LEMME *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$.*

(i) Pour tout $a, b, c \in J$, on a

$$1_{a,b} + 1_{b,c} = 1_{a,c} \ .$$

(ii) Une fonction f sur J est localement λ_J-intégrable si, et seulement si, pour tout intervalle compact $[a, b] \subset J$, la fonction $1_{[a,b]} \cdot f$ est λ_J-intégrable.

(iii) Si $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ et $\int \varphi \cdot f \, d\lambda_J \geqslant 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{E}_+(J)$, respectivement $\varphi \in \mathcal{K}_+(J)$ ou encore $\varphi \in \mathcal{D}_+(J)$, alors $f \geqslant 0$ λ_J-p.p. .

Etant donné $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$, $\tau \in J$ et $c \in \mathbb{C}$, on considère la fonction

$$F : J \longrightarrow \mathbb{K} : t \longmapsto c + \int_\tau^t f(s) \, ds := c + \int 1_{\tau,t} \cdot f \, d\lambda_J \ .$$

Alors

(iv) F est continue.

(v) F est croissante, si, et seulement si, $f \geqslant 0$ λ_J-p.p. . En particulier pour que F soit constante, il faut et il suffit que que $f = 0$ λ_J-p.p. .

(vi) La classe de f est univoquement déterminée par F .

(vii) Si f est continue en t , alors F est dérivable en t et $F'(t) = f(t)$.

Bien que la démonstration ait été faite en 15.19 du cours d'Analyse [17], donnons quelques indications.

Dmonstration de (i) C'est immédiat.

Dmonstration de (ii) La nécessité découle de la compacité d'un intervalle fermé, la suffisance du fait que J est localement compact.

Dmonstration de (iii) Ce point sera démontré de manière plus générale dans le paragraphe 1.16 : $\mathcal{E}(J)$, $\mathcal{K}(J)$ et $\mathcal{D}(J)$ sont des espaces-test.

Dmonstration de (iv) Il suffit d'appliquer le théorème de Lebesgue : si $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers t dans J , on a

$$\lim_k 1_{\tau,t_k} \cdot f = 1_{\tau,t} \cdot f \quad \text{ponctuellement et} \quad |1_{\tau,t_k} \cdot f| \leqslant 1_{[a,b]} \cdot |f| \in \mathbf{L}^1(\lambda_J) \ ,$$

où $[a,b]$ est un intervalle de J contenant $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Il vient alors

$$\lim_k F(t_k) = c + \lim_k \int 1_{\tau,t_k} \cdot f \, d\lambda_J = c + \int \lim_k (1_{\tau,t_k} \cdot f) \, d\lambda_J =$$

$$= c + \int 1_{\tau,t} \cdot f \, d\lambda_J = F(t) \ .$$

Dmonstration de (v) Si F est croissante, pour tout $s,t \in J$ tels que $s < t$, on a

$$0 \leqslant F(t) - F(s) = \int 1_{s,t} \cdot f \, d\lambda = \int 1_{[s,t]} \cdot f \, d\lambda_J \ .$$

Par linéarité on obtient $\int \varphi \cdot f \, d\lambda_J \geqslant 0$ pour toute fonction en escalier $\varphi \in \mathcal{E}_+(J)$, donc $f \geqslant 0$ λ_J-p.p. , par (iii). La réciproque et le reste sont immédiats.

Dmonstration de (vi) Si, pour tout $t \in J$, on a

$$F(t) = d + \int_{\widetilde{\tau}}^t g \quad \text{avec } g \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J) \ ,$$

alors

$$\int_s^t f = F(t) - F(s) = \int_s^t g$$

donc $\int 1_{s,t} \cdot f = \int_s^t (f-g) = 0$ pour tout $s,t \in J$, donc $f = g$ par (iii).

Dmonstration de (vii) Il suffit d'estimer en utilisant la continuité en t :

$$\left| \frac{F(s) - F(t)}{s-t} - f(t) \right| = \frac{1}{|s-t|} \cdot \left| \int_s^t \left[f - f(t) \right] \right| \leqslant \frac{1}{|s-t|} \cdot \int_s^t |f - f(t)| \leqslant \varepsilon \ ,$$

puisque $|f(u) - f(t)| \leqslant \varepsilon$ si u est suffisamment proche de t . □

DEFINITION 2 Nous dirons qu'une fonction F du type

$$F = F(\tau) + \int_\tau^\diamond f \quad \text{pour un } f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$$

est *(localement) absolument continue* . L'ensemble de ces fonctions est désigné par $\mathcal{AC}(J)$.

Nous dirons que f est la dérivée (en un sens généralisé) de F ; on la note ∂F .

Cette définition est bien posée puisque la fonction f est univoquement déterminée par F à égalité λ_J-presque partout. C'est une généralisation, puisque toute fonction g continûment dérivable est localement absolument continue :

$$g(t) = g(\tau) + \int_\tau^t g'(s) \, ds \ ,$$

par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (cours d'analyse 9.9). On a donc $\partial g = g'$. Ainsi $\mathcal{C}^{(1)}(J) \subset \mathcal{AC}(J) \subset \mathcal{C}(J)$.

EXEMPLE 1 On a $|\mathrm{id}|$, $\mathrm{id}^+ = \max(0, \mathrm{id}) \in \mathcal{AC}(\mathbb{R})$ et $\partial |\mathrm{id}| = \mathrm{signum}$, $\partial \, \mathrm{id}^+ = 1_{\mathbb{R}_+}$.

PROPOSITION *Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, $F, G \in \mathcal{AC}(J)$ et $a, b \in J$. Alors*

(i) ***Intégration par parties***

$$\int_a^b \partial F \cdot G = \Big[F \cdot G\Big]_a^b - \int_a^b F \cdot \partial G \ .$$

En particulier $F \cdot G \in \mathcal{A}(J)$ et

$$\partial (F \cdot G) = \partial F \cdot G + F \cdot \partial G \ .$$

(ii) ***Règle de substitution*** *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\Phi : I \longrightarrow J$ une fonction localement absolument continue, $I(a, b)$ l'intervalle compact d'extrémités $a, b \in I$ et*

$$\zeta : \Phi(I(a, b)) \longrightarrow \mathbb{K} \ .$$

Si Φ est réelle croissante, alors l'image de $\partial\Phi \cdot \lambda_{I(a,b)}$ par Φ est $\lambda_{\Phi(I(a,b))}$ et ζ est $\lambda_{\Phi(I(a,b))}$-intégrable si, et seulement si, $\zeta \circ \Phi \cdot \partial\Phi$ est $\lambda_{I(a,b)}$-intégrable. Dans ce cas on a

$$\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} \zeta = \int_a^b \zeta \circ \Phi \cdot \partial\Phi \ .$$

Plus généralement si $\zeta \circ \Phi \cdot \partial\Phi$ est $\lambda_{I(a,b)}$-intégrable, alors ζ est $1_{\Phi(a),\Phi(b)} \cdot \lambda_{\Phi([a,b])}$-intégrable (ou bien $\lambda_{I(\Phi(a),\Phi(b))}$-intégrable) et on a la même formule.

(iii) Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ et $\Phi : I \longrightarrow J$, $G : J \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions localement absolument continues. Si Φ est monotone, plus généralement si $\partial G \circ \Phi \cdot \partial\Phi$ est localement λ_I-intégrable, alors $G \circ \Phi$ est localement absolument continue et on a

$$\partial (G \circ \Phi) = \partial G \circ \Phi \cdot \partial\Phi \ .$$

Dmonstration de (i) En exprimant F et G à l'aide de ∂F et respectivement ∂G on obtient des intégrales doubles. L'égalité découle alors du théorème de Fubini comme nous l'avons fait dans le cours d'Analyse [17], théorème 16.4.

Dmonstration de (ii) Cf. cours d'Analyse [17], théorème 16.10.

Dmonstration de (iii) C'est immédiat par (ii) (cours d'Analyse [17], corollaire 16.10 !).

□

EXEMPLE 2 Si $F \in \mathcal{AC}(J)$, alors $\overline{F} \in \mathcal{AC}(J)$ et $\partial\left(\overline{F}\right) = \overline{\partial F}$. En particulier $|F|^2 \in \mathcal{AC}(J)$ et

$$\partial\left(|F|^2\right) = \partial\overline{F} \cdot F + \overline{F} \cdot \partial F = 2\,\mathrm{Re}\left(\partial\overline{F} \cdot F\right) \ .$$

C'est immédiat puisque

$$\overline{F} = \overline{F(\tau) + \int_\tau^\diamond f} = \overline{F}(\tau) + \int_\tau^\diamond \overline{f} \ .$$

□

EXEMPLE 3 Si $F, G \in \mathcal{AC}(J)$ et $G > 0$ sur J , alors $\frac{F}{G} \in \mathcal{AC}(J)$ et

$$\partial\frac{F}{G} = \frac{\partial F \cdot G - F \cdot \partial G}{G^2} \ .$$

En effet il suffit de montrer que $\frac{1}{G} \in \mathcal{AC}(J)$ et $\partial \frac{1}{G} = -\frac{\partial G}{G^2}$, donc, pour tout $t \in J$, que

$$\frac{1}{G(t)} = \frac{1}{G(\tau)} - \int_\tau^t \frac{\partial G}{G^2} .$$

Mais $\frac{\partial G}{G^2} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ et grâce à la règle de substitution on obtient

$$\int_\tau^t \frac{\partial G}{G^2} = \int_{G(\tau)}^{G(t)} \frac{1}{\mathrm{id}^2} = \left[-\frac{1}{\mathrm{id}}\right]_{G(\tau)}^{G(t)} = \frac{1}{G(\tau)} - \frac{1}{G(t)} .$$

□

DEFINITION 3 Soient $\mathcal{AC}^{(0)}(J) := \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$, $\partial^0 f := f$ et, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{AC}^{(m+1)}(J) := \left\{ f \in \mathcal{AC}^{(m)}(J) \;\middle|\; \partial^m f \in \mathcal{AC}(J) \right\} ,$$

$$\partial^{m+1} f := \partial(\partial^m f)$$

et

$$\mathcal{H}^{(m)}(J) := \left\{ \xi \in \mathcal{AC}^{(m)}(J) \;\middle|\; \partial^j \xi \in \mathbf{L}^2(J) \text{ pour tout } j = 0, \ldots, m \right\} ,$$

l'espace de Sobolev d'ordre m . Nous munirons cet espace vectoriel du produit scalaire

$$(\cdot|\cdot)_{(m)} := \sum_{j=0}^m \left(\partial^j \xi \middle| \partial^j \xi\right) ,$$

dont la norme est

$$\|\xi\|_{2,(m)}^2 := \sum_{j=0}^m \left\|\partial^j \xi\right\|_2^2 .$$

On a

$$\mathcal{AC}^{(m+1)}(J) \subset \mathcal{C}^{(m)}(J) \subset \mathcal{AC}^{(m)}(J) ,$$

$\mathcal{H}^{(0)}(J) = \mathbf{L}^2(J)$ et

$$\mathcal{H}^{(1)}(J) := \left\{ \xi \in \mathcal{AC}(J) \;\middle|\; \xi, \partial\xi \in \mathbf{L}^2(J) \right\} .$$

REMARQUE 1 Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, on a

$$(a+b)^2 \leqslant 2\left(a^2 + b^2\right) ,$$

en particulier

$$\|\xi\|_2 + \|\partial\xi\|_2 \leqslant \sqrt{2} \cdot \|\xi\|_{2,(1)} \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J) .$$

En effet l'inégalité est équivalente à $(a-b)^2 \geqslant 0$! □

THEOREME *On a :*

(i) $\mathcal{H}^{(m)}(J)$ *est un espace de Hilbert.*

(ii) Si $F \in \mathcal{AC}(J)$ *et* $\partial F \in \mathbf{L}^1(J)$ *, alors*

$$\lim_{a \longrightarrow \inf J} F(a) \quad \textit{et} \quad \lim_{b \longrightarrow \sup J} F(b)$$

existent, i.e. F *possède un prolongement continu à* $J \cup \{\inf J, \sup J\}$ *, que nous noterons encore par* F *.*

Si $c \in \{\inf J, \sup J\}$ *, on a*

$$F(t) = F(c) + \int_c^t \partial F \quad \textit{pour tout } t \in J \cup \{\inf J, \sup J\} \ .$$

(iii) ***Généralisation de l'intégration par parties*** *Si* $F, G \in \mathcal{AC}(J)$ *et* $\partial F \cdot G$, $F \cdot \partial G \in \mathbf{L}^1(J)$ *, alors*

$$\lim\nolimits_{a \longrightarrow \inf J} (F \cdot G)(a) \quad \textit{et} \quad \lim\nolimits_{b \longrightarrow \sup J} (F \cdot G)(b)$$

existent et on a

$$\int_J \partial F \cdot G \, d\lambda + \int_J F \cdot \partial G \, d\lambda = \lim\nolimits_{b \longrightarrow \sup J} (F \cdot G)(b) - \lim\nolimits_{a \longrightarrow \inf J} (F \cdot G)(a) =$$

$$=: \Big[F \cdot G \Big]_{\inf J}^{\sup J} \ .$$

(iv) *Si* $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J)$ *, alors* ξ *possède un prolongement continu à* $J \cup \{\inf J, \sup J\}$ *. Si* $c \in \{\inf J, \sup J\} \cap \{\pm\infty\}$ *, on a*

$$\xi(c) = 0 \ ,$$

i.e.

$$\mathcal{H}^{(1)}(J) \subset \mathcal{C}^0\left(\overline{J}\right) \ ,$$

où $\overline{J}$ *désigne la fermeture de* J *dans* $\mathbb{R}$ *.*

(v) ***Inégalité de Sobolev*** *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J)$ *, on a*

$$\|\xi\|_\infty \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \cdot \|\xi\|_2 + \varepsilon \cdot \|\partial \xi\|_2 \ ,$$

en particulier

$$\|\xi\|_\infty \leqslant \sqrt{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}} \right) \cdot \|\xi\|_{2,(1)} \ .$$

En outre l'injection canonique

$$\mathcal{H}^{(1)}(J) \hookrightarrow \mathcal{C}^0\left(\overline{J}\right)$$

et, pour tout $t \in J \cup \{\inf J, \sup J\}$ *, la forme semi-linéaire*

$$|\varepsilon_t\rangle : \xi \longmapsto \langle \xi | \, \varepsilon_t \rangle := \overline{\xi(t)} : \mathcal{H}^{(1)}(J) \longrightarrow \mathbb{K}$$

sont continues.

(vi) *L'injection canonique*

$$\mathcal{H}^{(m+1)}(J) \hookrightarrow \mathcal{C}^{(m),0}\left(\overline{J}\right) : \xi \longmapsto \xi \ ,$$

où

$$\mathcal{C}^{(m),0}\left(\overline{J}\right) := \left\{ f \in \mathcal{C}^{(m)}(J) \;\middle|\; \partial^j f \in \mathcal{C}^0\left(\overline{J}\right) \right\}$$

est muni de la norme $f \longmapsto \|f\|_{\infty,(m)} = \max_{j=0,\ldots,m} \|\partial^j f\|_\infty$ *, ainsi que la dérivation*

$$\partial : \mathcal{H}^{(m+1)}(J) \longrightarrow \mathcal{H}^{(m)}(J) : \xi \longmapsto \partial \xi \ ,$$

sont continues.

Dmonstration de (i) Montrons que $\mathcal{H}^{(m)}(J)$ est complet par récurrence. Le cas $m = 0$ est clair, puisque $\mathcal{H}^{(0)}(J) = \mathbf{L}^2(J)$ est complet (cours d'Analyse [17], théorème de Riesz-Fischer 15.14). Supposons donc que $\mathcal{H}^{(m)}(J)$ est complet et soit $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy par rapport à $\|\cdot\|_{2,(m+1)}$; alors $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}^{(m)}(J)$ qui converge vers $\xi \in \mathcal{H}^{(m)}(J)$ et il en est de même de $(\partial^{m+1}\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbf{L}^2(J)$ qui converge vers $\eta \in \mathbf{L}^2(J)$. Comme $\partial^m\xi_k \in \mathcal{AC}(J)$, pour tout $t, \tau \in J$, on a

$$\partial^m\xi_k(t) - \partial^m\xi_k(\tau) = \int_\tau^t \partial^{m+1}\xi_k = \left(1_{\tau,t}\middle|\, \partial^{m+1}\xi_k\right) \to (1_{\tau,t}|\,\eta) = \int_\tau^t \eta \ ,$$

la suite $(\partial^m\xi_k - \partial^m\xi_k(\tau))_{k\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers la fonction localement absolument continue $\int_\tau^\diamond \eta$. Mais par le théorème de Riesz-Fischer il existe une sous-suite α telle que $\left(\xi_{\alpha(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement λ_J-p.p. vers ξ . Si τ est un tel point, pour λ_J-presque tous les $t \in J$, on a

$$\int_\tau^t \eta = \lim\nolimits_k \left[\partial^m\xi_k(t) - \partial^m\xi_k(\tau)\right] = \lim\nolimits_l \left[\partial^m\xi_{\alpha(l)}(t) - \partial^m\xi_{\alpha(l)}(\tau)\right] = \partial^m\xi(t) - \partial^m\xi(\tau) \ ;$$

par modification de $\partial^m\xi$ sur un ensemble λ_J-négligeable, la formule ci-dessus est valable pour tout $t \in J$ (donc aussi pour tout $\tau \in J$!) et on obtient $\partial^m\xi \in \mathcal{AC}(J)$, $\partial^{m+1}\xi = \eta \in \mathbf{L}^2(J)$. Ceci montre que $\xi \in \mathcal{H}^{(m+1)}(J)$ et

$$\|\xi_k - \xi\|_{2,(m+1)}^2 = \sum_{j=0}^{m+1} \left\|\partial^j\xi_k - \partial^j\xi\right\|_2^2 = \sum_{j=0}^{m} \left\|\partial^j\xi_k - \partial^j\xi\right\|_2^2 + \left\|\partial^{m+1}\xi_k - \eta\right\|_2^2 \to 0 \ ,$$

donc $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ξ dans $\mathcal{H}^{(m+1)}(J)$.

Dmonstration de (ii) C'est immédiat en utilisant le théorème de Lebesgue : étant donné $t \in J$ et $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $c \in \{\inf J, \sup J\}$, on a

$$\lim\nolimits_k F(t_k) = F(t) + \lim\nolimits_k \int_t^{t_k} \partial F = F(t) + \lim\nolimits_k \int_J 1_{t,t_k} \cdot \partial F =$$

$$= F(t) + \int_J \lim\nolimits_k 1_{t,t_k} \cdot \partial F = F(t) + \int_J 1_{t,c} \cdot \partial F = F(t) + \int_t^c \partial F \ ,$$

puisque $\lim_k 1_{t,t_k} = 1_{t,c}$ λ_J-p.p. et $|1_{t,t_k} \cdot \partial F| \leqslant |\partial F| \in \mathbf{L}^1(J)$. Ainsi

$$F(t) = F(c) + \int_c^t \partial F \,;$$

en passant à la limite cette formule est encore vraie pour $t \in \{\inf J, \sup J\}$.

Dmonstration de (iii) On a

$$\partial(F \cdot G) = \partial F \cdot G + F \cdot \partial G \in \mathbf{L}^1(J) \ ,$$

d'où l'existence des limites par (ii), donc

$$\int_J \partial F \cdot G \, d\lambda + \int_J F \cdot \partial G \, d\lambda = \lim\nolimits_{a\to\inf J} \lim\nolimits_{b\to\sup J} \int_a^b \partial(F \cdot G) =$$

$$= \lim\nolimits_{a\to\inf J} \lim\nolimits_{b\to\sup J} ((F \cdot G)(b) - (F \cdot G)(a)) =$$

$$= \lim\nolimits_{b\longrightarrow\sup J} (F \cdot G)(b) - \lim\nolimits_{a\longrightarrow\inf J} (F \cdot G)(a) \ .$$

Dmonstration de (iv) Si J est borné, on a $\mathbf{L}^2(J) \subset \mathbf{L}^1(J)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puisque pour $\eta \in \mathbf{L}^2(J)$, on a

$$\int_J |\eta| = \int_J 1 \cdot |\eta| \leqslant \left(\int_J 1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_J |\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty ,$$

d'où le résultat par (ii).

Etant donné $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J)$, on a $\xi, \partial\xi \in \mathbf{L}^2(J)$, donc

$$\partial\left(|\xi|^2\right) = \partial\left(\overline{\xi} \cdot \xi\right) = \overline{\partial\xi} \cdot \xi + \overline{\xi} \cdot \partial\xi \in \mathbf{L}^1(J) ,$$

et si $c \in \{\inf J, \sup J\} \cap \{\pm\infty\}$, alors $|\xi|^2$ possède une limite $|\xi|^2(c)$ en c qui ne peut être que 0 , puisque $|\xi|^2 \in \mathbf{L}^1(J)$. Mais ceci montre que $\xi(c) = 0$.

Dmonstration de (v) Soit $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J)$. Pour tout $a, b \in J$, nous pouvons supposer que $a < b$, il existe $\tau \in \,]a, b[$ tel que

$$|\xi(\tau)|^2 = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b |\xi|^2 ,$$

donc

$$|\xi(\tau)|^2 \leqslant \frac{1}{|b-a|} \cdot \|\xi\|_2^2 .$$

Puisque $|\xi|^2 = \overline{\xi} \cdot \xi \in \mathcal{AC}(J)$ et $\partial\left(\overline{\xi} \cdot \xi\right) = \partial\overline{\xi} \cdot \xi + \overline{\xi} \cdot \partial\xi \in \mathbf{L}^1(J)$, (ii) montre que pour tout $t \in J \cup \{\inf J, \sup J\}$, on peut écrire

$$|\xi(t)|^2 = |\xi(\tau)|^2 + \int_\tau^t \partial\left(\overline{\xi} \cdot \xi\right) \leqslant |\xi(\tau)|^2 + \left|\int_\tau^t \left(\partial\overline{\xi} \cdot \xi + \overline{\xi} \cdot \partial\xi\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\xi(\tau)|^2 + 2 \cdot \int |\xi| \cdot |\partial\xi| \leqslant \frac{1}{|b-a|} \cdot \|\xi\|_2^2 + 2 \cdot \|\xi\|_2 \cdot \|\partial\xi\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\left[\frac{1}{\sqrt{b-a}} + \frac{1}{\varepsilon}\right] \cdot \|\xi\|_2 + \varepsilon \cdot \|\partial\xi\|_2\right)^2 ,$$

donc que

$$\|\xi\|_{\infty, J\cup\{\inf J, \sup J\}} \leqslant \left[\frac{1}{\sqrt{b-a}} + \frac{1}{\varepsilon}\right] \cdot \|\xi\|_2 + \varepsilon \cdot \|\partial\xi\|_2 .$$

En passant à la limite on obtient

$$\|\xi\|_{\infty, J\cup\{\inf J, \sup J\}} \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}} + \frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot \|\xi\|_2 + \varepsilon \cdot \|\partial\xi\|_2 .$$

En particulier, pour $\varepsilon = 1$,

$$\|\xi\|_{\infty, J\cup\{\inf J, \sup J\}} \leqslant \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}}\right) \cdot \left(\|\xi\|_2 + \|\partial\xi\|_2\right) \leqslant \sqrt{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}}\right) \cdot \|\xi\|_{2,(1)}$$

par la remarque 1 ci-dessus. Ceci montre que l'injection canonique $\mathcal{H}^{(1)}(J) \hookrightarrow \mathcal{C}^0\left(\overline{J}\right)$ et $|\varepsilon_t\rangle$ sont continues, puisque

$$|\langle \xi | \varepsilon_t \rangle| \leqslant \|\xi\|_{\infty, J\cup\{\inf J, \sup J\}} .$$

Dmonstration de (vi) Pour tout $\xi \in \mathcal{H}^{(m+1)}(J)$ et $j = 0, \ldots, m$, (iv) montre que

$$\left\|\partial^j \xi\right\|_\infty^2 \leqslant c_J^2 \cdot \left\|\partial^j \xi\right\|_{2,(1)}^2 = c_J^2 \cdot \left(\left\|\partial^j \xi\right\|_2^2 + \left\|\partial^{j+1} \xi\right\|_2^2\right) \leqslant c_J^2 \cdot \|\xi\|_{2,(m+1)}^2 \ ,$$

donc $\|\xi\|_{\infty,(m)} \leqslant c_J^2 \cdot \|\xi\|_{2,(m+1)}^2$. Finalement on a évidemment

$$\|\partial \xi\|_{2,(m)}^2 = \sum_{j=0}^{m} \left\|\partial^{j+1} \xi\right\|_2^2 \leqslant \sum_{j=0}^{m+1} \left\|\partial^j \xi\right\|_2^2 = \|\xi\|_{2,(m+1)}^2 \ .$$

□

REMARQUE 2 Est-ce que la constante $\frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}} + \frac{1}{\varepsilon}$ dans l'inégalité de Sobolev est la plus petite constante C_ε possible, donc telle que

$$\|\xi\|_\infty \leqslant C_\varepsilon \cdot \|\xi\|_2 + \varepsilon \cdot \|\partial \xi\|_2 \ ?$$

Considérons sur l'intervalle J la fonction constante 1 . On a $\|1\|_\infty = 1$, $\|1\|_2 = \sqrt{\lambda(J)}$ et $\|\partial 1\|_2 = 0$. Ceci montre que $C_\varepsilon \geqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda(J)}}$.

DEFINITION 4 On pose

$$\mathcal{H}_0^{(1)}(J) = \left\{\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J) \ \middle|\ \xi(\inf J) = \xi(\sup J) = 0\right\} \ .$$

COROLLAIRE *$\mathcal{H}_0^{(1)}(J)$ est un sous-espace de Hilbert de $\mathcal{H}^{(1)}(J)$.*

*Si J est borné, on a l'**inégalité de Poincaré***

$$\|\xi\|_2 \leqslant \frac{\lambda(J)}{\sqrt{2}} \cdot \|\partial \xi\|_2 \quad \textit{pour tout } \xi \in \mathcal{H}_0^{(1)}(J) \ .$$

En effet

$$\mathcal{H}_0^{(1)}(J) = \operatorname{Ker} |\varepsilon_{\inf J}\rangle \cap \operatorname{Ker} |\varepsilon_{\sup J}\rangle$$

est un sous-espace vectoriel fermé, donc complet.

Pour tout $t \in J$, on a

$$|\xi(t)| = |\xi(t) - \xi(\inf J)| = \left|\int_{\inf J}^t \partial \xi\right| \leqslant \int_J 1_{\inf J, t} \cdot |\partial \xi| \leqslant \|1_{\inf J, t}\|_2 \cdot \|\partial \xi\|_2 =$$

$$= \sqrt{t - \inf J} \cdot \|\partial \xi\|_2 \ ,$$

donc

$$\|\xi\|_2^2 \leqslant \left(\int_J (t - \inf J)\ dt\right) \cdot \|\partial \xi\|_2^2 = \left[\frac{t^2}{2} - \inf J \cdot t\right]_{\inf J}^{\sup J} \cdot \|\partial \xi\|_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\sup J - \inf J)^2 \cdot \|\partial \xi\|_2^2 \ .$$

□

1.8 Problèmes aux limites sur un intervalle

DEFINITION 1 On désigne par $\mathcal{K}^{(1)}(J)$ l'espace vectoriel des fonctions continûment dérivables à support compact dans J et $\partial : \mathcal{K}^{(1)}(J) \longrightarrow \mathcal{K}(J) : f \longmapsto \partial f$ l'application de dérivation.

PROPOSITION

(i) *Il existe* $\chi \in \mathcal{K}(J)$ *tel que*

$$\mathcal{K}(J) = \partial\mathcal{K}^{(1)}(J) \oplus \mathbb{K} \cdot \chi \ .$$

(ii) *Si* $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ *et* $\int \partial\varphi \cdot f \, d\lambda_J = 0$ *pour tout* $\varphi \in \mathcal{K}^{(1)}(J)$ *, il existe* $c \in \mathbb{K}$ *tel que* $f = c$ *.*

(iii) *Si* $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ *et* $\int \varphi \cdot f \, d\lambda_J = 0$ *pour tout* $\varphi \in \mathcal{K}^{(1)}(J)$ *, alors* $f = 0$ *.*

La démonstration est laissée en exercice. □

DEFINITION 2 Etant donné des fonctions ρ, p, q sur $[0,1]$ telles que $\rho \cdot p \in \mathcal{C}^{(1)}([0,1])$, $\rho \cdot p > 0$ sur $[0,1]$ et $\rho \cdot q \in \mathcal{C}([0,1])$, considérons le *problème inhomogène aux limites homogènes* suivant :

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \partial(\rho \cdot p \cdot \partial f) + q \cdot f = g \quad \text{sur } J \quad \text{et} \quad f(0) = f(1) = 0 \ . \qquad (*)$$

Si $f \in \mathcal{C}^{(2)}([0,1])$ est solution de $(*)$, on dit que c'est une *solution classique* .

Remarquons que l'existence d'une solution classique entraîne nécessairement $\rho \cdot g \in \mathcal{C}([0,1])$, hypothèse que nous ferrons.

DEFINITION 3 Etant donné des fonctions ρ, p, q telles que $\rho \cdot p \in \mathcal{AC}([0,1])$, $\rho \cdot p > 0$ sur $[0,1]$, $\partial(\rho \cdot p) \in \mathbf{L}^\infty(]0,1[)$ et $\rho \cdot q \in \mathbf{L}^\infty_+(]0,1[)$, nous dirons qu'une solution $f \in \mathcal{H}^{(2)}(]0,1[)$ de $(*)$ (égalité des classes ou $\lambda_{[0,1]}$-p.p.) est une *solution semi-classique* .

Remarquons que l'existence d'une solution semi-classique entraîne nécessairement, puisque $\partial(\rho \cdot p) \cdot \partial f + \rho \cdot p \cdot \partial^2 f + \rho \cdot q \cdot f \in \mathbf{L}^2(]0,1[)$, que $\rho \cdot g \in \mathbf{L}^2(]0,1[)$, hypothèse que nous ferrons.
Une solution classique est évidemment une solution semi-classique.

DEFINITION 4 Avec les mêmes hypothèses que dans la définition 3, on dit qu'une fonction $\theta \in \mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[)$ satisfaisant à

$$\int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \rho \cdot q \cdot \theta + \int_0^1 \overline{\partial\gamma} \cdot \rho \cdot p \cdot \partial\theta = \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \rho \cdot g \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[) \qquad (**)$$

est une *solution faible* .

Remarquons tout d'abord qu'une solution semi-classique est solution faible : on a évidemment $f \in \mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[)$ et en en intégrant par parties il vient

$$\int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \rho \cdot q \cdot f + \int_0^1 \overline{\partial\gamma} \cdot \rho \cdot p \cdot \partial f = \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \rho \cdot q \cdot f + \left[\overline{\gamma} \cdot \rho \cdot p \cdot \partial f\right]_0^1 - \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \partial(\rho \cdot p \cdot \partial f) =$$

$$= \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \left(q \cdot f - \frac{1}{\rho} \cdot \partial \left(\rho \cdot p \cdot \partial f \right) \right) \cdot \rho = \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot g \cdot \rho \ .$$

Réciproquement si $\theta \in \mathcal{H}^{(1),0}\left(]0,1[\right)$ est une solution faible, en posant

$$H := \int_0^{\diamond} \rho \cdot (g - q \cdot \theta) \in \mathcal{AC}\left([0,1]\right) \ ,$$

puisque $\rho \cdot (g - q \cdot \theta) \in \mathbf{L}^2\left(]0,1[\right) \subset \mathbf{L}^1\left(]0,1[\right)$, on obtient

$$\int_0^1 \overline{\partial\gamma} \cdot \rho \cdot p \cdot \partial\theta = \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \rho \cdot (g - q \cdot \theta) = \left[\overline{\gamma} \cdot H\right]_0^1 - \int_0^1 \overline{\partial\gamma} \cdot H = -\int_0^1 \overline{\partial\gamma} \cdot H \ ,$$

donc $\rho \cdot p \cdot \partial\theta + H = c$ pour une constante $c \in \mathbb{K}$ par la proposition (ii) et par suite

$$\partial\theta = \frac{c - H}{\rho \cdot p} \in \mathcal{AC}\left(]0,1[\right)$$

grâce à l'exemple 1.5.3. Ceci montre que $\theta \in \mathcal{H}^{(2)}\left(]0,1[\right)$ et intégrant le membre de gauche par parties il vient

$$\int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \left[\rho \cdot (g - q \cdot \theta) + \partial\left(\rho \cdot p \cdot \partial\theta\right)\right] = 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{H}^{(1),0}\left(]0,1[\right) \supset \mathcal{K}^{(1)}\left(]0,1[\right) \ .$$

On en déduit

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \partial\left(\rho \cdot p \cdot \partial\theta\right) + q \cdot \theta = g$$

grâce à la proposition (iii). Ceci montre que θ est une solution semi-classique.

Si en plus $\rho \cdot p \in \mathcal{C}^{(1)}\left([0,1]\right)$, et $\rho \cdot q, \rho \cdot g \in \mathcal{C}\left([0,1]\right)$, on a $H \in \mathcal{C}^{(1)}\left([0,1]\right)$, donc $\partial\theta \in \mathcal{C}^{(1)}\left([0,1]\right)$, i.e. $\theta \in \mathcal{C}^{(2)}\left([0,1]\right)$, et par suite $-\partial\left(\rho \cdot p \cdot \partial\theta\right) + \rho \cdot q \cdot \theta = \rho \cdot g$ partout, puisque cette fonction est continue. Ceci montre que la solution faible θ est une solution classique.

Montrons maintenant qu'il existe une unique solution faible. Il suffit de constater que $(**)$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathfrak{s}\left(\gamma, \theta\right) = \left\langle \gamma \right| g \cdot \rho \rangle \ ,$$

en définissant

$$\mathfrak{s} : (\gamma, \xi) \longmapsto \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \rho \cdot q \cdot \xi + \int_0^1 \overline{\partial\gamma} \cdot \rho \cdot p \cdot \partial\xi : \mathcal{H}^{(1),0}\left(]0,1[\right) \times \mathcal{H}^{(1),0}\left(]0,1[\right) \longrightarrow \mathbb{K}$$

et

$$\left|\rho \cdot g\right\rangle : \gamma \longmapsto \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \rho \cdot g : \mathcal{H}^{(1),0}\left(]0,1[\right) \longrightarrow \mathbb{K} \ .$$

La forme sesquilinéaire $\mathfrak{s}$ est bornée, puisque

$$\left|\mathfrak{s}\left(\gamma, \xi\right)\right| \leqslant \left\|\rho \cdot q\right\|_\infty \cdot \left\|\gamma\right\|_2 \cdot \left\|\xi\right\|_2 + \left\|\rho \cdot p\right\|_\infty \cdot \left\|\partial\gamma\right\|_2 \cdot \left\|\partial\xi\right\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant cst \cdot \left(\left\|\gamma\right\|_2 \cdot \left\|\xi\right\|_2 + \left\|\partial\gamma\right\|_2 \cdot \left\|\partial\xi\right\|_2 \right) \leqslant cst \cdot \left\|\gamma\right\|_{2,(1)} \cdot \left\|\xi\right\|_{2,(1)} \ ,$$

tandis que la forme semi-linéaire $|g\rangle$ est continue, puisque

$$\left|\left\langle \gamma \right| \rho \cdot g \rangle\right| \leqslant \left\|\gamma\right\|_2 \cdot \left\|\rho \cdot g\right\|_2 \leqslant \left\|\rho \cdot g\right\|_2 \cdot \left\|\gamma\right\|_{2,(1)} \ .$$

D'autre part $\mathfrak{s}$ est évidemment hermitienne et elle est coercitive, car pour un $\varepsilon > 0$, on a $\rho \cdot p \geqslant \varepsilon$ sur $[0,1]$ et $\rho \cdot q \geqslant 0$, donc

$$\mathfrak{s}\left(\xi, \xi\right) = \int_0^1 \left|\xi\right|^2 \cdot \rho \cdot q + \int_0^1 \left|\partial\xi\right|^2 \cdot \rho \cdot p \geqslant \varepsilon \cdot \left\|\partial\xi\right\|_2^2 =$$

$$= \frac{\varepsilon}{3} \cdot \|\partial\xi\|_2^2 + \frac{2\varepsilon}{3} \cdot \|\partial\xi\|_2^2 \geqslant \frac{2\varepsilon}{3} \cdot \|\xi\|_2^2 + \frac{2\varepsilon}{3} \cdot \|\partial\xi\|_2^2 = \frac{2\varepsilon}{3} \cdot \|\xi\|_{2,(1)}^2$$

par l'inégalité de Poincaré.

Il suffit alors d'appliquer le théorème de Lax-Milgram 2.4 à la forme hermitienne $\mathfrak{s}$. Nous avons donc prouver :

THEOREME (Conditions aux limites homogènes)

Etant donné des fonctions ρ, p, q, g telles que $\rho \cdot p \in \mathcal{AC}([0,1])$, $\rho \cdot p > 0$ sur $[0,1]$, $\partial(\rho \cdot p) \in \mathbf{L}^\infty(]0,1[)$ et $\rho \cdot q, \rho \cdot g \in \mathbf{L}_+^\infty(]0,1[)$, il existe une unique solution $\theta \in \mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[)$ de

$$\int_0^1 q \cdot \overline{\gamma} \cdot \theta \cdot \rho + \int_0^1 p \cdot \overline{\partial\gamma} \cdot \partial\theta \cdot \rho = \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot g \cdot \rho \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[)$$

et elle s'obtient en minimisant

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(|\gamma|^2 \cdot \rho \cdot q + |\partial\gamma|^2 \cdot \rho \cdot p\right) - \mathrm{Re} \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \rho \cdot g$$

sur $\mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[)$. On $\theta \in \mathcal{H}^{(2)}(]0,1[)$ et c'est une solution semi-classique de $(*)$.

Si en plus $\rho \cdot p \in \mathcal{C}^{(1)}([0,1])$ et $\rho \cdot q, \rho \cdot g \in \mathcal{C}([0,1])$, alors $\theta \in \mathcal{C}^{(2)}([0,1])$ et c'est une solution classique de $(*)$.

Considérons maintenant le *problème aux limites inhomogènes* suivant :

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \partial(\rho \cdot p \cdot \partial f) + q \cdot f = g \quad \text{sur }]0,1[\quad \text{et} \quad f(0) = \alpha \quad , \quad f(1) = \beta \qquad (\circledast)$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Dans $\mathcal{H}^{(1)}(]0,1[)$ on considère le sous-espace affine

$$\mathcal{G} := \left\{\gamma \in \mathcal{H}^{(1)}(]0,1[) \mid \gamma(0) = \alpha \, , \, \gamma(1) = \beta\right\} \, ,$$

qui est évidemment un ensemble convexe fermé.

Avec les hypothèses correspondantes, si $f \in \mathcal{C}^{(2)}([0,1])$ est une solution classique de $(\circledast)$, donc $\rho \cdot g \in \mathcal{C}([0,1])$, ou plus généralement si $\theta \in \mathcal{H}^2(]0,1[)$ est solution semi-classique de $(\circledast)$ dans $\mathbf{L}^2(]0,1[)$, donc $\rho \cdot g \in \mathbf{L}^2(]0,1[)$, en intégrant par parties il vient

$$\int_0^1 \overline{(\theta - \gamma)} \cdot \rho \cdot q \cdot \theta + \int_0^1 \overline{\partial(\theta - \gamma)} \cdot \partial\theta \cdot \rho \cdot p =$$

$$= \int_0^1 \overline{(\theta - \gamma)} \cdot \theta \cdot \rho \cdot q + \left[\overline{(\theta - \gamma)} \cdot \partial\theta \cdot \rho \cdot p\right]_0^1 - \int_0^1 \overline{(\theta - \gamma)} \cdot \partial(\rho \cdot p \cdot \partial\theta) =$$

$$= \int_0^1 \overline{(\theta - \gamma)} \cdot (\rho \cdot q \cdot \theta - \partial(\rho \cdot p \cdot \partial\theta)) = \int_0^1 \overline{(\theta - \gamma)} \cdot \rho \cdot g \, ,$$

donc en particulier

$$\mathrm{Re}\left(\int_0^1 \overline{(\theta - \gamma)} \cdot \theta \cdot \rho \cdot q + \int_0^1 \overline{\partial(\theta - \gamma)} \cdot \partial\theta \cdot \rho \cdot p\right) \geqslant \mathrm{Re} \int_0^1 \overline{(\theta - \gamma)} \cdot \rho \cdot g \, .$$

Ceci nous conduit à utiliser le théorème de Stampacchia :

THEOREME (Conditions aux limites inhomogènes)

Etant donné des fonctions ρ, p, q *telles que* $\rho \cdot p \in \mathcal{AC}([0,1])$, $\rho \cdot p > 0$ *sur* $[0,1]$, $\partial(\rho \cdot p) \in \mathbf{L}^{\infty}(]0,1[)$, $\rho \cdot q \in \mathbf{L}^{\infty}_{+}(]0,1[)$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *, il existe une unique solution* $\theta \in \mathcal{G}$ *de*

$$\operatorname{Re}\left(\int_0^1 \overline{(\theta-\gamma)} \cdot \theta \cdot \rho \cdot q + \int_0^1 \overline{\partial(\theta-\gamma)} \cdot \partial\theta \cdot \rho \cdot p\right) \geqslant \operatorname{Re}\int_0^1 \overline{(\theta-\gamma)} \cdot \rho \cdot g \quad \textit{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} \tag{$\circledast\circledast$}$$

et elle s'obtient en minimisant

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(|\gamma|^2 \cdot \rho \cdot q + |\partial\gamma|^2 \cdot \rho \cdot p\right) - \operatorname{Re}\int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \rho \cdot g$$

sur $\mathcal{G}$ *. On a* $\theta \in \mathcal{H}^{(2)}(]0,1[)$ *et c'est une solution semi-classique de* $(\circledast)$

Si en plus $\rho \cdot p \in \mathcal{C}^{(1)}([0,1])$ *et* $\rho \cdot q, \rho \cdot g \in \mathcal{C}([0,1])$ *, alors* $\theta \in \mathcal{C}^{(2)}([0,1])$ *et c'est une solution classique de* $(\circledast)$ *.*

Comme dans l'exemple précédent il suffit d'utiliser la forme hermitienne coercitive

$$\mathfrak{s} : (\gamma, \xi) \longmapsto \int_0^1 \overline{(\theta-\gamma)} \cdot \xi \cdot \rho \cdot q + \int_0^1 \overline{\partial(\theta-\gamma)} \cdot \partial\xi \cdot \rho \cdot p : \mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[) \times \mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[) \longrightarrow \mathbb{K} \ ,$$

d'où la première partie. En faisant $\gamma := \theta \pm \eta$ avec $\eta \in \mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[)$ dans $(\circledast\circledast)$, il vient

$$\operatorname{Re}\left(\int_0^1 \overline{\eta} \cdot \xi \cdot \rho \cdot q + \int_0^1 \overline{\partial\eta} \cdot \partial\xi \cdot \rho \cdot p\right) = \operatorname{Re}\int_0^1 \overline{\eta} \cdot \rho \cdot g \ .$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en remplaçant η par $i \cdot \eta$ on obtient l'égalité des parties imaginaires. Les dernières assertions se montrent alors comme ci-dessus. □

REMARQUE Il est possible de ramener le problème aux limites inhomogènes ci-dessus à un problème aux limites homogènes, ce qui permet de le résoudre seulement à l'aide du théorème de Lax-Milgram. En effet il existe une fonction $\chi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$ telles que $\chi(0) = \alpha$ et $\chi(1) = \beta$ et en faisant le changement de fonctions inconnue $\eta = \theta - \chi$, on voit que θ est solution de $(\circledast)$ si, et seulement si, η est solution de $(*)$. Ceci n'est malheureusement plus possible en dimension supérieure sans hypothèses restrictives sur la régularité du bord ou sur la fonction définie sur ce bord.

1.9 Sommes hilbertiennes

Nous allons maintenant généraliser le théorème 15.18 du cours d'Analyse [17] sur les bases hilbertiennes.

THEOREME *Soient F un espace préhilbertien, $(\mathcal{H}_j)_{j\in J}$ une famille de sous-espaces vectoriels complets deux à deux orthogonaux, P_j l'orthoprojecteur de F sur $\mathcal{H}_j$, $\mathcal{G}$ le sous-espace vectoriel fermé engendré par les $\mathcal{H}_j$ et $\xi \in F$.*

Alors

$$\mathcal{G} = \overline{\bigoplus_{j\in J} \mathcal{H}_j} \ ,$$

*la famille $(P_j\xi)_{j\in J}$ est absolument de carré sommable, i.e. $\left(\|P_j\xi\|^2\right)_{j\in J}$ est sommable, l'ensemble $\{j \in J \mid P_j\xi \neq 0\}$ est dénombrable et si $\sigma : I \longrightarrow \{j \in J \mid P_j\xi \neq 0\}$ en est une énumération, on a l'**inégalité de Bessel***

$$\sum_{j\in J} \|P_j\xi\|^2 = \sum_{l=0}^{\sup I} \left\|P_{\sigma(l)}\xi\right\|^2 \leqslant \|\xi\|^2 \ .$$

En outre les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\xi \in \mathcal{G}$.

(ii) ***Egalité de Parseval***

$$\sum_{j\in J} \|P_j\xi\|^2 = \|\xi\|^2 \ .$$

(iii) La famille $(P_j\xi)_{j\in J}$ est sommable de somme $\xi = \sum_{j\in J} P_j\xi$, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K_\varepsilon \in \mathfrak{K}(J)$ tel que, pour tout $L \in \mathfrak{K}(J)$ satisfaisant à $L \supset K_\varepsilon$, on ait

$$\left\|\sum_{j\in L} P_j\xi - \xi\right\| \leqslant \varepsilon \ .$$

(iv) Pour toute énumération σ d'une partie dénombrable D de J contenant $\{j \in J \mid P_j\xi \neq 0\}$ la série $\sum_{l=0}^{\sup I} P_{\sigma(l)}\xi$ est convergente, et on a

$$\xi = \sum_{l=0}^{\sup I} P_{\sigma(l)}\xi \ .$$

Pour tout $K \in \mathfrak{K}(J)$ soit $\mathcal{H}_K := \sum_{j\in K} \mathcal{H}_j$. Si $L \in \mathfrak{K}(J)$ est tel que $K \cap L = \emptyset$, alors $\mathcal{H}_K \perp \mathcal{H}_L$, donc en particulier $\mathcal{H}_K \cap \mathcal{H}_L = \{0\}$. Ceci montre que la somme des $\mathcal{H}_j$, i.e. le sous-espace vectoriel engendré par les $\mathcal{H}_j$, est directe. On a donc bien $\mathcal{G} = \overline{\bigoplus_{j\in J} \mathcal{H}_j}$. D'autre part le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}_K = \boxplus_{j\in K} \mathcal{H}_j$ est complet par l'exercice 1.4.1.b, et en posant $P_K := P_{\mathcal{H}_K}$, on a

$$P_K\xi = \sum_{j\in K} P_j\xi \ .$$

Grâce à l'égalité de Pythagore, on obtient

$$\sum_{j\in K} \|P_j\xi\|^2 = \left\|\sum_{j\in K} P_j\xi\right\|^2 = \|P_K\xi\|^2 \leqslant \|\xi\|^2 \ , \tag{$*$}$$

puisque $\|P_K\| \leqslant 1$ par le théorème de la projection 1.4.iv. On en déduit évidemment l'inégalité de Bessel et les premières assertions à l'aide du lemme 1.1.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si l'égalité de Parseval est satisfaite, pour tout $\varepsilon > 0$, grâce à l'égalité dans $(*)$ et la propriété d'approximation du supremum, il existe $K_\varepsilon \in \mathfrak{K}(J)$ tel que

$$\|P_L\xi\|^2 = \sum_{j\in L} \|P_j\xi\|^2 \geqslant \sum_{j\in K_\varepsilon} \|P_j\xi\|^2 \geqslant \|\xi\|^2 - \varepsilon^2$$

pour toute partie $L \in \mathfrak{K}(J)$, $L \supset K_\varepsilon$. Comme $P_L\xi \perp (P_L\xi - \xi)$, il vient alors

$$\|P_L\xi - \xi\|^2 = \|\xi\|^2 - \|P_L\xi\|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

par l'égalité de Pythagore, donc (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Si $k \geqslant N_\varepsilon := \max \sigma^{-1}(K_\varepsilon)$, on a $L_k := \sigma(\{0,\ldots,k\}) \supset K_\varepsilon \cap D$, donc $L_k \cup (K_\varepsilon \smallsetminus D) \supset K_\varepsilon$ et puisque $P_j\xi = 0$ si $j \in K_\varepsilon \smallsetminus D$, il vient

$$\left\|\sum_{l=0}^{k} P_{\sigma(l)}\xi - \xi\right\| = \left\|\sum_{j\in L_k} P_j\xi - \xi\right\| = \left\|\sum_{j\in L_k\cup(K_\varepsilon\smallsetminus D)} P_j\xi - \xi\right\| \leqslant \varepsilon \ .$$

(iv) $\Rightarrow$ (i) C'est évident, puisque $\mathcal{G}$ est fermé et $\sum_{l=0}^{k} P_{\sigma(l)}\xi \in \mathcal{G}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Par définition de $\mathcal{G}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathfrak{K}(J)$, $(\eta_j)_{j\in K}$ tels que $\eta_j \in \mathcal{H}_j$ et

$$\left\|\sum_{j\in K} \eta_j - \xi\right\| \leqslant \varepsilon \ .$$

Puisque $P_K\xi$ est la meilleure approximation de ξ par un élément de $\mathcal{H}_K$ par le théorème de la projection 1.4.i, on a

$$\|P_K\xi - \xi\| \leqslant \left\|\sum_{j\in K} \eta_j - \xi\right\| \leqslant \varepsilon \ .$$

Utilisant à nouveau l'égalité de Pythagore et $(*)$, on obtient

$$\|\xi\|^2 = \|P_K\xi - \xi\|^2 + \|P_K\xi\|^2 \leqslant \varepsilon^2 + \sum_{j\in K} \|P_j\xi\|^2 \leqslant \varepsilon^2 + \sum_{j\in J} \|P_j\xi\|^2 \ ,$$

d'où l'égalité de Parseval. □

DEFINITION Nous écrirons

$$\mathcal{G} = \boxplus_{j\in J} \mathcal{H}_j \ ,$$

et nous dirons que c'est une *décomposition hilbertienne* de $\mathcal{G}$, ou encore que $\mathcal{G}$ est la *somme hilbertienne* de $(\mathcal{H}_j)_{j\in J}$.

Nous utilisons le signe $\boxplus$ pour montrer que cette décomposition est orthogonale et que l'on a l'égalité de Parseval, généralisation de celle de Pythagore, mais aussi que cette décomposition est topologique puisqu'on utilise la notion de sommabilité, donc en particulier celle de série à la place des sommes finies.

PROPOSITION *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $(\mathcal{H}_j)_{j\in J}$ une famille de sous-espaces vectoriels fermés deux à deux orthogonaux de $\mathcal{H}$. Alors toute famille $\left(\xi_j\right)_{j\in J}$, telle que $\xi_j \in \mathcal{H}_j$ pour tout $j \in J$ et $\sum_{j\in J} \left\|\xi_j\right\|^2 < \infty$, est sommable dans $\mathcal{H}$. Si $\xi := \sum_{j\in J} \xi_j$, on a $\xi_j = P_{\mathcal{H}_j}\xi$ pour tout $j \in J$.*

Etant donné une énumération σ de $\left\{j \in J \;\middle|\; \left\|\xi_j\right\| > 0\right\}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\|\sum_{l=0}^{k} \xi_{\sigma(l)}\right\|^2 = \sum_{l=0}^{k} \left\|\xi_{\sigma(l)}\right\|^2 \ .$$

Le lemme montre alors que la série $\sum_{l=0}^{\sup I} \xi_{\sigma(l)}$ satisfait au critère de Cauchy (cf. cours d'Analyse [17], remarque 10.7). Posons $\xi := \sum_{l=0}^{\sup I} \xi_{\sigma(l)}$. Pour tout $j \in J$, la continuité de $P_j := P_{\mathcal{H}_j}$ nous permet d'écrire

$$P_j\xi = P_j\left(\sum_{l=0}^{\sup I} \xi_{\sigma(l)}\right) = \sum_{l=0}^{\sup I} P_j\left(\xi_{\sigma(l)}\right) = \xi_j \ .$$

Le théorème montre alors que $\left(\xi_j\right)_{j\in J}$ est sommable, que

$$\xi = \sum_{j\in J} P_j\xi = \sum_{j\in J} \xi_j$$

et que ξ ne dépend pas de l'énumération choisie. □

Le théorème et la proposition peuvent être résumés dans le

SCOLIE *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $(\mathcal{H}_j)_{j\in J}$ une famille de sous-espaces vectoriels fermés deux à deux orthogonaux de $\mathcal{H}$.*

$$\xi \in \mathcal{H} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j\in J} \|P_j\xi\|^2 \leqslant \|\xi\|^2 < \infty$$

$$\xi \in \boxplus_{j\in J} \mathcal{H}_j \quad \Longrightarrow \quad \xi = \sum_{j\in J} P_j\xi \quad et \quad \|\xi\|^2 = \sum_{j\in J} \|P_j\xi\|^2$$

$$\begin{matrix} \xi := \sum_{j\in J} \xi_j \in \boxplus_{j\in J} \mathcal{H}_j \\ \|\xi\|^2 = \sum_{j\in J} \left\|\xi_j\right\|^2 \\ \xi_j = P_j\xi \end{matrix} \quad \Longleftarrow \quad \xi_j \in \mathcal{H}_j \quad et \quad \sum_{j\in J} \left\|\xi_j\right\|^2 < \infty$$

EXERCICE Pour toute famille $\left(\xi_j\right)_{j\in J}$ sommable d'un espace de Hilbert, la famille

$$\left(\left\|\xi_j\right\|^2\right)_{j\in J}$$

est sommable dans $\mathbb{R}$.

1.10 Bases hilbertiennes

DEFINITION 1 Soit F un espace préhilbertien. Nous dirons qu'une famille $(\epsilon_j)_{j \in J} \subset F$ est un *système orthonormé* si l'on a

$$(\epsilon_k | \epsilon_l) = \delta_{k,l} \quad \text{pour tout } k, l \in J \ .$$

On dit que c'est une *base hilbertienne* si en plus $(\epsilon_j)_{j \in J}$ est total dans F .

Si $(\epsilon_j)_{j \in J}$ est un système orthonormé, alors $(\mathbb{K} \cdot \epsilon_j)_{j \in J}$ est évidemment une famille de sous-espaces vectoriels complets, et ils sont deux à deux orthogonaux. D'après l'exemple 1.4.2 , pour tout $\xi \in F$ et tout $j \in J$, on a

$$P_{\mathbb{K} \cdot \epsilon_j} \xi = (\epsilon_j | \xi) \cdot \epsilon_j \quad \text{pour tout } j \in J \ .$$

Si $(\epsilon_j)_{j \in J}$ est une base hilbertienne, on obtient

$$F = \boxplus_{j \in J} \mathbb{K} \cdot \epsilon_j \ .$$

par le théorème 1.9. Plus généralement on retrouve le théorème 15.18 du cours d'Analyse [17] :

THEOREME *Soient F un espace préhilbertien et $(\epsilon_j)_{j \in J}$ un système orthonormé dans F .*

On a l' ***inégalité de Bessel***

$$\sum_{j \in J} |(\epsilon_j | \xi)|^2 \leqslant \|\xi\|^2 \ ,$$

et les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i)

$$\xi \in \boxplus_{j \in J} \mathbb{K} \cdot \epsilon_j \ .$$

(ii) ***Egalité de Parseval***

$$\sum_{j \in J} |(\epsilon_j | \xi)|^2 = \|\xi\|^2 \ .$$

(iii) La famille $((\epsilon_j | \xi) \cdot \epsilon_j)_{j \in J}$ est sommable et

$$\xi = \sum_{j \in J} (\epsilon_j | \xi) \cdot \epsilon_j \ .$$

D'autre part soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $(\epsilon_j)_{j \in J}$ un système orthonormé dans $\mathcal{H}$. Pour toute famille $(\alpha_j)_{j \in J} \subset \mathbb{K}$ telle que $\sum_{j \in J} |\alpha_j|^2 < \infty$, la famille $(\alpha_j \cdot \epsilon_j)_{j \in J}$ est sommable dans $\mathcal{H}$ et si $\xi := \sum_{j \in J} \alpha_j \cdot \epsilon_j$, on a $\alpha_j = (\epsilon_j | \xi)$ pour tout $j \in J$.

DEFINITION 2 Par analogie avec le second exemple qui va suivre, nous dirons que le nombre $(\epsilon_j | \xi)$ est le *j-ième coefficient de Fourier* de ξ dans le système orthonormé $(\epsilon_j)_{j \in J}$.

EXEMPLE 1 Soit X un ensemble. Pour tout $x \in X$ considérons la fonctions caractéristique $1_{\{x\}} \in \ell^2(X)$; on a

$$1_{\{x\}}(y) := \delta_{x,y} \quad \text{pour tout } y \in X \ .$$

La famille $\left(1_{\{x\}}\right)_{x \in X}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(X)$.

On vérifie immédiatement que cette famille est orthonormée. Il nous reste donc à prouver qu'elle est totale. Mais par le corollaire 1.4, il nous suffit de montrer que, pour tout $f \in \ell^2(X)$ tel que $f \perp 1_{\{x\}}$ pour tout $x \in X$, on a $f = 0$. Mais

$$0 = \left(1_{\{x\}} \middle| f\right) = \sum_{y \in X} \overline{1_{\{x\}}(y)} \cdot f(y) = f(x) \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

REMARQUE 1 Par ce qui précède, on en déduit que, pour tout $f \in \ell^2(X)$, la famille $\left(f(x) \cdot 1_{\{x\}}\right)_{x \in X}$ est sommable et

$$f = \sum_{x \in X} f(x) \cdot 1_{\{x\}} \ .$$

Si $(\epsilon_x)_{x \in X}$ est une base hilbertienne d'un espace préhilbertien F , alors l'application

$$F \longrightarrow \ell^2(X) : \xi \longmapsto ((\epsilon_x | \xi))_{x \in X}$$

est une isométrie, ceci n'étant qu'une reformulation de l'égalité de Parseval. Elle est surjective si, et seulement si, F est un espace de Hilbert.

EXEMPLE 2 Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ soit

$$e_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto e^{2\pi i k x} \ .$$

La famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathbf{L}^2([0,1])$.

Ceci a déjà été démontré dans le cours d'Analyse [17], exemple 15.17. Rappelons que la partie difficile est de prouver que $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est totale dans $\mathbf{L}^2([0,1])$: on constate tout d'abord que l'ensemble des fonctions de la forme $1_{[0,a]}$ pour $0 < a \leqslant 1$ est total dans $\mathbf{L}^2([0,1])$, puis que

$$1_{[0,a]} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(e_k \middle| 1_{[0,a]}\right) \cdot e_k$$

car

$$\left\|1_{[0,a]}\right\|_2^2 = a = a^2 + \frac{1}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2\pi k a}{k^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left|\left(e_k \middle| 1_{[0,a]}\right)\right|^2$$

(cf. applications 9.16 et 10.9).

On peut aussi utiliser le théorème de Stone-Weierstraß formulé ci-dessous. On remarque tout d'abord que les applications

$$\mathbf{L}^2([0,1]) \longrightarrow \mathbf{L}^2(]0,1[) : f \longmapsto f_{|]0,1[}$$

et

$$\mathbf{L}^2\left(\frac{1}{2\pi} \cdot \lambda_{\mathbb{U}}\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2(]0,1[) : f \longmapsto f \circ \exp(2\pi i \cdot \diamond) \ ,$$

sont des isométries telles que

$$\mathrm{id}^k \circ \exp = e_{k|]0,1[} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z} \ ,$$

puisque $\{1\}$ est $\lambda_{\mathbb{U}}$-négligeable et

$$\exp(2\pi i \cdot \diamond) : x \longmapsto e^{2\pi i x} :]0,1[\longrightarrow \mathbb{U} \setminus \{1\}$$

est bijective. Mais le sous-espace vectoriel engendré par $\left(\mathrm{id}^k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une sous-algèbre unifère de $\mathcal{C}(\mathbb{U})$. Elle est involutive, puisque

$$\overline{\mathrm{id}^k} = \mathrm{id}^{-k} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z} \ ,$$

et id sépare les points de $\mathbb{U}$. Elle est donc dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{U})$ pour la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Comme $\|\cdot\|_{2,\frac{1}{2\pi}\cdot\lambda_{\mathbb{U}}} \leqslant \|\cdot\|_\infty$, ce sous-espace vectoriel est aussi dense dans $\mathbf{L}^2\left(\frac{1}{2\pi}\cdot\lambda_{\mathbb{U}}\right)$, ce qui finit de prouver que $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est total dans $\mathbf{L}^2([0,1])$.

THEOREME (de Stone-Weierstraß) *Soient X un espace compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre involutive contenant 1 et séparant les points de X , i.e. telle que pour tout $x, y \in X$, si $x \neq y$ il existe $a \in \mathcal{A}$ satisfaisant à $a(x) \neq a(y)$. Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.*

1.11 Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soit F un espace préhilbertien et $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs linéairement indépendants de F . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\mathcal{G}_n := \bigoplus_{k=0}^{n} \mathbb{K} \cdot \xi_k \ .$$

C'est un sous-espace vectoriel de dimension $n+1$. On démontre par récurrence qu'il est complet dans F et en définissant $\epsilon_0 := \xi_0 \in \mathcal{G}_0$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\epsilon_{n+1} := \xi_{n+1} - P_{\mathcal{G}_n}\xi_{n+1} \ ,$$

on a

$$\epsilon_{n+1} \in \mathcal{G}_{n+1} \quad \text{et} \quad \epsilon_{n+1} \perp \mathcal{G}_n \ ,$$

donc $\left(\frac{\epsilon_k}{\|\epsilon_k\|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormé dans F et $\left(\frac{\epsilon_k}{\|\epsilon_k\|}\right)_{k=0,\ldots,n}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{G}_n$.

En effet $\mathbb{K} \cdot \xi_0 = \mathbb{K} \cdot \frac{\epsilon_0}{\|\epsilon_0\|}$ est complet et $P_{\mathcal{G}_0}\xi_1 = \frac{1}{\|\epsilon_0\|^2} \cdot (\epsilon_0 | \, \xi_1) \cdot \epsilon_0$ (cf. exemple 1.4.2). Si maintenant $\mathcal{G}_n$ est complet, alors

$$P_{\mathcal{G}_n}\xi_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\|\epsilon_j\|^2} \cdot \left(\epsilon_j | \, \xi_{n+1}\right) \cdot \epsilon_j \ ,$$

(vérification immédiate) et

$$\mathcal{G}_{n+1} = \mathcal{G}_n \boxplus \mathbb{K} \cdot \epsilon_{n+1}$$

est complet par l'exercice 1.4.1.ii. La formule ci-dessus permet de calculer les ϵ_k et $\|\epsilon_k\|$ inductivement.

Cette construction s'appelle le *procédé d'orthogonalisation (ou d'orthonormalisation) de Gram-Schmidt* .

Sa mise en oeuvre pratique est fastidieuse, à moins d'avoir une méthode particulière liée au problème considéré, comme nous le verrons dans les paragraphes qui suivent.

REMARQUE Nous démontrerons plus tard que tout sous-espace vectoriel de dimension finie est complet (cf. corollaire 2.7).

DEFINITION Nous dirons qu'un espace normé est de *type dénombrable* ou *(séparable)* s'il contient une suite totale.

PROPOSITION *Un espace préhilbertien de type dénombrable possède une base hilbertienne (dénombrable).*

En effet, en extrayant d'une suite totale une suite linéairement indépendante et en lui appliquant le procédé d'orthogonormalisation de Gram-Schmidt, on obtient un système orthonormé dénombrable et total, ce qu'il fallait démontrer. □

THEOREME *Tout espace de Hilbert possède une base hilbertienne. Plus généralement tout système orthonormé peut être complété en une base hilbertienne.*

Dans l'ensemble de tous les systèmes orthonormés $\mathcal{SON}$ de cet espace de Hilbert $\mathcal{H}$, ordonné par l'inclusion, il existe par le principe de maximalité de Hausdorff une chaîne maximale $\mathcal{C}$ contenant le système orthonormé donné. La réunion

$$B := \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$$

est un système orthonormé. En effet si $\xi, \eta \in B$, il existe $C, D \in \mathcal{C}$ tels que $\xi \in C$ et $\eta \in D$ et, puisque $\mathcal{C}$ est une chaîne, on a $C \subset D$ ou $D \subset C$; mais ceci montre que ξ et η appartiennent à un système orthonormé, donc que $(\xi | \eta) = \delta_{\xi,\eta}$. Il nous suffit de montrer que B est total dans $\mathcal{H}$. Si le sous-espace vectoriel fermé $\mathcal{G}$ engendré par B est $\neq \mathcal{H}$, en choisissant $\gamma \in \mathcal{G}^{\perp} \setminus \{0\}$, on obtient un système orthonormé $B \cup \{\gamma\}$ contenant tous les $C \in \mathcal{C}$, ce qui contredit la maximalité de $\mathcal{C}$. □

1.12 Polynômes orthogonaux

DEFINITION 1 Nous noterons $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$.

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et désignons par $\mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$ le cône convexe des intégrales de Radon μ telles que

$$\int^* |\mathrm{id}|^k \, d\mu < \infty \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} .$$

On dit alors que

$$m_k(\mu) := \int \mathrm{id}^k \, d\mu$$

est le *moment* d'ordre k de μ .

Si $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$, alors μ est bornée, i.e. $\mu^*(X) < \infty$.

EXERCICE 1 Soient X une partie de $\mathbb{R}$ et $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$. L'application canonique

$$\mathcal{P} \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) : p \longmapsto \left[p_{|X}\right]$$

n'est pas injective si, et seulement si, μ est une combinaison linéaire finie (à coefficients strictement positifs) d'intégrales de Dirac (on dit que c'est une intégrale atomique à support fini). Dans ce cas l'image de $\mathcal{P}$ est égale à $\mathbf{L}^2(\mu)$ et c'est un espace vectoriel de dimension finie.

Utiliser le support de μ (cf. remarque 1.2.3).

Pour éviter le cas trivial de la dimension finie, nous supposerons $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$ n'est pas une combinaison linéaire finie d'intégrales de Dirac, i.e. $\operatorname{supp}\mu$ est infini.

Dans ce cas on a $\mathcal{P} \subset \mathbf{L}^2(\mu)$. Le *problème des moments* consiste à étudier l'application

$$m : \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X) \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \mu \longmapsto m(\mu) := (m_k(\mu))_{k\in\mathbb{N}} ,$$

en particulier son injectivité, et à décrire son image. Dans le cas général il est très difficile de déterminer les intégrales de Radon $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$ telles que $\mathcal{P}$ soit dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$.

PROPOSITION *Si X est une partie bornée de $\mathbb{R}$, alors*

$$\mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X) = \mathcal{M}_+^{b}(X)$$

et, quel que soit $\mu \in \mathcal{M}_+^{b}(X)$, $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$.

Remarquons, puisque X est bornée, que tout polynôme est borné sur X , d'où la première assertion. La fermeture $\overline{X}$ de X dans $\mathbb{R}$ étant compacte, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $X \subset [a,b]$. Pour toute partie $K \in \mathfrak{K}(X)$, on a

$$1_K = \inf_k (1 - k \cdot d(\diamond, K))^+_{|X} \quad \text{et} \quad (1 - k \cdot d(\diamond, K))^+_{|[a,b]} \in \mathcal{C}([a,b]) ;$$

grâce au théorème de Lebesgue on a $1_K = \lim_k (1 - k \cdot d(\diamond, K))^+_{|X}$ dans $\mathbf{L}^2(\mu)$, ce qui montre que $\mathcal{C}([a,b])_{|X}$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ par le théorème de densité 15.15 du cours d'Analyse [17].

Mais $\mathcal{P}([a,b])$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b])$, muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty,\overline{X}}$, par le théorème de Stone-Weierstraß ou celui de Bernstein (voir l'exercice ci-dessous). Il suffit donc de remarquer que

$$\left\|f_{|X}\right\|_{2,\mu}^2 \leqslant \mu(X) \cdot \|f\|_{\infty,[a,b]}^2 \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}([a,b])$$

pour pouvoir conclure. $\square$

DEFINITION 2 Désignons par $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant k$ et posons $\mathcal{P}_{-1} := \{0\}$. On dit que $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un *système de polynômes orthogonaux* par rapport à $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(X)$ si

(a) p_k est un polynôme de degré k , i.e. $p_k \in \mathcal{P}_k \setminus \mathcal{P}_{k-1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(b) $p_k \perp p_l$, i.e. $\int_X \overline{p_k} \cdot p_l \, d\mu = 0$ pour tout $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $k \neq l$.

REMARQUE Il suffit d'exiger que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, p_k soit un polynôme de degré au plus k , i.e. $p_k \in \mathcal{P}_k$, et que $p_k \perp \mathcal{P}_{k-1}$.

Un tel système est déterminé à une constante multiplicative près et s'obtient par exemple à l'aide du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt appliqué à $\left(\mathrm{id}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Dans ce cas tout ces polynômes sont réels. On peut normaliser les p_k de différentes manières :

(1) on fixe la valeur de la constante $\partial^k p_k$, par exemple $p_k \in \mathrm{id}^k + \mathcal{P}_{k-1}$,

(2) on fixe la valeur de p_k en un point,

ou bien

(3) on normalise $\|p_k\|_{2,\mu} = 1$, $p_k \in g_k \cdot \mathrm{id}^k + \mathcal{P}_{k-1}$ et $g_k > 0$.

Dans ce dernier cas, on dit que c'est le *système de polynômes orthonormés* associé à μ . On a

$$p_0 = \frac{1}{\mu(X)^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad p_1 = \frac{\mathrm{id} - (p_0|\,\mathrm{id}) \cdot p_0}{\|\mathrm{id} - (p_0|\,\mathrm{id}) \cdot p_0\|_{2,\mu}} = \frac{\mu(X) \cdot \mathrm{id} - (1|\,\mathrm{id})_\mu \cdot 1}{\left\|\mu(X) \cdot \mathrm{id} - (1|\,\mathrm{id})_\mu \cdot 1\right\|_{2,\mu}} \quad , \quad \text{etc...!}$$

THEOREME *Il existe une* ***relation de récurrence*** *de la forme*

$$\mathrm{id} \cdot p_k = a_k \cdot p_{k+1} + b_k \cdot p_k + c_k \cdot p_{k-1} \ ,$$

en ayant posé $p_{-1} = 0$ *. En outre si* $p_0 = g_0 \cdot 1$ *,* $\widetilde{g_0} = 0$ *et*

$$p_k \in g_k \cdot \mathrm{id}^k + \widetilde{g_k} \cdot \mathrm{id}^{k-1} + \mathcal{P}_{k-2} \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \ ,$$

on a $g_k \neq 0$ *et*

$$a_k = \frac{g_k}{g_{k+1}} \quad , \quad b_k = \frac{\widetilde{g_k}}{g_k} - \frac{\widetilde{g_{k+1}}}{g_{k+1}} \quad , \quad c_k = \frac{\|p_k\|_{2,\mu}}{\|p_{k-1}\|_{2,\mu}} \cdot a_{k-1} \ .$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ *.*

Si le système est orthonormé, alors

$$c_k = a_{k-1} \ .$$

En effet, comme $\left(\frac{p_j}{\|p_j\|_{2,\mu}}\right)_{j=0,\ldots,k+1}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{P}_{k+1}$ et que $\mathrm{id}\cdot p_k \in \mathcal{P}_{k+1}$, on a

$$\mathrm{id}\cdot p_k = \sum_{j=0}^{k+1} \left(\frac{p_j}{\|p_j\|_{2,\mu}} \middle| \mathrm{id}\cdot p_k \right) \cdot \frac{p_j}{\|p_j\|_{2,\mu}} \ .$$

Mais

$$\left(\frac{p_j}{\|p_j\|_{2,\mu}} \middle| \mathrm{id}\cdot p_k \right) = \int \overline{\frac{p_j}{\|p_j\|_{2,\mu}}} \cdot \mathrm{id}\cdot p_k \, d\mu = \left(\frac{\mathrm{id}\cdot p_j}{\|p_j\|_{2,\mu}} \middle| p_k \right) = 0$$

pour tout $j \leqslant k-2$, puisqu'alors $\mathrm{id}\cdot p_j \in \mathcal{P}_{k-1} \perp p_k$! On a donc bien la relation de récurrence indiquée. En calculant $\mathrm{mod}\,\mathcal{P}_{k-1}$, on peut écrire

$$g_k \cdot \mathrm{id}^{k+1} + \widetilde{g_k} \cdot \mathrm{id}^k = \mathrm{id}\cdot p_k = a_k \cdot p_{k+1} + b_k \cdot p_k =$$

$$= a_k \cdot \left(g_{k+1} \cdot \mathrm{id}^{k+1} + \widetilde{g_{k+1}} \cdot \mathrm{id}^k \right) + b_k \cdot g_k \cdot \mathrm{id}^k \ ,$$

donc

$$g_k = a_k \cdot g_{k+1} \quad \text{et} \quad \widetilde{g_k} = a_k \cdot \widetilde{g_{k+1}} + b_k \cdot g_k$$

et par suite les deux premières relations. Quant à la dernière on a

$$a_k = \left(\frac{p_{k+1}}{\|p_{k+1}\|_{2,\mu}} \middle| \mathrm{id}\cdot p_k \right)$$

et

$$c_k = \left(\frac{p_{k-1}}{\|p_{k-1}\|_{2,\mu}^2} \middle| \mathrm{id}\cdot p_k \right) = \left(\frac{\mathrm{id}\cdot p_{k-1}}{\|p_{k-1}\|_{2,\mu}^2} \middle| p_k \right) =$$

$$= \frac{\|p_k\|_{2,\mu}}{\|p_{k-1}\|_{2,\mu}^2} \cdot \left(\frac{p_k}{\|p_k\|_{2,\mu}} \middle| \mathrm{id}\cdot p_{k-1} \right) = \frac{\|p_k\|_{2,\mu}}{\|p_{k-1}\|_{2,\mu}^2} \cdot a_{k-1} \ .$$

□

EXERCICE 2 (Polynômes de Bernstein) Pour tout fonction continue $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n-ième *polynôme de Bernstein* $B_n f \in \mathcal{P}_n([0,1])$ de f par

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k} \quad \text{pour tout } x \in [0,1] \ .$$

(a) Montrer que si $f = 1$ ou $f = \mathrm{id}$ on a $B_n f = f$.

(b) Calculer pour $f = \mathrm{id}\cdot(1-\mathrm{id})$ la suite $B_n f$ et montrer que l'on a

$$f = \lim_n B_n f \quad \text{uniformément sur } [0,1] \ .$$

(c) Montrer que l'inégalité

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n} \quad \text{pour tout } x \in [0,1]$$

est vraie en introduisant un f convenable et en calculant $B_n f$.

(d) Pour tout $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\delta > 0$ on considère les ensembles

$$A_n(\delta) = \left\{ 0 \leqslant k \leqslant n \ \middle| \ \left| x - \frac{k}{n} \right| \leqslant \delta \right\}$$

et

$$B_n(\delta) = \left\{ 0 \leqslant k \leqslant n \;\middle|\; \left| x - \frac{k}{n} \right| > \delta \right\} \ .$$

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C < \infty$ tel que

$$\left| f(x) - f\left(\frac{x}{k}\right) \right| \leqslant \frac{2C}{\delta^2} \cdot \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \quad \text{pour tout } x \in [0,1] \text{ et tout } k \in B_n(\delta) \ .$$

(e) En déduire que

$$f = \lim_n B_n f \quad \text{uniformément sur } [0,1] \ .$$

(f) **Théorème de Weierstraß** Montrer finalement que, pour tout intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$, l'ensemble des polynômes $\mathcal{P}([a,b])$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b])$.

1.13 Caractérisation des polynômes classiques orthogonaux

On considère maintenant un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ et un *poids* , i.e. une fonction

$$\rho : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

localement λ-intégrable telle que $\rho \cdot \lambda_J \in \mathcal{M}_+^{\mathcal{P}}(J)$. Un poids est en particulier λ_J-intégrable.

Les *polynômes classiques orthogonaux* sont ceux de la tabelle suivante :

	Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$	Laguerre $L_k^{(\alpha)}$	Hermite H_k
J	$\left]-1,1\right[$	$\left]0,\infty\right[$	$\left]-\infty,\infty\right[$
ρ	$(1-\mathrm{id})^\alpha \cdot (1+\mathrm{id})^\beta$ $\alpha,\beta>-1$	$\mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-\mathrm{id}}$ $\alpha>-1$	$e^{-\mathrm{id}^2}$
Normalisation	$J_k^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{\alpha+k}{k}$	$L_k^{(\alpha)}(0) = \binom{\alpha+k}{k}$	$H_k \in 2^k \cdot \mathrm{id}^k + \mathcal{P}_{k-1}$
g_k	$\frac{1}{2^k} \cdot \binom{\alpha+\beta+2k}{k}$	$\frac{(-1)^k}{k!}$	2^k
$\lVert p_k \rVert_{2,\rho}^2$	$\frac{2^{\alpha+\beta+1}\cdot(\alpha+k)!\cdot(\beta+k)!}{(\alpha+\beta+2k+1)\cdot k!\cdot(\alpha+\beta+k)!}$	$\frac{(\alpha+k)!}{k!}$	$\sqrt{\pi}\cdot 2^k \cdot k!$
a_k	$\frac{2(k+1)(\alpha+\beta+k+1)}{(\alpha+\beta+2k+1)(\alpha+\beta+2k+2)}$	$-(k+1)$	$\frac{1}{2}$
c_k	$\frac{2(\alpha+k)(\beta+k)}{(\alpha+\beta+2k)(\alpha+\beta+2k+1)}$	$-(\alpha+k)$	k
$\widetilde{g}_k$	$-\frac{(\beta-\alpha)}{2^k\cdot(k-1)!}\cdot\frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+k)!}$	$\frac{(-1)^{k-1}\cdot(\alpha+k)}{(k-1)!}$	0
b_k	$\frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha+\beta+2k)(\alpha+\beta+2k+2)}$	$\alpha+2k+1$	0

Rappelons que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit le *coefficient binomial généralisé* par

$$\binom{z}{k} = \prod_{l=1}^{k} \frac{z+1-l}{l} = \frac{z \cdot (z-1) \cdots (z+1-k)}{k!} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

En particulier $\binom{z}{0} = 1$ et $z \longmapsto \binom{z}{k}$ est un polynôme !

Nous avons aussi utilisé la notation

$$z! := \Gamma(z+1) \ .$$

Rappelons que $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$, que pour tout $\operatorname{Re} z > -1$, on a

$$z! = \int_0^\infty \mathrm{id}^z \cdot e^{-\mathrm{id}} \ ,$$

et que Γ est méromorphe dans $\mathbb{C}$ et n'a que des pôles simples en $-k$, pour $k \in \mathbb{N}$, de résidu $\frac{(-1)^k}{n!}$. En particulier

$$\binom{z}{k} = \frac{z!}{k! \cdot (z-k)!} = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(z+1-k)} \ ,$$

cette formule étant vraie par continuité si $z+1 = -l$ pour un $l \in \mathbb{N}$, puisque

$$\binom{z}{k} = \binom{-l-1}{k} = \frac{(-l-1)(-l-2)\cdots(-l-k)}{k!} = (-1)^k \cdot \frac{(l+k)!}{k! \cdot l!}$$

et

$$w \cdot \Gamma(-l+w) \to \frac{(-1)^l}{l!} \quad \text{et} \quad w \cdot \Gamma(-l-k+w) \to \frac{(-1)^{l+k}}{(l+k)!} \quad \text{lorsque } w \to 0 \ .$$

Dans la littérature on rencontre encore le *symbole de Pochhammer* défini par

$$(z)_k := \prod_{l=0}^{k-1} (z+l) = z \cdot (z+1) \cdots (z+k-1) = \frac{\Gamma(z+k)}{\Gamma(z)} = \frac{(z-1+k)!}{(z-1)!} \ .$$

En particulier $(z)_0 := 1$.

Finalement rappelons la formule de Stirling

$$\alpha! \sim \sqrt{2\pi \cdot \alpha} \cdot \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha \quad \text{pour } \alpha \to \infty \ .$$

La mise en oeuvre du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt conduit à des calculs fastidieux. Mais heureusement à équivalence près, i.e. après une transformation affine et une renormalisation, les polynômes classiques sont caractérisés par une formule ou une équation différentielle, ce qui nous permettra de déterminer les constantes de la table ci-dessus.

THEOREME *Soient $\rho : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ un poids et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un système de polynômes orthogonaux associé à ρ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est équivalent à un système classique de polynômes.*

(ii) ***Formule de Rodrigues***

Le poids ρ est indéfiniment dérivable, il existe un polynôme $p > 0$ sur J sans racine multiple tel que $p = 0$ sur ∂J et une suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$p_k = \frac{1}{d_k \cdot \rho} \cdot \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

(iii) ***Equation différentielle de type hypergéométrique***
Le poids ρ est continûment dérivable, il existe un polynôme $p > 0$ sur J de degré $\leqslant 2$ sans racine multiple tel que $p = 0$ sur ∂J et une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait

$$Lp_k := -\frac{1}{\rho} \cdot \partial\left(\rho \cdot p \cdot \partial p_k\right) = \lambda_k \cdot p_k$$

ou bien

$$p \cdot \partial^2 p_k + q \cdot \partial p_k + \lambda_k \cdot p_k = 0 \ ,$$

où

$$q := \frac{\partial\left(\rho \cdot p\right)}{\rho} \ .$$

Dans ce cas q est un polynôme de degré 1 et

$$\lambda_k = -k \cdot \left[\partial q + \frac{k-1}{2} \cdot \partial^2 p\right]$$

et les constantes sont données dans la table qui précède et la suivante :

	Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$	*Laguerre* $L_k^{(\alpha)}$	*Hermite* H_k
p	$1 - \mathrm{id}^2$	id	1
d_k	$(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!$	$k!$	$(-1)^k$
λ_k	$k \cdot (\alpha + \beta + k + 1)$	k	$2k$
q	$\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2) \cdot \mathrm{id}$	$\alpha + 1 - \mathrm{id}$	$-2 \cdot \mathrm{id}$

Démonstration

(i) $\Rightarrow$ (ii) Il nous suffit de démontrer que la formule de Rodrigues définit un système de polynômes orthogonaux associé au poinds ρ . L'unicité à une constante multiplicative près montre alors qu'en choisissant d_k convenablement on obtient les polynômes classiques.

Remarquons tout d'abord que, étant donné $k \in \mathbb{N}$, pour tout $j \in \mathbb{N}$ tels que $j \leqslant k$, on a

$$\partial^j \left(\rho \cdot p^k\right) = \rho \cdot p^{k-j} \cdot P_{k,j} \quad \text{pour un } P_{k,j} \in \mathcal{P}_j \ .$$

Cette formule est trivialement vraie pour $j = 0$ avec $P_{k,0} = 1$. D'autre part $\deg p \leqslant 2$ et on vérifie explicitement que $q := \frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho} \in \mathcal{P}_1$ (voir la table ci-dessus et remarquer qu'une transformation affine ne modifie pas le degré). L'assertion en découle par récurrence sur j puisque, en supposant que $j + 1 \leqslant k$, on a

$$\partial^{j+1} \left(\rho \cdot p^k\right) = \partial\left(\rho \cdot p \cdot p^{k-j-1} \cdot P_{k,j}\right) =$$

$$= \partial\left(\rho \cdot p\right) \cdot p^{k-j-1} \cdot P_{k,j} + \rho \cdot p \cdot (k-j-1) \cdot p^{k-j-2} \cdot \partial p \cdot P_{k,j} + \rho \cdot p^{k-j} \cdot \partial P_{k,j} =$$

$$= \rho \cdot p^{k-j-1} \cdot (q \cdot P_{k,j} + (k-j-1) \cdot \partial p \cdot P_{k,j} + p \cdot \partial P_{k,j})$$

et par suite

$$P_{k,j+1} = \Big[q + (k-j-1) \cdot \partial p\Big] \cdot P_{k,j} + p \cdot \partial P_{k,j} \in \mathcal{P}_{j+1} \ . \tag{$*$}$$

Il est alors clair que $p_k = \frac{1}{d_k} \cdot P_{k,k} \in \mathcal{P}_k$ et il nous reste à montrer que $p_k \perp \mathcal{P}_{k-1}$. Mais on constate dans chaque cas que

$$\rho \cdot p^j \cdot P \in \mathcal{C}^0(J) \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } P \in \mathcal{P} \ .$$

En intégrant successivement par parties, pour tout $f \in \mathcal{P}_{k-1}$, on obtient

$$d_k \cdot (p_k | f)_\rho = \int_J \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) \cdot f = \left[\partial^{k-1}\left(\rho \cdot p^k\right) \cdot f\right]_J - \int_J \partial^{k-1}\left(\rho \cdot p^k\right) \cdot \partial f =$$

$$= \ldots = (-1)^k \cdot \int_J \rho \cdot p^k \cdot \partial^k f = 0 \ ,$$

puisque

$$\partial^{k-j}\left(\rho \cdot p^k\right) \cdot \partial^{j-1} f = \rho \cdot p^j \cdot P_{k,k-j} \cdot \partial^{j-1} f \in \mathcal{C}^0(J) \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Montrons tout d'abord que l'on a nécessairement $\deg p \leqslant 2$. En effet

$$q := \frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho} = d_1 \cdot p_1$$

est un polynôme de degré 1 et

$$d_2 \cdot \rho \cdot p_2 = \partial^2\left(\rho \cdot p^2\right) = \partial\Big[\partial(\rho \cdot p) \cdot p + \rho \cdot p \cdot \partial p\Big] = \partial\Big[\rho \cdot p \cdot (q + \partial p)\Big] =$$

$$= \rho \cdot q \cdot (q + \partial p) + \rho \cdot p \cdot \partial(q + \partial p) \ ,$$

donc

$$p \cdot \partial^2 p = d_2 \cdot p_2 - q^2 - \partial(q \cdot p) \ .$$

Mais si $\deg p > 2$, alors

$$\deg\left(p \cdot \partial^2 p\right) = \deg p + \deg p - 2 > \deg p = \deg \partial(q \cdot p) = \deg\left(d_2 \cdot p_2 - q^2 - \partial(q \cdot p)\right) \ ,$$

ce qui est absurde.

Montrons maintenant que p_k satisfait à l'équation différentielle. Remarquons tout d'abord que

$$\rho \cdot q = \partial(\rho \cdot p) = \partial\rho \cdot p + \rho \cdot \partial p \ ,$$

donc

$$\frac{p \cdot \partial\rho}{\rho} = q - \partial p \ .$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a alors

$$-d_k \cdot \rho \cdot L p_k =$$

$$= \partial(\rho \cdot p \cdot d_k \cdot \partial p_k) = \partial\left(\rho \cdot p \cdot \partial\left[\frac{1}{\rho} \cdot \partial^k\left(\rho \cdot p^k\right)\right]\right) =$$

$$= \partial \left(-\frac{p \cdot \partial\rho}{\rho} \cdot \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) + p \cdot \partial^{k+1} \left(\rho \cdot p^k\right) \right) =$$

$$= -\partial \left[q - \partial p\right] \cdot \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) - \left[q - \partial p\right] \cdot \partial^{k+1} \left(\rho \cdot p^k\right)$$

$$+\partial p \cdot \partial^{k+1} \left(\rho \cdot p^k\right) + p \cdot \partial^{k+2} \left(\rho \cdot p^k\right) =$$

$$= \left[\partial^2 p - \partial q\right] \cdot \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) + \left[2\partial p - q\right] \cdot \partial^{k+1} \left(\rho \cdot p^k\right) + p \cdot \partial^{k+2} \left(\rho \cdot p^k\right) \ .$$

D'autre part comme

$$p \cdot \partial \left(\rho \cdot p^k\right) = p \cdot \partial\rho \cdot p^k + k \cdot \rho \cdot p^k \cdot \partial p = \left(p \cdot \partial\rho + k \cdot \rho \cdot \partial p\right) \cdot p^k =$$

$$= \left[q + (k-1) \cdot \partial p\right] \cdot \rho \cdot p^k \ ,$$

on peut appliquer la formule de Leibniz à chacun des membres de

$$\partial^{k+1} \left[p \cdot \partial \left(\rho \cdot p^k\right)\right] = \partial^{k+1} \left(\left[q + (k-1) \cdot \partial p\right] \cdot \rho \cdot p^k\right) \ .$$

Puisque $\deg p \leqslant 2$ et $\deg \left[q + (k-1) \cdot \partial p\right] \leqslant 1$, on obtient

$$p \cdot \partial^{k+2} \left(\rho \cdot p^k\right) + \binom{k+1}{1} \cdot \partial p \cdot \partial^{k+1} \left(\rho \cdot p^k\right) + \binom{k+1}{2} \cdot \partial^2 p \cdot \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) =$$

$$= \left[q + (k-1) \cdot \partial p\right] \cdot \partial^{k+1} \left(\rho \cdot p^k\right) + \binom{k+1}{1} \cdot \left[q + (k-1) \cdot \partial^2 p\right] \cdot \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) \ ,$$

c'est-à-dire

$$p \cdot \partial^{k+2} \left(\rho \cdot p^k\right) + \left[2\partial p - q\right] \cdot \partial^{k+1} \left(\rho \cdot p^k\right) =$$

$$= (k+1) \cdot \left[\partial q + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cdot \partial^2 p\right] \cdot \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) \ .$$

Ainsi

$$-d_k \cdot \rho \cdot Lp_k =$$

$$= \left[\partial^2 p - \partial q\right] \cdot \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) + (k+1) \cdot \left[\partial q + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cdot \partial^2 p\right] \cdot \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) =$$

$$= \left[k \cdot \partial q + \frac{k\,(k-1)}{2} \cdot \partial^2 p\right] \cdot \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right)$$

et finalement

$$Lp_k = -k \cdot \left[\partial q + \frac{k-1}{2} \cdot \partial^2 p\right] \cdot p_k \ .$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) A l'aide d'un changement affine de variable on peut supposer, en modifiant les

λ_k si nécessaire, que J et p sont comme dans la situation classique :

$\deg p$	2	1	0
J	$]-1,1[$	$]0,\infty[$	$]-\infty,\infty[$
p	$1-\mathrm{id}^2$	id	1

Puisque $\deg p_1 = 1$, l'équation différentielle pour $k = 1$ montre que

$$q := \frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho} = -\frac{\lambda_1 \cdot p_1}{\partial p_1}$$

est un polynôme de degré 1 et que

$$\frac{\partial \rho}{\rho} = \frac{1}{p} \cdot (q - \partial p) = \frac{a \cdot \mathrm{id} + b}{p} \ .$$

On obtient

p	$1-\mathrm{id}^2$	id	1
$\frac{\partial \rho}{\rho}$	$\frac{\frac{a+b}{2}}{1-\mathrm{id}} + \frac{\frac{b-a}{2}}{1+\mathrm{id}}$	$\frac{b}{\mathrm{id}} + a$	$a \cdot \mathrm{id} + b$
ρ	$(1-\mathrm{id})^{\frac{a+b}{2}} \cdot (1+\mathrm{id})^{\frac{b-a}{2}}$	$\mathrm{id}^b \cdot e^{a \cdot \mathrm{id}}$	$e^{\frac{a}{2} \cdot \mathrm{id}^2 + b \cdot \mathrm{id}}$

la constante d'intégration e^c disparaissant en renormalisant, i.e. en multipliant ρ par une constante > 0 .

Rappelons que ρ est λ_J-intégrable. Dans le premier cas on a nécessairement

$$\alpha := \frac{a+b}{2} > -1 \quad \text{et} \quad \beta := \frac{b-a}{2} > -1 \ .$$

Dans le deuxième cas $a < 0$ et en faisant une homothétie, on peut supposer que $a = -1$. Il suffit donc de poser $\alpha := b > -1$. Dans le troisième cas, on nécessairement $a > 0$ et à l'aide d'une transformation affine on se ramène au cas $\rho = e^{-\mathrm{id}^2}$, ce qui finit la démonstration des équivalences.

Détermination des constantes Elles dépendent évidemment de la normalisation choisie. Nous utiliserons évidemment la formule de Rodrigues et celle de Leibniz.

Comme dans la démonstration (i)⇒(ii) en intégrant k fois par parties on obtient

$$\|p_k\|_{2,\rho}^2 = (p_k | p_k)_\rho = \left(g_k \cdot \mathrm{id}^k \middle| p_k\right)_\rho = \frac{g_k}{d_k} \cdot \int_J \mathrm{id}^k \cdot \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) =$$

$$= \ldots = (-1)^k \cdot \frac{g_k}{d_k} \cdot k! \cdot \int_J \rho \cdot p^k \ .$$

D'autre part soit

$$P_{k,j} \in g_{k,j} \cdot \mathrm{id}^j + \widetilde{g_{k,j}} \cdot \mathrm{id}^{j-1} + \mathcal{P}_{j-2} \ .$$

Rappelons que $P_{k,0} = 1$, donc $g_{k,0} = 1$ et $\widetilde{g_{k,0}} = 0$.

On a $q = \frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho} = \frac{\partial \rho}{\rho} \cdot p + \partial p$ et soit $\widetilde{q} := \frac{\partial \rho}{\rho} \cdot p \in \mathcal{P}_1$. La relation de récurrence $(*)$ s'écrit alors

$$P_{k,j+1} = \left[\widetilde{q} + (k-j) \cdot \partial p\right] \cdot P_{k,j} + p \cdot \partial P_{k,j} \in \mathcal{P}_{j+1} \ .$$

et montre que

$$\begin{aligned} P_{k,j+1} \in & \left[\widetilde{q}\,(0) + \partial\widetilde{q} \cdot \mathrm{id} + (k-j) \cdot \left(\partial p\,(0) + \partial^2 p \cdot \mathrm{id}\right)\right] \\ & \qquad \cdot \left[g_{k,j} \cdot \mathrm{id}^j + \widetilde{g_{k,j}} \cdot \mathrm{id}^{j-1} + \mathcal{P}_{j-2}\right] \\ & + \left(p\,(0) + \partial p\,(0) \cdot \mathrm{id} + \frac{\partial^2 p}{2} \cdot \mathrm{id}^2\right) \cdot \left[j \cdot g_{k,j} \cdot \mathrm{id}^{j-1} + (j-1) \cdot \widetilde{g_{k,j}} \cdot \mathrm{id}^{j-2} + \mathcal{P}_{j-3}\right] = \\ = & \left[\partial\widetilde{q} + (k-j) \cdot \partial^2 p + j \cdot \frac{\partial^2 p}{2}\right] \cdot g_{k,j} \cdot \mathrm{id}^{j+1} \\ & + \left\{ \left[\widetilde{q}\,(0) + (k-j) \cdot \partial p\,(0) + j \cdot \partial p\,(0)\right] \cdot g_{k,j} \right. \\ & \left. + \left[\partial\widetilde{q} + (k-j) \cdot \partial^2 p + (j-1) \cdot \frac{\partial^2 p}{2}\right] \cdot \widetilde{g_{k,j}} \right\} \cdot \mathrm{id}^j + \mathcal{P}_{j-1} \ , \end{aligned}$$

donc que $g_{k,j}$ et $\widetilde{g_{k,j}}$ satisfont aux relations de récurrence suivantes :

$$g_{k,0} = 1 \quad \text{et} \quad \widetilde{g_{k,0}} = 0$$

$$g_{k,j+1} = \left[\partial\widetilde{q} + (2k-j) \cdot \frac{\partial^2 p}{2}\right] \cdot g_{k,j} \qquad (**)$$

et

$$\widetilde{g_{k,j+1}} = \left[\widetilde{q}\,(0) + k \cdot \partial p\,(0)\right] \cdot g_{k,j} + \left[\partial\widetilde{q} + (2k-j-1) \cdot \frac{\partial^2 p}{2}\right] \cdot \widetilde{g_{k,j}} \ . \qquad (***)$$

On a alors

$$g_k = \frac{1}{d_k} \cdot g_{k,k} \quad \text{et} \quad \widetilde{g_k} = \frac{1}{d_k} \cdot \widetilde{g_{k,k}} \ ,$$

ainsi que la table

p	$1 - \mathrm{id}^2$	id	1
$\widetilde{q} = \frac{\partial \rho}{\rho} \cdot p$	$\beta - \alpha - (\alpha+\beta) \cdot \mathrm{id}$	$\alpha - \mathrm{id}$	$-2 \cdot \mathrm{id}$

Polynômes de Jacobi

On a

$$\binom{\alpha+k}{k} = J_k^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{(1-\mathrm{id})^{-\alpha}(1+\mathrm{id})^{-\beta}}{d_k} \cdot \partial^k \left[(1-\mathrm{id})^{\alpha+k}(1+\mathrm{id})^{\beta+k}\right](1) =$$

$$= \frac{(1-\mathrm{id})^{-\alpha}(1+\mathrm{id})^{-\beta}}{d_k} \cdot \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \partial^j (1-\mathrm{id})^{\alpha+k} \cdot \partial^{k-j}(1+\mathrm{id})^{\beta+k}\right](1) =$$

$$= \frac{1}{d_k} \cdot (\alpha+k)\cdots(\alpha+1) \cdot (-1)^k \cdot 2^k \ ,$$

donc

$$d_k = (-1)^k \cdot \frac{(\alpha+k)\cdots(\alpha+1)}{\frac{(\alpha+k)\cdots(\alpha+1)}{k!}} \cdot 2^k = (-1)^k \cdot 2^k \cdot k! \ .$$

D'autre part si $j+1 \leqslant k$, on a

$$g_{k,j+1} = -(\alpha+\beta+2k-j) \cdot g_{k,j} \ ,$$

donc

$$g_{k,j} = (-1)^j \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!}$$

par récurrence, et par suite

$$g_k = \frac{1}{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!} \cdot (-1)^k \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k)!}{(\alpha+\beta+k)!} =$$

$$= \frac{1}{2^k} \cdot \binom{\alpha+\beta+2k}{k} \ .$$

Ainsi

$$\left\| J_k^{(\alpha,\beta)} \right\|^2_{2,(1-\mathrm{id})^\alpha \cdot (1+\mathrm{id})^\beta} = (-1)^k \cdot \frac{\frac{1}{2^k} \cdot \binom{\alpha+\beta+2k}{k}}{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!} \cdot k! \cdot \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+k} \cdot (1+x)^{\beta+k} \, dx =$$

$$= \frac{\binom{\alpha+\beta+2k}{k}}{2^{2k}} \cdot \int_0^1 (2t)^{\alpha+k} \cdot (2-2t)^{\beta+k} \cdot 2 \, dt =$$

$$= 2^{\alpha+\beta+1} \cdot \binom{\alpha+\beta+2k}{k} \cdot B(\alpha+k+1, \beta+k+1) =$$

$$= 2^{\alpha+\beta+1} \cdot \binom{\alpha+\beta+2k}{k} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+k+1) \cdot \Gamma(\beta+k+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2k+2)} =$$

$$= 2^{\alpha+\beta+1} \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k)!}{k! \cdot (\alpha+\beta+k)!} \cdot \frac{(\alpha+k)! \cdot (\beta+k)!}{(\alpha+\beta+2k+1)!} =$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta+1} \cdot (\alpha+k)! \cdot (\beta+k)!}{(\alpha+\beta+2k+1) \cdot k! \cdot (\alpha+\beta+k)!} \ ,$$

en ayant fait le changement de variable $x = 1 - 2 \cdot t$ et utilisé la fonction béta d'Euler :

$$B(z,w) := \int_0^1 t^{z-1} \cdot (1-t)^{w-1} \, dt = \frac{\Gamma(z) \cdot \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad \text{pour tout } z, w > -1 \ .$$

Il vient alors

$$a_k = \frac{\frac{1}{2^k} \cdot \binom{\alpha+\beta+2k}{k}}{\frac{1}{2^{k+1}} \cdot \binom{\alpha+\beta+2k+2}{k+1}} = \frac{2(k+1)(\alpha+\beta+k+1)}{(\alpha+\beta+2k+1)(\alpha+\beta+2k+2)}$$

et

$$c_k = \frac{\frac{2^{\alpha+\beta+1} \cdot (\alpha+k)! \cdot (\beta+k)!}{(\alpha+\beta+2k+1) \cdot k! \cdot (\alpha+\beta+k)!}}{\frac{2^{\alpha+\beta+1} \cdot (\alpha+k-1)! \cdot (\beta+k-1)!}{(\alpha+\beta+2k-1) \cdot (k-1)! \cdot (\alpha+\beta+k-1)!}} \cdot \frac{2k(\alpha+\beta+k)}{(\alpha+\beta+2k-1)(\alpha+\beta+2k)} =$$

$$= \frac{(\alpha+\beta+2k-1)(\alpha+k)(\beta+k)}{(\alpha+\beta+2k+1)\,k\,(\alpha+\beta+k)} \cdot \frac{2k(\alpha+\beta+k)}{(\alpha+\beta+2k-1)(\alpha+\beta+2k)} =$$

$$= \frac{2(\alpha+k)(\beta+k)}{(\alpha+\beta+2k)(\alpha+\beta+2k+1)} \ .$$

En outre

$$\widetilde{g_{k,j+1}} = (\beta-\alpha) \cdot g_{k,j} + [-(\alpha+\beta) - (2k-j-1)] \cdot \widetilde{g_{k,j}} =$$

$$= (\beta-\alpha) \cdot (-1)^j \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!} - (\alpha+\beta+2k-j-1) \cdot \widetilde{g_{k,j}} \ ,$$

donc

$$\widetilde{g_{k,j}} = (-1)^{j-1} \cdot (\beta-\alpha) \cdot j \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!}$$

par récurrence, puisque

$$\widetilde{g_{k,j+1}} = (\beta-\alpha) \cdot (-1)^j \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!}$$

$$- (\alpha+\beta+2k-j-1) \cdot (-1)^{j-1} \cdot (\beta-\alpha) \cdot j \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!} =$$

$$= \frac{(\beta-\alpha) \cdot (-1)^j \cdot (\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!} \cdot [(\alpha+\beta+2k) + (\alpha+\beta+2k-j-1) \cdot j] =$$

$$= \frac{(\beta-\alpha) \cdot (-1)^j \cdot (\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+2k-j)!} \cdot (j+1) \cdot (\alpha+\beta+2k-j) =$$

$$= (-1)^j \cdot (\beta-\alpha) \cdot (j+1) \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+2k-j-1)!} \ .$$

Ainsi

$$\widetilde{g_k} = \frac{1}{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!} \cdot (-1)^{k-1} \cdot (\beta-\alpha) \cdot k \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+k)!} =$$

$$= -\frac{(\beta-\alpha)}{2^k \cdot (k-1)!} \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+k)!} \ ,$$

et par suite

$$b_k = \frac{-\frac{(\beta-\alpha)}{2^k\cdot(k-1)!}\cdot\frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+k)!}}{\frac{1}{2^k}\cdot\binom{\alpha+\beta+2k}{k}} - \frac{-\frac{(\beta-\alpha)}{2^{k+1}\cdot k!}\cdot\frac{(\alpha+\beta+2k+1)!}{(\alpha+\beta+k+1)!}}{\frac{1}{2^{k+1}}\cdot\binom{\alpha+\beta+2k+2}{k+1}} =$$

$$= (\beta-\alpha)\cdot\left(\frac{(k+1)}{\alpha+\beta+2k+2} - \frac{k}{\alpha+\beta+2k}\right) =$$

$$= \frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha+\beta+2k)\,(\alpha+\beta+2k+2)}\ .$$

Les 5 premiers polynômes de Jacobi :

$$J_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$$

$$J_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)\,x + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$J_2^{(\alpha,\beta)}(x) =$$

$$= \frac{1}{8}(\alpha+\beta+4)(\alpha+\beta+3)\,x^2 + \frac{1}{4}(\alpha+\beta+3)(\alpha-\beta)\,x + \frac{1}{8}(\alpha-\beta)^2 - \frac{1}{8}(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}$$

$$J_3^{(\alpha,\beta)}(x) =$$

$$= \frac{1}{48}(\alpha+\beta+6)(\alpha+\beta+5)(\alpha+\beta+4)\,x^3 + \frac{1}{16}(\alpha+\beta+5)(\alpha+\beta+4)(\alpha-\beta)\,x^2$$

$$+\frac{1}{16}(\alpha+\beta+4)\left((\alpha-\beta)^2-(\alpha+\beta)-6\right)x + \frac{1}{48}(\alpha-\beta)\left((\alpha-\beta)^2-3(\alpha+\beta)-16\right)$$

$$J_4^{(\alpha,\beta)}(x) =$$

$$= \frac{1}{384}(\alpha+\beta+8)(\alpha+\beta+7)(\alpha+\beta+6)(\alpha+\beta+5)\,x^4$$

$$+\frac{1}{96}(\alpha+\beta+7)(\alpha+\beta+6)(\alpha+\beta+5)(\alpha-\beta)\,x^3$$

$$+\frac{1}{64}(\alpha+\beta+6)(\alpha+\beta+5)\left((\alpha-\beta)^2-(\alpha+\beta)-8\right)x^2$$

$$+\frac{1}{96}(\alpha+\beta+5)(\alpha-\beta)\left((\alpha-\beta)^2-3(\alpha+\beta)-22\right)x$$

$$+\frac{1}{384}(\alpha-\beta)^4 - \frac{1}{64}(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2 - \frac{37}{384}(\alpha-\beta)^2 + 6\alpha\beta + \frac{7}{64}(\alpha+\beta) + \frac{3}{8}$$

Polynômes de Laguerre

Ici on a

$$\binom{\alpha+k}{k} = L_k^{(\alpha)}(0) = \frac{\mathrm{id}^{-\alpha}\cdot e^{\mathrm{id}}}{d_k}\cdot\partial^k\left[\mathrm{id}^{\alpha+k}\cdot e^{-\mathrm{id}}\right](0) =$$

$$= \frac{\mathrm{id}^{-\alpha} \cdot e^{\mathrm{id}}}{d_k} \cdot \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \partial^j \, \mathrm{id}^{\alpha+k} \cdot \partial^{k-j} e^{-\mathrm{id}} \right](0) = \frac{1}{d_k} \cdot (\alpha+k) \cdots (\alpha) \ ,$$

donc

$$d_k = \frac{(\alpha+k)\cdots(\alpha)}{\frac{(\alpha+k)\cdots(\alpha)}{k!}} = k! \ .$$

D'autre part

$$g_{k,j+1} = (-1) \cdot g_{k,j} \ ,$$

donc

$$g_k = \frac{(-1)^k}{k!} \ ,$$

puis

$$\left\| L_k^{(\alpha)} \right\|_{2,\mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-\mathrm{id}}}^2 = (-1)^k \cdot \frac{\frac{(-1)^k}{k!}}{k!} \cdot k! \cdot \int_0^\infty \mathrm{id}^{\alpha+k} \cdot e^{-\mathrm{id}} = \frac{(\alpha+k)!}{k!} \ ,$$

$$a_k = \frac{\frac{(-1)^k}{k!}}{\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}} = -(k+1)$$

et

$$c_k = \frac{\frac{(\alpha+k)!}{k!}}{\frac{(\alpha+k-1)!}{(k-1)!}} \cdot (-k) = -(\alpha+k) \ .$$

En outre

$$\widetilde{g_{k,j+1}} = (-1)^j \cdot (\alpha+k) - \widetilde{g_{k,j}} \ ,$$

donc

$$\widetilde{g_{k,j}} = (-1)^{j-1} \cdot j \cdot (\alpha+k)$$

par récurrence, puisque

$$\widetilde{g_{k,j+1}} = (-1)^j \cdot (\alpha+k) - (-1)^{j-1} \cdot j \cdot (\alpha+k) = (-1)^j \cdot (j+1) \cdot (\alpha+k) \ .$$

Ainsi

$$\widetilde{g_k} = \frac{1}{k!} \cdot (-1)^{k-1} \cdot k \cdot (\alpha+k) = \frac{(-1)^{k-1} \cdot (\alpha+k)}{(k-1)!}$$

et par suite

$$b_k = \frac{\frac{(-1)^{k-1} \cdot (\alpha+k)}{(k-1)!}}{\frac{(-1)^k}{k!}} - \frac{\frac{(-1)^k \cdot (\alpha+k+1)}{(k)!}}{\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}} = -k \cdot (\alpha+k) + (k+1) \cdot (\alpha+k+1) =$$

$$= \alpha + 2k + 1 \ .$$

Les 5 premiers polynômes de Laguerre :

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1$$

$$L_1^{(\alpha)}(x) = -x + \alpha + 1$$

$$L_2^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2}x^2 - (\alpha+2)\,x + \frac{1}{2}(\alpha+2)(\alpha+1)$$

$$L_3^{(\alpha)}(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}(\alpha+3)\,x^2 - \frac{1}{2}(\alpha+3)(\alpha+2)\,x + \frac{1}{6}(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)$$

$$L_4^{(\alpha)}(x) =$$

$$= \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}(\alpha+4)\,x^3 + \frac{1}{4}(\alpha+4)(\alpha+3)\,x^2$$

$$-\frac{1}{6}(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)\,x + \frac{1}{24}(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)$$

Polynômes d'Hermite

Finalement on a

$$2^k \cdot \mathrm{id}^k + \mathcal{P}_{k-1} \ni H_k = \frac{e^{\mathrm{id}^2}}{d_k} \cdot \partial^k \left(e^{-\mathrm{id}^2}\right) \in \frac{1}{d_k} \cdot (-2 \cdot \mathrm{id})^k + \mathcal{P}_{k-1} \ ,$$

donc

$$d_k = (-1)^k \quad \text{et} \quad g_k = 2^k \ ,$$

puis

$$\|H_k\|_{2,e^{-\mathrm{id}^2}}^2 = (-1)^k \cdot \frac{2^k}{(-1)^k} \cdot k! \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{id}^2} = \sqrt{\pi} \cdot 2^k \cdot k! \ ,$$

$$a_k = \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

et

$$c_k = \frac{\sqrt{\pi} \cdot 2^k \cdot k!}{\sqrt{\pi} \cdot 2^{k-1} \cdot (k-1)!} \cdot \frac{1}{2} = k \ .$$

En outre

$$\widetilde{g_{k,j+1}} = -2 \cdot \widetilde{g_{k,j}} \ ,$$

donc

$$\widetilde{g_k} = \frac{1}{(-1)^k} \cdot \widetilde{g_{k,k}} = 0 \ ,$$

et par suite

$$b_k = 0 \ .$$

Les 5 premiers polynômes d'Hermite :

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

Le théorème est enfin complètement démontré. $\square$

Polynômes de Jacobi spéciaux

Legendre :

$$P_k := J_k^{(0,0)} \ .$$

Les 5 premiers polynômes de Legendre :

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$$

Tchebycheff :

1^e^ espèce

$$T_k := \frac{1}{\binom{-\frac{1}{2}+k}{k}} \cdot J_k^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)} \ .$$

2^e^ espèce

$$U_k := \frac{k+1}{\binom{\frac{1}{2}+k}{k}} \cdot J_k^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \ .$$

On a les relations

$$T_k(\cos t) = \cos(k \cdot t) \quad \text{et} \quad U_k(\cos t) = \frac{\sin\Big[(k+1)\cdot t\Big]}{\sin t} \ .$$

En effet, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, soit $t := \arccos x \in \left]0,\pi\right[$; puisque $\sin t > 0$, il vient $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, donc

$$\cos(k \cdot \arccos x) = \mathrm{Re}\left(e^{ki\cdot\arccos x}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\cdot\arccos x}\right)^k =$$

$$= \mathrm{Re}\Big(\cos(\arccos x) + i\cdot\sin(\arccos x)\Big)^k = \mathrm{Re}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\cdot x^{k-l}\cdot i^l\cdot\left(1-x^2\right)^{\frac{l}{2}} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor}\binom{k}{2l}\cdot x^{k-2l}\cdot(-1)^l\cdot\left(1-x^2\right)^l \in \mathcal{P}_k \ .$$

Mais comme

$$\int_{-1}^{1} \cos(k \cdot \arccos x) \cdot \cos(l \cdot \arccos x)\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} \cos(k \cdot t) \cdot \cos(l \cdot t)\ dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ccc} \pi & & k = l = 0 \\ \left[\frac{1}{2k}\cos kt \sin kt + \frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} & \text{si} & k = l \neq 0 \\ \left[\frac{k\cdot\sin(k\cdot t)\cdot\cos(l\cdot t) - l\cdot\cos(k\cdot t)\cdot\sin(l\cdot t)}{k^2-l^2}\right]_0^{\pi} = 0 & & k \neq l \end{array} \right. ,$$

grâce au changement de variable $t = \arccos x$, et puisque $\cos(k \cdot \arccos 1) = 1$, l'unicité montre que $T_k = \cos(k \cdot \arccos)$, ce qu'il fallait démontrer.

Un calcul analogue montre que

$$\frac{\sin\left[(k+1)\cdot\arccos x\right]}{\sin(\arccos x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \operatorname{Im}\left(e^{(k+1)i\cdot\arccos x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sum_{l=0}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor} \binom{k}{2l} \cdot x^{k-2l-1} \cdot (-1)^l \cdot \left(1-x^2\right)^{l+\frac{1}{2}} \in \mathcal{P}_k ,$$

puis que

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin\left[(k+1)\cdot\arccos x\right]\cdot\sin\left[(l+1)\cdot\arccos x\right]}{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin\left[(k+1)\cdot t\right] \cdot \sin\left[(l+1)\cdot t\right]\ dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ccc} \left[-\frac{1}{2}\frac{\cos[(k+1)t]\cdot\sin[(k+1)t]-(k+1)t}{k+1}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} & & k = l \\ & \text{si} & \\ \left[\frac{(k+1)\cos[(k+1)\cdot t]\cdot\sin[(l+1)\cdot t]-(l+1)\sin[(k+1)\cdot t]\cos[(l+1)\cdot t]}{-(k+1)^2+(l+1)^2}\right]_0^{\pi} = 0 & & k \neq l \end{array} \right. ,$$

et finalement que

$$\frac{\sin\left[(k+1)\cdot\arccos\right]}{\sin(\arccos)}(1) = (k+1)\cdot\lim_{t\to 0+}\frac{\sin\left[(k+1)\cdot t\right]}{(k+1)\cdot t}\cdot\frac{t}{\sin t} = k+1 .$$

Grâce à l'unicité on obtient $U_k = \frac{\sin[(k+1)\cdot\arccos]}{\sin(\arccos)}$. □

Les 5 premiers polynômes de Tchebycheff de 1^e^ espèce et 2^e^ espèce :

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x$$

$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

Gegenbauer (ou ultraspériques) :

$$G_k^{(\gamma)} = \frac{\binom{2\gamma+k-1}{k}}{\binom{\gamma-\frac{1}{2}+k}{k}} \cdot J_k^{\left(\gamma-\frac{1}{2},\gamma-\frac{1}{2}\right)} \quad \text{pour } 0 \neq \gamma > -\frac{1}{2} .$$

et

$$G_k^{(0)} := \lim_{\gamma\to 0} \frac{1}{\gamma} \cdot G_k^{(\gamma)} .$$

Les 5 premiers polynômes de Gegenbauer lorsque $\gamma \neq 0$:

$$G_0^{(\gamma)}(x) = 1$$

$$G_1^{(\gamma)}(x) = 2\gamma x$$

$$G_2^{(\gamma)}(x) = 2\gamma(\gamma+1)x^2 - \gamma$$

$$G_3^{(\gamma)}(x) = \frac{4}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)x^3 - 2\gamma(\gamma+1)x$$

$$G_4^{(\gamma)}(x) = \frac{2}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)x^4 - 2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)x^2 + 2(\gamma+1)\gamma$$

et si $\gamma = 0$

$$G_0^{(0)}(x) = 1$$

$$G_1^{(0)}(x) = 2x$$

$$G_2^{(0)}(x) = 2x^2 - 1$$

$$G_3^{(0)}(x) = \frac{8}{3}x^3 - 2x$$

$$G_4^{(0)}(x) = 4x^4 - 4x^2 + \frac{1}{2}$$

Les valeurs des différentes constantes sont données dans la table suivante :

	P_k	T_k	U_k	$G_k^{(\gamma)}$
ρ	1	$\left(1-\mathrm{id}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$	$\left(1-\mathrm{id}^2\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(1-\mathrm{id}^2\right)^{\gamma-\frac{1}{2}}$
Normalisation en 1	1	1	$k+1$	$\binom{2\gamma+k-1}{k}$
$\left\Vert p_k\right\Vert_{2,\rho}^2$	$\frac{2}{2k+1}$	π si $k=0$, $\frac{\pi}{2}$ si $k>0$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi 2^{1-2\gamma}\Gamma(2\gamma+k)}{(\gamma+k)\cdot k!\cdot\Gamma(\gamma)^2}$ si $\gamma\neq 0$; 2 si $k=0$, $\frac{2\pi}{k^2}$ sinon si $\gamma=0$
a_k	$\frac{k+1}{2k+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{k+1}{2(\gamma+k)}$
c_k	$\frac{k}{2k+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2\gamma+k-1}{2(\gamma+k)}$
b_k	0	0	0	0
d_k	$(-1)^k\,2^k\cdot k!$	$\frac{(-1)^k\cdot 2^k\cdot\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{(-1)^k\cdot 2^{k+1}\cdot\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(k+1)\cdot\sqrt{\pi}}$	$\frac{(-1)^k\cdot 2^k\cdot k!\cdot\Gamma(2\gamma)\Gamma\left(\gamma+k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\gamma+k)\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}$
λ_k	$k\cdot(k+1)$	k^2	$k\,(k+2)$	$k\,(2\gamma+k)$

1.14 Les équations différentielles associées aux polynômes classiques

Voici tout d'abord un théorème de transformation d'une équation différentielle du second ordre sur un intervalle J de $\mathbb{R}$. Si $\rho : J \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est une fonction λ_J-mesurable, nous désignerons par $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J, \rho)$ l'ensemble des classes de fonction λ_J-mesurables f telles que $\rho \cdot f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$. Attention si ρ n'appartient pas à $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$, on ne peut pas définir une intégrale de Radon $\rho \cdot \lambda_J$!

THEOREME *Considérons des fonctions* $\rho : J \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *λ_J-mesurable,* $p : J \longrightarrow \mathbb{C}$ *tel que* $\rho \cdot p \in \mathcal{AC}(J)$ *et* $q : J \longrightarrow \mathbb{C}$ *telle que* $\rho \cdot q \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ *, l'application linéaire*

$$L : \mathcal{AC}^{(2)}(J) \longrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J, \rho) : f \longmapsto -\frac{1}{\rho} \cdot \partial(\rho \cdot p \cdot \partial f) + q \cdot f$$

(on dit que c'est un opérateur) et I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *,* $\omega, \varkappa \in \mathcal{AC}^{(2)}(I)$ *tels que* $\omega > 0$ *sur* I *et* $\varkappa : I \longrightarrow J$ *soit une bijection.*

La transformation

$$\Phi : f \longmapsto g := \omega \cdot f \circ \varkappa : \mathbb{K}^J \longrightarrow \mathbb{K}^I$$

est bijective et l'application réciproque est donnée par

$$\overset{-1}{\Phi} g = \frac{g}{\omega} \circ \overset{-1}{\varkappa} \,;$$

elle induit une isométrie de $\mathbf{L}^2(J, \rho)$ *sur* $\mathbf{L}^2(J, \widetilde{\rho})$ *et transforme l'opérateur* L *en l'opérateur*

$$\widetilde{L} : \mathcal{AC}^{(2)}(I) \longrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(I) : g \longmapsto -\frac{1}{\widetilde{\rho}} \cdot \partial(\widetilde{\rho} \cdot \widetilde{p} \cdot \partial g) + \widetilde{q} \cdot g \ ,$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{AC}^{(2)}(J) \arrow[r, "L"] & \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J, \rho) \arrow[d, "\Phi"] \\
\mathcal{AC}^{(2)}(I) \arrow[u, "\overset{-1}{\Phi}"] \arrow[r, "\widetilde{L}"'] & \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(I, \widetilde{\rho})
\end{tikzcd}$$

où

$$\widetilde{\rho} = \frac{\rho \circ \varkappa \cdot |\partial \varkappa|}{\omega^2} \quad , \quad \widetilde{p} = \frac{p \circ \varkappa}{|\partial \varkappa|^2} \quad , \quad \widetilde{q} = \frac{\partial(\widetilde{\rho} \cdot \widetilde{p} \cdot \partial \omega)}{\omega \cdot \widetilde{\rho}} + q \circ \varkappa \ .$$

Vérifions que Φ est une bijection entre les espaces considérés : Si $f \in \mathcal{AC}^{(2)}(J)$, alors $\Phi f = \omega \cdot f \circ \varkappa \in \mathcal{AC}^{(2)}(I)$ grâce à la proposition 1.5, (i) et (iii) ; de même si $g \in \mathcal{AC}^{(2)}(I)$, alors $\overset{-1}{\Phi} g = \frac{g}{\omega} \circ \overset{-1}{\varkappa} \in \mathcal{AC}^{(2)}(J)$ en ayant utilisé l'exemple 1.5.3 à la place de (i). D'autre part

$\widetilde{\rho} \cdot \widetilde{p} = \frac{(\rho \cdot p) \circ \varkappa}{\omega^2 \cdot |\partial \varkappa|} \in \mathcal{AC}(I)$ et

$$\widetilde{\rho} \cdot \widetilde{q} = \widetilde{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \left(\widetilde{\rho} \cdot \widetilde{p} \cdot \partial \omega \right)}{\omega \cdot \widetilde{\rho}} + q \circ \varkappa \right) = \frac{\partial \left(\widetilde{\rho} \cdot \widetilde{p} \cdot \partial \omega \right)}{\omega} + \frac{(\rho \cdot q) \circ \varkappa \cdot |\partial \varkappa|}{\omega^2} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$$

grâce à la proposition 1.5.ii. De même si $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J, \rho)$, on a $\widetilde{\rho} \cdot \Phi f = \frac{(\rho \cdot f) \circ \varkappa \cdot |\partial \varkappa|}{\omega} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(I)$, ainsi que

$$\rho \cdot \overset{-1}{\Phi} g = \rho \cdot \frac{g}{\omega} \circ \overset{-1}{\varkappa} = \left(\frac{\omega \cdot (\widetilde{\rho} \cdot g)}{|\partial \varkappa|} \right) \circ \overset{-1}{\varkappa} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$$

si $g \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(I, \widetilde{\rho})$.

C'est une isométrie de $\mathbf{L}^2(J, \rho)$ sur $\mathbf{L}^2(J, \widetilde{\rho})$ car

$$\int |f|^2 \cdot \rho \, d\lambda_J = \int |f \circ \varkappa|^2 \cdot \rho \circ \varkappa \cdot |\partial \varkappa| \, d\lambda_I = \int |\omega \cdot f \circ \varkappa|^2 \cdot \frac{|\partial \varkappa| \cdot \rho \circ \varkappa}{\omega^2} \, d\lambda_I =$$

$$= \int |\Phi f|^2 \cdot \widetilde{\rho} \, d\lambda_I \ .$$

D'autre part

$$\widetilde{L} g = \omega \cdot L \left(\frac{g}{\omega} \circ \overset{-1}{\varkappa} \right) \circ \varkappa = -\frac{\omega}{\rho \circ \varkappa} \cdot \partial \left(\rho \cdot p \cdot \partial \left[\frac{g}{\omega} \circ \overset{-1}{\varkappa} \right] \right) \circ \varkappa + q \circ \varkappa \cdot g \ ,$$

mais

$$\rho \cdot p \cdot \partial \left[\frac{g}{\omega} \circ \overset{-1}{\varkappa} \right] = \rho \cdot p \cdot \left[\partial \left(\frac{g}{\omega} \right) \cdot \frac{1}{\partial \varkappa} \right] \circ \overset{-1}{\varkappa} =$$

$$= \left[\frac{\rho \circ \varkappa \cdot p \circ \varkappa}{\omega \cdot \partial \varkappa} \cdot \partial g - \frac{\rho \circ \varkappa \cdot p \circ \varkappa}{\omega^2 \cdot \partial \varkappa} \cdot \partial \omega \cdot g \right] \circ \overset{-1}{\varkappa}$$

donc

$$\widetilde{L} g = -\frac{\omega}{\rho \circ \varkappa} \cdot \partial \left(\left[\frac{\rho \circ \varkappa \cdot p \circ \varkappa}{\omega \cdot \partial \varkappa} \cdot \partial g - \frac{\rho \circ \varkappa \cdot p \circ \varkappa}{\omega^2 \cdot \partial \varkappa} \cdot g \right] \circ \overset{-1}{\varkappa} \right) \circ \varkappa + q \circ \varkappa \cdot g =$$

$$= -\frac{\omega}{\rho \circ \varkappa} \cdot \partial \left[\frac{\rho \circ \varkappa \cdot p \circ \varkappa}{\omega^2 \cdot \partial \varkappa} \cdot \partial g \cdot \omega - \frac{\rho \circ \varkappa \cdot p \circ \varkappa}{\omega^2 \cdot \partial \varkappa} \cdot g \cdot \partial \omega \right] \cdot \frac{1}{\partial \varkappa} + q \circ \varkappa \cdot g =$$

$$= -\frac{\omega^2}{\partial \varkappa \cdot \rho \circ \varkappa} \cdot \left[\partial \left(\frac{\rho \circ \varkappa \cdot p \circ \varkappa}{\omega^2 \cdot \partial \varkappa} \cdot \partial g \right) - \frac{1}{\omega} \cdot \partial \left(\frac{\rho \circ \varkappa \cdot p \circ \varkappa}{\omega^2 \cdot \partial \varkappa} \cdot \partial \omega \right) \cdot g \right] + q \circ \varkappa \cdot g =$$

$$= -\frac{1}{\widetilde{\rho}} \cdot \partial \left(\widetilde{\rho} \cdot \widetilde{p} \cdot \partial g \right) + \left[\frac{\partial \left(\widetilde{\rho} \cdot \widetilde{p} \cdot \partial \omega \right)}{\omega \cdot \widetilde{\rho}} + q \circ \varkappa \right] \cdot g \ .$$

□

EXEMPLE Si l'on veut éliminer la densité ρ , il suffit de considérer la transformation

$$\Phi : f \longmapsto \sqrt{\rho} \cdot f$$

qui induit une isométrie de $\mathbf{L}^2(J, \rho)$ sur $\mathbf{L}^2(J)$ et transforme L en

$$\widetilde{L} : g \longmapsto -\partial \left(p \cdot \partial g \right) + \left[\frac{\partial \left(p \cdot \partial \sqrt{\rho} \right)}{\sqrt{\rho}} + q \right] \cdot g \ .$$

REMARQUE 1 Rappelons que si l'on connait une solution de l'équation différentielle $Lf = 0$, on peut déterminer une seconde solution linéairement indépendante de la première en utilisant la méthode de réduction de d'Alembert (cf. cours d'Analyse [17], proposition 12.13).

L'équation différentielle de Jacobi

Le polynôme de Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$ satisfait sur $]-1,1[$ à l'équation différentielle

$$(1-\mathrm{id})^{-\alpha}\cdot(1+\mathrm{id})^{-\beta}\cdot\partial\left[(1-\mathrm{id})^{\alpha+1}\cdot(1+\mathrm{id})^{\beta+1}\cdot\partial f\right]+k\cdot(\alpha+\beta+k+1)\cdot f=0\ ,$$

c'est-à-dire à

$$\left(1-\mathrm{id}^2\right)\cdot\partial^2 f+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)\cdot\mathrm{id}]\cdot\partial f+k\cdot(\alpha+\beta+k+1)\cdot f=0\ .$$

Considérons la transformation

$$\Phi : f\longmapsto g:=2^{\frac{\alpha+\beta+1}{2}}\cdot f\,(1-2\cdot\mathrm{id}):\mathbb{K}^{]-1,1[}\longrightarrow\mathbb{K}^{]0,1[}\,;$$

puisque

$$\rho=(1-\mathrm{id})^{\alpha}\cdot(1+\mathrm{id})^{\beta}\quad,\quad p=1-\mathrm{id}^2\quad\text{et}\quad q=-k\cdot(\alpha+\beta+k+1)\ ,$$

il vient

$$\widetilde{\rho}=\frac{2\cdot(2\cdot\mathrm{id})^{\alpha}\cdot(2-2\cdot\mathrm{id})^{\beta}}{2^{\alpha+\beta+1}}=\mathrm{id}^{\alpha}\cdot(1-\mathrm{id})^{\beta}\quad,\quad\widetilde{p}=\frac{1-(1-2\cdot\mathrm{id})^2}{2^2}=\mathrm{id}\cdot(1-\mathrm{id})$$

et

$$\widetilde{q}=-k\cdot(\alpha+\beta+k+1)\ .$$

On obtient donc l'équation différentielle

$$\mathrm{id}^{-\alpha}\cdot(1-\mathrm{id})^{-\beta}\cdot\partial\left[\mathrm{id}^{\alpha+1}\cdot(1-\mathrm{id})^{\beta+1}\cdot\partial g\right]+k\cdot(\alpha+\beta+k+1)\cdot g=0$$

ou bien

$$\mathrm{id}\cdot(1-\mathrm{id})\cdot\partial^2 g+[\alpha+1-(\alpha+\beta+2)\cdot\mathrm{id}]\cdot\partial g+k\cdot(\alpha+\beta+k+1)\cdot g=0\ .$$

Mise sous la forme

$$\mathrm{id}\cdot(1-\mathrm{id})\cdot\partial^2 g+[c-(a+b+1)\cdot\mathrm{id}]\cdot\partial g-ab\cdot g=0\ ,$$

en posant $a:=-k$, $b:=\alpha+\beta+k+1$ et $c:=\alpha+1$, on dit que c'est l'*équation différentielle hypergéométrique* . Une solution de cette équation est donnée par la *série hypergéométrique* ou de *Gauß*

$$F\,(a,b;c;z):={}_2F_1\,(a,b,c;z):=$$

$$:=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k\cdot(b)_k}{(c)_k}\cdot\frac{z^k}{k!}=\frac{\Gamma\,(c)}{\Gamma\,(a)\cdot\Gamma\,(b)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\,(a+k)\cdot\Gamma\,(b+k)}{\Gamma\,(c+k)}\cdot\frac{z^k}{k!}\ ,$$

dont le rayon de convergence est 1 pour tout $a,b\in\mathbb{C}$ et $c\in\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{Z}_-$. Cette fonction peut être prolongée analytiquement dans $\mathbb{C}\smallsetminus[1,\infty[$ grâce à la représentatrion intégrale

$$F\,(a,b;c;z):=\frac{\Gamma\,(c)}{\Gamma\,(a)\cdot\Gamma\,(c-b)}\cdot\int_0^1\mathrm{id}^{b-1}\cdot(1-\mathrm{id})^{c-b-1}\cdot(1-z\cdot\mathrm{id})^{-a}\ ,$$

pour autant que l'on ait $\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}b>0$. Si $c,c-a-b,a-b\notin\mathbb{Z}$, une seconde solution linéairement indépendante est

$$\mathrm{id}^{1-c}\cdot F\,(a-c+1,b-c+1;2-c;\mathrm{id})\ .$$

Les polynômes de Jacobi sont donnés par

$$J_k^{(\alpha,\beta)}(x) = \binom{\alpha+k}{k} \cdot F\left(-k, \alpha+\beta+k+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right) .$$

Soient $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $0 < q < p+1$. Les *polynômes hypergéométriques* $G_k^{(p,q)}$ sont ceux qui sont orthogonaux sur l'intervalle $]0,1[$ par rapport au poids $\mathrm{id}^{q-1} \cdot (1-\mathrm{id})^{p-q}$ et tels que $G_k^{(p,q)}(1) = 1$.

Grâce à la transformation ci-dessus ils correspondent aux polynômes de Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$ pour $\alpha, \beta \in \left]-1, \infty\right[$ tels que $q = \alpha+1$ et $p = \alpha+\beta+1$. Il vient

$$G_k^{(p,q)} = \frac{1}{\binom{q-1+k}{k}} \cdot J_k^{(q-1,p-q)}(1 - 2\cdot\mathrm{id}) = F(-k, p+k; q; \mathrm{id}) .$$

Citons en plus quelques formules remarquables :

$$\ln(1-z) = -z \cdot F(1,1;2;z)$$

$$\ln\frac{1+z}{1-z} = 2z \cdot F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2\right)$$

$$\arctan z = z \cdot F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right)$$

$$\arcsin z = z \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) = z \cdot \left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot F\left(1, 1; \frac{3}{2}; z^2\right)$$

L'équation différentielle de Laguerre

Le polynôme de Laguerre $L_k^{(\alpha)}$ satisfait sur $]0,\infty[$ à l'équation différentielle

$$\mathrm{id}^{-\alpha} \cdot e^{\mathrm{id}} \cdot \partial\left[\mathrm{id}^{\alpha+1} \cdot e^{-\mathrm{id}} \cdot \partial f\right] + k \cdot f = 0 ,$$

c'est-à-dire à

$$\mathrm{id} \cdot \partial^2 f + [\alpha + 1 - \mathrm{id}] \cdot \partial f + k \cdot f = 0 .$$

Mise sous la forme

$$\mathrm{id}^{1-b} \cdot e^{\mathrm{id}} \cdot \partial\left[\mathrm{id}^{b} \cdot e^{-\mathrm{id}} \cdot \partial f\right] - a \cdot f = 0 ,$$

en posant $a := -k$ et $b := \alpha + 1$, ou bien

$$\mathrm{id} \cdot \partial^2 f + [b - \mathrm{id}] \cdot \partial f - a \cdot f = 0$$

on dit que c'est l'*équation différentielle hypergéométrique confluente* . Une solution de cette équation est donnée par la *série hypergéométrique confluente de Kummer*

$$M(a,b;z) := {}_1F_1(a;b;z) :=$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \cdot \frac{z^k}{k!} = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(b+k)} \cdot \frac{z^k}{k!} ,$$

dont le rayon de convergence est ∞ pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$. Cette fonction peut être mise sous forme intégrale

$$M(a,b;z) := \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b-a)} \cdot \int_0^1 \mathrm{id}^{a-1} \cdot (1-\mathrm{id})^{b-a-1} \cdot e^{z\cdot\mathrm{id}} ,$$

pour autant que l'on ait $\operatorname{Re} b > \operatorname{Re} a > 0$. Une seconde solution linéairement indépendante est

$$U(a,b;\mathrm{id}) := \frac{\pi}{\sin(\pi\,\mathrm{id})} \cdot \left[\frac{M(a,b,\mathrm{id})}{\Gamma(a-b+1)\cdot\Gamma(b)} - \mathrm{id}^{1-b} \cdot \frac{M(a-b+1,2-b,\mathrm{id})}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(2-b)} \right] .$$

Les polynômes de Laguerre sont donnés par

$$L_k^{(\alpha)}(t) = \binom{\alpha+k}{k} \cdot M(-k,\alpha+1;t) \ .$$

Citons en plus quelques formules remarquables :

$$e^z = M(a,a;z)$$

$$\sin z = z \cdot e^{i\cdot z} \cdot M(1,2;-2i\cdot z)$$

$$\sinh z = z \cdot e^{-z} \cdot M(1,2;2z)$$

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2t}{\sqrt{\pi}} \cdot M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};-t^2\right)$$

Considérons la transformation

$$\Phi : f \longmapsto g := \mathrm{id}^{\frac{b}{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot f : \mathbb{K}^{]0,\infty[} \longrightarrow \mathbb{K}^{]0,\infty[} ;$$

puisque

$$\rho = \mathrm{id}^{b-1} \quad , \quad p = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad q = a \ ,$$

il vient

$$\widetilde{\rho} = \frac{1}{\mathrm{id}} \quad , \quad \widetilde{p} = \mathrm{id}$$

et, utilisant la formule de Leibniz,

$$\widetilde{q} = \mathrm{id}^{-\frac{b}{2}} \cdot e^{\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot \mathrm{id} \cdot \partial \left[\frac{1}{\mathrm{id}} \cdot \mathrm{id} \cdot \partial \left(\mathrm{id}^{\frac{b}{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}} \right) \right] + a = \mathrm{id}^{1-\frac{b}{2}} \cdot e^{\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot \partial^2 \left(\mathrm{id}^{\frac{b}{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}} \right) + a =$$

$$= \mathrm{id}^{1-\frac{b}{2}} \cdot e^{\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot \left[\frac{b}{2} \cdot \left(\frac{b}{2} - 1 \right) \mathrm{id}^{\frac{b}{2}-2} + 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \mathrm{id}^{\frac{b}{2}-1} + \frac{1}{4} \mathrm{id}^{\frac{b}{2}} \right] \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}} + a =$$

$$= -\left[\frac{\frac{b}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2}{\mathrm{id}} + \frac{b}{2} - a - \frac{\mathrm{id}}{4} \right] .$$

On obtient donc l'équation différentielle

$$\mathrm{id} \cdot \partial^2 g + \left[\frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{2}\right)^2}{\mathrm{id}} + \frac{b}{2} - a - \frac{\mathrm{id}}{4} \right] \cdot g = 0 \ .$$

Mise sous la forme

$$\partial^2 g + \left[\frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{\mathrm{id}^2} + \frac{\kappa}{\mathrm{id}} - \frac{1}{4} \right] \cdot g = 0 \ ,$$

en posant $\kappa := \frac{b}{2} - a$ et $\mu := \frac{b}{2} - \frac{1}{2}$, on dit que c'est l'*équation différentielle de Whittaker* dont un système fondamental de solutions est formé par les *fonctions de Whittaker*

$$M_{\kappa,\mu} := \mathrm{id}^{\mu+\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot M\left(\mu - \kappa + \frac{1}{2}, 2\mu + 1, \mathrm{id} \right)$$

et de

$$W_{\kappa,\mu} := \mathrm{id}^{\mu+\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot U\left(\mu - \kappa + \frac{1}{2}, 2\mu + 1, \mathrm{id}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \kappa - \mu\right)} \cdot M_{\kappa,\mu} + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \kappa + \mu\right)} \cdot M_{\kappa,-\mu} .$$

La fonction de Kummer est aussi liée aux fonctions de Bessel par la transformation

$$f \longmapsto g := \mathrm{id}^{\frac{b-1}{2}} \cdot e^{-i \cdot \mathrm{id}} \cdot f(2i \cdot \mathrm{id}) : \mathbb{C}^{\mathbb{C} \smallsetminus i \cdot \mathbb{R}_+} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_-} .$$

Mais attention cette transformation n'est pas du type décrit dans le théorème puisque le changement de variable se fait dans le domaine complexe :

$$]0, \infty[\longrightarrow i \cdot]0, \infty[: s \longmapsto 2i \cdot s .$$

Son image n'est pas l'ensemble de définition $]0, \infty[$ de l'équation différentielle de Kummer, mais $i \cdot]0, \infty[$ surlequel on peut considérer une nouvelle équation différentielle obtenue par restriction de l'équation différentielle de Kummer considérée dans le domaine complexe. Considérons tout d'abord la transformation

$$f \longmapsto h := f(2i \cdot \mathrm{id}) : \mathcal{O}(\mathbb{C} \smallsetminus i \cdot \mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_-) ,$$

on obtient

$$(2i \cdot \mathrm{id})^{1-b} \cdot e^{2i \cdot \mathrm{id}} \cdot \left(\frac{1}{2i}\right)^2 \cdot \partial\left[(2i \cdot \mathrm{id})^b \cdot e^{-2i \cdot \mathrm{id}} \cdot \partial h\right] - a \cdot h = 0 ,$$

i.e.

$$\mathrm{id}^{1-b} \cdot e^{2i \cdot \mathrm{id}} \cdot \partial\left[\mathrm{id}^b \cdot e^{-2i \cdot \mathrm{id}} \cdot \partial h\right] - 2i \cdot a \cdot h = 0 .$$

Remarquons que le poids n'est plus réel ; on ne peut donc pas lui associer un espace de Hilbert. Faisons maintenant la transformation

$$h \longmapsto g := \mathrm{id}^{\frac{b-1}{2}} \cdot e^{-i \cdot \mathrm{id}} \cdot h : \mathbb{C}^{]0,\infty[} \longrightarrow \mathbb{C}^{]0,\infty[} .$$

Puisque

$$\rho = \mathrm{id}^{b-1} \cdot e^{-2i \cdot \mathrm{id}} \quad , \quad p = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad q = 2i \cdot a ,$$

il vient

$$\widetilde{\rho} = 1 \quad , \quad \widetilde{p} = \mathrm{id}$$

et

$$\widetilde{q} = \mathrm{id}^{\frac{1-b}{2}} \cdot e^{i \cdot \mathrm{id}} \cdot \partial\left[\mathrm{id} \cdot \partial\left(\mathrm{id}^{\frac{b-1}{2}} \cdot e^{-i \cdot \mathrm{id}}\right)\right] + 2i \cdot a =$$

$$= \mathrm{id}^{\frac{1-b}{2}} \cdot e^{i \cdot \mathrm{id}} \cdot \partial\left[\left(\frac{b-1}{2} - i \cdot \mathrm{id}\right) \cdot \mathrm{id}^{\frac{b-1}{2}} \cdot e^{-i \cdot \mathrm{id}}\right] + 2i \cdot a =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{id}} \cdot \left[-i \cdot \mathrm{id} + \frac{b-1}{2} \cdot \left(\frac{b-1}{2} - i \cdot \mathrm{id}\right) - i \cdot \mathrm{id} \cdot \left(\frac{b-1}{2} - i \cdot \mathrm{id}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{id}} \cdot \left[\left(\frac{b-1}{2} - i \cdot \mathrm{id}\right)^2 - i \cdot \mathrm{id} + 2i \cdot a \cdot \mathrm{id}\right] .$$

En choisissant $a := \nu + \frac{1}{2}$ et $b := 2\nu + 1$, on obtient l'équation différentielle

$$\partial\left(\mathrm{id} \cdot \partial g\right) - \frac{1}{\mathrm{id}} \cdot \left[(\nu - i \cdot \mathrm{id})^2 + 2i \cdot \nu \cdot \mathrm{id}\right] \cdot g = 0 \ ,$$

i.e.

$$\mathrm{id}^2 \cdot \partial^2 g + \mathrm{id} \cdot \partial g + \left(\mathrm{id}^2 - \nu^2\right) \cdot g = 0 \ .$$

C'est l'*équation différentielle de Bessel* . La *fonction de Bessel* (ou *fonction cylindrique*) d'ordre $\nu \in \mathbb{C}$ est définie par

$$J_\nu\left(s\right) := \frac{1}{\Gamma\left(\nu+1\right)} \cdot \left(\frac{s}{2}\right)^\nu \cdot e^{-i \cdot s} \cdot M\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2i \cdot s\right)$$

en est une solution. Les fonctions J_ν et $J_{-\nu}$ forment un système fondamental de solutions.si $\nu \notin \mathbb{Z}$. Quel que soit $\nu \in \mathbb{C}$ il en est de même de la fonction de Bessel J_ν et de la fonction de *Weber*

$$Y_\nu := \frac{1}{\sin\left(\pi\nu\right)} \cdot \left(\cos\left(\pi\nu\right) \cdot J_\nu - J_{-\nu}\right) \ .$$

L'équation différentielle d'Hermite

Le polynôme de d'Hermite H_k satisfait sur $\mathbb{R}$ à l'équation différentielle

$$e^{\mathrm{id}^2} \cdot \partial\left[e^{-\mathrm{id}^2} \cdot \partial f\right] + 2k \cdot f = 0 \ ,$$

c'est-à-dire à

$$\partial^2 f - 2\,\mathrm{id} \cdot \partial f + 2k \cdot f = 0 \ .$$

Considérons la transformation

$$\Phi : f \longmapsto g := \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{4}} \cdot f\left(\frac{\diamond}{\sqrt{2}}\right) : \mathbb{K}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{R}} \ .$$

Puisque

$$\rho = e^{-\mathrm{id}^2} \quad , \quad p = 1 \quad \text{et} \quad q = -2k \ ,$$

il vient

$$\widetilde{\rho} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\left(\frac{\mathrm{id}}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{2}}} = 1 \quad , \quad \widetilde{p} = 2$$

et

$$\widetilde{q} = \sqrt[4]{2} \cdot e^{\frac{\mathrm{id}^2}{4}} \cdot \partial\left(2 \cdot \partial \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{4}}\right) - 2k = 2 \cdot e^{\frac{\mathrm{id}^2}{4}} \cdot \partial^2 e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{4}} - 2k =$$

$$= -e^{\frac{\mathrm{id}^2}{4}} \cdot \partial\left(\mathrm{id} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{4}}\right) - 2k = -1 + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{id}^2 - 2k \ .$$

Ainsi Φ est une isométrie de $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ sur $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}\right)$ et on obtient l'équation différentielle

$$\partial^2 g - \left(\frac{\mathrm{id}^2}{4} + a\right) \cdot g = 0$$

en ayant posé $a := -k - \frac{1}{2}$. Un système fondamental de solutions de cette équation sont les fonctions dites *paraboliques cylindriques* :

$$e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{4}} \cdot M\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{\mathrm{id}^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{id} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{4}} M\left(\frac{a}{2}+\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{\mathrm{id}^2}{2}\right) .$$

On peut aussi considérer la transformation

$$\Phi : f \longmapsto g := e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{2}} \cdot f : \mathbb{K}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{R}} .$$

Dans ce cas il vient évidemment

$$\widetilde{\rho} = 1 \quad , \quad \widetilde{p} = 1$$

et

$$\widetilde{q} = e^{\frac{\mathrm{id}^2}{2}} \cdot \partial^2 e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{2}} - 2k = -e^{\frac{\mathrm{id}^2}{2}} \cdot \partial\left(\mathrm{id} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}^2}{2}}\right) - 2k =$$

$$= -1 + \mathrm{id}^2 - 2k .$$

Ainsi Φ est aussi une isométrie de $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ et on obtient l'équation différentielle

$$\partial^2 g - \mathrm{id}^2 \cdot g + (2k+1) \cdot g = 0 .$$

Puisque les polynômes d'Hermite $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment une base hilbertienne de $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ (théorème 1.15 ci-dessous), il en est de même de l'ensemble des *fonctions d'Hermite*

$$h_k := (-1)^k \cdot \left(\sqrt{\pi} \cdot 2^k \cdot k!\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot \mathrm{id}^2} \cdot H_k$$

dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Nous verrons plus tard que l'opérateur auto-adjoint non-borné

$$\widetilde{L} : g \longmapsto -\partial^2 g + \mathrm{id}^2 \cdot g ,$$

décrivant l'*oscillateur harmonique*, est diagonalisable dans cette base. Les valeurs propres sont évidemment $2k+1$. Remarquons que

$$h_k = \left(\sqrt{\pi} \cdot 2^k \cdot k!\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{id}^2} \cdot \partial^k \left(e^{-\mathrm{id}^2}\right)$$

par la formule de Rodrigues. On peut montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\mathrm{id} - \partial)\, h_k = \sqrt{k+1} \cdot h_{k+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\mathrm{id} + \partial)\, h_k = \sqrt{k} \cdot h_{k-1}$$

et on dit que $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\mathrm{id} - \partial)$ est l'*opérateur de création* et $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\mathrm{id} + \partial)$ l'*opérateur d'annihilation* .

Les polynômes classiques exceptionnels

Dans le théorème 1.13 nous avons supposé que $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système de polynômes orthogonaux, en particulier que ρ est un poids, ce qui entraîne des restrictions sur les coefficients définissant ces poids. D'où la question : sous quelles conditions obtient-on un système de polynômes à l'aide de la formule de Rodrigues ?

On a le résultat suivant :

PROPOSITION *Soient $\rho, p \in \mathcal{C}^{(\infty)}(J)$ tels que $\rho, p > 0$ sur J et posons*

$$q := \frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho} \quad , \quad \widetilde{q} := \frac{\partial(\rho)}{\rho} \cdot p = q - \partial p$$

et

$$p_k := \frac{1}{d_k \cdot \rho} \cdot \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $q \in \mathcal{P}_1$, $p \in \mathcal{P}_2$ *et* $0 \notin \partial\widetilde{q} + \frac{\partial^2 p}{2} \cdot (2 + \mathbb{N})$.

(ii) $p \in \mathcal{P}$ *et* $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est un système de polynômes.*

Dans ce cas chaque p_k *est solution d'une équation différentielle de type hypergéométrique*

$$\frac{1}{\rho} \cdot \partial \left(\rho \cdot p \cdot \partial f\right) + \lambda_k \cdot f = 0$$

ou bien

$$p \cdot \partial^2 f + q \cdot \partial f + \lambda_k \cdot f = 0$$

pour un certain $\lambda_k \in \mathbb{K}$ *et*

$$\lambda_k = -k \cdot \left[\partial q + (k-1) \cdot \frac{\partial^2 p}{2}\right] \ .$$

En outre

$$\rho = \frac{\rho(\tau) \cdot p(\tau)}{p} \cdot \exp\left(\int_\tau^\diamond \frac{q}{p}\right)$$

pour tout $\tau \in J$.

La démonstration du théorème 1.13, (i)⇒(ii), montre que si $q \in \mathcal{P}_1$, on a les relations de récurrence $(*)$ et $(**)$. Remarquer $k \geqslant 1$ et $k \geqslant j+1$ entraîne $2k \geqslant k+j+1$, donc $2k - j \geqslant k+1 \geqslant 2$.

(i) ⇒ (ii) Utilisant $(*)$, on voit immédiatement que $p_k \in \mathcal{P}_k$. Il nous suffit donc de prouver, pour tout $k \in \mathbb{N}$, que $\deg p_k = k$, donc que $g_k \neq 0$. Utilisant la relation de récurrence $(**)$

$$g_{k,0} = 1 \quad \text{et} \quad g_{k,j+1} = \left[\partial\widetilde{q} + (2k-j) \cdot \frac{\partial^2 p}{2}\right] \cdot g_{k,j} \ ,$$

et l'hypothèse, on voit que chaque $g_{k,j} \neq 0$, donc que $g_k = g_{k,k} \neq 0$.

(ii) ⇒ (i) On a $q = \frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho} = p_1 \in \mathcal{P}_1$ et comme dans la démonstration du théorème, (ii)⇒(iii), on montre que $p \in \mathcal{P}_2$. Finalement puisque $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système de polynômes, on a $\deg p_k = k$, donc $g_k \neq 0$, et par suite tous les $g_{k,j}$ sont $\neq 0$ par $(**)$; mais ceci prouve que

$$\partial\widetilde{q} + (2k-j) \cdot \frac{\partial^2 p}{2} \neq 0 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } j \in \mathbb{N} \text{ tels que } j \leqslant k \ ,$$

donc que $0 \notin \partial\widetilde{q} + \frac{\partial^2 p}{2} \cdot (2 + \mathbb{N})$.

La dernière partie découle également de la démonstration du théorème, (ii)⇒(iii) et, puisque

$$\frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho \cdot p} = \frac{q}{p} \ ,$$

on a

$$\rho = \frac{\rho(\tau) \cdot p(\tau)}{p} \cdot \exp\left(\int_\tau^\diamond \frac{q}{p}\right)$$

pour tout $\tau \in J$. □

A une transformation affine et une bonne normalisation près, et en choisissant J maximal tel que $p > 0$ sur J , on peut distinguer les cas suivants :

Cas $p = 1$ On a $J = \left]-\infty, \infty\right[$; en écrivant q sous la forme $q = 2s \cdot \mathrm{id} + t$ et si $\rho(0) = 1$, on obtient

$$\rho = \exp\left(\int_0^\diamond (2s \cdot \mathrm{id} + t)\right) = e^{s \cdot \mathrm{id}^2 + t \cdot \mathrm{id}} ,$$

et la condition s'écrit $0 \notin \{2s\}$, i.e. $s \neq 0$.

Sous-cas $\rho = e^{-\mathrm{id}^2}$ On obtient les polynômes d'Hermite H_k .

Sous-cas $\rho = e^{\mathrm{id}^2}$ ρ n'est pas un poids. Mais dans le domaine complexe il vient

$$e^{-\mathrm{id}^2} \cdot \partial^k e^{\mathrm{id}^2} = e^{-\mathrm{id}^2} \cdot \partial^k e^{-(i \cdot \mathrm{id})^2} = e^{(i \cdot \mathrm{id})^2} \cdot \left(\partial^k e^{-\mathrm{id}^2}\right)(i \cdot \mathrm{id}) \cdot i^k =$$

$$= \frac{1}{i^k} \cdot \left[(-1)^k \cdot e^{\mathrm{id}^2} \cdot \partial^k e^{-\mathrm{id}^2}\right](i \cdot \mathrm{id}) = \frac{1}{i^k} \cdot H_k(i \cdot \mathrm{id}) .$$

Cas $p = \mathrm{id}$ On a $J = \left]0, \infty\right[$; en écrivant q sous la forme $q = s \cdot \mathrm{id} + \alpha + 1$ et si $\rho(1) = e^s$, on obtient

$$\rho = \frac{e^s}{\mathrm{id}} \cdot \exp\left(\int_1^\diamond \left(s + \frac{\alpha + 1}{\mathrm{id}}\right)\right) = \frac{e^{s \cdot \mathrm{id} + (\alpha+1) \cdot \ln}}{\mathrm{id}} = \mathrm{id}^\alpha \cdot e^{s \cdot \mathrm{id}}$$

et la condition s'écrit $0 \notin \{s\}$, i.e. $s \neq 0$.

Sous-cas $\rho = \mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-\mathrm{id}}$ **et** $\alpha > -1$ On obtient les polynômes de Laguerre $L_k^{(\alpha)}$.

Sous-cas $\rho = \mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-\mathrm{id}}$ **et** $\alpha \leqslant -1$ ρ n'est pas un poids, mais les polynômes sont formellement les mêmes que ceux de Laguerre : les coefficients de $L_k^{(\alpha)}$ sont des polynômes en α !

Sous-cas $\rho = \mathrm{id}^\alpha \cdot e^{\mathrm{id}}$ ρ n'est pas un poids sur $\left]0, \infty\right[$. Mais

$$\mathrm{id}^{-\alpha} \cdot e^{-\mathrm{id}} \cdot \partial^k \left(\mathrm{id}^\alpha \cdot e^{\mathrm{id}}\right) = |-(-\mathrm{id})|^{-\alpha} \cdot e^{-\mathrm{id}} \cdot \partial^k \left(|-(-\mathrm{id})|^\alpha \cdot e^{-(-\mathrm{id})}\right) =$$

$$= \left[|-\mathrm{id}|^{-\alpha} \cdot e^{\mathrm{id}} \cdot \partial^k \left(|-\mathrm{id}|^\alpha \cdot e^{-\mathrm{id}}\right)\right](-\mathrm{id}) \cdot (-1)^k =$$

$$= (-1)^k \cdot L_k^{(\alpha)}(-\mathrm{id}) .$$

Cas $p = 1 - \mathrm{id}^2$ On a $J = \left]-1, 1\right[$; et en écrivant q sous la forme $q = (\alpha + 1) \cdot (1 + \mathrm{id}) - (\beta + 1) \cdot (1 - \mathrm{id})$ et si $\rho(0) = 1$, on obtient

$$\rho = \frac{1}{1 - \mathrm{id}^2} \cdot \exp\left(\int_\tau^\diamond \frac{-(\alpha + 1) \cdot (1 + \mathrm{id}) + (\beta + 1) \cdot (1 - \mathrm{id})}{1 - \mathrm{id}^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1 - \mathrm{id}^2} \cdot e^{(\alpha+1) \cdot \ln(1-\mathrm{id}) + (\beta+1) \cdot \ln(1+\mathrm{id})} = (1 - \mathrm{id})^\alpha \cdot (1 + \mathrm{id})^\beta$$

et la condition s'écrit

$$0 \notin \partial\left[-(\alpha + 1) \cdot (1 + \mathrm{id}) + (\beta + 1) \cdot (1 - \mathrm{id}) + 2 \cdot \mathrm{id}\right] - (2 + \mathbb{N}) = -\alpha - \beta - (2 + \mathbb{N}) ,$$

i.e. $\alpha + \beta + 2 \notin -\mathbb{N}$.

Sous-cas $\alpha, \beta > -1$ La condition est évidemment satisfaite. On obtient les polynômes de Jacobi.

Sous-cas $\alpha \leqslant -1$ **ou** $\beta \leqslant -1$ **et** $\alpha+\beta+2 \notin -\mathbb{N}$ ρ n'est pas un poids, mais les polynômes sont formellement les mêmes que ceux de Jacobi : les coefficients de $J_k^{(\alpha,\beta)}$ sont des polynômes en α et β !

Cas $p = \mathrm{id}^2$ On a $J =]0,\infty[$; en écrivant q sous la forme $q = (s+2)\cdot \mathrm{id} + t$ et si $\rho(1) = e^{-t}$, on obtient

$$\rho = \frac{e^{-t}}{\mathrm{id}^2}\cdot \exp\left(\int_1^{\diamond}\left(\frac{s+2}{\mathrm{id}}+\frac{t}{\mathrm{id}^2}\right)\right) = \frac{e^{(s+2)\cdot\ln - \frac{t}{\mathrm{id}}}}{\mathrm{id}^2} = \mathrm{id}^s \cdot e^{-\frac{t}{\mathrm{id}}}$$

et la condition s'écrit

$$0 \notin \partial\Big((s+2)\cdot\mathrm{id} + t - 2\cdot\mathrm{id}\Big) + (2+\mathbb{N}) = s+2+\mathbb{N} ,$$

i.e. $s+2 \notin -\mathbb{N}$. Remarquons que ρ n'est jamais un poids ! On obtient un système de polynômes satisfaisant à une équation différentielle de type hypergéométrique où

$$\lambda_k = -k\cdot(s+k+1) .$$

Elle s'écrit

$$\mathrm{id}^{-s}\cdot e^{\frac{t}{\mathrm{id}}}\cdot\partial\left(\mathrm{id}^{s+2}\cdot e^{-\frac{t}{\mathrm{id}}}\cdot\partial h\right) + \lambda_k\cdot h = 0 \qquad (*)$$

ou bien

$$\mathrm{id}^2\cdot\partial^2 h + \Big[(s+2)\cdot\mathrm{id}+t\Big]\cdot\partial h + \lambda_k\cdot h = 0 .$$

Sous-cas $t = 0$ On a

$$p_k = \frac{1}{d_k}\cdot\mathrm{id}^{-s}\cdot\partial^k\left(\mathrm{id}^{s+2k}\right) = \mathrm{id}^k$$

en prenant $d_k := (s+2k)\cdots(s+k+1) = \frac{(s+2k)!}{(s+k)!}$.

Sous-cas $t \neq 0$ Etant donné $k\in\mathbb{N}$ considérons la transformation

$$\Phi : h \longmapsto f := \mathrm{id}^k\cdot h\circ\frac{t}{\mathrm{id}} .$$

Remarquons que $\Phi p_k = \mathrm{id}^k\cdot p_k\left(\frac{t}{\mathrm{id}}\right)$ est un polynôme de degré k . Puisque

$$\rho = \mathrm{id}^s\cdot e^{-\frac{t}{\mathrm{id}}} \quad , \quad p = \mathrm{id}^2 \quad \text{et} \quad q = k\cdot(s+k+1) ,$$

il vient

$$\widetilde{\rho} = \frac{\frac{t}{\mathrm{id}^2}\cdot\left(\frac{t}{\mathrm{id}}\right)^s\cdot e^{-\frac{t}{\frac{t}{\mathrm{id}}}}}{\mathrm{id}^{2k}} = t^{s+1}\cdot\mathrm{id}^{-s-2-2k}\cdot e^{-\mathrm{id}} \quad , \quad \widetilde{p} = \frac{\left(\frac{t}{\mathrm{id}}\right)^2}{\left(\frac{t}{\mathrm{id}^2}\right)^2} = \mathrm{id}^2$$

et

$$\widetilde{q} = \frac{\partial\left(t^{s+1}\cdot\mathrm{id}^{-s-2-2k}\cdot e^{-\mathrm{id}}\cdot\mathrm{id}^2\cdot\partial\left[\mathrm{id}^k\right]\right)}{\mathrm{id}^k\cdot t^{s+1}\cdot\mathrm{id}^{-s-2-2k}\cdot e^{-\mathrm{id}}} + k\cdot(s+k+1) =$$

$$= k\cdot\mathrm{id}^{s+2+k}\cdot e^{\mathrm{id}}\cdot\partial\left(\mathrm{id}^{-s-k-1}\cdot e^{-\mathrm{id}}\right) + k\cdot(s+k+1) =$$

$$= k\cdot\mathrm{id}^{s+2+k}\cdot e^{\mathrm{id}}\cdot\left[(-s-k+1)\cdot\mathrm{id}^{-s-k-2} - \mathrm{id}^{-s-k-1}\right]\cdot e^{-\mathrm{id}} + k\cdot(s+k+1) =$$

$$= k\cdot[(-s-k+1)+(s+k-1)-\mathrm{id}] = -k\cdot\mathrm{id} .$$

On obtient donc l'équation différentielle

$$\mathrm{id}^{s+2+2k}\cdot e^{\mathrm{id}}\cdot\partial\left(\mathrm{id}^{-s-2k}\cdot e^{-\mathrm{id}}\cdot\partial f\right) + k\cdot\mathrm{id}\cdot f = 0 ,$$

i.e.

$$\mathrm{id}^{s+1+2k} \cdot e^{\mathrm{id}} \cdot \partial \left(\mathrm{id}^{-s-2k} \cdot e^{-\mathrm{id}} \cdot \partial f \right) + k \cdot f = 0$$

ou bien

$$\mathrm{id} \cdot \partial^2 f + (-s - 2k - \mathrm{id}) \cdot \partial f + k \cdot f = 0 \ ,$$

qui est l'équation de Laguerre pour $\alpha := 1 - s - 2k$. On peut alors voir $\Phi p_k = L_k^{(1-s-2k)}$ en ayant choisi la bonne constante d_k , donc que

$$p_k = \left(\frac{\mathrm{id}}{t} \right)^k \cdot L_k^{(1-s-2k)} \left(\frac{t}{\mathrm{id}} \right) \ .$$

REMARQUE 2 Si p_k est défini par la formule de Rodrigues, nous avonc vu que ρ est déterminé par p et $q := d_1 \cdot p_1 = \frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho}$:

$$\rho = \frac{\rho(\tau) \cdot p(\tau)}{p} \cdot \exp \left(\int_\tau^\diamond \frac{q}{p} \right)$$

pour tout $\tau \in J$. En outre on a l'équation différentielle non-linéaire

$$p \cdot \partial^2 p + q \cdot \partial p + \partial q \cdot p + q^2 - d_2 \cdot p_2 = 0$$

grâce à la démonstration du théorème 1.13, (ii)$\Rightarrow$(iii).

PROBLEME Existe-il des solutions p non-polynomiales de cette équation différentielle telle que $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit un système de polynômes ? Plus généralement est-ce que le système de fonctions $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ possède des propriétés intéressantes ?

REMARQUE 3 Si $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un système de polynômes et s'il existe $p, q, r \in \mathcal{C}^{(\infty)}(J)$ tels que chaque p_k soit solution d'une équation différentielle du type

$$p \cdot \partial^2 f + q \cdot \partial f + r \cdot f + \lambda_k \cdot f = 0 \quad \text{pour un certain } \lambda_k \in \mathbb{K} \ ,$$

alors $r \in \mathcal{P}_0$, $q \in \mathcal{P}_1$ et $p \in \mathcal{P}_2$.

En effet pour $k = 0$, on a $p_0 \neq 0$ et $\partial^2 p_0 = \partial p_0 = 0$, donc $(r + \lambda_0) \cdot p_0 = 0$, ce qui montre que $r = -\lambda_0$ est une constante. Pour $k = 1$, il vient $\partial p_1 \neq 0$ et $\partial^2 p_1 = 0$, donc $q \cdot \partial p_1 + (\lambda_1 - \lambda_0) \cdot p_1 = 0$ et par suite $q = (\lambda_0 - \lambda_1) \cdot \frac{p_1}{\partial p_1} \in \mathcal{P}_1$. Finalement pour $k = 2$, on obtient $\partial^2 p_2 \neq 0$ et

$$p \cdot \partial^2 p_2 + (\lambda_0 - \lambda_1) \cdot \frac{p_1}{\partial p_1} \cdot \partial p_2 + (\lambda_2 - \lambda_0) \cdot p_2 = 0 \ ,$$

donc $p \in \mathcal{P}_2$. □

Mais attention p_k n'est pas nécessairement donné par la formule de Rodrigues. Par exemple l'équation différentielle

$$\mathrm{id}^2 \cdot \partial^2 f + s \cdot \mathrm{id} \cdot \partial f - k \cdot (s + k - 1) \cdot f = 0$$

a comme solution id^m pour autant que

$$m(m-1) + s \cdot m - k \cdot (s + k - 1) = 0 \ ,$$

i.e.

$$m \cdot (s + m - 1) = k \cdot (s + k - 1) \ .$$

En particulier id^k , mais aussi id^{1-s-k} sont des solutions. Si $s \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant 1-s-k < k$, i.e. $1-2k < s \leqslant 1-k$, alors

$$\mathrm{id}^k + c \cdot \mathrm{id}^{1-s-k}$$

est une solution dans $\mathcal{P}_k$ qui ne s'obtient pas à l'aide de la formule de Rodrigues si $c \neq 0$.

1.15 Les bases hilbertiennes de polynômes classiques

Voici maintenant le résultat fondamental pour les applications :

THEOREME *Chaque système de polynômes orthonormés classiques est une base hilbertienne de l'espace* $\mathbf{L}^2$ *correspondant. Plus précisément :*

$$\left(\frac{J_k^{(\alpha,\beta)}}{\left\|J_k^{(\alpha,\beta)}\right\|_{2,(1-\mathrm{id})^\alpha\cdot(1+\mathrm{id})^\beta}}\right)_{k\in\mathbb{N}} \quad , \quad \left(\frac{L_k^{(\alpha)}}{\left\|L_k^{(\alpha)}\right\|_{2,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}}}\right)_{k\in\mathbb{N}} \quad et \quad \left(\frac{H_k}{\|H_k\|_{2,e^{-\mathrm{id}^2}}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

sont respectivement des bases hilbertiennes de

$$\mathbf{L}^2\left(\left]-1,1\right[,(1-\mathrm{id})^\alpha\cdot(1+\mathrm{id})^\beta\right) \quad , \quad \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}\right) \quad et \quad \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right) \ .$$

Dmonstration de (i) Cela découle de la proposition 1.11.

Dmonstration de (ii) La démonstration détailée est laissée en exercice. Il suffit de remarquer tout d'abord que la transformation

$$x\longmapsto e^{-x}:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\left]0,1\right[$$

définit une isométrie surjective

$$\mathbf{L}^2\left(\left]0,1\right[,(-\ln)^\alpha\right)\longrightarrow\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}\right):g\longmapsto g\left(e^{-\mathrm{id}}\right) \ .$$

Par suite l'image $\left(e^{-k\cdot\mathrm{id}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de la suite totale des monômes $\left(\mathrm{id}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbf{L}^2\left(\left]0,1\right[,(-\ln)^\alpha\right)$ (proposition 1.11) est totale dans $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}\right)$. Utilisant le théorème 1.9, on montre que

$$e^{-n\cdot\mathrm{id}}=\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\widetilde{L}_k^{(\alpha)}\middle|e^{-n\cdot\mathrm{id}}\right)\cdot\widetilde{L}_k^{(\alpha)} \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}})$$

grâce à l'égalité de Parseval, qui est une conséquence de la formule du binôme! Ceci finit de prouver que $\left(L_k^{(\alpha)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est totale.

Dmonstration de (iii) En désignant par $\mathbf{L}_p^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ et $\mathbf{L}_i^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ les sous-espaces vectoriels fermés de $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ formés des fonctions paires et respectivement impaires, on a

$$\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right)=\mathbf{L}_p^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right)\boxplus\mathbf{L}_i^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right) \ .$$

La transformation

$$x\longmapsto x^2:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$$

définit, en posant $\widetilde{g}(x)=g\left(x^2\right)$, des isométries surjectives

$$\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\mathrm{id}}\right)\longrightarrow\mathbf{L}_p^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right):g\longmapsto\widetilde{g}$$

et

$$\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\mathrm{id}}\right)\longrightarrow\mathbf{L}_i^2\left(\mathbb{R},e^{-\mathrm{id}^2}\right):g\longmapsto\mathrm{id}\cdot\widetilde{g} \ .$$

On en déduit que les images des polynômes de Laguerre $L_k^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$ et $L_k^{\left(\frac{1}{2}\right)}$, qui sont des polynômes de degré $2k$ et $2k+1$ respectivement, forment un système de polynômes orthogonaux total dans $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$. On a donc

$$H_{2k} \sim L_k^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\mathrm{id}^2\right) \quad \text{et} \quad H_{2k+1} \sim \mathrm{id}\cdot L_k^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\mathrm{id}^2\right) \ .$$

La totalité des polynômes d'Hermite découle alors de celle de polynômes de Laguerre. $\square$

En comparant les coefficients de la plus haute puissance, on voit que

$$H_{2k} = (-1)^k \cdot 2^{2k} \cdot k! \cdot L_k^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\mathrm{id}^2\right) \quad \text{et} \quad H_{2k+1} = (-1)^k \cdot 2^{2k+1} \cdot k! \cdot \mathrm{id}\cdot L_k^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\mathrm{id}^2\right) \ .$$

On peut aussi prouver la totalité des polynômes de Laguerre en considérant

Les fonctions génératrices

Il est souvent utile de connaître la *fonction génératrice* associée à un système de polynômes orthogonaux $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convenable, que l'on introduit pour renormaliser les polynômes. Elle est définie par

$$\Phi(x,z) := \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \cdot p_k(x) \cdot z^k$$

pour tout $x \in J$ et $|z| < R$.

Le calcul de Φ se fait en utilisant la théorie des fonctions. Si γ est un lacet dans $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_-$ n'entourant qu'une fois le point $x \in \mathbb{R}_+^*$, la formule de Rodrigues et celle de Cauchy montrent que

$$p_k(x) = \frac{1}{d_k \cdot \rho(x)} \cdot \partial^k\left(\rho \cdot p^k\right)(x) = \frac{1}{d_k \cdot \rho(x)} \cdot \frac{k!}{2\pi i} \cdot \int_\gamma \frac{\rho(\zeta)\cdot p(\zeta)^k}{(\zeta - x)^{k+1}}\, d\zeta \ ,$$

donc

$$\Phi(x,z) := \frac{1}{\rho(x)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\cdot\rho_k}{2\pi i\cdot d_k} \cdot \int_\gamma \frac{\rho(\zeta)}{\zeta - x} \cdot \left(\frac{z\cdot p(\zeta)}{\zeta - x}\right)^k d\zeta \ .$$

Faisons le calcul dans le cas des polynômes de Laguerre. Si ln désigne la branche principale du logarithme définie dans $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_-$, on a

$$L_k^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}\cdot e^x}{2\pi i} \cdot \int_\gamma \frac{e^{\alpha\cdot\ln\zeta - \zeta}\cdot\zeta^k}{(\zeta - x)^{k+1}}\, d\zeta \ ,$$

donc

$$\sum_{k\geqslant 0} L_k^{(\alpha)}(x)\cdot z_k = \frac{x^{-\alpha}\cdot e^x}{2\pi i} \cdot \sum_{k\geqslant 0} \int_\gamma e^{\alpha\cdot\ln\zeta - \zeta} \cdot \left(\frac{z\cdot\zeta}{\zeta - x}\right)^k \frac{d\zeta}{\zeta - x} \ .$$

Si $|z| < 1$, en prenant pour γ le cercle d'équation

$$\sqrt{|z|}\cdot|\zeta| = |\zeta - x| \ ,$$

dont le centre est $\frac{x}{1-|z|}$ et le rayon $\frac{x^2}{(1-|z|)^2} - \frac{x}{1-|z|}$, pour tout $\zeta \in \gamma$, on a

$$\left|\frac{z\cdot\zeta}{\zeta - x}\right| = \sqrt{|z|} < 1 \ ,$$

ce qui montre que la série $\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{z\cdot\zeta}{\zeta-x}\right)^k$ converge uniformément sur γ . Par permutation de la somme et de l'intégrale, on obtient

$$\sum_{k\geqslant 0} L_k^{(\alpha)}(x)\cdot z_k = \frac{x^{-\alpha}\cdot e^x}{2\pi i}\cdot\int_\gamma e^{\alpha\cdot\ln\zeta-\zeta}\cdot\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{z\cdot\zeta}{\zeta-x}\right)^k\frac{d\zeta}{\zeta-x} =$$

$$= \frac{x^{-\alpha}\cdot e^x}{2\pi i}\cdot\int_\gamma \frac{e^{\alpha\cdot\ln\zeta-\zeta}}{1-\frac{z\cdot\zeta}{\zeta-x}}\frac{d\zeta}{\zeta-x} = \frac{x^{-\alpha}\cdot e^x}{2\pi i}\cdot\int_\gamma\frac{e^{\alpha\cdot\ln\zeta-\zeta}}{(1-z)\cdot\zeta-x}\,d\zeta =$$

$$= x^{-\alpha}\cdot e^x\cdot Res_{\zeta=\frac{x}{1-z}}\frac{e^{\alpha\cdot\ln\zeta-\zeta}}{(1-z)\cdot\zeta-x} = \frac{x^{-\alpha}\cdot e^x}{1-z}\cdot\exp\left(\alpha\cdot\ln\frac{x}{1-z}-\frac{x}{1-z}\right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{xz}{z-1}}}{(1-z)^{\alpha+1}}\ ,$$

grâce au théorème des résidus, car $\frac{x}{1-z}$ est à l'intérieur du cercle γ .

Ceci fournit, par exemple, une autre manière de prouver la totalité de $\left(L_k^{(\alpha)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, car pour $z=\frac{n}{n+1}$, on obtient

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^{\infty}L_k^{(\alpha)}(x)\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^k = \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\frac{\exp\left(\frac{xn}{(n+1)\left(\frac{n}{n+1}-1\right)}\right)}{\left(1-\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha+1}} = e^{-n\cdot x}$$

pour tout $x\in\mathbb{R}_+$. Mais comme

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|L_k^{(\alpha)}\|^2_{2,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+k)!}{k!}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2k}<\infty$$

par le critère du quotient, le théorème 1.9 montre que

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\cdot L_k^{(\alpha)}$$

converge dans $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}\right)$ vers ξ . Puisqu'une sous-suite des sommes partielles converge ponctuellement presque partout vers ξ , la formule $(*)$ montre que $\xi=e^{-n\cdot\mathrm{id}}$ $\lambda_{]0,\infty[}$-p.p. . Ainsi

$$e^{-n\cdot\mathrm{id}} = \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\cdot L_k^{(\alpha)}\quad\text{dans }\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*,\mathrm{id}^\alpha\cdot e^{-\mathrm{id}}\right)\ ,$$

comme nous l'avons démontré dans le théorème ci-dessus.

On a la table suivante :

	ρ_k	$\Phi(x,z)$	R
Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$	$2^{-(\alpha+\beta)}$	$\frac{\left(1-z+\sqrt{1-2xz+z^2}\right)^{-\alpha}\cdot\left(1+z+\sqrt{1-2xz+z^2}\right)^{-\beta}}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$	1
Laguerre $L_k^{(\alpha)}$	1	$\dfrac{e^{\frac{xz}{z-1}}}{(1-z)^{a+1}}$	1
Hermite H_k	$\dfrac{1}{k!}$	e^{2xz-z^2}	∞
Legendre P_k	1	$\dfrac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$	1
Tchebycheff T_k	1	$\dfrac{(1-xz)}{1-2xz+z^2}$	1
Tchebycheff U_k	1	$\dfrac{1}{1-2xz+z^2}$	1
Gegenbauer $G_k^{(\gamma)}$	1	$\dfrac{1}{(1-2xz+z^2)^{\alpha}}$ si $\gamma \neq 0$; $-\ln(1-2xz+z^2)$ si $\gamma = 0$	1

1.16 La notion d'espace-test

Soit μ une intégrale de Radon sur X .

Rappelons (cf. Analyse, définition 15.12) qu'une fonction f sur X est dite μ-modérée s'il existe une suite (croissante) $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'ensembles μ-intégrables X telle que $f = 0$ μ-p.p. hors de $\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$. Une partie $A \subset X$ est dite μ-modérée si 1_A est μ-modérée. En outre (cf. Analyse, définition 16.8.2) une intégrale de Radon μ est dite modérée si l'ensemble X est μ-modéré.

L'exemple 15.12.1 du cours d'Analyse [17] montre que toute fonction $f \in \mathbf{L}^p(\mu)$ pour $p \in [1, \infty[$ est μ-modérée, puisque $|f|^p \in \mathbf{L}^1(\mu)$. Si μ est modérée, alors toute fonction sur X est μ-modérée.

REMARQUE 1 Si l'on ne veut pas supposer que l'intégrale μ considérée soit modérée, il est indispensable d'utiliser la théorie de l'intégration essentielle. Pour plus de détails on peut consulter le cours d'Analyse [17] et les remarques correspondantes : 14.8.2, 14.10, 14.11, 14.12.2, 14.13, 15.1, 15.2.2, 15.3, 15.6, 15.7.2, 15.9.2, 15.10, 15.12, 15.13.4, 15.14.2.

Dans ce qui suit, et sauf mention expresse du contraire, nous n'utiliserons pas ces résultats. Nous n'aurons besoin que de la notion qui suit !

DEFINITION 1 Nous dirons qu'un ensemble μ-mesurable $A \subset X$ est *localement μ-négligeable* si, pour tout compact K de X tel que $K \subset A$, on a $\mu(K) = 0$. Une propriété P des éléments de X est dite vraie *localement* μ-p.p. si l'ensemble $\{x \in X \mid P(x) \text{ est fausse}\}$ est un ensemble localement μ-négligeable. Par exemple une fonction f sur X est dite localement μ-négligeable si $\{f \neq 0\}$ est localement μ-négligeable.

LEMME *Soit A une partie de X .*

(i) Si A est μ-mesurable et μ-modérée, alors

$$\mu^*(A) = \sup_{K\in\mathfrak{K}(X),K\subset A} \mu(K) \ .$$

(ii) Pour que A soit localement μ-négligeable, il faut et il suffit que, pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, l'ensemble $A \cap K$ soit μ-négligeable.

(iii) Un ensemble A est μ-négligeable si, et seulement si, A est μ-modéré et localement μ-négligeable.

(iv) L'application canonique

$$\left\{f \in \mathbb{K}^X \;\middle|\; f \ \mu\text{-modérée}\right\} / \left\{f \ \mu\text{-négligeable}\right\} \longrightarrow \mathbb{K}^X / \left\{f \ \text{localement } \mu\text{-négligeable}\right\}$$

est injective. En particulier on peut considérer $\mathbf{L}^p(\mu)$, pour $p \in [1, \infty[$, comme formé de classes de fonctions (essentiellement) de puissance p-ième μ-intégrable modulo les fonctions localement μ-négligeables.

Dmonstration de (i) Cf. proposition 15.12.iii.

Dmonstration de (ii) La condition est suffisante, car A est μ-mesurable (cf. Analyse, théorème 15.9.iii) et, pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$ tel que $K \subset A$, l'ensemble $K = A \cap K$ est μ-négligeable. Réciproquement, puisque $A \cap K$ est μ-mesurable et μ-modéré, grâce à (i) on a

$$\mu(A \cap K) = \sup_{L \in \mathfrak{K}(X), L \subset A \cap K} \mu(L) = 0 \ .$$

Dmonstration de (iii) C'est immédiat par (i).

Dmonstration de (iv) Cela découle de (iii) et du cours d'Analyse [17], remarque 15.6. □

DEFINITION 2 Soit F est un espace vectoriel de (classes par rapport à μ de) fonctions sur X . Si toute fonction f sur X telle que $\varphi \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mu)$ quel que soit $\varphi \in F_+$, est μ-mesurable et si en plus

$$\int \varphi \cdot f \, d\mu \geqslant 0 \text{ pour tout } \varphi \in F_+ \quad \Longrightarrow \quad f \geqslant 0 \text{ localement } \mu\text{-p.p.} \ ,$$

nous dirons que F est un *espace-test* (de fonctions) par rapport à μ et que μ est l'intégrale de Radon *pivot* .

On a évidemment

$$\int \varphi \cdot f \, d\mu = 0 \text{ pour tout } \varphi \in F_+ \quad \Longrightarrow \quad f = 0 \text{ localement } \mu\text{-p.p.} \ .$$

Si f est μ-modérée, on peut remplacer localement μ-p.p. par μ-p.p. .

PROPOSITION *Si F est un ensemble de (classes par rapport à μ de) fonctions sur X satisfaisant à la propriété suivante : pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, il existe une suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de F_+ telle que*

$$\varphi_k \leqslant \varphi_0 \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

et

$$1_K = \lim_k \varphi_k \quad \textit{ponctuellement } \mu\textit{-p.p.}$$

Alors F est un espace-test.

En effet, pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, on a

$$|\varphi_k \cdot f| \leqslant |\varphi_0 \cdot f| \in \mathbf{L}^1(\mu)$$

et

$$1_K \cdot f = \lim_k \varphi_k \cdot f \quad \text{ponctuellement } \mu\text{-p.p.} \ ,$$

donc $1_K \cdot f$ est μ-intégrable par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. Par suite f est μ-mesurable (cours d'Analyse [17], théorème 15.9.iii) et si

$$\int 1_K \cdot (\operatorname{Re} f + i \cdot \operatorname{Im} f) \, d\mu = \int 1_K \cdot f \, d\mu = \lim_k \int \varphi_k \cdot f \, d\mu \geqslant 0 \ ,$$

on a

$$\int 1_K \cdot \operatorname{Re} f \, d\mu \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \int 1_K \cdot \operatorname{Im} f \, d\mu = 0 \ .$$

Pour tout compact $K \subset \{\operatorname{Re} f < 0\}$, on a $1_K \cdot \operatorname{Re} f \leqslant 0$, donc $\int 1_K \cdot \operatorname{Re} f \, d\mu = 0$, puis $1_K \cdot \operatorname{Re} f = 0$ μ-p.p. et par suite $1_K = 0$ μ-p.p. , i.e. $\mu(K) = 0$. Ceci montre que $\{\operatorname{Re} f < 0\}$

est un ensemble localement μ-négligeable. On prouve de même que $\{\operatorname{Im} f < 0\}$ et $\{\operatorname{Im} f > 0\}$ sont localement μ-négligeables. Ceci finit de prouver que $f \geqslant 0$ localement μ-p.p. □

COROLLAIRE *Si F est un espace vectoriel réticulé involutif de fonctions sur X tel que*

(i) F soit dense dans $\mathbf{L}^p(\mu)$ pour un certain $p \in [1, \infty[$.

(ii) Pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, il existe $\varphi \in F$ tel que $\varphi \geqslant 1_K$.

Alors F est un espace-test.

En effet, on a $1_K = \lim_k \psi_k$ dans $\mathbf{L}^p(\mu)$ pour une suite $(\psi_k)_{k \geqslant 1} \subset F$ par l'hypothèse de densité (i). En extrayant au besoin une sous-suite, grâce au théorème de Riesz-Fischer (cf. cours d'Analyse [17], 15.14), nous pouvons supposer que l'on a

$$1_K = \lim_k \psi_k \quad \text{ponctuellement } \mu\text{-p.p. .}$$

Nous pouvons supposer, puisque F est involutif, que ψ_k est réelle en séparant les parties réelle et imaginaire. Utilisant (ii), il suffit alors de définir

$$\varphi_k := \max\left[\min(\psi_k, \varphi), 0\right] \quad \text{et} \quad \varphi_0 := \varphi \ .$$

□

EXEMPLE 1 Si $1_K \in F$ pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, alors F est un espace-test.

C'est évident par la proposition. □

EXEMPLE 2 L'espace $\mathcal{K}(X)$, lorsque X est un espace localement compact, ainsi que $\mathcal{E}(J)$, lorsque J est un intervalle de $\mathbb{R}$, ou encore $\mathcal{K}_{\mathcal{U}(\mu)}(X)$, lorsque X est complétement régulier, sont des espaces test.

Cela découle du corollaire et du cours d'Analyse [17], corollaire 15.15 et exercice 15.15.3. □

EXEMPLE 3 Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, ou plus généralement une sous-variété avec bord de $\mathbb{R}^n$. Rappelons que $\mathcal{D}(X)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions complexes indéfiniment dérivables à support compact dans X (cf. exemple 2.10.3). C'est un espace-test.

En effet, soit $(\psi_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de $\mathcal{K}(X)$ telle que $0 \leqslant \psi_k \leqslant \psi_0$ et $1_K = \lim_k \psi_k$ ponctuellement μ-p.p. , construite comme la suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans le corollaire ci-dessus. Or $\mathcal{D}([\operatorname{supp} \psi_0]^\circ)$ est une sous-algèbre involutive séparant fortement les points de X , donc est dense dans $\mathcal{C}^0([\operatorname{supp} \psi_0]^\circ)$ par le théorème de Stone-Weierstraß, et $\psi_k \in \mathcal{C}^0_+([\operatorname{supp} \psi_0]^\circ)$; il existe donc, pour tout $k \geqslant 1$, un $\varphi_k \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}([\operatorname{supp} \psi_0]^\circ)$ tel que $\|\varphi_k - \psi_k\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}$. Choisissons encore $\varphi_0 \in \mathcal{D}_+(X)$ tel que $\varphi_0 \geqslant \psi_0 + 1$ sur $\operatorname{supp} \psi_0$; ceci possible par compacité car la fonction

$$\rho(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{(|x|^2 - 1)}} & \text{si } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient $\mathcal{D}_+(\mathbb{R}^n)$ et $\operatorname{supp} \rho \subset B(0,1)$ (cf. cours d'Analyse [17], § 17.4). On a alors

$$-\varphi_0 \leqslant -\psi_k - \frac{1}{k} \leqslant \varphi_k \leqslant \psi_k + \frac{1}{k} \leqslant \psi_0 + 1 \leqslant \varphi_0 \quad \text{sur } \operatorname{supp} \psi_0 \ ,$$

donc $|\varphi_k| \leqslant \varphi_0$, et

$$\lim_k \varphi_k = \lim_k (\varphi_k - \psi_k) + \lim_k \psi_k = 1_K \quad \text{ponctuellement } \mu\text{-p.p. .}$$

Il suffit finalement de remplaçer φ_k par φ_k^2 pour pouvoir appliquer la proposition. □

EXEMPLE 4 On ne peut pas supprimer l'hypothèse que $\mathcal{F}$ soit réticulée dans le corollaire.

Remarquons tout d'abord que $\mathcal{K}(\mathbb{N})$ est un sous-espace vectoriel dense de $\ell^2(\mathbb{N}) = \mathbf{L}^2(\mathbb{N}, \#)$ et que la forme linéaire

$$\nu : \varphi \longmapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi(k) : \mathcal{K}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

n'est pas continue pour $\|\cdot\|_2$. Son noyau F est donc dense par rapport à $\|\cdot\|_2$ dans $\mathcal{K}(\mathbb{N})$ (cf. exercice 2.8), donc aussi dans $\ell^2(\mathbb{N})$. Il est clair que F est involutif et, pour tout $K \in \mathfrak{K}(\mathbb{N})$, il existe une suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de F telle que $\lim_k \varphi_k = 1_K$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$, et par suite ponctuellement. En outre, il existe $\varphi \in F$ tel que $\varphi \geqslant 1$ sur K . Mais on a

$$1 \cdot \varphi \in \ell^2(\mathbb{N}) \quad \text{et} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} 1 \cdot \varphi(k) = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in F\,!$$

THEOREME *Soit F un espace test par rapport à μ .*

(i) *Si $F \subset \mathbf{L}^2(\mu)$, alors F est dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$.*
Dans ce cas

(ii) *Si f est une fonction telle que, pour tout $\varphi \in F$, on ait $\varphi \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mu)$ et*

$$\sup\nolimits_{\varphi \in F, \|\varphi\|_2 \leqslant 1} \left| \int \overline{\varphi} \cdot f \, d\mu \right| < \infty \ ,$$

alors $f \in \mathbf{L}^2(\mu)$.

Dmonstration de (i) Pour montrer que F est dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$, soit $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$ tel que $\xi \perp F$. Pour tout $\varphi \in F$, on a $\overline{\varphi} \cdot \xi \in \mathbf{L}^1(\mu)$ et

$$\int^* \overline{\varphi} \cdot \xi \, d\mu = (\varphi | \xi) = 0 \ ,$$

donc $\xi = 0$ par ce qui précède, puisque ξ est μ-modérée. La densité de F découle donc du corollaire 1.4.

Dmonstration de (ii) La condition signifie que la forme semi-linéaire

$$\nu : \varphi \longmapsto \int \overline{\varphi} \cdot f \, d\mu : F \longrightarrow \mathbb{K}$$

est continue pour $\|\cdot\|_2$. On peut donc la prolonger à $\mathbf{L}^2(\mu)$ en une forme semi-linéaire continue $\widetilde{\nu}$ (cf. exercice 1.5, ou bien le théorème 2.5.iii ou encore le théorème de Hahn-Banach 3.6). Par le théorème de représentation de Riesz, il existe donc $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$ tel que $\widetilde{\nu}(\psi) = (\psi | \xi)$ pour tout $\psi \in \mathbf{L}^2(\mu)$. Pour tout $\varphi \in F$, on a alors

$$\int \overline{\varphi} \cdot f \, d\mu = \nu(\varphi) = \widetilde{\nu}(\varphi) = (\varphi | \xi) = \int \overline{\varphi} \cdot \xi \, d\mu \ ,$$

donc $\int \varphi \cdot \overline{(f - \xi)} \, d\mu = 0$. Puisque F est un espace test on obtient $f = \xi$ localement μ-p.p. , donc

$$f = \xi \in \mathbf{L}^2(\mu) \ .$$

□

REMARQUE 2 Utilisant le théorème de Banach-Steinhaus 3.1 nous montrerons que si $\varphi \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mu)$ pour tout $\varphi \in \mathbf{L}^2(\mu)$, alors $f \in \mathbf{L}^2(\mu)$ (cf. application 3.1).

EXERCICE 1 Montrer que si F est un espace test de fonctions contenu dans $\mathbf{L}^p(\mu)$ pour un certain $p \in [1, \infty[$, alors F est dense dans $\mathbf{L}^p(\mu)$.

EXERCICE 2 Montrer que si F est un espace test de fonctions par rapport à μ et que $\rho \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc},+}(\mu)$, alors F est un espace test de fonctions par rapport à $\rho \cdot \mu$.

EXERCICE 3 Soient μ une intégrale de Radon et F un sous-espace vectoriel dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$. Si f est une fonction μ-mesurable et μ-modérée telle que

$$\sup\nolimits_{\varphi \in F, \|\varphi\|_2 \leqslant 1} \int^* |\varphi \cdot f| \, d\mu < \infty \ ,$$

alors $f \in \mathbf{L}^2(\mu)$.

Chapitre 2

ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

Version du 26 juin 2005

2.1 Semi-normes

DEFINITION 1 On dit qu'une fonction $p : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ est une *fonctionnelle* et qu'elle est *sous-linéaire* si elle possède les deux propriétés suivantes :

(a) *positivement homogène*

$$p(\alpha \cdot \varphi) = \alpha \cdot p(\varphi) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \varphi \in F \ ,$$

(b) *sous-additive*

$$p(\varphi + \psi) \leqslant p(\varphi) + p(\psi) \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in F \ .$$

Nous désignerons par $\mathcal{SL}(F)$ l'ensemble de toutes les fonctionnelles sous-linéaires sur F .

On dit que p est une *forme sous-linéaire* si c'est une fonctionnelles sous-linéaires sur F à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que c'est une *semi-norme* si elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et si elle est

(c) *absolument homogène*

$$p(\alpha \cdot \varphi) = |\alpha| \cdot p(\varphi) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{K} \text{ et } \varphi \in F \ ,$$

On dit que c'est un *norme* si en plus elle est

(d) *séparante*

$$p(\varphi) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

Nous dirons qu'un espace vectoriel F muni d'une semi-norme p est un *espace semi-normé* . S'il faut préciser nous écrirons (F, p) . Rappelons que l'on dit *espace normé* s'il est muni d'une norme.

EXEMPLE 1 Pour toute forme linéaire $\mu : F \longrightarrow \mathbb{K}$, la fonction $\varphi \longmapsto |\mu(\varphi)|$ est une semi-norme sur F . Par exemple si X est un ensemble et $x \in X$, alors la forme linéaire d' *évaluation* en x

$$\varepsilon_x : \mathbb{K}^X \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto \varphi(x)$$

définit une semi-norme sur $\mathbb{K}^X$

$$\mathbb{K}^X \longrightarrow \mathbb{R}_+ : \varphi \longmapsto |\varphi(x)| \ .$$

Si X est un espace topologique séparé et μ une intégrale de Radon sur X , alors

$$\mathbf{L}^1(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}_+ : \varphi \longmapsto \left| \int \varphi \, d\mu \right|$$

est une semi-norme sur $\mathbf{L}^1(\mu)$, qui n'est pas une norme puisqu'il existe en général des fonctions μ-intégrables telles que $\int \varphi \, d\mu = 0$. Il ne faut pas confondre cette semi-norme avec la norme

$$\|\cdot\|_1 := \int |\cdot| \, d\mu \ .$$

EXEMPLE 2 Soit P un ensemble fini de formes sous-linéaires ou de semi-normes sur F et $(\alpha_p)_{p\in P} \subset \mathbb{R}_+$. Alors

$$\max P : \varphi \longmapsto \max_{p\in P} p(\varphi) \quad \text{et} \quad \sum_{p\in P} \alpha_p \cdot p : \varphi \longmapsto \sum_{p\in P} \alpha_p \cdot p(\varphi)$$

sont des formes sous-linéaires ou respectivement des semi-normes sur F .

EXEMPLE 3 Si P est une famille de fonctionnelles sous-linéaires sur F , alors

$$\sup P : \varphi \longmapsto \sup_{p\in P} p(\varphi)$$

est une fonctionnelle sous-linéaire. Ceci est également vrai pour les formes sous-linéaires ou les semi-normes, pour autant que $\sup P$ soit finie!

EXEMPLE 4 Soient (F,p) , (G,q) des espaces semi-normés et $s \in [1,\infty[$. Alors

$$p \times_s q : (\varphi,\gamma) \longmapsto (p(\varphi)^s + q(\gamma)^s)^{\frac{1}{s}} \quad \text{et} \quad p \times_\infty q : (\varphi,\gamma) \longmapsto \max(p(\varphi), q(\gamma))$$

sont des semi-normes sur $F \times G$.

La fonction

$$p + q : \varphi \longmapsto p_{|F\cap G}(\varphi) + q_{|F\cap G}(\varphi)$$

est une semi-norme sur $F \cap G$.

EXEMPLE 5 Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$, toute partie compacte $K \subset X$, tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$p_{K,k}(\varphi) := \max_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|_1 \leqslant k} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K}$$

et

$$q_{K,\alpha}(\varphi) := \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K} \ .$$

On vérifie immédiatement que ce sont des semi-normes sur $\mathcal{C}^{(\infty)}(X)$.

EXEMPLE 6 Pour simplifier l'écriture introduisons la fonction indéfiniment dérivable

$$\langle \mathrm{id} \rangle := 1 + |\mathrm{id}|^2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : x \longmapsto 1 + |x|^2 \ .$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ et $k \in \mathbb{N}$ posons

$$p_k(\varphi) := \max_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^\alpha \varphi \right\|_\infty \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

et

$$q_k(\varphi) := \max_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^\alpha \varphi \right\|_2 \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

On vérifie immédiatement que ces fonctionnelles sont absolument homogènes et sous-additives. Il est alors clair que

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; p_k(\varphi) < \infty \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \right\}$$

et

$$\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; q_k(\varphi) < \infty \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \right\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ et que les restrictions correspondantes de p_k et q_k sont des normes.

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ étant très important dans les applications, on dit qu'une fonction $f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est *à décroissance rapide* si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot f \right\|_\infty < \infty \ .$$

On désigne par $\mathbf{L}^\infty_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de ces fonctions.

On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ est *déclinante* si toutes ses dérivées sont à décroissance rapide, i.e. si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Nous montrerons en 2.3 que $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$! Nous dirons que c'est l' *espace de Schwartz* .

LEMME *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\langle x + y \rangle \leqslant \langle x \rangle \cdot (1 + |y|)^2 \leqslant 2 \cdot \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle$$

et

$$\langle x \rangle \leqslant 2 \cdot \langle x + y \rangle \cdot \langle y \rangle \ .$$

En effet comme $1, |x| \leqslant 1 + |x|^2$, il vient

$$\langle x + y \rangle = 1 + |x + y|^2 \leqslant 1 + |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 1 + |x|^2 + 2\left(1 + |x|^2\right) \cdot |y| + \left(1 + |x|^2\right) \cdot |y|^2 =$$

$$= \left(1 + |x|^2\right) \cdot \left(1 + 2|y| + |y|^2\right) = \langle x \rangle \cdot (1 + |y|)^2 \ .$$

D'autre part il est clair que $(1 + |y|)^2 \leqslant 2\left(1 + |y|^2\right) = 2\langle y \rangle$. Finalement

$$\langle x \rangle = \langle x + y - y \rangle \leqslant 2 \cdot \langle x + y \rangle \cdot \langle -y \rangle = 2 \cdot \langle x + y \rangle \cdot \langle y \rangle \ .$$

□

On dit que $2 \cdot \langle \mathrm{id} \rangle$ est un *poids sous-multiplicatif* .

PROPOSITION *Soit $p : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$.*

(i) Si p est une fonctionnelle sous-linéaire, on a

$$p(\varphi) \geqslant -p(-\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

(ii) Si p est une forme sous-linéaire, on a

$$|p(\psi) - p(\varphi)| \leqslant \max\left[p(\psi - \varphi), p(\varphi - \psi)\right] \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in F \ .$$

(iii) Si p est une semi-norme p , on a

$$|p(\varphi) - p(\psi)| \leqslant p(\varphi - \psi) \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in F \ .$$

En effet on a

$$0 = 0 \cdot p(0) = p(0) = p(\varphi - \varphi) \leqslant p(\varphi) + p(-\varphi) \ ,$$

donc (i). Si p est sous-linéaire, remarquons tout d'abord que

$$p(\psi) = p(\psi - \varphi + \varphi) \leqslant p(\psi - \varphi) + p(\varphi) \ ,$$

donc que

$$p(\psi) - p(\varphi) \leqslant p(\psi - \varphi) \ .$$

On en déduit alors que

$$|p(\psi) - p(\varphi)| = \max[p(\psi) - p(\varphi), p(\varphi) - p(\psi)] \leqslant \max[p(\psi - \varphi), p(\varphi - \psi)] \ ,$$

ce qui finit de prouver (ii). La dernière assertion est alors immédiate. □

DEFINITION 2 Si $(q_j)_{j\in J} \subset \mathcal{SL}(F)$, on pose

$$\bigwedge_{j\in J} q_j(\varphi) := \inf_{(\varphi_j)_{j\in J}\in F^{(J)}, \sum_{j\in J}\varphi_j = \varphi} \sum_{j\in J} q_j(\varphi_j) \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

Si X est un ensemble, A une partie de X et $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on désigne par f^∞ la fonction sur X obtenue en prolongeant f par ∞ hors de A . On écrit $q_1 \wedge q_2$ à la place de $\bigwedge_{j\in\{1,2\}} q_j$.

THEOREME *Soient $p \in \mathcal{SL}(F)$ et $(q_j)_{j\in J} \subset \mathcal{SL}(F)$.*

(i) On a $p \leqslant q_j$ pour tout $j \in J$ si, et seulement si, $p \leqslant \bigwedge_{j\in J} q_j$.

(ii) Si $\bigwedge_{j\in J} q_j > -\infty$ sur F , alors $\bigwedge_{j\in J} q_j \in \mathcal{SL}(F)$. Si tous les q_j sont absolument homogènes, il en est de même de $\bigwedge_{j\in J} q_j$.

(iii) Soient C un sous-cône convexe de F et $r : C \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle positivement homogène et sous-additive. Alors la fonctionnelle $r^\infty : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ appartient à $\mathcal{SL}(F)$.

Dmonstration de (i) Cette assertion est importante, puisqu'elle ramène un problème à plusieurs inégalités (même une infinité !) à un problème à une seule inégalité. Etant donné $\varphi \in F$ et $(\varphi_j)_{j\in J} \in F^{(J)}$ tels que $\sum_{j\in J}\varphi_j = \varphi$, si pour tout $j \in J$, on a $p \leqslant q_j$, alors

$$p(\varphi) = p\left(\sum_{j\in J}\varphi_j\right) \leqslant \sum_{j\in J} p(\varphi_j) \leqslant \sum_{j\in J} q_j(\varphi_j) \ ,$$

donc $p(\varphi) \leqslant \bigwedge_{j\in J} q_j(\varphi)$ en passant à l'infimum. Réciproquement étant donné $k \in J$, on a

$$p(\varphi) \leqslant \bigwedge_{j\in J} q_j(\varphi) \leqslant q_k(\varphi)$$

en considérant la famille $(\varphi_j)_{j\in J}$ définie par

$$\varphi_j := \left\{ \begin{array}{ccc} \varphi & & j = k \\ & \text{si} & \\ 0 & & \text{sinon} \end{array} \right. .$$

Dmonstration de (ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in F$, on a tout d'abord

$$\bigwedge_{j\in J} q_j(\alpha\cdot\varphi) = \inf_{(\varphi_j)_{j\in J}\in F^{(J)}, \sum_{j\in J}\varphi_j = \alpha\cdot\varphi} \sum_{j\in J} q_j(\varphi_j) =$$

$$= \alpha \cdot \inf_{\left(\varphi_j\right)_{j\in J} \in F^{(J)}, \sum_{j\in J} \frac{\varphi_j}{\alpha} = \varphi} \sum_{j\in J} q_j \left(\frac{\varphi_j}{\alpha}\right) = \alpha \cdot \bigwedge_{j\in J} q_j \left(\varphi\right) \ .$$

On en déduit que

$$-\infty < \bigwedge_{j\in J} q_j \left(0\right) = \bigwedge_{j\in J} q_j \left(2\cdot 0\right) = 2 \cdot \bigwedge_{j\in J} q_j \left(0\right) \leqslant 0 \ ,$$

donc $\bigwedge_{j\in J} q_j\left(0\right) = 0$. Si en plus chaque q_j est absolument homogène, il est clair que $\bigwedge_{j\in J} q_j$ l'est aussi. Finalement, pour tout $\varphi, \psi \in F$ et $\left(\varphi_j\right)_{j\in J}, \left(\psi_j\right)_{j\in J} \subset F^{(J)}$ tels que $\sum_{j\in J} \varphi_j = \varphi$ et $\sum_{j\in J} \psi_j = \psi$, il vient $\sum_{j\in J} \left(\varphi_j + \psi_j\right) = \varphi + \psi$, donc

$$\bigwedge_{j\in J} q_j \left(\varphi+\psi\right) \leqslant \sum_{j\in J} q_j \left(\varphi_j+\psi_j\right) \leqslant \sum_{j\in J} q_j \left(\varphi_j\right) + \sum_{j\in J} q_j \left(\psi_j\right)$$

et par suite

$$\bigwedge_{j\in J} q_j \left(\varphi+\psi\right) \leqslant \bigwedge_{j\in J} q_j \left(\varphi\right) + \bigwedge_{j\in J} q_j \left(\psi\right) \ ,$$

ce qui montre que $\bigwedge_{j\in J} q_j$ est sous-additive.

Dmonstration de (iii) C'est immédiat. $\square$

EXEMPLE 7 Soient F et G des sous-espaces vectoriels de H , p et q des semi-normes respectivement sur F et G . Alors $p^\infty \wedge q^\infty$ est une semi-norme sur $F+G$. Remarquons que, pour tout $\theta \in F+G$, on a

$$p^\infty \wedge q^\infty \left(\theta\right) = \inf \left\{p\left(\varphi\right) + q\left(\psi\right) \ \middle|\ \varphi \in F \ , \ \psi \in G \text{ et } \varphi+\psi = \theta\right\} \ .$$

C'est immédiat, puisque $p^\infty \wedge q^\infty \geqslant 0$.

2.2 Espaces polynormés

DEFINITION 1 Soit p est une semi-norme sur F . Si $\varphi \in F$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$B_p(\varphi, r) := \{\psi \in F \mid p(\psi - \varphi) \leqslant r\}$$

et

$$D_p(\varphi, r) := \{\psi \in F \mid p(\psi - \varphi) < r\} \ .$$

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de semi-normes sur F . Pour toute partie **finie** $P \subset \mathcal{P}$ et $r_P := (r_p)_{p \in P} \subset \mathbb{R}_+^*$, on dit que

$$B_P(\varphi, r_P) := \bigcap_{p \in P} B_p(\varphi, r_p) \quad \text{et} \quad D_P(\varphi, r_P) := \bigcap_{p \in P} D_p(\varphi, r_p)$$

sont respectivement une *boule fermée* et une *boule ouverte de centre* φ (par rapport à $\mathcal{P}$).

On dit qu'une partie $O \subset F$ est *ouverte* (par rapport à $\mathcal{P}$) si, pour tout $\varphi \in O$, il existe une boule fermée B de centre φ contenue dans O .

On peut remplacer "boule fermée" par "boule ouverte". Il suffit de remarquer que l'on a

$$B_P\left(\varphi, \frac{r_P}{2}\right) \subset D_p(\varphi, r_P) \subset B_p(\varphi, r_P) \ .$$

PROPOSITION *L'ensemble $\mathfrak{T}_{\mathcal{P}}$ des parties de F ouvertes par rapport à $\mathcal{P}$ est une topologie sur F .*

C'est facile (cf. cours d'Analyse [17], proposition 10.12). □

DEFINITION 2 On dit que $(F, \mathcal{P})$ est un *espace polynormé* et que $\mathfrak{T}_{\mathcal{P}}$ est la *topologie associée* , ou bien la *topologie définie* par $\mathcal{P}$.

Nous utiliserons les notions topologiques (cf. appendice 1). Elles sont calquées sur celles qui ont été développées dans le cours d'Analyse [17], chapitre 10, dans le cadre des espaces métriques.

REMARQUE 1 En écrivant $\psi = \varphi + (\psi - \varphi)$, on voit que

$$B_P(\varphi, r_P) = \varphi + B_P(0, r_P) = \varphi + \bigcap_{p \in P} \overset{-1}{p}([-r_p, r_p])$$

et

$$D_P(\varphi, r_P) = \varphi + D_P(0, r_P) = \varphi + \bigcap_{p \in P} \overset{-1}{p}(]-r_p, r_p[) \ .$$

Ceci montre en particulier qu'une translation

$$\diamond - \varphi : F \longrightarrow F : \psi \longmapsto \psi - \varphi$$

est continue, puisque pour tout ouvert O de F , on a $(\diamond - \varphi)^{-1}(O) = \varphi + O$ et cet ensemble est ouvert.

REMARQUE 2 En posant $q := \max_{p \in P} \dfrac{p}{r_p}$, on a

$$B_P(\varphi, r_P) = B_q(\varphi, 1) \ .$$

En effet les inégalités

$$p(\psi - \varphi) \leqslant r_p \quad \text{pour tout } p \in P$$

sont équivalentes à

$$\max_{p \in P} \frac{p}{r_p}(\psi - \varphi) \leqslant 1 \ .$$

REMARQUE 3 Si q est une semi-norme sur F , alors

$$F = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_+^*} B_q(0, r) = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_+^*} D_q(0, r) \ .$$

REMARQUE 4 Si q est une semi-norme sur F , alors $\{q = 0\}$ est un sous-espace vectoriel, qui peut être de dimension infinie ! On a

$$\{q = 0\} = \bigcap_{r \in \mathbb{R}_+^*} B_q(\varphi, r) = \bigcap_{r \in \mathbb{R}_+^*} D_q(\varphi, r) \ .$$

Si q est une semi-norme continue sur F , alors $\{q = 0\} = \overset{-1}{q}(\{0\})$ est un sous-espace vectoriel fermé de F , puisque $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}_+$.

REMARQUE 5 Remarquons qu'une partie V de F est un voisinage de $\varphi \in F$, i.e. que φ est un point intérieur à V si, et seulement si, il existe une boule de centre φ contenue dans V .

EXEMPLE Tout espace normé est évidemment un espace polynormé. Voici une liste des espaces normés, les quatre premiers sont des espaces de Banach, que nous supposons connus.

(a) $\left(\mathbb{K}^n, |\cdot|_p\right)$.

(b) Exercice : Soient X un ensemble et $p \in [1, \infty]$:

$$\ell^p(X) := \mathbf{L}^p(\#) = \left\{ f \in \mathbb{K}^X \;\middle|\; \|f\|_p^p := \sum_{x \in X} |f(x)|^p < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$f \longmapsto \|f\|_p := \|f\|_{p,\#} = \left(\sum_{x \in X} |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \ ,$$

où $\#$ désigne l'intégrale de comptage sur X muni de la métrique discrète. C'est donc un cas particulier de l'exemple (d).

(c) Soit X un espace topologique séparé : $\mathcal{C}^0(X) \subset \mathcal{C}^b(X) \subset \ell^\infty(X)$ munis de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ (cf. cours d'Analyse [17], § 10.5 et 10.19).

(d) Soient X un espace topologique séparé, μ une intégrale de Radon sur X et $p \in [1, \infty]$: $\left(\mathbf{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p\right)$ (cf. cours d'Analyse [17], § 15.13 et 15.14).

(e) Soient F, G des espaces normés :

$$\left(F \times G, \|\mathrm{pr}_1\|_F + \|\mathrm{pr}_2\|_G\right) \ , \left(F \times G, \max\left(\|\mathrm{pr}_1\|_F, \|\mathrm{pr}_2\|_G\right)\right) \ .$$

(f) Exercice : Soient F un espace normé et H sous-espace vectoriel fermé de F : F/H (cf. proposition 2.8).

LEMME *Soient p une semi-norme et q une fonctionnelle sous-linéaire sur F . Pour que q soit majorée par $M \in \mathbb{R}_+$ sur $B_p(0,1)$, il faut et il suffit que*

$$q \leqslant M \cdot p \ .$$

Dans ce cas, la plus petite des constantes $M \in \mathbb{R}_+$ satisfaisant à cette inégalité est

$$\sup_{\varphi \in F, p(\varphi) \leqslant 1} q(\varphi) \ .$$

La condition est nécessaire, car pour tout $\varphi \in F$ tel que $p(\varphi) > 0$, on a $p\left(\frac{\varphi}{p(\varphi)}\right) = 1$, donc

$$\frac{1}{p(\varphi)} \cdot q(\varphi) = q\left(\frac{\varphi}{p(\varphi)}\right) \leqslant M \ ,$$

ce qui prouve l'inégalité dans ce cas. Si $p(\varphi) = 0$, on a $p(\alpha \cdot \varphi) = \alpha \cdot p(\varphi) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, donc $\alpha \cdot q(\varphi) = q(\alpha \cdot \varphi) \leqslant M \in \mathbb{R}_+$, ce qui montre que $q(\varphi) \leqslant 0$ et prouve aussi l'inégalité dans ce cas.

La réciproque et la dernière assertion sont triviales. □

COROLLAIRE *Soient $(F, \mathcal{P})$ un espace polynormé et q une forme sous-linéaire sur F . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *q est continue.*

(ii) *q est continue en 0 .*

(iii) *Il existe une boule de centre 0 sur laquelle q est majorée.*

(iv) *Il existe $c \in \mathbb{R}_+$ et un ensemble fini $P \subset \mathcal{P}$ de semi-normes tels que*

$$q \leqslant c \cdot \max P \ .$$

(i) ⇒ (ii) C'est évident.

(ii) ⇒ (iii) Si q est continue en 0 , il existe une partie ouverte O contenant 0 telle que $q(O) \subset \left]-1, 1\right[$. Par définition d'une partie ouverte, on a bien (iii).

(iii) ⇒ (iv) Si q est majorée par $M \in \mathbb{R}_+$ sur $B_P(0, r_P)$, en posant $r := \min_{p \in P} r_p$ et $c := \frac{M}{r}$, alors q est majorée par c sur $B_{\max P}(0,1)$. En effet pour tout $\varphi \in B_{\max P}(0,1)$, il vient $p(r \cdot \varphi) \leqslant r \leqslant r_p$, donc

$$r \cdot \varphi \in B_P(0, r_P) \ ,$$

et par suite $r \cdot q(\varphi) \leqslant M$. L'inégalité découle donc de la proposition.

(iv) ⇒ (i) Montrons que q est continue en $\varphi \in F$. Pour tout $\psi \in F$, la proposition 2.1.(ii) et l'hypothèse montre que

$$|q(\psi) - q(\varphi)| \leqslant \max[q(\psi - \varphi), q(\varphi - \psi)] \leqslant c \cdot \max P(\psi - \varphi) \ .$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, si $\psi \in B_P\left(\varphi, \frac{\varepsilon}{c}\right)$, on a $\max P(\psi - \varphi) \leqslant \frac{\varepsilon}{c}$, donc

$$|q(\psi) - q(\varphi)| \leqslant \varepsilon \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

REMARQUE 6 Les semi-normes $p \in \mathcal{P}$ sont évidemment continues. Par les remarques 1 et 2, toute boule par rapport à $\mathcal{P}$ est de la forme

$$B_q(\varphi, 1) = \varphi + B_q(0,1) = [q \circ (\diamond - \varphi)]^{-1}([0,1]) \ ,$$

respectivement

$$D_q(\varphi, 1) = \varphi + D_q(0,1) = [q \circ (\diamond - \varphi)]^{-1}([0,1[) \ ,$$

où q est une semi-norme continue par le corollaire (iv).

En particulier les boules fermées et ouvertes par rapport à $\mathcal{P}$ sont fermées respectivement ouvertes pour $\mathfrak{T}_{\mathcal{P}}$.

EXERCICE On a

$$B_P(\varphi, r_P)^\circ = D_P(\varphi, r_P) \ .$$

Si T est une application (semi-) linéaire et q une semi-norme ou une fonctionnelle sous-linéaire sur G , alors il en est de même de $q \circ T$.

THEOREME *Soient $(G, \mathcal{Q})$ un espace polynormé et $T : F \longrightarrow G$ une application (semi-) linéaire. Pour que T soit continue, il faut et il suffit que $q \circ T$ soit continue sur F pour tout $q \in \mathcal{Q}$.*

La condition est évidemment nécessaire, puisque q est continue sur G . Réciproquement la continuité de T en $\varphi \in F$ et celle en 0 sont équivalentes, puisque la translation $\diamond - \varphi$ est continue (cf. remarque 1) :

$$T\psi - T\varphi = T(\psi - \varphi) = T \circ (\diamond - \varphi)(\psi) \ .$$

Si O est un ouvert dans G contenant 0 , il existe une boule ouverte

$$D_Q(0, r_Q) = \bigcap_{q \in Q} \overset{-1}{q}(]-r_q, r_q[) \subset O \ .$$

Il vient alors

$$\overset{-1}{T}(D_Q(0, r_Q)) = \bigcap_{q \in Q} \overset{-1}{T}\left(\overset{-1}{q}(]-r_q, r_q[)\right) = \bigcap_{q \in Q} (q \circ T)^{-1}(]-r_q, r_q[) \ ,$$

et le membre de droite est une partie ouverte dans F contenant 0 par hypothèse. Le resultat en découle puisque

$$T\left(\overset{-1}{T}(D_Q(0, r_Q))\right) \subset D_Q(0, r_Q) \subset O \ .$$

□

REMARQUE 7 Une semi-norme de la forme $c \cdot \max P$ pour $P \subset \mathcal{P}$ est évidemment continue. Mais on n'a pas nécessairement $c \cdot \max P \in \mathcal{P}$!

DEFINITION 3 Nous dirons qu'un ensemble $\mathcal{P}$ de semi-normes sur F est *saturé* si, pour toute famille finie $P \subset \mathcal{P}$, il existe $p \in \mathcal{P}$ et $c \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\max P \leqslant c \cdot p \ .$$

2.3 Espaces localement convexes et espaces polynormés équivalents

DEFINITION On dit que deux ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ de semi-normes sur F , ou bien les deux espaces polynormés $(F, \mathcal{P})$ et $(F, \mathcal{Q})$, sont *équivalents* si les topologies associées $\mathfrak{T}_{\mathcal{P}}$ et $\mathfrak{T}_{\mathcal{Q}}$ sont égales.

L'espace topologique $(F, \mathfrak{T}_{\mathcal{P}})$ représente donc la classe des espaces polynormés équivalents à $(F, \mathcal{P})$. On dit que c'est un *espace localement convexe* . On le désigne en général simplement par F et on dit que $\mathfrak{T}_F := \mathfrak{T}_{\mathcal{P}}$ est la topologie de F . C'est en fait cette structure qui nous intéressera par la suite.

On désigne par $\overline{\mathcal{P}}$ l'ensemble de toutes les semi-normes continues pour $\mathfrak{T}_{\mathcal{P}}$.

PROPOSITION *Pour que* $\mathfrak{T}_{\mathcal{Q}} \subset \mathfrak{T}_{\mathcal{P}}$ *, i.e. que* $\mathrm{id} : (F, \mathfrak{T}_{\mathcal{P}}) \longrightarrow (F, \mathfrak{T}_{\mathcal{Q}})$ *soit continue, il faut et il suffit que chaque semi-norme* $q \in \mathcal{Q}$ *soit continue pour* $\mathfrak{T}_{\mathcal{P}}$ *, i.e.* $\mathcal{Q} \subset \overline{\mathcal{P}}$ *.*

Dans ce cas on a $\overline{\mathcal{Q}} \subset \overline{\mathcal{P}}$ *.*

C'est immédiat par le théorème 2.2. ———— □

COROLLAIRE *Pour que* $\mathcal{P}$ *soit équivalent à* $\mathcal{Q}$ *, il faut et il suffit que, l'on ait* $\mathcal{Q} \subset \overline{\mathcal{P}}$ *et* $\mathcal{P} \subset \overline{\mathcal{Q}}$ *, i.e.* $\overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathcal{Q}}$ *.*

REMARQUE 1 La topologie d'un espace localement convexe F défini par $\mathcal{P}$ ne dépend donc que de la classe des ensembles de semi-normes équivalents à $\mathcal{P}$. Celle-ci est représentée par $\overline{\mathcal{P}}$. On peut donner des conditions géométriques (convexité) caractérisant les topologies de ce type.

En pratique ceci permet de remplacer l'ensemble de définition $\mathcal{P}$ par un autre mieux adapté au problème considéré.

REMARQUE 2 Dans beaucoup de démonstrations il ne sera pas nécessaire de se référer au système de semi-normes $\mathcal{P}$ définissant l'espace localement convexe F . Seul le fait que la topologie de F soit définie par un ensemble de semi-normes sera utile. On utilisera par exemple les faits élémentaires suivants :

(i) *Une partie* O *de* F *est ouverte si, et seulement si, pour tout* $\varphi \in O$ *, il existe une semi-norme continue* p *sur* F *telle que* $B_p(\varphi, 1) \subset O$ *.*

(ii) *Pour qu'une fonctionnelle sous-linéaire* q *sur* F *soit continue, il faut et il suffit qu'il existe une semi-norme continue* p *sur* F *telle que* $q \leqslant p$ *.*

Si $\mathcal{P}$ est un ensemble saturé de semi-normes définissant la topologie de F , on a des assertions analogues en introduisant des constantes positives.

EXEMPLE 1 Tout espace semi-normé défini un espace localement convexe. La semi-norme définit évidemment un ensemble saturé de semi-normes définissant la topologie de F . Réciproquement nous dirons qu'un espace localement convexe pouvant être défini par une seule (semi-)norme est *(semi-)normable* .

En particulier $\mathbb{K}^n$ muni de l'une quelconque des normes $|\cdot|_p$ définit le même espace localement convexe, puisque ces normes sont équivalentes.

EXEMPLE 2 Si F est un espace localement convexe défini par $\mathcal{P}$ et G est un sous-espace vectoriel de F , alors l'ensemble $\mathcal{P}_{|G}$ des restrictions des semi-normes dans $\mathcal{P}$ à G définit une structure d'espace localement convexe sur G . Elle ne dépend que de celle de F , puisque

$$\overline{\mathcal{P}}_{|G} \subset \overline{\mathcal{P}_{|G}} \subset \overline{\overline{\mathcal{P}}_{|G}}$$

par le corollaire 2.2.iv, donc

$$\overline{\mathcal{P}_{|G}} = \overline{\overline{\mathcal{P}}_{|G}} \ .$$

La topologie de G est la topologie induite par celle de F .

EXEMPLE 3 Soit X un ensemble. On munit $\mathbb{K}^X$ d'une structure d'espace localement convexe en considérant toutes les semi-normes $\varphi \longmapsto |\varphi(x)|$ pour $x \in X$. On dit que c'est la *topologie de la convergence simple* sur X . Plus généralement si G est un espace localement convexe, sur G^X on considère les semi-normes

$$\varphi \longmapsto q \circ \varphi(x) \ ,$$

où q est une semi-norme continue sur G . Cet ensemble n'est pas saturé.

EXEMPLE 4 Soit X un espace topologique. On munit $\mathcal{C}(X)$ d'une structure d'espace localement convexe en considérant toutes les semi-normes $\varphi \longmapsto \|\varphi\|_{\infty,K}$ pour K compact dans X . On dit que c'est la *topologie de la convergence compacte* sur X . Cet ensemble est saturé, puisque pour tout $K, L \in \mathfrak{K}(X)$, on a

$$\max\left(\|\cdot\|_{\infty,K}, \|\cdot\|_{\infty,L}\right) = \|\cdot\|_{\infty,K\cup L} \ .$$

EXEMPLE 5 Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On munit l'espace $\mathcal{C}^{(\infty)}(X)$ d'une structure d'espace localement convexe en considérant l'ensemble saturé des semi-normes $(p_{K,k})_{k\in\mathbb{N},K\in\mathfrak{K}(X)}$ (cf. exemple 2.1.5). On dit que c'est la *topologie de la convergence compacte de toutes les dérivées* sur X . On le note souvent $\mathcal{E}(X)$. Les ensembles de semi-normes $(p_{K,k})_{k\in\mathbb{N},K\in\mathfrak{K}(X)}$ et $(q_{K,\alpha})_{\alpha\in\mathbb{N}^n,K\in\mathfrak{K}(X)}$ sont évidemment équivalents, mais $(q_{K,\alpha})_{\alpha\in\mathbb{N}^n,K\in\mathfrak{K}(X)}$ n'est pas saturé.

EXEMPLE 6 Les deux sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n)$ (cf. exemple 2.1.6) sont égaux et les ensembles saturés de semi-normes $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes, donc définissent le même espace localement convexe. On dit que c'est l' *espace de Schwartz* .

(a) Montrons tout d'abord que, pour tout $s > \frac{n}{2}$, on a

$$\left\|\langle\mathrm{id}\rangle^{-s}\right\|_1 < \infty \ .$$

On a

$$\left\|\langle\mathrm{id}\rangle^{-s}\right\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n}^{*} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^s}\, dx = \int_{\mathbb{R}_+^*}^{*} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}(r)}^{*} \frac{1}{\left(1+|\sigma|^2\right)^s}\, d\sigma\right) dr =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^*}^{*} \frac{1}{\left(1+r^2\right)^s} \lambda\left(\mathbb{S}^{n-1}(r)\right)\, dr = \lambda\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) \cdot \int_{\mathbb{R}_+^*}^{*} \frac{r^{n-1}}{\left(1+r^2\right)^s}\, dr \leqslant$$

$$\leqslant \lambda\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) \cdot \left(1 + \int_{[1,\infty[}^{*} \frac{1}{r^{2s-n+1}}\, dr\right) < \infty\ .$$

(b) Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$ et $s > \frac{n}{4}$, on a

$$q_k(\varphi) \leqslant \left\|\langle\mathrm{id}\rangle^{-s}\right\|_2 \cdot p_{k+\lceil s\rceil}(\varphi)\ .$$

En effet, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha|_1 \leqslant k$, il vient

$$\left\|\langle\mathrm{id}\rangle^{k} \cdot \partial^\alpha\varphi\right\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n}^{*} \langle\mathrm{id}\rangle^{2k} \cdot |\partial^\alpha\varphi|^2 = \int_{\mathbb{R}^n}^{*} \langle\mathrm{id}\rangle^{-2s} \cdot \langle\mathrm{id}\rangle^{2k+2s} \cdot |\partial^\alpha\varphi|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\langle\mathrm{id}\rangle^{2k+2s} \cdot |\partial^\alpha\varphi|^2\right\|_\infty \cdot \left\|\langle\mathrm{id}\rangle^{-s}\right\|_2^2 \leqslant \left\|\langle\mathrm{id}\rangle^{-s}\right\|_2^2 \cdot p_{k+\lceil s\rceil}^2(\varphi)\ ,$$

d'où l'inégalité.

(c) Si $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ et $\partial^\beta\psi \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\beta \leqslant (1)$, alors

$$f(x) = \int_{x-\mathbb{R}_+^n} \partial^{(1)} f\, d\lambda \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n\ ,$$

où (1) désigne le multi-indice ayant toutes ses composantes égales à 1 , et

$$\|f\|_\infty \leqslant \left\|\partial^{(1)} f\right\|_1\ .$$

Considérons le cas $n = 2$ pour simplifier et soit $x = (u, v)$. Le théorème de Fubini (cours d'Analyse [17] 16.3) montre que, pour presque tous les s , les fonctions $\partial^{(1)} f(s,\cdot) = \partial_2\partial_1 f(s,\cdot)$ et $\partial_1 f(s,\cdot)$ sont intégrables, donc que $\partial_1 f(s,\cdot)$ s'annule en $-\infty$ par l'exercice qui suit. On a alors

$$\int_{(u,v)-\mathbb{R}_+^2} \partial^{(1)} f\, d\lambda = \int_{-\infty}^{u} \left(\int_{-\infty}^{v} \partial^{(1)} f(s,t)\, dt\right) ds = \int_{-\infty}^{u} \partial_1 f(s,v)\, ds \quad \text{pour tout } u, v\ .$$

Le théorème de Fubini montre à nouveau que, pour presque tous les v , les fonctions $\partial_1 f(\cdot, v)$ et $f(\cdot, v)$ sont intégrables, donc que $f(\cdot, v)$ s'annulent en $-\infty$. Il vient alors

$$\int_{Q_{(u,v)}} \partial^{(1)} f\, d\lambda = f(u,v) \quad \text{pour tout } u \text{ et pour presque tous } v\ .$$

La formule en découle pour tous les v par continuité (cours d'Analyse [17] 15.5). Quant à l'inégalité, on a

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\int_{x-\mathbb{R}_+^n} \partial^{(1)} f\, d\lambda\right| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{x-\mathbb{R}_+^n} \left|\partial^{(1)} f\right| d\lambda \leqslant \left\|\partial^{(1)} f\right\|_1\ .$$

(d) Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tels que $|\alpha|_1 \leqslant k$ et $\beta \leqslant (1)$, la fonction $\partial^\beta\left[\langle\mathrm{id}\rangle^k \cdot \partial^\alpha\varphi\right]$ est Lebesgue-intégrable et

$$\left\|\partial^\beta\left[\langle\mathrm{id}\rangle^k \cdot \partial^\alpha\varphi\right]\right\|_1 \leqslant C \cdot q_{k+n}(\varphi)$$

pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}_+^*$. En particulier

$$p_k(\varphi) \leqslant C \cdot q_{k+n}(\varphi) \ .$$

En effet par la formule de Leibniz on obtient

$$\partial^\beta \left[\langle\mathrm{id}\rangle^k \cdot \partial^\alpha \varphi\right] = \sum_{\gamma,\theta\in\mathbb{N}^n,\gamma+\theta=\beta} \frac{\beta!}{\gamma!\theta!} \cdot \partial^\gamma \left(\langle\mathrm{id}\rangle^k\right) \cdot \partial^{\alpha+\theta}\varphi =$$

$$= \sum_{\gamma,\theta\in\mathbb{N}^n,\gamma+\theta=\beta,|\gamma|_1\leqslant k} \frac{2^{|\gamma|_1} \cdot k!}{(k-|\gamma|_1)!} \cdot \langle\mathrm{id}\rangle^{k-|\gamma|_1} \cdot \mathrm{id}^\gamma \cdot \partial^{\alpha+\theta}\varphi \ ,$$

car $\beta! = \gamma! = \theta! = 1$ et

$$\partial_j \langle\mathrm{id}\rangle^l = 2l \cdot \langle\mathrm{id}\rangle^{l-1} \cdot \mathrm{pr}_j \ .$$

Comme

$$\left|\langle\mathrm{id}\rangle^{k-|\gamma|_1} \cdot \mathrm{id}^\gamma \cdot \partial^{\alpha+\theta}\varphi\right| \leqslant \langle\mathrm{id}\rangle^{k-|\gamma|_1} \cdot \langle\mathrm{id}\rangle^{\frac{|\gamma|_1}{2}} \cdot \left|\partial^{\alpha+\theta}\varphi\right| \leqslant \langle\mathrm{id}\rangle^k \cdot \left|\partial^{\alpha+\theta}\varphi\right|$$

et $|\alpha+\theta|_1 \leqslant k+n$, il vient

$$\left\|\langle\mathrm{id}\rangle^{k-|\gamma|_1} \cdot \mathrm{id}^\gamma \cdot \partial^{\alpha+\theta}\varphi\right\|_1 \leqslant \left\|\langle\mathrm{id}\rangle^{-n} \cdot \langle\mathrm{id}\rangle^{k+n} \cdot \partial^{\alpha+\theta}\varphi\right\|_1 \leqslant \left\|\langle\mathrm{id}\rangle^{-n}\right\|_2 \cdot \left\|\langle\mathrm{id}\rangle^{k+n} \cdot \partial^{\alpha+\theta}\varphi\right\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\langle\mathrm{id}\rangle^{-n}\right\|_2 \cdot q_{k+n}(\varphi) < \infty \ ,$$

d'où le résultat par le critère d'intégrabilité (cours d'Analyse [17] 15.10) et en posant

$$C := \left\|\langle\mathrm{id}\rangle^{-n}\right\|_2 \cdot \sum_{\gamma,\theta\in\mathbb{N}^n,\gamma+\theta=\beta,|\gamma|_1\leqslant k} \frac{2^{|\gamma|_1} \cdot k!}{(k-|\gamma|_1)!} \ .$$

Finalement par ce qui précède on a

$$\left\|\langle\mathrm{id}\rangle^k \cdot \partial^\alpha\varphi\right\|_\infty \leqslant \left\|\partial^{(1)}\left[\langle\mathrm{id}\rangle^k \cdot \partial^\alpha\varphi\right]\right\|_1 \leqslant C \cdot q_{k+n}(\varphi) \ ,$$

ce qui finit de prouver notre assertion.

(e) Par (b) on obtient immédiatement $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n)$, tandis que (d) montre que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ces inégalités montrent également que les suites de semi-normes $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes. □

EXERCICE Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction localement absolument continue telle que $f, \partial f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}_+)$ resp. $f, \partial f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$. Montrer que l'on a $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$.

Il suffit d'utiliser la définition d'une fonction localement absolument continue (cours d'Analyse [17] 15.19) pour la première partie et la formule d'intégration par partie (cours d'Analyse [17] 16.4) pour la seconde.

2.4 Produit de deux espaces localement convexes

Dans tout ce qui suit, et sauf mention expresse du contraire,
les lettres F, G, H et $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ désignerons respectivement
des espaces localement convexes
et
des ensembles de semi-normes définissant leur topologie.

Utilisant l'exemple 2.1.4, nous pouvons poser la

DEFINITION 1 On muni $F \times G$ d'une structure d'espace localement convexe en considérant la famille de semi-normes $\mathcal{P} \times_\infty \mathcal{Q} := \{p \times_\infty q \mid p \in \mathcal{P} \ , \ q \in \mathcal{Q}\}$. On dit que c'est le *produit (direct)* de F et G .

Cette structure ne dépend évidemment que des structures d'espace localement convexe de F et G , car on a

$$\mathcal{P} \times_\infty \mathcal{Q} \subset \overline{\mathcal{P}} \times_\infty \overline{\mathcal{Q}} \subset \overline{\mathcal{P} \times_\infty \mathcal{Q}}$$

par le corollaire 2.2.(iv) :

$$\max\left[c \cdot \max P\left(\varphi\right), d \cdot \max Q\left(\gamma\right)\right] \leqslant \max\left(c, d\right) \cdot \max_{p \in P, q \in Q} \max\left[p\left(\varphi\right), q\left(\gamma\right)\right] =$$

$$= \max\left(c, d\right) \cdot \max\left(P \times_\infty Q\right)\left(\varphi, \gamma\right) .$$

On a donc

$$\overline{\mathcal{P} \times_\infty \mathcal{Q}} = \overline{\overline{\mathcal{P}} \times_\infty \overline{\mathcal{Q}}} .$$

Etant donné $s \in [1, \infty[$, les inégalités

$$p \times_s q \leqslant 2^{\frac{1}{s}} \cdot p \times_\infty q \quad \text{et} \quad p \times_\infty q \leqslant p \times_s q$$

montre en outre que $\mathcal{P} \times_s \mathcal{Q}$ engendre le même espace localement convexe.

REMARQUE 1 Les projections canoniques

$$\mathrm{pr}_1 : F \times G \longrightarrow F : (\varphi, \gamma) \longmapsto \varphi \quad \text{et} \quad \mathrm{pr}_2 : F \times G \longrightarrow G : (\varphi, \gamma) \longmapsto \gamma$$

sont des applications linéaires continues.

Pour tout $\gamma \in G$, respectivement $\varphi \in F$, les injections canoniques

$$j_{1,\gamma} : F \longrightarrow F \times G : \varphi \longmapsto (\varphi, \gamma) \quad \text{et} \quad j_{2,\varphi} : G \longrightarrow F \times G : \gamma \longmapsto (\varphi, \gamma)$$

sont des applications affines continues.

C'est immédiat en utilisant le théorème 2.2. ——— □

REMARQUE 2 Pour toutes parties $A \subset F$ et $B \subset G$, on a

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B} .$$

La démonstration est laissée en exercice.

PROPOSITION *Soit $\mathfrak{s} : F \times G \longrightarrow H$ une application bilinéaire ou sesquilinéaire. Pour que $\mathfrak{s}$ soit continue, il faut et il suffit que, pour toute semi-norme continue r sur H , ou toute semi-norme $r \in \mathcal{R}$, il existe des semi-normes continues p sur F et q sur G , telles que l'on ait*

$$r\left(\mathfrak{s}\left(\varphi, \gamma\right)\right) \leqslant p\left(\varphi\right) \cdot q\left(\gamma\right) \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \gamma \in G \ .$$

La condition est suffisante, car pour tout $\varphi, \varphi_0 \in F$ et $\gamma, \gamma_0 \in G$, on a

$$\mathfrak{s}\left(\varphi, \gamma\right) - \mathfrak{s}\left(\varphi_0, \gamma_0\right) = \mathfrak{s}\left(\varphi, \gamma\right) - \mathfrak{s}\left(\varphi, \gamma_0\right) + \mathfrak{s}\left(\varphi, \gamma_0\right) - \mathfrak{s}\left(\varphi_0, \gamma_0\right) =$$

$$= \mathfrak{s}\left(\varphi, \gamma - \gamma_0\right) - \mathfrak{s}\left(\varphi - \varphi_0, \gamma_0\right) = \mathfrak{s}\left(\varphi - \varphi_0, \gamma - \gamma_0\right) - \mathfrak{s}\left(\varphi_0, \gamma - \gamma_0\right) + \mathfrak{s}\left(\varphi - \varphi_0, \gamma_0\right) \ ,$$

donc

$$r\left(\mathfrak{s}\left(\varphi, \gamma\right) - \mathfrak{s}\left(\varphi_0, \gamma_0\right)\right) \leqslant p\left(\varphi - \varphi_0\right) \cdot q\left(\gamma - \gamma_0\right) + p\left(\varphi_0\right) \cdot q\left(\gamma - \gamma_0\right) + p\left(\varphi - \varphi_0\right) \cdot q\left(\gamma_0\right) \ .$$

Réciproquement, si $\mathfrak{s}$ est continue et $r \in \mathcal{R}$, l'ensemble $\mathfrak{s}^{-1}\left(D_r\left(0,1\right)\right)$ est ouvert dans $F \times G$, donc contient un ensemble de la forme $B_p\left(0,1\right) \times B_q\left(0,1\right)$, où p et q sont des semi-normes continues sur F et G respectivement. Cette inclusion signifie que, pour tout $\varphi \in F$ et $\gamma \in G$ tels que $p\left(\varphi\right), q\left(\gamma\right) \leqslant 1$, on a $r\left(\mathfrak{s}\left(\varphi, \gamma\right)\right) \leqslant 1$. On en déduit l'inégalité comme dans la démonstration du lemme 2.2. □

EXEMPLE Le produit scalaire d'un espace préhilbertien F

$$\left(\cdot|\cdot\right) : F \times F \longrightarrow \mathbb{K} : \left(\varphi, \psi\right) \longmapsto \left(\varphi|\,\psi\right)$$

est continu sur l'espace normé F associé.

C'est évident par l'inégalité de Cauchy-Schwarz 1.1. □

THEOREME *Soit F un espace localement convexe.*

(i) L'application linéaire

$$+ : \left(\varphi, \psi\right) \longmapsto \varphi + \psi : F \times F \longrightarrow F$$

et l'application bilinéaire

$$\cdot : \left(\alpha, \varphi\right) \longmapsto \alpha \cdot \varphi : \mathbb{K} \times F \longrightarrow F$$

sont continues.

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{K} \smallsetminus \{0\}$ et $\psi \in F$, les applications

$$\varphi \longmapsto \alpha \cdot \varphi \quad , \quad \varphi \longmapsto \varphi + \psi \quad : F \longrightarrow F$$

sont des homéomorphismes.

(iii) Si H est un sous-espace vectoriel de F , alors son adhérence $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel.

Dmonstration de (i) Si p est une semi-norme continue sur F , alors

$$p \circ +\left(\varphi, \psi\right) = p\left(\varphi + \psi\right) \leqslant p\left(\varphi\right) + p\left(\psi\right) = p \times_1 p\left(\varphi, \psi\right) \ ,$$

d'où la première partie par le théorème 2.2. Pour la seconde on a

$$p \circ \cdot\left(\alpha, \varphi\right) = p\left(\alpha \cdot \varphi\right) = |\alpha| \cdot p\left(\varphi\right) \ ,$$

d'où le résultat par la proposition.

Dmonstration de (ii) C'est immédiat par (i) et la remarque 1, puisque

$$\alpha \cdot \varphi = \cdot \circ j_{2,\alpha}(\varphi) \quad \text{et} \quad \varphi + \psi = + \circ j_{1,\psi}(\varphi) \ .$$

Dmonstration de (iii) Par la continuité de $+$ et la remarque 2, il vient

$$\overline{H} + \overline{H} = + \left(\overline{H} \times \overline{H}\right) = + \left(\overline{H \times H}\right) \subset \overline{+(H \times H)} = \overline{H + H} = \overline{H} \ .$$

De même on a

$$\mathbb{K} \cdot \overline{H} = \cdot \left(\mathbb{K} \times \overline{H}\right) = \cdot \left(\overline{\mathbb{K} \times H}\right) \subset \overline{\cdot (\mathbb{K} \times H)} = \overline{\mathbb{K} \cdot H} = \overline{H} \ .$$

□

De manière analogue (cf. exemple 2.1.4) on peut poser la

DEFINITION 2 On muni $F \cap G$ d'une structure d'espace localement convexe en considérant la famille de semi-normes $\mathcal{P} + \mathcal{Q} := (p+q)_{p \in \mathcal{P}, q \in \mathcal{Q}}$. On dit que c'est l' *intersection* des espaces localement convexes F et G .

Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont saturés, il en est de même de $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$, puisque pour toutes parties finies $P \subset \mathcal{P}$ et $Q \subset \mathcal{Q}$, on a

$$\max(P + Q) \leqslant \max P + \max Q \ .$$

2.5 Convergence

PROPOSITION *Pour que la topologie de F soit séparée, il faut et il suffit que, pour tout $\varphi \in F \smallsetminus \{0\}$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $p(\varphi) > 0$.*

La condition est suffisante, car pour tout $\varphi, \psi \in F$ tels que $\varphi \neq \psi$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $r := p(\varphi - \psi) > 0$. Il suffit donc de remarquer que

$$B_p\left(\varphi, \frac{r}{3}\right) \cap B_p\left(\psi, \frac{r}{3}\right) = \emptyset\,;$$

en effet si $\theta \in B_p\left(\varphi, \frac{r}{3}\right) \cap B_p\left(\psi, \frac{r}{3}\right)$, on a

$$p(\theta - \varphi)\ ,\ p(\theta - \psi) \leqslant \frac{r}{3}\ ,$$

donc

$$r = p(\varphi - \psi) \leqslant p(\varphi - \theta) + p(\theta - \psi) \leqslant \frac{2}{3} \cdot r\ ,$$

ce qui est absurde.

Réciproquement si la topologie est séparée, pour tout $\varphi \in F \smallsetminus \{0\}$, il existe évidemment une boule $B_P(0, r_P)$ ne contenant pas φ , donc un $p \in P \subset \mathcal{P}$ tel que $\varphi \notin B_p(0, r_p)$, ce qui montre que $p(\varphi) > r_p > 0$. □

COROLLAIRE *Soit $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de F . Pour que $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi \in F$, il faut et il suffit que, pour tout $p \in \mathcal{P}$, on ait $\lim_k p(\varphi_k - \varphi) = 0$.*

Si F est séparé, alors la limite d'une suite est univoquement déterminée.

La condition est nécessaire puisque p est continue. Réciproquement si O est un ouvert contenant φ et $B_P(\varphi, r_P)$ une boule contenue dans O , pour tout $p \in P$, il existe $k_p \in \mathbb{N}$ tel que

$$p(\varphi_k - \varphi) \leqslant r_p \quad \text{pour tout } k \geqslant k_p\ .$$

Pour tout $k \geqslant \max_{p\in P} k_p$, on a alors

$$\varphi_k \in B_P(\varphi, r_P) \subset O\ .$$

Si φ et ψ sont des limites de $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a

$$p(\varphi - \psi) \leqslant p(\varphi - \lim_k \varphi_k) + p(\lim_k \varphi_k - \psi) = \lim_k p(\varphi - \varphi_k) + \lim_k p(\varphi_k - \psi) = 0\ ,$$

donc $\varphi - \psi = 0$ par le corollaire. □

EXEMPLE 1 Soit X un ensemble. Une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^X$ (cf. exemple 2.3.3) converge vers $\varphi \in \mathbb{K}^X$ si, et seulement si, pour tout $x \in X$, on a $\lim_k \varphi_k(x) = \varphi(x)$, ce qui signifie que $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement sur X vers φ .

EXEMPLE 2 Soit X un espace topologique. Une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(X)$ (cf. exemple 2.3.4) converge vers $\varphi \in \mathcal{C}(X)$ si, et seulement si, pour tout compact $K \subset X$, on a $\lim_k \varphi_k = \varphi$ uniformément sur K .

EXEMPLE 3 Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$ (cf. exemple 2.3.5) converge vers $\varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$ si, et seulement si, pour tout compact $K \subset X$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a $\lim_k \partial^\alpha \varphi_k = \partial^\alpha \varphi$ uniformément sur K , ce qui signifie que $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, ainsi que toutes les dérivée, converge uniformément sur tout compact de X .

Puisque

$$p(\varphi_k - \varphi_l) \leqslant p(\varphi_k - \varphi) + p(\varphi - \varphi_l) \ ,$$

et en utilisant le corollaire 2.2.iv, toute suite convergente est une suite de Cauchy au sens suivant :

DEFINITION 1 On dit qu'une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de F est une *suite de Cauchy* si, pour toute semi-norme continue, ou toute semi-norme $p \in \mathcal{P}$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait

$$p(\varphi_k - \varphi_l) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } k, l \geqslant N \ ,$$

et que F est *séquentiellement complet* (on dit aussi *semi-complet*) si F est **séparé** et si toute suite de Cauchy est convergente.

On dit qu'une série $\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l$ est *convergente* de *somme* $\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l$ si

$$\varphi = \lim_k \sum_{l=0}^{k} \varphi_l \ ,$$

et que cette série est *absolument convergente* si, pour toute semi-norme continue, ou toute semi-norme $p \in \mathcal{P}$, on a

$$\sum_{l=0}^{\infty} p(\varphi_l) < \infty \ .$$

Dans un espace normé on dit aussi que cette série est *normalement* convergente (cf. cours d'Analyse [17], définition 10.7.2).

On dit qu'un sous-espace vectoriel H de F est *séquentiellement dense* si, pour tout $\varphi \in F$, il existe une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ telle que $\varphi = \lim_k \varphi_k$.

THEOREME *Soient F un espace localement convexe séquentiellement complet et $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de F .*

(i) ***Critère de Cauchy*** *Pour que la série $\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l$ soit convergente, il faut et il suffit que, pour toute semi-norme continue, ou toute semi-norme $p \in \mathcal{P}$, on ait*

$$\lim_{k,l} p\left(\sum_{j=l}^{k} \varphi_j\right) = 0 \ .$$

(ii) ***Critère de Weierstraß*** *Si la série $\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l$ est absolument convergente, alors tout réarrangement $\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{\sigma(l)}$ est convergent (σ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$) et, pour toute semi-norme continue, ou toute semi-norme $p \in \mathcal{P}$, on a*

$$p\left(\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{\sigma(l)}\right) \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} p(\varphi_l) \ .$$

(iii) Soient H un sous-espace vectoriel de F séquentiellement dense, G un espace localement convexe séquentiellement complet et $T : H \longrightarrow G$ une application (semi-) linéaire continue. Alors il existe une unique application (semi-) linéaire continue $\widetilde{T} : F \longrightarrow G$ qui prolonge T .

Dmonstration de (i) La condition signifie simplement que la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy.

Dmonstration de (ii) Par le théorème du réarrangement (cf. cours d'Analyse [17], théorème 6.14) la série $\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{\sigma(l)}$ est absolument convergente et $\sum_{l=0}^{\infty} p(\varphi_l) = \sum_{l=0}^{\infty} p\left(\varphi_{\sigma(l)}\right)$; il suffit alors de constater que

$$p\left(\sum_{j=l}^{k} \varphi_{\sigma(j)}\right) \leqslant \sum_{j=l}^{k} p\left(\varphi_{\sigma(j)}\right) \to 0 \ ,$$

lorsque $k \to \infty$.

Dmonstration de (iii) Pour tout $\varphi \in F$ et toute suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ tels que $\varphi = \lim_k \varphi_k$, on peut définir $\widetilde{T}$ par

$$\widetilde{T}\varphi := \lim_k T\varphi_k \ ,$$

et il n'est pas trop difficile de vérifier que $\widetilde{T}$ est continue. □

EXEMPLE 4 Tout espace de Banach est évidemment séquentiellement complet.

EXEMPLE 5 Les espaces $\mathcal{C}(X)$ et $\mathcal{E}(X)$ sont séquentiellement complets (cf. exemples 2.3.4 et 2.3.5). C'est immédiat, puisqu'on a convergence simple, ce qui permet de définir la fonction limite, et convergence uniforme (ainsi que des dérivées dans le second cas) sur les boules fermées contenues dans X , qui sont compactes.

EXERCICE L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est séquentiellement complet (cf. exemple 2.3.6).

2.6 Sommabilité

Il n'est pas possible d'exprimer la continuité d'une application à l'aide des suites convergente, à moins que F soit métrisable (cf. théorème 2.11). De même il existe des parties denses dans F qui ne sont pas séquentiellement denses. En outre il est utile d'introduire une notion de sommabilité, par opposition à la notion de convergence d'une série, ne faisant pas intervenir l'ordre (sur l'ensemble d'indices) dans lequel on additionne.

Pour surmonter ces difficultés il est nécessaire d'introduire la notion de filtre (cf. appendice 1). Nous ne les utiliserons en fait que dans ce paragraphe et seulement pour pouvoir définir les espaces localement convexes complets et démontrer la suffisance du critère de Cauchy. Par contre la sommabilité nous sera utile par la suite.

DEFINITION On dit qu'une base de filtre $\mathfrak{B}$ sur F est *de Cauchy* si, pour toute semi-norme continue, ou toute semi-norme $p \in \mathcal{P}$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $B \in \mathfrak{B}$ tel que l'on ait

$$p(\varphi - \psi) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in B \ ,$$

et que F est *complet* si toute base de filtre de Cauchy est convergente.

Soit J un ensemble. Nous désignerons par $\mathfrak{K}(J)$ l'ensemble des parties finies de J , i.e. l'ensemble des parties compactes de J muni de la métrique discrète.

On dit qu'une famille $(\varphi_j)_{j \in J} \subset F$ est *sommable* de somme φ si, pour toute semi-norme $p \in \mathcal{P}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathfrak{K}(J)$ telle que, pour tout $L \in \mathfrak{K}(J)$ avce $L \supset K$, on ait

$$p\left(\sum_{j \in L} \varphi_j - \varphi\right) \leqslant \varepsilon \ .$$

Dans ce cas on écrit

$$\varphi = \sum_{j \in J} \varphi_j \ .$$

On dit que $(\varphi_j)_{j \in J}$ est *absolument sommable* si, pour tout $p \in \mathcal{P}$, la famille $(p(\varphi_j))_{j \in J}$ est sommable dans $\mathbb{R}$.

REMARQUE 1 Considérons sur $\mathfrak{K}(J)$ la base de filtre $\mathfrak{B}$ formée des ensembles

$$\mathfrak{k} := \{L \in \mathfrak{K}(J) \mid L \supset K\}$$

et l'application

$$S : \mathfrak{K}(J) \longrightarrow F : L \longmapsto \sum_{j \in L} \varphi_j \ .$$

Par définition $(\varphi_j)_{j \in J}$ est sommable si, et seulement si, la base de filtre $S(\mathfrak{B})$ est convergente. Soit $\sum_{j \in J} \varphi_j$ sa limite. Dans ce cas nous écrirons

$$\sum_{j \in J} \varphi_j = \lim\nolimits_{\mathfrak{K}(J) \ni K \to \infty} \sum_{j \in K} \varphi_j = \lim\nolimits_K \sum_{j \in K} \varphi_j$$

pour simplifier.

Il est clair que la notion de sommabilité est invariante par transformation bijective de l'ensemble d'indices. En outre on a la

PROPOSITION *Soit J un ensemble dénombrable. Si $\left(\varphi_j\right)_{j\in J}$ est une suite sommable dans F , alors pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow J$, la série $\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{\sigma(l)}$ est convergente et*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{\sigma(l)} = \sum_{j\in J} \varphi_j \ .$$

Avec les notation de la définition, posons $N := \max \overset{-1}{\sigma}(K)$. Pour tout $k \geqslant N$, on a $\sigma(\{0,\ldots,k\}) \supset \sigma\left(\overset{-1}{\sigma}(K)\right) = K$ et il vient

$$p\left(\sum_{l=0}^{k} \varphi_{\sigma(l)} - \sum_{j\in J} \varphi_j\right) = p\left(\sum_{j\in\sigma(\{0,\ldots,k\})} \varphi_j - \sum_{j\in J} \varphi_j\right) \leqslant \varepsilon \ ,$$

ce qu'il suffisait de démontrer. □

Pour les familles de nombres réels nous avons obtenu un résultat analogue dans le lemme 1.1. Les interrelations sont explicitées dans le corollaire 2.11.

THEOREME *Soient F un espace localement convexe complet et $\left(\varphi_j\right)_{j\in J}$ une famille de F .*

(i) ***Critère de Cauchy*** *Pour que la famille $\left(\varphi_j\right)_{j\in J}$ soit sommable, il faut et il suffit que, pour toute semi-norme continue, ou toute semi-norme $p \in \mathcal{P}$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathfrak{K}(J)$ tel que, pour tout $L \in \mathfrak{K}(J)$ satisfaisant à $L \cap K = \emptyset$, on ait*

$$p\left(\sum_{j\in L} \varphi_j\right) \leqslant \varepsilon \ .$$

En particulier toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.

(ii) ***Critère de Weierstraß*** *Toute famille absolument sommable est sommable et, pour toute semi-norme continue, ou toute semi-norme $p \in \mathcal{P}$, on a*

$$p\left(\sum_{j\in J} \varphi_j\right) \leqslant \sum_{j\in J} p(\varphi_l) \ .$$

Dmonstration de (i) On vérifie immédiatement que la condition est nécessaire. La condition, avec les notations de la remarque 1, signifie que $S(\mathfrak{B})$ est une base de filtre de Cauchy sur F , donc convergente par hypothèse., ce qui montre que $\left(\varphi_j\right)_{j\in J}$ est sommable.

Une sous-famille d'une famille sommable satisfait évidemment au critère de Cauchy, donc est sommable.

Dmonstration de (ii) C'est immédiat puisque, pour tout $L \in \mathfrak{K}(J)$, on a

$$p\left(\sum_{j\in L} \varphi_j\right) \leqslant \sum_{j\in L} p(\varphi_l) \ ,$$

ce qui montre que $\left(\varphi_j\right)_{j\in J}$ satisfait au critère de Cauchy. □

REMARQUE 2 Si $T : F \longrightarrow G$ est une application linéaire continue et $\left(\varphi_j\right)_{j\in J} \subset F$ une famille sommable, respectivement absolument sommable, alors il en est de même de $\left(T\varphi_j\right)_{j\in J}$ et

$$\sum_{j\in J} T\varphi_j = T\left(\sum_{j\in J}\varphi_j\right) .$$

2.7 Espaces de dimension finie

DEFINITION On dit que deux espaces localement convexes F et G sont *isomorphes* s'il existe une bijection linéaire $T : F \longrightarrow G$ qui soit un homéomorphisme, i.e. telle que T et $\overset{-1}{T}$ soient continues.

Soient F et G des espaces normés. Une application linéaire $T : F \longrightarrow G$ telle que

$$\|T\varphi\|_G = \|\varphi\|_F \quad \text{pour tout } \varphi \in F$$

est dite une *isométrie* de F dans G . On dit que c'est une isométrie de F sur G si elle est surjective.

Remarquons qu'une isométrie est injective, puisque $\|T\varphi\|_G = 0$ entraîne $\|\varphi\|_F = 0$, donc $\varphi = 0$. Si elle est surjective, alors $\overset{-1}{T}$ est une isométrie de G sur F .

LEMME

(i) Toute application linéaire $T : (\mathbb{K}^n, |\cdot|_1) \longrightarrow F$ est continue.

(ii) Si H est un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace localement convexe séparé F , il existe une semi-norme continue sur F qui induise une norme sur H .

Dmonstration de (i) Désignons par $(e_j)_{j=1,\ldots,n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et soit p une semi-norme continue sur F . Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a $x = \sum_{j=1}^n x_j \cdot e_j$ et

$$p(Tx) = p\left(\sum_{j=1}^n x_j \cdot Te_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot p(Te_j) \leqslant \max_{j=1,\ldots,n} p(Te_j) \cdot |x|_1 \ ,$$

d'où le résultat par le théorème 2.2.

Dmonstration de (ii) Comme F est séparé, étant donné $\varphi_1 \in H \smallsetminus \{0\}$, il existe d'après la proposition 2.5 une semi-norme p_1 continue sur F telle que $p_1(\varphi_1) > 0$. L'ensemble $\{p_1 = 0\} \cap H$ est un sous-espace vectoriel de dimension $< \dim(H)$. En choisissant $\varphi_2 \in \{p_1 = 0\} \cap H \smallsetminus \{0\}$, si cela est possible, et une semi-norme p_2 continue sur F telle que $p_2(\varphi_2) > 0$, la dimension de $\{p_2 = 0\} \cap \{p_1 = 0\} \cap H$ est strictement plus petite que celle de $\{p_1 = 0\} \cap H$. Par récurrence il existe des semi-normes continues $(p_j)_{j=1,\ldots,m}$ telles que $m \leqslant \dim(H)$ et

$$\bigcap_{j=1}^m \{p_j = 0\} \cap H = \{0\} \ .$$

La semi-norme $p := \max_{j=1,\ldots,m} p_j$ (exemple 2.1.2) est donc continue sur F par le corollaire 2.2.(iv) et elle définit une norme sur H , car elle ne s'y annule qu'en 0 . □

THEOREME *Si F est un espace localement convexe séparé de dimension finie, alors F est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. En d'autres termes tous les espaces localement convexes séparés de même dimension finie sont isomorphes, ou encore il n'existe qu'une seule structure d'espace localement convexe séparé sur $\mathbb{K}^n$.*

Soient T une bijection linéaire de $\mathbb{K}^n$ sur F et $S := \{x \in \mathbb{K}^n \mid |x|_1 = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{K}^n$ par rapport à la norme $|\cdot|_1$. Comme S est compacte et T continue par le lemme, la partie $T(S)$ est compacte dans F et ne contient pas 0 . Par le lemme (ii), il existe une norme p continue sur F . Puisqu'elle ne s'annule pas sur $T(S)$, on a

$$\varepsilon := \inf_{\varphi \in T(S)} p(\varphi) > 0 \ .$$

Si $\varphi \in F \smallsetminus \{0\}$, on a $\dfrac{\overset{-1}{T}\varphi}{\left|\overset{-1}{T}\varphi\right|_1} \in S$, donc $\dfrac{\varphi}{\left|\overset{-1}{T}\varphi\right|_1} \in T(S)$, et par suite $p\left(\dfrac{\varphi}{\left|\overset{-1}{T}\varphi\right|_1}\right) \geqslant \varepsilon$. On en déduit que

$$\left|\overset{-1}{T}\varphi\right|_1 \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \cdot p(\varphi) \ ,$$

ce qui finit de prouver, grâce au théorème 2.2, que $\overset{-1}{T}$ est continue. $\square$

COROLLAIRE *Soit F un espace localement convexe séparé de dimension finie.*

(i) Il existe une norme sur F définissant sa structure d'espace localement convexe et toutes les normes sur F sont équivalentes entre elles.

(ii) Toute application linéaire de F dans un espace localement convexe G est continue.

(iii) F est séquentiellement complet, ou bien complet pour toute norme sur F .

(iv) F est localement compact, ou bien la boule unité de chaque norme sur F est compacte.

Dmonstration de (i) C'est immédiat.

Dmonstration de (ii) Cela découle du diagramme

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "S"] & G \\ \mathbb{K}^n \arrow[u] \arrow[ur, "S \circ T"'] & \end{tikzcd}$$

en remarquant que $S = (S \circ T) \circ \overset{-1}{T}$ est continue, puisque $S \circ T$ et $\overset{-1}{T}$ le sont.

Dmonstration de (iii) Il suffit de remarquer que les semi-normes continues sur F et $\mathbb{K}^n$ se correspondent par T , donc aussi les suites de Cauchy.

Dmonstration de (iv) C'est aussi immédiat, puisque toute norme sur $\mathbb{K}^n$ est équivalente à $|\cdot|_1$. $\square$

REMARQUE La dernière assertion possède une réciproque : le théorème de Riesz 2.9.

2.8 Espaces quotients et sous-espaces

Soient F un espace vectoriel, H un sous-espace vectoriel de F et

$$F/H := \{ [\varphi] \mid [\varphi] = \varphi + H \text{ pour } \varphi \in F\}$$

l'espace quotient de F par H .

PROPOSITION *Si p est une semi-norme sur F , alors*

$$[p] : [\varphi] \longmapsto \inf_{\psi\in[\varphi]} p(\psi) = \inf_{\psi\in H} p(\psi - \varphi) =: dist_p(\varphi, H)$$

est une semi-norme sur F/H .

C'est immédiat et laissé en exercice. □

DEFINITION Si F est un espace localement convexe, alors on muni F/H d'une structure d'espace localement convexe en considérant les semi-normes $[p]$, p parcourant l'ensemble des semi-normes continues sur F . On dit que c'est l' *espace (localement convexe) quotient* de F par H et que l'application linéaire

$$\pi : \varphi \longmapsto [\varphi] : F \longrightarrow F/H$$

est l' *application canonique* de F sur F/H . Elle est continue, puisqu'on a

$$[p] \circ \pi(\varphi) = \inf_{\psi\in[\varphi]} p(\psi) \leqslant p(\varphi) \ .$$

THEOREME *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) F/H *est séparé.*

(ii) H *est fermé.*

(iii) Pour tout $\varphi \in F \smallsetminus H$, il existe une semi-norme p continue sur F telle que

$$dist_p(\varphi, H) > 0 \ .$$

(i) ⇒ (ii) En effet

$$H = \overset{-1}{\pi}(\{0\}) \ ,$$

$\{0\}$ est fermé dans F/H et π est continue.

(ii) ⇒ (iii) Si $\varphi \in F \smallsetminus H$, il existe une semi-norme continue p sur F telle que

$$B_p(\varphi, 1) \cap H = \emptyset \ .$$

Mais cela signifie que, pour tout $\psi \in H$, on a $p(\psi - \varphi) \geqslant 1$.

(iii) ⇒ (i) Si $[\varphi] \in F/H \smallsetminus \{0\}$, i.e. $\varphi \in F \smallsetminus H$, en choisissant p comme dans (iii), il vient

$$[p]([\varphi]) = \inf_{\psi\in H} p(\psi - \varphi) > 0 \ .$$

Le résultat découle donc de la proposition 2.5. □

COROLLAIRE *Si G est un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace localement convexe séparé F , alors G est fermé. Plus généralement, si H est un sous-espace vectoriel fermé de F , alors $G+H$ est fermé.*

Soit $\varphi \in F \smallsetminus G$. Par le lemme 2.7.ii, il existe une semi-norme p continue sur F induisant une norme sur $G+\mathbb{K}\cdot\varphi$. On peut supposer que $p(\varphi)=1$. Pour tout $\gamma \in G \smallsetminus B_p(0,2)$, on a

$$p(\gamma-\varphi) \geqslant p(\gamma) - p(\varphi) \geqslant 1 \ .$$

En outre comme $B_p(0,2) \cap G$ est compact, on a

$$\inf_{\gamma \in B_p(0,2)\cap G} p(\gamma-\varphi) > 0 \ ,$$

puisque $p(\gamma-\varphi) > 0$ pour tout $\gamma \in G$. Nous avons donc prouvé que $dist_p(\varphi, G) > 0$. Ceci finit de prouver que $F \smallsetminus G$ est ouvert.

Plus généralement, si π désigne l'application canonique de F sur F/H , on a

$$G+H = \bigcup_{\gamma\in G} \gamma + H = \overset{-1}{\pi}(\pi(G)) \ .$$

Mais $\pi(G)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie dans F/H , donc est fermé par ce qui précède. Le résultat en découle, puisque π est continue. $\square$

EXERCICE (Hyperplan et la continuité des formes linéaires) Soit F un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Un sous-espace vectoriel $H \subsetneqq F$ est dit un hyperplan si $F = H + \mathbb{K}\cdot\varphi$ pour un $\varphi \in F$. Montrer :

(a) Pour tout $\varphi \in F \smallsetminus H$ on a $F = H \oplus \mathbb{K}\cdot\varphi$.

(b) Si F est un espace localement convexe séparé, alors $\overline{H} \in \{H, F\}$, i.e. H est fermé ou dense.

(a) Pour tout forme linéaire $\mu : F \longrightarrow \mathbb{K}$, $\mu \neq 0$, et tout $\varphi \in F$ tel que $\mu(\varphi) = 1$ on a

$$F = \operatorname{Ker}\mu \oplus \mathbb{K}\cdot\varphi \ .$$

En outre μ est continue si, et seulement si, $\operatorname{Ker}\mu$ est fermé.

(b) Pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\psi \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}} \psi \, d\lambda = 0 \qquad \text{et} \qquad \|\varphi-\psi\|_\infty \leqslant \varepsilon \ .$$

Signification ? Démontrer ce résultat élémentairement.

2.9 Théorème de Riesz

THEOREME *Pour qu'un espace localement convexe séparé soit de dimension finie, il faut et il suffit qu'il soit localement compact.*

Nous avons déjà vu, corollaire 2.7.(iv), que la condition est nécessaire. Réciproquement il existe une semi-norme continue p sur F telle que la boule $B := B_p(0,1)$ soit compacte. Mais comme

$$B \subset \bigcup_{\varphi \in B} \varphi + D_p\left(0, \frac{1}{2}\right) \ ,$$

il existe une partie finie $\mathcal{G} \subset B$ telle que

$$B \subset \bigcup_{\varphi \in \mathcal{G}} \varphi + D_p\left(0, \frac{1}{2}\right) \subset \bigcup_{\varphi \in \mathcal{G}} \varphi + \frac{1}{2} \cdot B \ .$$

Soit G le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par $\mathcal{G}$. Par le corollaire 2.8 il est fermé dans F , donc F/G est séparé par le théorème 2.8. L'image $\pi(B)$ de B dans F/G est donc compacte et on a

$$\pi(B) \supset B_{[p]}\left(0, \frac{1}{2}\right) \ ,$$

car si $[p]([\varphi]) \leqslant \frac{1}{2}$, il existe $\psi \in [\varphi]$ tel que $p(\psi) \leqslant 1$, donc $[\varphi] = [\psi] \in \pi(B)$. Mais

$$\pi(B) \subset \bigcup_{\varphi \in \mathcal{G}} \pi\left(\varphi + \frac{1}{2} \cdot B\right) = \frac{1}{2} \cdot \pi(B) \ ,$$

puisque $\pi(\mathcal{G}) = \{0\}$. Par récurrence on en déduit que

$$\pi(B) \subset \frac{1}{2^k} \cdot \pi(B) \ .$$

On a alors

$$2^k \cdot B_{[p]}\left(0, \frac{1}{2}\right) \subset 2^k \cdot \pi(B) \subset \pi(B) \ ,$$

ce qui montre que

$$F/G = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} 2^k \cdot B_{[p]}\left(0, \frac{1}{2}\right) = \pi(B)$$

est compact. Ceci n'est possible que si $F/G = \{0\}$, car $\gamma \in F/G \smallsetminus \{0\}$, alors $\mathbb{K} \cdot \gamma$ est fermé dans F/G , mais n'est pas compact. Ainsi $F = \overset{-1}{\pi}(\{0\}) = G$ est de dimension finie. $\square$

2.10 Espaces localement convexes finals

DEFINITION Soient $(F_j)_{j\in J}$ une famille d'espaces localement convexes, F un espace vectoriel et, pour tout $j \in J$, une application linéaire $T_j : F_j \longrightarrow F$. L'ensemble de toutes les semi-normes p sur F telles que chaque semi-norme $p \circ T_j$ soit continue sur F_j , définit un espace localement convexe dit *final (par rapport aux* T_j). On écrit $F = \varinjlim (F_j, T_j)$.

Les applications $T_j : F_j \longrightarrow F$ sont évidemment continues. En outre cette topologie jouit de la propriété *universelle* , suivante :

PROPOSITION *Soient* $F = \varinjlim (F_j, T_j)$ *et* G *un espace localement convexe.*

(i) Pour qu'une une application linéaire $T : F \longrightarrow G$ *soit continue, il faut et il suffit que, pour tout* $j \in J$ *, l'application* $T \circ T_j$ *soit continue sur* F_j *.*

$$\begin{tikzcd} F_j \arrow[r, "T_j"] \arrow[dr, "T \circ T_j"'] & F \arrow[d, "T"] \\ & G \end{tikzcd}$$

(ii) Si F *peut être plongé dans* G *, i.e. il existe une application injective* $j : F \hookrightarrow G$ *, telle que chaque* $j \circ T_j$ *soit continue, et si* G *est séparé, alors in en est de même de* F *.*

Dmonstration de (i) En effet T est continue si, et seulement si, pour toute semi-norme continue q sur G la semi-norme $q \circ T$ est continue. Mais ceci est par définition équivalent à la continuité des semi-normes $q \circ T \circ T_j$, donc à la continuité des applications $T \circ T_j$.

Dmonstration de (ii) Par (i) l'application j est continue. Pour tout $\varphi \in F \setminus \{0\}$, on a $j\varphi \neq 0$ et, puisque G est séparé, il existe par la proposition 2.5 une semi-norme continue q sur G telle que $q \circ j(\varphi) = q(j\varphi) \neq 0$. Comme $q \circ j$ est une semi-norme continue sur F , le résultat en découle à nouveau par la proposition 2.5. $\square$

REMARQUE Cette topologie est la plus fine parmi les topologies **localement convexes** qui rendent les applications T_j continues, mais ce n'est pas nécessairement la plus fine parmi toutes les topologies ayant cette propriété. En outre chaque F_j peut être séparé sans que F le soit (cf. exemple 1 et le théorème 2.8, ou exemple 6).

EXEMPLE 1 Si F est un espace localement convexe et H un sous-espace vectoriel de F , alors F/H est l'espace localement convexe final par rapport à l'application canonique

$$\pi : F \longrightarrow F/H \ .$$

En effet si p est une semi-norme continue sur F , la semi-norme $[p] \circ \pi$ est continue, puisque π est continue. Réciproquement si q est une semi-norme sur F/H telle que $q \circ \pi$ soit continue sur F , alors $q = [q \circ \pi]$, donc q est une semi-norme définissant F/H . $\square$

THEOREME *Soient* $F = \varinjlim (F_j, T_j)$ *et, pour tout* $j \in J$ *, un ensemble saturé* $\mathcal{Q}_j$ *de semi-normes définissant la topologie de* F_j *.*

(i) Pour qu'une semi-norme p *soit continue sur* F *, il faut et il suffit qu'il existe des semi-normes* $q_j \in \mathcal{Q}_j$ *et des nombres* $c_j \in \mathbb{R}_+$ *tels que*

$$p \leqslant \bigwedge_{j \in J} c_j \cdot [q_j]^\infty \ ,$$

où $[q_j]$ *désigne la semi-norme sur l'espace quotient* $F_j / \operatorname{Ker} T_j$ *identifié au sous-espace vectoriel* $\operatorname{Im}(T_j) \subset F$ *.*

(ii) Si $F = \bigcup_{j \in J} \operatorname{Im}(T_j)$ *, alors pour* $q_j \in \mathcal{Q}_j$ *et* $c_j \in \mathbb{R}_+$ *la fonctionnelle* $\bigwedge_{j \in J} c_j \cdot [q_j]^\infty$ *est une semi-norme sur* F *et l'ensemble de ces semi-normes définit la topologie de* F *.*

Dmonstration de (i) Cela découle des théorèmes 2.1.i et 2.2, puisque la continuité de p signifie que, pour tout $j \in J$, il existe une semi-norme $q_j \in \mathcal{Q}_j$ et $c_j \in \mathbb{R}_+$ tels que $p \circ T_j \leqslant c_j \cdot q_j$, c'est-à-dire que $p_{|\operatorname{Im}(T_j)} \leqslant c_j \cdot [q_j]$.

Dmonstration de (ii) Pour tout $\varphi \in F$, il existe $k \in J$ tel que $\varphi \in F_k$ et on a

$$0 \leqslant \bigwedge_{j \in J} c_j \cdot [q_j]^\infty (\varphi) \leqslant c_k \cdot [q_k] (\varphi) \leqslant c_k \cdot q_k \circ T_k (\varphi) < \infty \, ;$$

le théorème 2.1.ii montre alors que $\bigwedge_{j \in J} c_j \cdot [q_j]^\infty$ est une semi-norme. Il nous reste à montrer qu'elle est continue. Mais pour tout $k \in J$, on a

$$\bigwedge_{j \in J} c_j \cdot [q_j]^\infty \circ T_j \leqslant c_k \cdot [q_k] \circ T_k \leqslant c_k \cdot q_k \ .$$

□

EXEMPLE 2 Soit X un espace localement compact. Pour tout compact $K \in \mathfrak{K}(X)$, on désigne par $\mathcal{K}(X, K)$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues sur X ayant un support dans K , muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty,K}$. Sur $\mathcal{K}(X) = \bigcup_{K \in \mathfrak{K}(X)} \mathcal{K}(X, K)$ on considère alors la topologie localement convexe finale par rapport aux injections canoniques

$$\mathcal{K}(X, K) \hookrightarrow \mathcal{K}(X) \ .$$

On a donc $\mathcal{K}(X) = \varinjlim_{K \in \mathfrak{K}(X)} \mathcal{K}(X, K)$.

Remarquons que $\|\cdot\|_{\infty,X}$ est continue sur $\mathcal{K}(X)$, ce qui prouve que $\mathcal{K}(X)$ est séparé. On aurait aussi pu constater que les injections canoniques $\mathcal{K}(X, K) \hookrightarrow \mathcal{C}^b(X)$ sont continues et appliquer la proposition (ii). Grâce au théorème on voit que les semi-normes de la forme

$$\bigwedge_{K \in \mathfrak{K}(X)} c_K \cdot \|\cdot\|_{\infty,K}^\infty \quad \text{pour } (c_K)_{K \in \mathfrak{K}(X)} \subset \mathbb{R}_+$$

définissent la topologie de $\mathcal{K}(X)$.

EXEMPLE 3 Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, on désigne par $\mathcal{D}(X, K)$ l'espace localement convexe de toutes les fonctions indéfiniment dérivables dans X et ayant un support dans K , muni de l'ensemble de semi-normes $\left(p_{K,k|\mathcal{D}(X,K)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ (cf. exemple 2.1.5). Il est saturé car

$$p_{K,k|\mathcal{D}(X,K)} \leqslant p_{K,k+1|\mathcal{D}(X,K)} \ .$$

Sur

$$\mathcal{D}(X) = \bigcup_{K \in \mathfrak{K}(X)} \mathcal{D}(X, K) \ ,$$

l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, on considère alors la topologie localement convexe finale par rapport aux injections canoniques

$$\mathcal{D}(X, K) \hookrightarrow \mathcal{D}(X) \ .$$

On a donc $\mathcal{D}(X) = \underrightarrow{\lim}_{K \in \mathfrak{K}(X)} \mathcal{D}(X, K)$.

Le même raisonnement que ci-dessus prouve que $\mathcal{D}(X)$ est aussi séparé, ou mieux que l'injection canonique $\mathcal{D}(X) \hookrightarrow \mathcal{K}(X)$ est continue, et que les semi-normes de la forme

$$\bigwedge_{K \in \mathfrak{K}(X)} c_K \cdot \left(p_{K,k_K|\mathcal{D}(X,K)}\right)^{\infty} \quad \text{pour } \ (c_K)_{K \in \mathfrak{K}(X)} \subset \mathbb{R}_+ \text{ et } \ (k_K)_{K \in \mathfrak{K}(X)} \subset \mathbb{N}$$

définissent la topologie de $\mathcal{D}(X)$.

EXEMPLE 4 La structure localement convexe la plus fine sur F , i.e. celle définie par toutes les semi-normes sur F et notée F_{fine} , est évidemment finale par rapport aux injections

$$H \hookrightarrow F \ ,$$

où H est un sous-espace vectoriel de dimension fine de F . Toute application linéaire de F_{fine} dans un espace localement convexe est continue.

Si X est un ensemble muni de la métrique discrète, alors $\mathfrak{K}(X)$ est l'ensemble $\mathfrak{P}^f(X)$ des parties finies de X et $\mathcal{K}(X)$ s'identifie à l'ensemble $\mathbb{K}^{(X)}$ des familles $(\varphi(x))_{x \in X}$ à support fini, i.e. telles que $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in X$ sauf un nombre fini. Puisque pour toute partie finie K de X , l'espace de Banach $\mathcal{K}(X, K)$ s'identifie à $\left(\mathbb{K}^K, \|\cdot\|_\infty\right)$, qui est de dimension finie, on voit que $\mathcal{K}(X) = \mathbb{K}^{(X)}$ est muni de la topologie localement convexe la plus fine. On dit que $\left(1_{\{x\}}\right)_{x \in X}$ est la *base canonique* de $\mathbb{K}^{(X)}$. On a évidemment

$$1_{\{x\}}(y) := \delta_{x,y} \quad \text{pour tout } x, y \in X \ ,$$

ainsi que

$$\varphi = \sum_{x \in X} \varphi(x) \cdot 1_{\{x\}} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathbb{K}^{(X)} \ ,$$

la somme ne portant que sur un nombre fini d'indices.

Si $(\epsilon_x)_{x \in X}$ est une base algébrique de F , alors

$$\varphi \longmapsto \sum_{x \in X} \varphi(x) \cdot \epsilon_x : \mathbb{K}^{(X)} \longrightarrow F_{fine} \ .$$

est un isomorphisme.

EXEMPLE 5 Plus généralement si $(F_j)_{j \in J}$ est une famille d'espace localement convexes, la *somme directe topologique (externe)* $\overset{top}{\bigoplus}_{j \in J} F_j$, ensemble des familles $\left(\varphi_j\right)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} F_j$ à support fini, est l'espace localement convexe final par rapport aux injections canoniques $F_k \hookrightarrow \bigoplus_{j \in J} F_j$.

Si $(F_j)_{j\in J}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de F , on dit que F est la somme directe topologique des F_j et on écrit $F = \overset{top}{\bigoplus_{j\in J}} F_j$, si l'application canonique

$$\overset{top}{\bigoplus_{j\in J}} F_j \longrightarrow F : (\varphi_j)_{j\in J} \longmapsto \sum_{j\in J} \varphi_j$$

est un isomorphisme.

COROLLAIRE *Si F et G sont des espaces localement convexes alors $F \overset{top}{\oplus} G$ est isomorphe à $F \times G$.*

L'application canonique $F \overset{top}{\oplus} G \longrightarrow F \times G$ est continue par la proposition. D'autre part si p est une semi-norme continue sur $F \overset{top}{\oplus} G$, alors $p_{|F}$ et $p_{|G}$ sont des semi-normes continues sur F et G respectivement, donc $p_{|F} \times_1 p_{|G}$ est une semi-norme continue sur $F \times G$. Mais comme

$$p(\varphi + \gamma) \leqslant p(\varphi) + p(\gamma) = p_{|F} \times_1 p_{|G}(\varphi, \gamma)$$

l'application canonique $F \times G \longrightarrow F \overset{top}{\oplus} G$ est continue. ——— □

EXEMPLE 6 Soient F un espace vectoriel et $G, H \subset F$ des sous-espaces vectoriels muni de normes $\|\cdot\|_G$ et $\|\cdot\|_H$. Alors l'espace localement convexe final par rapport aux deux injections canoniques $G \hookrightarrow F$ et $H \hookrightarrow F$ est semi-normable par la semi-norme

$$\|\varphi\|_{G+H} = \inf_{\gamma\in G, \psi\in H, \varphi=\gamma+\psi} \|\gamma\|_G + \|\psi\|_H \ .$$

Nous le noterons $G + H$ (cf.exemple 2.1.7).

Si F est un espace localement convexe séparé et les injections canoniques continues, alors $\|\cdot\|_{G+H}$ est une norme.

La première partie est immédiate par le théorème. Pour la seconde, la propriété universelle montre que l'injection canonique $G + H \hookrightarrow F$ est continue ; il est alors clair que $G + H$ est séparé ——— □

EXEMPLE 7 Voici un exemple montrant que $\|\cdot\|_{G+H}$ n'est pas nécessairement une norme.

Dans $\mathcal{K}(\mathbb{N})$ on considère les vecteurs $\epsilon_{k,\pm} := e_0 \pm e_k$ pour $k \geqslant 1$ et on pose $F_\pm := \operatorname{lin}(\epsilon_{k,\pm} \ , \ k \geqslant 1)$. On vérifie immédiatement que les deux suites $(\epsilon_{k,\pm})_{k\geqslant 1}$ sont linéairement indépendantes et on munit $F_\pm$ de la norme $\|\cdot\|_\pm$ définie par

$$\left\| \sum_{l=1}^n c_{k,\pm} \cdot \epsilon_{k,\pm} \right\|_\pm^2 := \sum_{k=1}^n |c_{k,\pm}|^2 \ .$$

On vérifie immédiatement que

$$e_0 = \left(\sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \right)^{-1} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot (\epsilon_{k,+} + \epsilon_{k,-}) \in F_+ + F_-$$

et

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \right)^{-1} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot \epsilon_{k,\pm} \right\|_\pm^2 = \left(\sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \right)^{-2} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \to 0 \ ,$$

lorsque $k \to \infty$. Ceci prouve que

$$\|e_0\|_{F_+ + F_-} = 0 \ .$$

Remarquons que les injections canoniques $F_\pm \hookrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{N})$ ne sont pas continues, car par exemple

$$\varepsilon_0 : \mathcal{K}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto \varphi(0)$$

est continue, mais

$$\varepsilon_{0|F_\pm} : F_\pm \longrightarrow \mathbb{K} : \sum_{l=1}^n c_{k,\pm} \cdot \epsilon_{k,\pm} \longmapsto \sum_{k=1}^n c_{k,\pm}$$

ne l'est pas. Finalement on a

$$F_+ \cap F_- = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k \cdot e_k \ \middle| \ \sum_{k=1}^n c_k = 0 \right\} \ .$$

EXERCICE Soient F un espace vectoriel et $G, H \subset F$ des sous-espaces vectoriels muni de normes $\|\cdot\|_G$ et $\|\cdot\|_H$.

(a) Si $G + H$ est séparé, montrer que $G + H$ est complet si G et H le sont. Réciproque ?

(b) Si la somme $G + H$ est directe, comparer $G + H$ et $G \times H$.

2.11 Espaces de Fréchet

DEFINITION 1 On dit qu'un espace localement convexe F est un *espace* (localement convexe) *de Fréchet* s'il est métrisable et complet.

THEOREME *Pour qu'un espace localement convexe soit métrisable, il faut et il suffit qu'il soit séparé et puisse être défini par une suite de semi-normes.*

On montre facilement que si $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de semi-normes définissant la topologie de F , alors

$$d(\varphi,\psi) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{k+1} \cdot \min\left(p_k(\varphi-\psi), 1\right)$$

définit une métrique sur F définissant cette topologie. La réciproque est facile. Les détails sont laissés en exercice. □

EXEMPLE Voici des exemples d'espaces de Fréchet.

(a) Les espaces de Banach évidemment.

(b) L'espace $\mathcal{E}(X)$ (exemple 2.5.5). Remarquons tout d'abord que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble

$$K_k := B(0,k) \cap \left\{ d(\cdot, \mathbb{R}^n \smallsetminus X) \geqslant \frac{1}{k} \right\}$$

est compact et que

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} D(0,k) \cap \left\{ d(\cdot, \mathbb{R}^n \smallsetminus X) > \frac{1}{k} \right\} .$$

On en déduit que si K est une partie compacte de X , alors

$$K \subset D(0,k) \cap \left\{ d(\cdot, \mathbb{R}^n \smallsetminus X) > \frac{1}{k} \right\} \subset K_k$$

pour un certain k . Ceci montre que les semi-normes $p_{K_k,k}$ engendrent la topologie de $\mathcal{E}(X)$.

(c) L'espace de Schwartz (exercice 2.5).

(d) Les espaces $\mathcal{D}(X,K)$ (exemple 2.10.3).

LEMME *Soit* $(\alpha_j)_{j\in J} \subset \mathbb{R}_+$ *une famille de nombres réels positifs. Pour que* $(\alpha_j)_{j\in J}$ *soit sommable dans* $\mathbb{R}$ *, il faut et il suffit que*

$$\sup_{K\in\mathfrak{K}(J)} \sum_{j\in K} |\alpha_j| < \infty .$$

Dans ce cas

$$\sum_{j\in J} \alpha_j = \sup_{K\in\mathfrak{K}(J)} \sum_{j\in K} \alpha_j .$$

Si $(\alpha_j)_{j\in J}$ est sommable de somme α , il existe $K_1 \in \mathfrak{K}(J)$ tel que

$$\sum_{j\in L} \alpha_j \leqslant \left| \sum_{j\in L} \alpha_j - \alpha \right| + |\alpha| \leqslant 1 + |\alpha|$$

pour toute partie finie $L \supset K_1$, ce qui montre que

$$\sup\nolimits_{K\in\mathfrak{K}(J)} \sum_{j\in K} \alpha_j \leqslant 1 + |\alpha| < \infty \ .$$

Réciproquement, pour tout $\varepsilon > 0$, la propriété d'approximation du supremum montre qu'il existe $K_\varepsilon \in \mathfrak{K}(J)$ tel que, pour tout $L \in \mathfrak{K}(J)$ tel que $L \supset K_\varepsilon$, on ait

$$\sup\nolimits_{K\in\mathfrak{K}(J)} \sum_{j\in K} \alpha_j \geqslant \sum_{j\in L} \alpha_j \geqslant \left(\sup\nolimits_{K\in\mathfrak{K}(J)} \sum_{j\in K} \alpha_j \right) - \varepsilon \ .$$

Ceci prouve que $(\alpha_j)_{j\in J}$ est sommable de somme $\sup_{K\in\mathfrak{K}(J)} \sum_{j\in K} \alpha_j$. □

COROLLAIRE *Soit F un espace de Fréchet.*

(i) Si $(\varphi_j)_{j\in J} \subset F$ est sommable, alors $\{ j \in J \mid \varphi_j \neq 0 \}$ est dénombrable ; si D est une partie dénombrable contenant cet ensemble et $\sigma : I \longrightarrow D$ est une énumération, la série $\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{\sigma(l)}$ est convergente de somme $\sum_{j\in J} \varphi_j$.

(ii) Si F est de dimension finie, toute famille sommable est absolument sommable.

Considérons une suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de semi-normes définissant la topologie de F .

Dmonstration de (i) Soit $(\varphi_j)_{j\in J} \subset F$ une famille sommable. Le citère de Cauchy 2.6 montre que l'ensemble

$$\left\{ j \in J \ \middle|\ p_k(\varphi_j) > \frac{1}{k} \right\}$$

est fini, donc que $\{ j \in J \mid p_k(\varphi_j) \neq 0 \}$ est dénombrable. Par la proposition 2.5 on a

$$\{ j \in J \mid \varphi_j \neq 0 \} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{ j \in J \mid p_k(\varphi_j) \neq 0 \} \ ,$$

d'où le résultat par la proposition 3.6.

Dmonstration de (ii) Soit $(\varphi_j)_{j\in J}$ une famille sommable dans F , que nous supposons de dimension finie. Il est donc isomorphe à $\mathbb{K}^n$ et la considération des composantes, puis des parties réelles et imaginaires, nous ramène au cas réel (cf. remarque 2.4.1). Par le critère de Cauchy 2.6, les sous-familles $(\varphi_j)_{j\in J,\varphi_j>0}$ et $(-\varphi_j)_{j\in J,\varphi_j<0}$ sont aussi sommables. Le lemme montre alors que

$$\sum_{j\in K} |\varphi_j| = \sum_{j\in K,\varphi_j>0} \varphi_j + \sum_{j\in K,\varphi_j<0} (-\varphi_j) < \infty \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

REMARQUE 1 Toute base algébrique d'un espace de Fréchet F est non-dénombrable.

En effet soient $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base algébrique de F et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite, que nous pouvons supposer croissante, de semi-normes définissant la topologie de F et telle que $p_k(\epsilon_k) > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Définissons une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ par récurrence de la manière suivante :

$$\alpha_0 := 1 \quad \text{et, pour tout } k \in \mathbb{N} \ , \quad \alpha_{k+1} := \frac{dist_{p_k}\left(\alpha_k \cdot \epsilon_k, \operatorname{lin}_{j=0,\ldots,k-1} \epsilon_j\right)}{3 \cdot p_{k+1}\left(\epsilon_{k+1}\right)} \ ,$$

où $\operatorname{lin}_{j=0,\ldots,-1} \epsilon_j = \{0\}$. Mais $p_{k+1}\left(\alpha_{k+1} \cdot \epsilon_{k+1}\right) \leqslant \frac{1}{3} \cdot p_k\left(\alpha_k \cdot \epsilon_k\right)$, donc $p_{k+l}\left(\alpha_{k+l} \cdot \epsilon_{k+l}\right) \leqslant \frac{1}{3^l} \cdot p_k\left(\alpha_k \cdot \epsilon_k\right)$; la série $\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \cdot \epsilon_l$ est donc abolument convergente, puisque

$$\sum_{l=k}^{\infty} p_k\left(\alpha_l \cdot \epsilon_l\right) \leqslant \sum_{l=k}^{\infty} p_l\left(\alpha_l \cdot \epsilon_l\right) \leqslant \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{3^l} \cdot p_k\left(\alpha_k \cdot \epsilon_k\right) < \infty \ .$$

Elle est donc convergente et, pour tout $(c_j)_{j=0,\ldots,N} \subset \mathbb{K}$, on a

$$p_{N+1}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \cdot \epsilon_l - \sum_{l=0}^{N} c_l \cdot \epsilon_l\right) \geqslant$$

$$\geqslant p_{N+1}\left(\alpha_{N+1} \cdot \epsilon_{N+1} - \left(\sum_{l=0}^{N} c_l \cdot \epsilon_l - \sum_{l=0}^{N} \alpha_l \cdot \epsilon_l\right)\right) - \sum_{l=N+2}^{\infty} p_{N+1}\left(\alpha_l \cdot \epsilon_l\right) \geqslant$$

$$\geqslant dist_{p_{N+1}}\left(\alpha_{N+1} \cdot \epsilon_{N+1}, \operatorname{lin}_{j=0,\ldots,N} \epsilon_j\right) - \sum_{l=N+2}^{\infty} \frac{1}{3^{l-N-2}} \cdot p_{N+2}\left(\alpha_{N+2} \cdot \epsilon_{N+2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant dist_{p_{N+1}}\left(\alpha_{N+1} \cdot \epsilon_{N+1}, \operatorname{lin}_{j=0,\ldots,N} \epsilon_j\right) - \sum_{l=N+2}^{\infty} \frac{1}{3^{l-N-1}} \cdot dist_{p_{N+1}}\left(\alpha_{N+1} \cdot \epsilon_{N+1}, \operatorname{lin}_{j=0,\ldots,N} \epsilon_j\right) =$$

$$= dist_{p_{N+1}}\left(\alpha_{N+1} \cdot \epsilon_{N+1}, \operatorname{lin}_{j=0,\ldots,N} \epsilon_j\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)}\right) =$$

$$= \frac{dist_{p_{N+1}}\left(\alpha_{N+1} \cdot \epsilon_{N+1}, \operatorname{lin}_{j=0,\ldots,N} \epsilon_j\right)}{2} > 0 \ .$$

Ceci montre que $\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \cdot \epsilon_l \notin \operatorname{lin}_{j=0,\ldots,N} \epsilon_j$, quel que soit $N \in \mathbb{N}$, ce qui est absurde puisque $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base algébrique de F . □

REMARQUE 2 Dvoretzky et Rogers [8] ont montré que dans un espace de Banach de dimension infinie, pour toute suite sommable $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$, il existe une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sommable telle que $\left\|\varphi_k\right\|^2 = \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

En appliquant ce résultat à $\alpha_k := \frac{1}{k \cdot \ln^2 k}$ pour $k \geqslant 2$, pour tout $p \in [1, 2[$, on a

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left\|\varphi_k\right\|^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln^2 k} < \infty \ ,$$

puisque la fonction décroissante $x \longmapsto \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} : [2, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable :

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^{\infty} = \ln 2$$

(cf. cours d'Analyse [17], Corollaire 9.17). D'autre part

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left\|\varphi_k\right\|^p = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k \cdot \ln^2 k}\right)^{\frac{p}{2}} \geqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^{1-\frac{p}{2}}}{\ln^p k} \cdot \frac{1}{k} = \infty \ ,$$

car

$$\lim_k \frac{k^{1-\frac{p}{2}}}{\ln^p k} = \lim_{u\to\infty} \frac{e^{\left(1-\frac{p}{2}\right)\cdot u}}{u^k} = \infty \ ,$$

puisque $1 - \frac{p}{2} > 0$. Voir aussi Bourbaki [3], §1, Exercice 14, EVT V.62, ainsi que les exercices 3, p.59, 12 et 13, p. 62 qui précèdent.

Plus généralement, on peut montrer que toute suite sommable est absolument sommable dans un espace de Fréchet si, et seulement si, il est nucléaire. En outre tout espace de Banach nucléaire est de dimension finie.

2.12 Le théorème de Baire

Dans le paragraphe suivant nous aurons besoin d'un corollaire au résultat suivant :

THEOREME *Soit X un espace métrique complet. Alors l'intersection d'une suite d'ouverts denses est dense.*

Si $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite d'ouverts denses, il nous suffit de montrer que, pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, on a

$$B(x,\varepsilon) \cap \left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k \right) \neq \emptyset \ .$$

Posons $x_0 := x$ et $\varepsilon_0 := \min(\varepsilon, 1)$. Comme $D(x_0, \varepsilon_0) \cap U_0$ est un ouvert non-vide, il existe $x_1 \in X$ et $\varepsilon_1 > 0$ tels que l'on ait $\varepsilon_1 \leqslant \frac{1}{2}$ et

$$B(x_1, \varepsilon_1) \subset D(x_0, \varepsilon_0) \cap U_0 \ .$$

On construit de cette manière, par récurrence, une suite décroissante $(B(x_k, \varepsilon_k))_{k\in\mathbb{N}}$ de boule fermées telles que

$$0 < \varepsilon_k \leqslant \frac{1}{2^k} \quad \text{et} \quad B(x_{k+1}, \varepsilon_{k+1}) \subset D(x_k, \varepsilon_k) \cap U_k \ .$$

La suite $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, car pour $k < l$, on a

$$d(x_k, x_l) \leqslant \sum_{j=k}^{l-1} d(x_j, x_{j+1}) \leqslant \sum_{j=k}^{l-1} \frac{1}{2^j} \ .$$

Comme $x_l \in B(x_k, \varepsilon_k)$ pour tout $l \geqslant k$, il vient

$$\lim\nolimits_l x_l \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} B(x_k, \varepsilon_k) \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} D(x_k, \varepsilon_k) \cap U_k \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(x, \varepsilon) \cap U_k = B(x,\varepsilon) \cap \left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k \right) \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

APPLICATION Le théorème de Baire permet souvent de prouver l'existence de beaucoup d'éléments d'un espace métrique complet n'ayant pas une certaine propriété.

Pour cela il suffit que l'ensemble E des éléments ayant cette propriété soit contenu dans une réunion dénombrable

$$E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$$

telle que chaque A_k soit fermé et sans point intérieur, i.e. $\overset{\circ}{A_k} = \emptyset$. Son complémentaire $\complement E$ est alors dense, donc contient beaucoup d'éléments !

En effet

$$\complement E \supset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \complement A_k$$

et chaque $\complement A_k$ est un ouvert dense de X , puisque

$$\overline{\complement A_k} = \complement A_k^\circ = \complement \emptyset = X \ .$$

□

EXERCICE 1 L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ qui sont nulle part dérivables est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$.

Il suffit de considérer les ensembles

$$A_k := \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \;\middle|\; \exists t \in [0,1] \text{ tel que } \sup\nolimits_{s\in[0,1]\setminus\{t\}} \left| \frac{f(s) - f(t)}{s-t} \right| \leqslant k \right\} \ .$$

COROLLAIRE *Soit X un espace métrique complet.*

(i) Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles fermés telle que $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, alors il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que A_k soit d'intérieur non-vide.

(ii) Si $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty[$ est une fonction s.c.i., alors il existe un ouvert non-vide U tel que

$$\sup\nolimits_{x\in U} f(x) < \infty \ .$$

Dmonstration de (i) Si chaque A_k est d'intérieur vide, alors $\complement A_k$ est un ouvert dense, donc

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \complement A_k = \complement \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \complement X = \emptyset$$

est dense, ce qui est évidemment absurde.

Dmonstration de (ii) Il suffit, pour $k \in \mathbb{N}$, de poser $A_k := \{f \leqslant k\}$, qui est un ensemble fermé puisque f est s.c.i. ; on a $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, car f ne prend pas la valeur ∞ . Il suffit de poser $U := (A_k)^\circ$ pour le k tel que $(A_k)^\circ \neq \emptyset$. □

2.13 Espaces tonnelés

DEFINITION Nous dirons qu'un espace localement convexe F est *tonnelé* s'il est séparé et si toute semi-norme semi-continue inférieurement (s.c.i.) sur F est continue.

THEOREME *Tout espace de Fréchet est tonnelé.*

Soit donc q une semi-norme s.c.i. sur F . Par le corollaire 2.12.ii, il existe $\varphi \in F$ et une semi-norme continue p sur F telle que $B_p(\varphi, 1) \subset \{q \leqslant k\}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $\psi \in B_p(0, 1)$, il vient alors $\varphi, \varphi - \psi \in B_p(\varphi, 1)$, donc

$$q(\psi) \leqslant q(\psi - \varphi) + q(\varphi) \leqslant 2k \ ,$$

d'où le résultat par le corollaire 2.2.iii. □

PROPOSITION *Si F est un espace localement convexe séparé, final par rapport aux applications linéaires $T_j : F_j \longrightarrow F$, et si chaque F_j est tonnelé, alors F est tonnelé.*

Les applications linéaires T_j étant continues par définition, si q est une semi-norme s.c.i. sur F , alors $q \circ T_j$ en est une sur F_j , puisque pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, on a

$$\{q \circ T_j > \gamma\} = \overset{-1}{T_j}(\{q > \gamma\}) \ .$$

Comme F_j est tonnelé, chaque $q \circ T_j$ est continue, donc q est continue par définition. □

EXEMPLE 1 Les espaces de Banach, l'espace $\mathcal{E}(X)$ et l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sont tonnelés (cf. exemples 2.11.a à 2.11.d).

EXEMPLE 2 Si X est un espace localement compact, alors $\mathcal{K}(X)$ est tonnelé (cf. exemple 2.10.2).

EXEMPLE 3 Si X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathcal{D}(X)$ est tonnelé (cf. exemple 2.10.3).

EXEMPLE 4 Si F est un espace vectoriel, alors F_{fine} est tonnelé (cf. exemple 2.10.4).

Nous utiliserons essentiellement la propriété d'être tonnelé de la manière suivante :

SCOLIE *Si F est un espace tonnelé et si $\mathcal{Q}$ est une famille de semi-normes s.c.i. telles que*

$$p(\varphi) := \sup_{q \in \mathcal{Q}} q(\varphi) < \infty \quad \textit{pour tout } \varphi \in F \ ,$$

alors p est une semi-norme continue sur F .

C'est immédiat, l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions s.c.i. étant s.c.i. et celle de semi-normes étant une semi-norme, pour autant qu'elle soit finie. □

2.14 Produit tensoriel topologique inductif

Notre but est d'introduire le formalisme des vecteurs *bra* et *ket* de Dirac. Nous aurons besoin d'une part de la notion de semi-dualité, traîtée en 3.4, et d'autre part de celle de produit tensoriel. C'est la solution d'un problème *universel* pour les applications bilinéaires. Pour nos besoins il est préférable de considérer les applications sesquilinéaires.

THEOREME *Soient F, G, H des espaces vectoriels. Il existe un espace vectoriel, que nous noterons $|F\rangle\langle G|$, et une application sesquilinéaire à droite*

$$\bowtie \ : (\varphi,\gamma) \longmapsto |\varphi\rangle\langle\gamma| : F\times G \longrightarrow |F\rangle\langle G|$$

tels que toute application sesquilinéaire à droite, respectivement à gauche, $\mathfrak{s}$ de $F\times G$ dans H se factorise univoquement en une application linéaire, respectivement semi-linéaire, $\widetilde{\mathfrak{s}}$ de $|F\rangle\langle G|$ dans H :

$$\begin{tikzcd} F\times G \arrow[r, "\mathfrak{s}"] \arrow[d, "\bowtie"'] & H \\ |F\rangle\langle G| \arrow[ur, "\widetilde{\mathfrak{s}}"'] & \end{tikzcd}$$

i.e. telle que

$$\mathfrak{s}(\varphi,\gamma) = \widetilde{\mathfrak{s}}(|\varphi\rangle\langle\gamma|) \quad \textit{pour tout } \varphi\in F \textit{ et } \gamma\in G \ .$$

L'espace vectoriel $|F\rangle\langle G|$ et l'application sesquilinéaire à droite $\bowtie$ sont uniques à isomorphisme près.

L'unicité est immédiate, car si E et $\mathfrak{e}$ sont aussi solution de ce problème universel, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & F\times G \arrow[dl, "\bowtie"'] \arrow[d, "\mathfrak{e}"] \arrow[dr, "\bowtie"] & \\ |F\rangle\langle G| \arrow[r, "\widetilde{\mathfrak{e}}"] & E \arrow[r, "\widetilde{\bowtie}"] & |F\rangle\langle G| \end{tikzcd} \qquad ,$$

donc $\widetilde{\bowtie} \circ \widetilde{\mathfrak{e}} = \mathrm{Id}_{F\bowtie G}$ par l'unicité de la factorisation. On prouve de même que $\widetilde{\mathfrak{e}} \circ \widetilde{\bowtie} = \mathrm{Id}_E$.

Pour l'existence, on considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{(F\times G)}$ formé des famille $(c_{\varphi,\gamma})_{(\varphi,\gamma)\in F\times G}$ à support fini et sa base canonique $\left(1_{\{(\varphi,\gamma)\}}\right)_{(\varphi,\gamma)\in F\times G}$ (cf. exemple 2.10.4). Désignons par N le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{(F\times G)}$ engendré par les éléments de la forme

$$1_{\{(\varphi_1+\varphi_2,\gamma)\}} - 1_{\{(\varphi_1,\gamma)\}} - 1_{\{(\varphi_2,\gamma)\}} \ ,$$

$$1_{\{(\varphi,\gamma_1+\gamma_2)\}} - 1_{\{(\varphi,\gamma_1)\}} - 1_{\{(\varphi,\gamma_2)\}} \ ,$$

$$1_{\{(\alpha\cdot\varphi,\gamma)\}} - \alpha\cdot 1_{\{(\varphi,\gamma)\}}$$

et

$$1_{\{(\varphi,\alpha\cdot\gamma)\}} - \bar{\alpha}\cdot 1_{\{(\varphi,\gamma)\}}$$

pour $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in F$, $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in G$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On pose

$$|F\rangle\langle G| := \mathbb{K}^{(F\times G)} / N$$

et

$$\bowtie \; : (\varphi, \gamma) \longmapsto e_{\varphi,\gamma} \longmapsto |\varphi\rangle\langle\gamma| := e_{\varphi,\gamma} + N : F \times G \longrightarrow \mathbb{K}^{(F\times G)} \longrightarrow |F\rangle\langle G| \ .$$

Il est clair que $\bowtie$ est sesquilinéaire à droite, puisque

$$|\varphi_1 + \varphi_2\rangle\langle\gamma| := 1_{\{(\varphi_1+\varphi_2,\gamma)\}} + N = 1_{\{(\varphi_1,\gamma)\}} + 1_{\{(\varphi_2,\gamma)\}} + N = |\varphi_1\rangle\langle\gamma| + |\varphi_2\rangle\langle\gamma| \ ,$$

$$|\varphi\rangle\langle\gamma_1 + \gamma_2| = 1_{\{(\varphi,\gamma_1+\gamma_2)\}} + N = 1_{\{(\varphi,\gamma_1)\}} + 1_{\{(\varphi,\gamma_2)\}} + N = |\varphi\rangle\langle\gamma_1| + |\varphi\rangle\langle\gamma_2| \ ,$$

$$|\alpha\cdot\varphi\rangle\langle\gamma| := 1_{\{(\alpha\cdot\varphi,\gamma)\}} + N = \alpha\cdot 1_{\{(\varphi,\gamma)\}} + N = \alpha\cdot|\varphi\rangle\langle\gamma|$$

et

$$|\varphi\rangle\langle\alpha\cdot\gamma| := 1_{\{(\varphi,\alpha\cdot\gamma)\}} + N = \bar{\alpha}\cdot 1_{\{(\varphi,\gamma)\}} + N = \bar{\alpha}\cdot|\varphi\rangle\langle\gamma| \ .$$

Si $\mathfrak{s} : F \times G \longrightarrow H$ est une application sesquilinéaire à droite, respectivement à gauche, alors

$$S : \mathbb{K}^{(F\times G)} \longrightarrow H : (c_{\varphi,\gamma})_{(\varphi,\gamma)\in F\times G} = \sum_{(\varphi,\gamma)\in F\times G} c_{\varphi,\gamma}\cdot 1_{\{(\varphi,\gamma)\}} \longmapsto \sum_{(\varphi,\gamma)\in F\times G} c_{\varphi,\gamma}\cdot\mathfrak{s}(\varphi,\gamma)$$

est l'unique application linéaire, respectivement semi-linéaire, valant $\mathfrak{s}(\varphi,\gamma)$ sur l'élément de base $1_{\{(\varphi,\gamma)\}}$. La sesquilinéarité de $\mathfrak{s}$ montre que S s'annule sur N , donc qu'elle se factorise en une unique application linéaire, respectivement semi-linéaire, $\widetilde{\mathfrak{s}} : |F\rangle\langle G| \longrightarrow H$ telle que

$$\widetilde{\mathfrak{s}}(|\varphi\rangle\langle\gamma|) = Se_{\varphi,\gamma} = \mathfrak{s}(\varphi,\gamma) \ .$$

$\square$

DEFINITION 1 On dit que $|F\rangle\langle G|$ est le *produit tensoriel (semi-linéaire à droite)* de F et G et que $\bowtie \; : F \times G \longrightarrow |F\rangle\langle G|$ est l' *application canonique* . Un élément de $|F\rangle\langle G|$ s'appelle *tenseur* , et il est dit *élémentaire* s'il est de la forme $|\varphi\rangle\langle\gamma|$.

Si F, G sont des espaces localement convexes, on dit que $|F\rangle\langle G|$, munit de la topologie localement convexe finale par rapport aux applications linéaires

$$\varphi \longmapsto |\varphi\rangle\langle\gamma| : F \longrightarrow |F\rangle\langle G| \quad \text{pour } \gamma \in G$$

et aux applications semi-linéaires

$$\gamma \longmapsto |\varphi\rangle\langle\gamma| : G \longrightarrow |F\rangle\langle G| \quad \text{pour } \varphi \in F \ ,$$

est le *produit tensoriel (topologique) inductif* de F et G . On le note $|F\rangle_i\langle G|$.

REMARQUE On peut considérer le problème universel analogue pour les applications bilinéaires et les applications sesquilinéaires (à gauche). Les solutions sont notées respectivement

$$\otimes : F \times G \longrightarrow F \otimes G : (\varphi,\gamma) \longmapsto \varphi \otimes \gamma$$

et

$$\triangleleft\!\triangleright \; : F \times G \longrightarrow \langle F| \cdot |G\rangle : (\varphi,\gamma) \longmapsto \langle\varphi| \cdot |\gamma\rangle \ .$$

Comme ci-dessus on définit $F \otimes_i G$ et $\langle F| \cdot_i |G\rangle$.

LEMME *Tout tenseur $t \in |F\rangle\langle G|$ s'écrit, de plusieurs manières, comme combinaison linéaire (finie) de tenseurs élémentaires*

$$t = \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j\rangle\langle\gamma_j| \ ,$$

où $(\varphi_j)_{j=1,\ldots,n} \subset F$ et $(\gamma_j)_{j=1,\ldots,n} \subset G$. On peut supposer que $(\gamma_j)_{j=1,\ldots,n}$ est libre. Dans ce cas $(\varphi_j)_{j=1,\ldots,n}$ est univoquement déterminée.

En effet, en choisissant une base algébrique $(\epsilon_l)_{l=1,\ldots,m}$ de $\sum_{j=1}^{n} \mathbb{K}\cdot\gamma_j$, on peut écrire

$$\gamma_j = \sum_{l=1}^{m} c_{j,l}\cdot\epsilon_l \ ,$$

donc

$$t = \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j\rangle \left\langle \sum_{l=1}^{m} c_{j,l}\cdot\epsilon_l \right| = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} \overline{c_{j,l}}\cdot|\varphi_j\rangle\langle\epsilon_l| = \sum_{l=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} \overline{c_{j,l}}\cdot\varphi_j \right\rangle \langle\epsilon_l| \ .$$

Pour l'unicité il nous suffit de montrer que l'application linéaire

$$\Phi : F^m \longrightarrow \left|F\right\rangle \left\langle \sum_{l=1}^{m} \mathbb{K}\cdot\epsilon_l \right| : (\varphi_l)_{l=1,\ldots,m} \longmapsto \sum_{l=1}^{m} |\varphi_l\rangle\langle\epsilon_l|$$

est injective. Remarquons que le calcul ci-dessus montre qu'elle est surjective. Considérons l'application

$$\mathfrak{s} : F \times \sum_{l=1}^{m} \mathbb{K}\cdot\epsilon_l \longrightarrow F^m : \left(\varphi, \sum_{l=1}^{m} c_l\cdot\epsilon_l\right) \longmapsto (\overline{c_l}\cdot\varphi)_{l=1,\ldots,m} \ ;$$

elle est sesquilinéaire à droite, donc se factorise en une application linéaire

$$\widetilde{\mathfrak{s}} : \left|F\right\rangle \left\langle \sum_{l=1}^{m} \mathbb{K}\cdot\epsilon_l \right| \longrightarrow F^m \ ,$$

et on a

$$\widetilde{\mathfrak{s}}\circ\Phi\left((\varphi_l)_{l=1,\ldots,m}\right) = \widetilde{\mathfrak{s}}\left(\sum_{l=1}^{m} |\varphi_l\rangle\langle\epsilon_l|\right) = \sum_{l=1}^{m} \widetilde{\mathfrak{s}}\left(|\varphi_l\rangle\langle\epsilon_l|\right) = \sum_{l=1}^{m} \mathfrak{s}\left(\varphi_l, \epsilon_l\right) = (\varphi_l)_{l=1,\ldots,m} \ .$$

Ceci prouve que $\widetilde{\mathfrak{s}}\circ\Phi = \mathrm{Id}_{F^m}$, et par suite notre assertion. □

PROPOSITION

(i) ***Propriété universelle du produit tensoriel inductif*** *L'application canonique $\bowtie : F \times G \longrightarrow |F\rangle_i\langle G|$ est séparément continue et, pour qu'une application sesquilinéaire à droite $\mathfrak{s}$ de $F \times G$ dans un espace localement convexe H soit séparément continue, il faut et il suffit que l'application linéaire $\widetilde{\mathfrak{s}} : |F\rangle_i\langle G| \longrightarrow H$ soit continue.*

(ii) Soient $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$ des espaces localement convexes et $S : F \longrightarrow \widetilde{F}$, $T : G \longrightarrow \widetilde{G}$ des applications linéaires. Il existe une unique application linéaire

$$|S\rangle\langle T| : |F\rangle\langle G| \longrightarrow \left|\widetilde{F}\right\rangle\left\langle\widetilde{G}\right|$$

telle que

$$|S\rangle\langle T|\Big(|\varphi\rangle\langle\gamma|\Big) = |S\varphi\rangle\langle T\gamma| \quad \textit{pour tout } \varphi \in F \textit{ et } \gamma \in G\ .$$

Si S et T sont injectives, respectivement continues, il en est de même de $|S\rangle\langle T|$.

Dmonstration de (i) C'est immédiat par la proposition 2.10.

Dmonstration de (ii) L'application

$$\widetilde{\bowtie} \circ (S,T) : F \times G \longrightarrow \widetilde{F} \times \widetilde{G} \longrightarrow \left|\widetilde{F}\right\rangle\left\langle\widetilde{G}\right| \ .$$

est sesquilinéaire à droite, donc définit une application linéaire $|S\rangle\langle T|$ ayant la propriété citée.

L'injectivité découle immédiatement du lemme. En effet si $t \in |F\rangle\langle G|$, on peut supposer par le lemme que $t = \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j\rangle\langle\gamma_j|$ et que $(\gamma_j)_{j=1,\ldots,n}$ est libre, et de $|S\rangle\langle T|(t) = 0$ on tire

$$\sum_{j=1}^{n} |S\varphi_j\rangle\langle T\gamma_j| = 0\,;$$

mais puisque T est injective, la suite $(T\gamma_j)_{j=1,\ldots,n}$ est libre, donc $S\varphi_j = 0$ pour tout $j = 1,\ldots,n$ par le lemme. On en déduit que chaque $\varphi_j = 0$ par l'injectivité de S , donc que $t = 0$.

Quant à la continuité il suffit d'appliquer (i), puisque $\bowtie \circ (S,T)$ est séparément continue. □

EXEMPLE 1 Grâce aux propriétés universelles, il existe un isomorphisme semi-linéaire respectivement linéaire canonique de $|F\rangle_i\langle G|$ sur $\langle F|\cdot_i|G\rangle$ respectivement de $|F\rangle_i\langle G|$ sur $\langle F|\cdot_i|G\rangle$ tels que

$$|\varphi\rangle\langle\gamma| \longmapsto \langle\varphi|\cdot|\gamma\rangle \quad \text{, resp.} \quad |\varphi\rangle\langle\gamma| \longmapsto \langle\gamma|\cdot|\varphi\rangle\ .$$

En outre l'espace localement convexe $|F\rangle_i\langle F|$ (ou $\langle F|\cdot_i|F\rangle$) possède une involution naturelle continue

$$|\varphi\rangle\langle\gamma| \longmapsto |\gamma\rangle\langle\varphi| : |F\rangle_i\langle F| \longrightarrow |F\rangle_i\langle F|\ .$$

EXEMPLE 2 Soient X et Y des ensembles. L'application

$$\mathfrak{s} : \mathbb{K}^X \times \mathbb{K}^Y \longrightarrow \mathbb{K}^{X\times Y} : (\varphi,\gamma) \longmapsto \varphi \circ \mathrm{pr}_1 \cdot \overline{\gamma \circ \mathrm{pr}_2}$$

est évidemment sesquilinéaire à droite et séparément continue. Il existe donc une application linéaire continue $\widetilde{\mathfrak{s}} : \left|\mathbb{K}^X\right\rangle_i\left\langle\mathbb{K}^Y\right| \longrightarrow \mathbb{K}^{X\times Y}$ telle que

$$\widetilde{\mathfrak{s}}(|\varphi\rangle\langle\gamma|) : (x,y) \longmapsto \varphi(x)\cdot\overline{\gamma(y)} : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}\ .$$

Elle est injective.

En effet pour tout $t \in \left|\mathbb{K}^X\right\rangle\left\langle\mathbb{K}^Y\right|$ tel que $\widetilde{\mathfrak{s}}(t) = 0$, on peut supposer que $t = \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j\rangle\langle\gamma_j|$ et que $(\gamma_j)_{j=1,\ldots,n}$ est libre dans $\mathbb{K}^Y$ par le lemme ci-dessus. Pour tout $x \in X$, on a alors

$$0 = \widetilde{\mathfrak{s}}(t)(x,\cdot) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)\cdot\overline{\gamma_j}\ ,$$

donc $\sum_{j=1}^{n} \overline{\varphi_j(x)}\cdot\gamma_j = 0$ et par suite $\varphi_j(x) = 0$ pour tout $j = 1,\ldots,n$. Les φ_j sont donc tous nuls, ce qui montre que $t = 0$. □

Ceci nous permet d'identifier $\left|\mathbb{K}^X\right\rangle\left\langle\mathbb{K}^Y\right|$ à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{X\times Y}$ et justifie la définition

$$|\varphi\rangle\langle\gamma| := \varphi\circ\mathrm{pr}_1\cdot\overline{\gamma\circ\mathrm{pr}_2} : (x,y)\longmapsto\varphi(x)\cdot\overline{\gamma(y)} \ .$$

On dit que les fonctions dans $\left|\mathbb{K}^X\right\rangle\left\langle\mathbb{K}^Y\right|$ sont à *variables séparées* .

EXEMPLE 3 Les espaces localement convexes $\left|\mathbb{K}^{(X)}\right\rangle_i\left\langle\mathbb{K}^{(Y)}\right|$ et $\mathbb{K}^{(X\times Y)}$ sont canoniquement isomorphes.

Grâce au corollaire et en restreignant l'injection canonique de l'exemple précédent, on obtient évidemment une application linéaire continue injective

$$\left|\mathbb{K}^{(X)}\right\rangle_i\left\langle\mathbb{K}^{(Y)}\right|\longrightarrow\mathbb{K}^{(X\times Y)}$$

et, pour tout $f\in\mathbb{K}^{(X\times Y)}$, on a

$$f=\sum_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y)\cdot 1_{\{(x,y)\}}=\sum_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y)\cdot\left|1_{\{x\}}\right\rangle\left\langle 1_{\{y\}}\right| \ ,$$

ce qui montre qu'elle est bijective. Puisque $\mathbb{K}^{(X\times Y)}$ est muni de la topologie localement convexe la plus fine (cf. exemple 2.10.4), l'application réciproque $\mathbb{K}^{(X\times Y)}\longrightarrow\left|\mathbb{K}^{(X)}\right\rangle_i\left\langle\mathbb{K}^{(Y)}\right|$ est aussi continue.

Comme cas particulier on obtient immédiatement

$$|\mathbb{K}^n\rangle\langle\mathbb{K}^m| = \mathbb{K}^{n\cdot m} \ ,$$

puisque $\mathbb{K}^n=\mathbb{K}^{(\{0,\ldots,n-1\})}$.

EXEMPLE 4 Si X,Y sont des espaces localement compacts, on montre comme précédemment que

$$|\mathcal{K}(X)\rangle_i\langle\mathcal{K}(Y)|\hookrightarrow\mathcal{K}(X\times Y)$$

est injective et continue.

A l'aide du théorème de Stone-Weierstraß on voit facilement que $|\mathcal{K}(X)\rangle_i\langle\mathcal{K}(Y)|$ est dense dans $\mathcal{K}(X\times Y)$, mais sa topologie n'est pas en général celle induite par $\mathcal{K}(X\times Y)$.

EXEMPLE 5 Si X,Y sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement, on montre comme précédemment que

$$|\mathcal{D}(X)\rangle_i\langle\mathcal{D}(Y)|\hookrightarrow\mathcal{D}(X\times Y)$$

est continue et d'image dense. On peut montrer que c'est un isomorphisme.

EXEMPLE 6 Soient μ et ν des intégrales de Radon sur X et Y respectivement. Alors $|\mathbf{M}(\mu)\rangle\langle\mathbf{M}(\nu)|$ s'identifie canoniquement à une partie de $\mathbf{M}(\mu\otimes\nu)$ grâce au prolongement linéaire de

$$|f\rangle\langle g|\longmapsto f\otimes\overline{g} : |\mathbf{M}(\mu)\rangle\langle\mathbf{M}(\nu)|\longrightarrow\mathbf{M}(\mu\otimes\nu) \ .$$

.

En effet l'application

$$\mathfrak{s}:\mathbf{M}(\mu)\times\mathbf{M}(\nu)\longrightarrow\mathbf{M}(\mu\otimes\nu):(f,g)\longmapsto\text{''}\,(x,y)\longmapsto f(x)\cdot\overline{g(y)}\text{''}$$

est sesquilinéaire à droite, donc induit une application linéaire

$$\widetilde{\mathfrak{s}} : |\mathbf{M}(\mu)\rangle \langle \mathbf{M}(\nu)| \longrightarrow \mathbf{M}(\mu \otimes \nu) \ .$$

Elle est injective, car si l'image de $t = \sum_{j=1}^{n} |f_j\rangle \langle g_j|$ dans $\mathbf{M}(\mu \otimes \nu)$ est 0 , i.e. $\sum_{j=1}^{n} f_j(x) \cdot \overline{g_j(y)} = 0$ $\mu \otimes \nu$-p.p. , il nous suffit de montrer que chaque $f_j = 0$ μ-p.p. . Nous pouvons supposer que $(g_j)_{j=1,\ldots,n}$ est libre dans $\mathbf{M}(\nu)$ par le lemme. Par le théorème de Tonelli, pour μ-presque tous les $x \in X$, on a $\sum_{j=1}^{n} f_j(x) \cdot \overline{g_j(y)} = 0$ dans $\mathbf{M}(\nu)$, donc $f_j(x) = 0$ pour tous j . □

La notation

$$|f\rangle \langle g| (x,y) := f(x) \cdot \overline{g(y)}$$

ne prête donc pas à confusion. C'est celle que nous avons déjà utilisée dans le cours d'Analyse [17], définition 16.3.

PROBLEME Est-ce que $|\mathbf{M}^{\bullet}(\mu)\rangle \langle \mathbf{M}^{\bullet}(\nu)| \longrightarrow \mathbf{M}^{\bullet}(\mu \otimes \nu)$ est injective ? Pour les problèmes que l'on rencontre avec le théorème de Tonelli dans le cadre de la théorie de l'intégration essentielle voir l'exercice 16.3.3 du cours d'Analyse [17].

COROLLAIRE *Si F et G sont séparés, respectivement tonnelés, il en est de même de $|F\rangle_i \langle G|$.*

Pour démontrer que $|F\rangle_i \langle G|$ est séparé nous avons besoin du théorème de Hahn-Banach 3.6. Ce théorème montre que l'application linéaire continue

$$F \longrightarrow \mathbb{K}^{F^{\dagger}} : \varphi \longmapsto \langle \cdot | \varphi \rangle_{F^{\dagger}}$$

est injective. La proposition (ii) et l'exemple 2 ci-dessus nous fournissent une application linéaire continue injective

$$|F\rangle_i \langle G| \longrightarrow \left| \mathbb{K}^{F^{\dagger}} \right\rangle_i \left\langle \mathbb{K}^{G^{\dagger}} \right| \hookrightarrow \mathbb{K}^{F^{\dagger} \times G^{\dagger}} : |\varphi\rangle \langle \psi| \longmapsto \langle \cdot | \varphi \rangle_{F^{\dagger}} \cdot \langle \psi | \cdot \rangle_G$$

(cf. 2.4 pour les notations). Mais comme la topologie de la convergence simple est séparée, le résultat en découle par la proposition 2.5.

La seconde partie est alors une conséquence de la proposition 2.13. □

DEFINITION 2 Si F, G sont des espaces localement convexes, on dit que $|F\rangle \langle G|$, muni de la topologie localement convexe finale par rapport à l'application

$$(\varphi, \gamma) \longmapsto |\varphi\rangle \langle \gamma| : F \times G \longrightarrow |F\rangle \langle G|$$

est le *produit tensoriel (topologique) projectif* de F et G . On le note $|F\rangle_p \langle G|$.

Pour le produit tensoriel projectif on a des résultats analogues à ceux du produit tensoriel inductif.

Un des résultats fondamentaux, dû à A. Grothendieck, est le suivant :

THEOREME *Si F, G sont des espaces localement convexes métrisables, alors tout élément du complété $\tau \in |F\rangle \widehat{_p} \langle G|$ de $|F\rangle_p \langle G|$ est la somme d'une série absolument sommable*

$$\tau = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k \cdot |\varphi_k\rangle \langle \gamma_k| \ ,$$

où $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$, $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c^0(\mathbb{N}, F)$ *et* $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c^0(\mathbb{N}, G)$.

Une autre topologie sur $|F\rangle\langle G|$, celle de la *convergence bi-équicontinue* , est aussi importante, mais il est préférable de l'introduire après avoir discuté les notions de semi-dualité et de topologie uniforme sur un ensemble de parties bornées (cf. définition 3.16.3).

2.15 Produit tensoriel d'espaces de Hilbert

PROPOSITION *Soient F et G des espaces préhilbertiens de produit scalaire $(\cdot|\cdot)_F$ et $(\cdot|\cdot)_G$ respectivement. Il existe un unique produit scalaire $(\cdot|\cdot)_{|F)(G|}$ sur $|F)(G|$ tel que*

$$\Big(|\varphi)(\gamma| \Big| |\psi)(\theta| \Big)_{|F)(G|} := (\varphi|\psi)_F \cdot (\theta|\gamma)_G$$

pour tout $\varphi, \psi \in F$ et $\gamma, \theta \in G$.

L'application

$$\mathfrak{b}_{\varphi,\gamma} : F \times G \longrightarrow \mathbb{K} : (\psi, \theta) \longmapsto (\varphi|\psi)_F \cdot (\theta|\gamma)_G$$

est sesquilinéaire à droite en (ψ, θ) , donc induit par la propriété universelle du produit tensoriel une unique forme linéaire

$$\widetilde{\mathfrak{b}_{\varphi,\gamma}} : |F)(G| \longrightarrow \mathbb{K} : |\psi)(\theta| \longmapsto (\varphi|\psi)_F \cdot (\theta|\gamma)_G \ .$$

On vérifie facilement que l'application

$$\mathfrak{s} : F \times G \longrightarrow \Big(|F)(G| \Big)^* : (\varphi, \gamma) \longmapsto \widetilde{\mathfrak{b}_{\varphi,\gamma}}$$

est semi-linéaire à gauche, donc définit une unique application semi-linéaire

$$\widetilde{\mathfrak{s}} : |F)(G| \longrightarrow (F \otimes G)^* : |\varphi)(\gamma| \longmapsto \widetilde{\mathfrak{b}_{\varphi,\gamma}} \ .$$

Par construction

$$(\cdot|\cdot)_{|F)(G|} : \Big(|F)(G| \Big) \times \Big(|F)(G| \Big) \longrightarrow \mathbb{K} : (s, t) \longmapsto (s|t)_{|F)(G|} := \widetilde{\mathfrak{s}}(s)(t)$$

est l'unique forme sesquilinéaire telle que

$$\Big(|\varphi)(\gamma| \Big| |\psi)(\theta| \Big)_{|F)(G|} = (\varphi|\psi)_F \cdot (\theta|\gamma)_G \ .$$

Elle est hermitienne, car

$$\overline{\Big(|\varphi)(\gamma| \Big| |\psi)(\theta| \Big)_{|F)(G|}} = \overline{(\varphi|\psi)_F \cdot (\theta|\gamma)_G} = (\psi|\varphi)_F \cdot (\gamma|\theta)_G = \Big(|\psi)(\theta| \Big| |\varphi)(\gamma| \Big)_{F\otimes G} \ ,$$

d'où le résultat par sesquilinéarité. Montrons qu'elle est positive non-dégénérée. Etant donné $t = \sum_{j=1}^n |\varphi_j)(\gamma_j| \in |F)(G|$, en choisissant une base hilbertienne de l'espace de Hilbert de dimension finie engendré par $(\gamma_j)_{j=1,\ldots,n}$, on peut supposer (cf. lemme 2.14), que $(\gamma_j)_{j=1,\ldots,n}$ est un système orthonormé. On a alors

$$\|t\|^2_{|F)(G|} = (t|t)_{|F)(G|} = \sum_{k,l=1}^n \Big(|\varphi_k)(\gamma_k| \Big| |\varphi_l)(\gamma_l| \Big)_{|F)(G|} =$$

$$= \sum_{k,l=1}^n (\varphi_k|\varphi_l)_F \cdot (\gamma_l|\gamma_k)_G = \sum_{k=1}^n \|\varphi_k\|_F^2 \geqslant 0 \ ,$$

puisque $(\gamma_l|\gamma_k)_G = \delta_{k,l}$. Si $\|t\|_{|F)(G|} = 0$, il vient $\|\varphi_k\|_F^2 = 0$, donc $\varphi_k = 0$ pour tout k et par suite $t = 0$. □

DEFINITION Muni de ce produit scalaire on dit que $|F)(G|$ est le *produit tensoriel (semi-linéaire à droite)* des espaces préhilbertien F et G et on le note $|F)\,_2\,(G|$. Nous désignerons par $|F)\,\widehat{_2}\,(G|$ l'espace de Hilbert complété de $|F)\,_2\,(G|$ (cf. 3.8).

On définit de même le produit tensoriel $F \otimes G$ des espaces préhilbertien F et G par

$$(\varphi \otimes \gamma|\, \psi \otimes \theta)_{F\otimes G} := (\varphi|\, \psi)_F \cdot (\gamma|\, \theta)_G$$

pour tout $\varphi, \psi \in F$ et $\gamma, \theta \in G$.

THEOREME *Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des espaces de Hilbert. Si $(\varepsilon_k)_{k\in K}$ et $(\epsilon_l)_{l\in L}$ sont des bases hilbertiennes de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ respectivement, alors $\Big(|\varepsilon_k)\,(\epsilon_l|\Big)_{(k,l)\in K\times L}$ est une base hilbertienne de $|\mathcal{H})\,\widehat{_2}\,(\mathcal{G}|$.*

En effet c'est un système orthonormé

$$\Big(\, |\varepsilon_k)\,(\epsilon_l|\,\Big|\, |\varepsilon_m)\,(\epsilon_n|\Big)_{|\mathcal{H})\widehat{2}(\mathcal{G}|} = (\varepsilon_k|\, \varepsilon_m)_{\mathcal{H}} \cdot (\epsilon_n|\, \epsilon_l)_{\mathcal{G}} = \delta_{k,m} \cdot \delta_{l,n} = \delta_{(k,l),(m,n)} \ ,$$

et puisque

$$\Big\|\, |\xi)\,(\gamma|\Big\|^2_{|\mathcal{H})\widehat{2}(\mathcal{G}|} = \|\xi\|^2_{\mathcal{H}} \cdot \|\gamma\|^2_{\mathcal{G}} = \left(\sum_{k\in K} |(\varepsilon_k|\, \xi)|^2\right) \cdot \left(\sum_{l\in L} |(\epsilon_l|\, \gamma)|^2\right) =$$

$$= \sum_{(k,l)\in K\times L} |(\varepsilon_k|\, \xi)|^2 \cdot |(\epsilon_l|\, \gamma)|^2 = \sum_{(k,l)\in K\times L} \left| \Big(\, |\varepsilon_k)\,(\epsilon_l|\,\Big|\, \xi \otimes \gamma\Big)_{|\mathcal{H})\widehat{2}(\mathcal{G}|} \right|^2 \ ,$$

le théorème 1.10 montre que $\xi \otimes \gamma \in \overline{\mathrm{lin}}\Big(|\varepsilon_k)\,(\epsilon_l|\Big)_{(k,l)\in K\times L}$, donc que $\Big(|\varepsilon_k)\,(\epsilon_l|\Big)_{(k,l)\in K\times L}$ est totale dans $|\mathcal{H})\,\widehat{_2}\,(\mathcal{G}| = \overline{|\mathcal{H})\,(\mathcal{G}|}$. □

EXEMPLE Soient μ et ν des intégrales de Radon sur X et Y respectivement. Alors l'espace de Hilbert $|\mathbf{L}^2(\mu))\,\widehat{_2}\,(\mathbf{L}^2(\nu)|$ s'identifie canoniquement à $\mathbf{L}^2(\mu \otimes \nu)$ grâce au prolongement continu de

$$|\xi)\,(\gamma| \longmapsto \xi \otimes \overline{\gamma} : \big|\mathbf{L}^2(\mu)\big)\,\big(\mathbf{L}^2(\nu)\big| \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu \otimes \nu) \ .$$

D'après l'exemple 2.14.6 l'application $|\xi)\,(\gamma| \longmapsto \xi \otimes \overline{\gamma}$ est injective et si $t = \sum_{j=1}^n \big|\xi_j\big)\,\big(\gamma_j\big| \in |\mathbf{L}^2(\mu))\,(\mathbf{L}^2(\nu)|$, on a

$$\|t\|^2_{|\mathbf{L}^2(\mu))(\mathbf{L}^2(\nu)|} = \sum_{k,l=1}^n \Big(\, |\xi_k)\,(\gamma_k|\,\Big|\, |\xi_l)\,(\gamma_l|\Big)_{|\mathbf{L}^2(\mu))(\mathbf{L}^2(\nu)|} =$$

$$= \sum_{k,l=1}^n (\xi_k|\, \xi_l)_{\mathbf{L}^2(\mu)} \cdot (\gamma_l|\, \gamma_k)_{\mathbf{L}^2(\nu)} = \sum_{k,l=1}^n \left(\int \overline{\xi_k} \cdot \xi_l \, d\mu\right) \cdot \left(\int \overline{\gamma_l} \cdot \gamma_k \, d\nu\right) =$$

$$= \sum_{k,l=1}^n \int \overline{\xi_k \otimes \overline{\gamma_k}} \cdot \xi_l \otimes \overline{\gamma_l} \, d\mu \otimes \nu = \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j \otimes \overline{\gamma_j} \right\|^2_{\mathbf{L}^2(\mu\otimes\nu)} \ ,$$

ce qui prouve que c'est une isométrie. Il nous reste donc à prouver que $|\mathbf{L}^2(\mu))\,(\mathbf{L}^2(\nu)|$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mu \otimes \nu)$. Mais pour tout $f \in \mathbf{L}^2(\mu \otimes \nu)$ tel que $f \perp |\mathbf{L}^2(\mu))\,(\mathbf{L}^2(\nu)|$, et tout

$\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$, $\gamma \in \mathbf{L}^2(\nu)$, le théorème de Fubini montre que $\overline{\xi(x)} \cdot \gamma \cdot f(x, \cdot) \in \mathbf{L}^1(\nu)$ pour μ-presque tous les $x \in X$, que $\overline{\xi} \cdot \left(\int \gamma(y) \cdot f(\cdot, y)\, d\nu(y)\right) \in \mathbf{L}^1(\mu)$ et que

$$\int \overline{\xi(x)} \cdot \left(\int \gamma(y) \cdot f(x, y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x) = 0 \ .$$

Puisque $\mathbf{L}^2(\mu)$ et $\mathbf{L}^2(\nu)$ sont des espaces test (cf. corollaire 1.16), on obtient tout d'abord que $\int \gamma(y) \cdot f(\cdot, y)\, d\nu(y) = 0$ localement μ-p.p., puis pour localement μ-presque tous les $x \in X$ que $f(x, \cdot) = 0$ localement ν-p.p. Mais comme f est $\mu \otimes \nu$-mesurable et $\mu \otimes \nu$-modérée, on en déduit que $f = 0$ $\mu \otimes \nu$-p.p. On peut donc conclure à l'aide du corollaire 1.4. $\square$

Chapitre 3

APPLICATIONS LINÉAIRES

ET

SEMI-DUALITÉ

Dans tout ce qui suit F et G désignerons des espaces localement convexes.

Version du 1 juillet 2005

3.1 Espaces d'applications linéaires

DEFINITION 1 Nous désignerons par $L(F,G)$ le sous-espace vectoriel de G^F formé des applications linéaires de F dans G et par $\mathcal{L}(F,G)$ l'ensemble des applications linéaires continues de F dans G .

LEMME *$\mathcal{L}(F,G)$ est un sous-espace vectoriel de $L(F,G)$.*

C'est immédiate par le théorème et le corollaire 2.2, car pour tout $S,T \in \mathcal{L}(F,G)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et toute semi-norme continue q sur G , on a

$$q \circ (\alpha \cdot S) = |\alpha| \cdot q \circ S$$

et

$$q \circ (S+T) \leqslant q \circ S + q \circ T \leqslant 2 \cdot \max(q \circ S, q \circ T) \ .$$

□

DEFINITION 2 Etant donné des semi-normes p et q sur F et G respectivement, on considère sur $L(F,G)$ la fonctionnelle

$$T \longmapsto \|T\|_{p,q} := \sup_{\varphi \in F, p(\varphi) \leqslant 1} q(T\varphi) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

Elle est évidemment sous-linéaire et, si $\|T\|_{p,q} < \infty$, on a

$$q(T\varphi) \leqslant \|T\|_{p,q} \cdot p(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in F$$

par le lemme 2.2.

LEMME *Soit $T \in L(F,G)$. Pour que $T \in \mathcal{L}(F,G)$, il faut et il suffit que, pour toute semi-norme continue q sur G , il existe une semi-norme continue p sur F telle que $\|T\|_{p,q} < \infty$.*

REMARQUE 1 En posant $L^{p,q}(F,G) := \left\{ T \in L(F,G) \;\middle|\; \|T\|_{p,q} < \infty \right\}$ et en désignant par $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ l'ensemble des semi-normes continues sur F et respectivement G , on a donc

$$\mathcal{L}(F,G) = \bigcap_{q \in \mathcal{Q}} \left[\bigcup_{p \in \mathcal{P}} L^{p,q}(F,G) \right] \ .$$

Ceci montre la nature complexe de $\mathcal{L}(F,G)$ et qu'il n'est pas évident de le munir d'une structure d'espace localement convexe canonique liée directement à celles de F et G . En fait on peut munir cet espace de différentes topologies localement convexes, chacune liée à un certain type de problème (cf. 3.16).

Nous aurons essentiellement besoin de la topologie assez grossière suivante :

DEFINITION 3 On désigne par $\mathcal{L}_s(F,G)$ et $L_s(F,G)$ les espaces localement convexes obtenus en restreignant la topologie de G^F de la convergence simple sur F . Ils sont définis par les semi-normes

$$T \longmapsto q(T\varphi) \quad \text{pour } \varphi \in F \text{ et } q \text{ semi-norme continue sur } G$$

(cf. exemple 2.3.3).

Une suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans ces espaces si, et seulement si, pour tout $\varphi \in F$, la suite $(T_k\varphi)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $T\varphi$ dans G .

PROPOSITION *Si G est séparé, alors $\mathcal{L}_s(F,G)$ et $L_s(F,G)$ le sont aussi.*

Etant donné $T \in L_s(F,G) \setminus \{0\}$, il existe $\varphi \in F$ tel que $T\varphi \neq 0$, donc une semi-norme continue q sur G telle que $q(T\varphi) \neq 0$ par la proposition 2.5. $\square$

DEFINITION 4 Une partie B de F est dite *bornée* si toute semi-norme continue p sur F est bornée sur B , i.e. $\sup p(B) < \infty$. Une partie bornée de $\mathcal{L}_s(F,G)$ est dite *simplement bornée* .

REMARQUE 2 Dans l'étude de certaines classes d'applications linéaires on pourrait s'intéresser au sous-espace vectoriel

$$\bigcup_{p\in\mathcal{P}} \left[\bigcap_{q\in\mathcal{Q}} L^{p,q}(F,G)\right] \subset \mathcal{L}(F,G)$$

formé des applications linéaires T de F dans G telles que pour une semi-norme continue p sur F la partie $T(\{p \leqslant 1\})$ soit bornée dans G (définition 4 ci-dessous) ; on dit que T est bornée sur un voisinage de 0 de F .

Mais aussi à l'espace vectoriel $\mathcal{L}^b(F,G)$ des applications linéaires bornées, i.e. telles que l'image de toutes parties bornées de F soit bornées dans G . On a

$$\mathcal{L}(F,G) \subset \mathcal{L}^b(F,G) \ .$$

THEOREME (de la majoration uniforme) *On suppose que F est tonnelé. Si $\mathcal{T}$ est une partie simplement bornée de $\mathcal{L}_s(F,G)$, i.e. pour tout $\varphi \in F$, l'ensemble*

$$\mathcal{T}(\varphi) := \{T\varphi \mid T \in \mathcal{T}\}$$

est borné dans G , la fonction

$$p : \varphi \longmapsto \sup q \circ \mathcal{T}(\varphi) : F \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une semi-norme continue sur F telle que

$$q(T\varphi) \leqslant p(\varphi) \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{T} \text{ et } \varphi \in F \ .$$

C'est immédiat par le scolie 2.13, puisque chaque $q \circ T$, pour $T \in \mathcal{T}$, est une semi-norme continue sur F . $\square$

THEOREME (de Banach-Steinhaus) *On suppose que F est tonnelé. Si $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{L}(F,G)$ telle que, pour tout $\varphi \in F$,*

$$T\varphi := \lim_k T_k\varphi \quad \textit{existe dans } G \ ,$$

alors $T : F \longrightarrow G$ est une application linéaire continue et $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans $\mathcal{L}_s(F,G)$.

Si G séquentiellement complet, alors $\mathcal{L}_s(F,G)$ est séquentiellement complet.

Il est clair que $T : F \longrightarrow G$ est une application linéaire. Si q est une semi-norme continue sur G , alors

$$q \circ T(\varphi) = q(T\varphi) = \lim_k q(T_k\varphi) \leqslant \sup_k q(T_k\varphi) = \sup_k q \circ T_k(\varphi) < \infty \ .$$

Mais chaque $q \circ T_k$ est une semi-norme continue, puisque T_k est continue, donc $\sup_k q \circ T_k$ en est aussi une par le scolie 2.13. Ceci montre que $q \circ T$ est continue et prouve que T est continue. On a évidemment

$$q(T\varphi) = \lim_k q(T_k\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ ,$$

donc $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans $\mathcal{L}_s(F,G)$.

Si G est séquentiellement complet et $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}_s(F,G)$, pour tout $\varphi \in F$, la suite $(T_k\varphi)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans G , ce qui permet de définir

$$T\varphi := \lim_k T_k\varphi \in G \ ,$$

d'où le résultat. □

REMARQUE 3 Tout ce qui précède est encore valable en remplaçant linéaire par semi-linéaire.

DEFINITION 5 Nous désignerons par $\not{L}(F,G)$ le sous-espace vectoriel de G^F formé des applications semi-linéaires de F dans G et par $\not{\mathcal{L}}(F,G)$ l'ensemble des applications semi-linéaires continues de F dans G .

On dit que l'espace vectoriel $F^* := L(F,\mathbb{K})$ des formes linéaires sur F est le *dual algébrique* de F et que l'espace vectoriel $F' := \mathcal{L}(F,\mathbb{K})$ des formes linéaires continues sur F est le *dual (topologique)* de F .

L'espace vectoriel de toutes les formes semi-linéaires sur F , le *semi-dual algébrique* $\not{L}(F,\mathbb{K})$ de F , sera noté $F^{\circledast}$, celui de toutes celles qui sont continues, le *semi-dual (topologique)* $\not{\mathcal{L}}(F,\mathbb{K})$de F , par $F^{\dagger}$.

Nous munirons **toujours** F^* , F' , $F^{\circledast}$ et $F^{\dagger}$ de la topologie de la convergence simple sur F ; s'il faut préciser nous les désignerons par F^*_σ , F'_σ , $F^{\circledast}_\sigma$ et $F^{\dagger}_\sigma$ respectivement. On dit que cette topologie est la *topologie faible* sur F^* , respectivement F' , $F^{\circledast}$ et $F^{\dagger}$; elle est définie par les semi-normes

$$\mu \longmapsto |\mu(\varphi)| \quad \text{pour } \varphi \in F \ .$$

On dit que F' et $F^{\dagger}$ sont le dual respectivement le semi-dual *faible* de F .

COROLLAIRE *Les espaces localement convexes F^*_σ , F'_σ , $F^{\circledast}_\sigma$ et $F^{\dagger}_\sigma$ sont séparés. Si F est tonnelé, alors F'_σ et $F^{\dagger}_\sigma$ sont séquentiellement complet.*

REMARQUE 4 On peut montrer que la topologie de $\mathcal{L}_s(F,G)$ est initiale par rapport aux applications

$$T \longmapsto T\varphi : \mathcal{L}(F,G) \longrightarrow G$$

lorsque φ parcourt F ; en d'autres termes pour qu'une application $f : X \longrightarrow \mathcal{L}_s(F,G)$, où X est un espace topologique, soit continue, il faut et il suffit que $x \longmapsto f(x)\varphi : X \longrightarrow G$ soit continue.

En particulier $f : X \longrightarrow F^\dagger$ est continue, si, et seulement si, pour tout $\varphi \in F$, la fonction

$$x \longmapsto f(x)(\varphi) : X \longrightarrow \mathbb{K}$$

est continue.

APPLICATION *Si f est une fonction μ-modérée telle que $\varphi \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mu)$ pour tout $\varphi \in \mathbf{L}^2(\mu)$, alors $f \in \mathbf{L}^2(\mu)$.*

Pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, la fonction $1_K \cdot f$ est μ-mesurable par le théorème 15.9 du cours d'Analyse [17]. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties μ-intégrables telles que f s'annule hors de $\bigcup A_k$ et posons

$$B_k := \{|f| \leqslant k\} \cap A_k \ .$$

La forme semi-linéaire

$$\varphi \longmapsto \int_{B_k} \overline{\varphi} \cdot f \, d\mu : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est continue, puisque par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left| \int_{B_k} \overline{\varphi} \cdot f \, d\mu \right|^2 \leqslant \left(\int |\varphi|^2 \, d\mu \right) \cdot \left(\int 1_{B_k} \cdot |f|^2 \, d\mu \right) \leqslant k^2 \cdot \mu(B_k) \cdot \|\varphi\|_2^2 \ .$$

Mais comme

$$|1_{B_k} \cdot \overline{\varphi} \cdot f| \leqslant |\varphi \cdot f| \in \mathbf{L}^1(\mu) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ ,$$

le théorème de la convergence dominée de Lebesgue montre que

$$\int \overline{\varphi} \cdot f \, d\mu = \lim_k \int_{B_k} \overline{\varphi} \cdot f \, d\mu \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathbf{L}^2(\mu) \ .$$

Grâce au théorème de Banach-Steinhaus 3.2, on en déduit que la forme semi-linéaire

$$\varphi \longmapsto \int \overline{\varphi} \cdot f \, d\mu : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est continue, donc que f satisfait à la condition du théorème 1.16.ii avec $F = \mathbf{L}^2(\mu)$. □

REMARQUE 5 En travaillant avec l'intégration essentielle on peut supprimer l'hypothèse de modération.

En effet on a

$$\int |\overline{\varphi} \cdot f| \, d\mu = \sup_{K\in\mathfrak{K}(X),l\in\mathbb{N}} \int_{K_l} |\overline{\varphi} \cdot f| \, d\mu$$

en ayant posé $K_l := K \cap \{|f| \leqslant l\}$ (cf. cours d'Analyse [17], remarque 15.12). Mais

$$\left(\int_{K_l} |\overline{\varphi} \cdot f| \, d\mu \right)^2 \leqslant \left(\int |\varphi|^2 \, d\mu \right) \cdot \left(\int 1_{K_l} \cdot |f|^2 \, d\mu \right) \leqslant l^2 \cdot \mu(K_l) \cdot \|\varphi\|_2^2 \ ,$$

ce qui montre que $\varphi \longmapsto \int_{K_l} |\overline{\varphi} \cdot f|\ d\mu$ est une semi-norme continue sur $\mathbf{L}^2(\mu)$. Le scolie 2.13 prouve alors qu'il en est de même de $\varphi \longmapsto \sup_{K \in \mathfrak{K}(X), l \in \mathbb{N}} \int_{K_l} |\overline{\varphi} \cdot f|\ d\mu$, puisque $\mathbf{L}^2(\mu)$ est tonnelé (cf. exemple 2.13.1), donc que $\varphi \longmapsto \int_{K_l} \overline{\varphi} \cdot f\ d\mu$ est une forme semi-linéaire continue.

$\square$

3.2 Espaces normés d'applications linéaires

Dans le cas des espaces normés, on peut considérer la fonctionnelle sous-linéaire suivante :

DEFINITION 1 Soient F et G des espaces normés. Pour tout $T \in L(F, G)$, on pose

$$\|T\| := \|T\|_{\|\cdot\|_F, \|\cdot\|_G} = \sup_{\varphi \in F, \|\varphi\|_F \leqslant 1} \|T\varphi\|_G \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

Cf. définition 3.1.2. Rappelons que $\|T\|$ est la plus petite des constantes $M \in \overline{\mathbb{R}}_+$ satisfaisant à l'inégalité fondamentale

$$\|T\varphi\|_G \leqslant M \cdot \|\varphi\|_F \quad \text{pour tout } \varphi \in F$$

(cf. lemme 2.2). On a évidemment $T \in \mathcal{L}(F, G)$ si, et seulement si, $\|T\| < \infty$. Dans ce cas on dit que T est un *opérateur borné* .

On vérifie immédiatement que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(F, G)$.

DEFINITION 2 L'espace $\mathcal{L}(F, G)$ ainsi normé est désigné par $\mathcal{L}_b(F, G)$; on dit que sa topologie est la *topologie de la convergence bornée* .

On dit que $F'_\beta := \mathcal{L}_b(F, \mathbb{K})$ est le *dual fort* de F . Sa norme est définie par

$$\mu \longmapsto \|\mu\| := \|\mu\|_{\|\cdot\|_F, |\cdot|} := \sup_{\varphi \in F, \|\varphi\|_F \leqslant 1} |\mu(\varphi)| \ .$$

On définit de même le semi-dual fort $F^\dagger_\beta$ de F .

Une suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{L}(F, G)$ converge vers T dans $\mathcal{L}_b(F, G)$ si, et seulement si, elle converge uniformément sur toute partie bornée, en particulier toute boule, de F .

En effet si B est une partie bornée de F , il existe $r \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $B \subset B(0, r)$ et on a

$$\|T\|_{\infty, B} \leqslant \|T\|_{\infty, B(0,r)} \leqslant r \cdot \|T\| \ .$$

□

PROPOSITION *Si G est un espace de Banach, il en est de même de $\mathcal{L}_b(F, G)$.*

En particulier, le dual fort de tout espace normé est un espace de Banach.

La démonstration est complètement analogue à celle faite pour démontrer que $\ell^\infty(X)$ est complet. Elle est donc laissée en exercice. □

Voici maintenant la reformulation du

THEOREME (de la majoration uniforme) *Si F est un espace de Banach et*

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(F, G)$$

un ensemble simplement borné, i.e. borné dans $\mathcal{L}_s(F, G)$, ce qui signifie que

$$\sup \|\mathcal{T}\varphi\| < \infty \quad \textit{pour tout } \varphi \in F \ .$$

alors $\mathcal{T}$ est uniformément borné, i.e. borné dans $\mathcal{L}_b(F, G)$, ce qui signifie que

$$\sup \|\mathcal{T}\| < \infty \ .$$

En effet $\varphi \longmapsto \sup \|\mathcal{T}\varphi\|$ est une semi-norme continue sur F par le théorème de la majoration uniforme 3.1. Il existe donc une constante $M \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\sup \|\mathcal{T}\varphi\| \leqslant M \cdot \|\varphi\| \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ ,$$

et on obtient

$$\sup \|\mathcal{T}\| = \sup_{T\in\mathcal{T}} \left(\sup_{\varphi\in F, \|\varphi\|\leqslant 1} \|T\varphi\|\right) \leqslant M < \infty \ .$$

□

THEOREME (de Banach-Steinhaus) *Si F est un espace de Banach et $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}(F,G)$ qui converge simplement vers $T \in L(F,G)$, alors T est continue et*

$$\|T\| \leqslant \liminf_k \|T_k\| \leqslant \sup_k \|T_k\| < \infty \ .$$

En effet, par le théorème de la majoration uniforme, on a

$$\|T\varphi\| = \lim_k \|T_k\varphi\| \leqslant \liminf_k \|T_k\| \cdot \|\varphi\| \leqslant \sup_k \|T_k\| < \infty$$

pour tout $\varphi \in F$ tel que $\|\varphi\| \leqslant 1$, puisque $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est évidemment simplement bornée. □

3.3 Opérateurs à noyaux dans $\mathcal{C}^b$

Cas simple Soient $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $\varkappa : [a,b]^2 \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que $\varkappa$ est un *noyau* . Supposons que $\varkappa$ est une fonction continue. Pour tout $\gamma \in \mathcal{C}([a,b])$, on pose

$$K\gamma(x) := \int_a^b \varkappa(x,y) \cdot \gamma(y)\ dy\ .$$

La fonction $K\gamma$ est continue. En effet si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $[a,b]$ qui converge vers x , alors

$$\lim_k \varkappa(x_k,\cdot) \cdot \gamma = \varkappa(x,\cdot) \cdot \gamma \quad \text{ponctuellement sur } [a,b]$$

et

$$|\varkappa(x_k,\cdot) \cdot \gamma| \leqslant \|\varkappa\|_\infty \cdot \|\gamma\|_\infty \cdot 1 \in \mathbf{L}^1([a,b])\ ,$$

puisque $\varkappa$ et γ sont continues. Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue on obtient

$$\lim_k K\gamma(x_k) = \lim_k \int_a^b \varkappa(x_k,y) \cdot \gamma(y)\ dy = \int_a^b \lim_k \varkappa(x_k,y) \cdot \gamma(y)\ dy =$$

$$= \int_a^b \varkappa(x,y) \cdot \gamma(y)\ dy = K\gamma(x)\ .$$

Ceci montre que l'on peut définir une application

$$K : \gamma \longmapsto K\gamma : \mathcal{C}([a,b]) \longrightarrow \mathcal{C}([a,b])\ .$$

Elle est évidemment linéaire. Estimons $\|K\|$. Pour tout $\gamma \in \mathcal{C}([a,b])$, on a

$$\|K\gamma\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_a^b \varkappa(x,y) \cdot \gamma(y)\ dy \right| \leqslant \|\gamma\|_\infty \cdot \sup_{x\in[a,b]} \int_a^b |\varkappa(x,y)|\ dy\ ,$$

donc

$$\|K\| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \int_a^b |\varkappa(x,y)|\ dy < \infty\ .$$

Ceci montre aussi que K est une application linéaire continue de $\mathcal{C}([a,b])$ dans lui-même. On dit que c'est un *opérateur intégral* , ou un *opérateur à noyau* , ou encore un *opérateur de Fredholm* .

Nous allons maintenant montrer que l'on a

$$\|K\| = \sup_{x\in[a,b]} \int_a^b |\varkappa(x,y)|\ dy < \infty\ .$$

Soit $\xi \in [a,b]$ un point où la fonction continue $\int_a^b |\varkappa(\cdot,y)|\ dy$ atteint son maximum. Considérons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction continue

$$\gamma_k := \frac{\overline{\varkappa(\xi,\cdot)}}{|\varkappa(\xi,\cdot)| + \frac{1}{k}}\ .$$

On a $\|\gamma_k\|_\infty \leqslant 1$ et $\lim_k \varkappa(\xi,\cdot)\cdot\gamma_k = |\varkappa(\xi,\cdot)|$ ponctuellement sur $[a,b]$. Par le théorème de Lebesgue on obtient

$$\int_a^b |\varkappa(\xi,y)|\ dy = \left|\lim_k \int_a^b \varkappa(\xi,y)\cdot\gamma_k(y)\ dy\right| \leqslant \lim_k |K\gamma_k(\xi)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_k \|K\gamma_k\|_\infty \leqslant \sup_k \|K\|\cdot\|\gamma_k\|_\infty \leqslant \|K\| \ ,$$

donc

$$\|K\| = \int_a^b |\varkappa(\xi,y)|\ dy \ .$$

Cas général Soient X un espace métrique, Y un espace complétement régulier, $\varkappa : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ un noyau et ν une intégrale de Radon sur Y . On fait les hypothèses suivantes :

(a) Pour tout $x \in X$, on a $\varkappa(x,\cdot) \in \mathbf{L}^1(\nu)$.
Si $\gamma \in \mathcal{C}^b(Y)$, on peut alors définir

$$K\gamma(x) := \int \varkappa(x,y)\cdot\gamma(y)\ d\nu(y) \quad \text{pour tout } x \in X \ .$$

(b) Pour tout $\xi \in X$, il existe une partie ν-négligeable N_ξ de Y telle que $\varkappa(\cdot,y)$ soit continue en ξ pour tout $y \notin N_\xi$.

(c) Pour tout $\xi \in X$, il existe un voisinage V_ξ de ξ dans X et une fonction $g_\xi \in \mathbf{L}^1_+(\nu)$ tels que, pour tout $x \in V_\xi$, on ait

$$|\varkappa(x,\cdot)| \leqslant g_\xi \quad \nu\text{-p.p.}$$

Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de V_ξ convergente vers ξ , alors on a

$$\lim_k \varkappa(x_k,y)\cdot\gamma(y) = \varkappa(\xi,y)\cdot\gamma(y) \quad \text{pour tout } y \notin N_\xi$$

et

$$|\varkappa(x_k,\cdot)\cdot\gamma| \leqslant \|\gamma\|_\infty \cdot g_\xi \quad \nu\text{-p.p.} \ ,$$

ce qui nous permet d'appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue :

$$\lim_k K\gamma(x_k) = \lim_k \int \varkappa(x_k,y)\cdot\gamma(y)\ d\nu(y) = \int \varkappa(\xi,y)\cdot\gamma(y)\ d\nu(y) = K\gamma(\xi) \ .$$

On a donc $K\gamma \in \mathcal{C}(X)$ et

$$K : \mathcal{C}^b(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X) : \gamma \longmapsto K\gamma$$

est une application linéaire.

(d) $$M := \sup_{x\in X} \int |\varkappa(x,y)|\ d\nu(y) < \infty \ .$$

On a alors

$$\|K\gamma\|_\infty = \sup_{x\in X} \left|\int \varkappa(x,y)\cdot\gamma(y)\ d\nu(y)\right| \leqslant M\cdot\|\gamma\|_\infty \ ,$$

donc $K\gamma \in \mathcal{C}^b(X)$ et $\|K\| \leqslant M$, i.e. $K : \mathcal{C}^b(Y) \longrightarrow \mathcal{C}^b(X)$ est une application linéaire continue.

Les mêmes méthodes permettent de définir des opérateurs à noyaux par exemple entre les espaces $\mathbf{L}^p$.

EXERCICE 1 On peut montrer, en approximant $\operatorname{sgn}(\varkappa(\xi, \diamond))$ par une suite de fonctions continues bornées sur Y (densité de $\mathcal{C}^b(Y)$ dans $\mathbf{L}^1(|\varkappa(\xi, \diamond)| \cdot \nu)$ et théorème de Riesz-Fischer) que $\|K\| = M$.

EXERCICE 2 La diagonale

$$\Delta := \{(x, y) \in [a, b]^2 \mid x = y\}$$

divise $[a, b]^2$ en deux triangles

$$D_1 := \{(x, y) \in [a, b]^2 \mid x > y\}$$

et

$$D_2 := \{(x, y) \in [a, b]^2 \mid x < y\} \ .$$

Soit $\varkappa : [a, b]^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction dont la restriction à chacun des deux triangles se prolonge par continuité sur la diagonale, i.e. il existe des fonctions continues $\varkappa_j : D_j \cup \Delta \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que $\varkappa_j|_{D_j} = \varkappa|_{D_j}$ pour $j = 1, 2$.

Montrer que

$$Kf(x) := \int_a^b \varkappa(x, y) \cdot f(y)\, dy$$

définit une application linéaire continue K dans $\mathcal{C}([a, b])$.

3.4 Dualité et semi-dualité

Rappelons que le dual F' , respectivement le semi-dual $F^\dagger$, de F est l'espace vectoriel des formes linéaires, resp. semi- linéaires, continues sur F . Le cas purement algébrique, qui consiste à considérer le dual algébrique F^* ou le semi-dual algébrique $F^{\circledast}$, s'obtient en munissant F de la topologie localement convexe la plus fine (cf. exemple 2.10.4).

Pour tout $\varphi \in F$, nous poserons

$$\langle \varphi, \mu \rangle_F := \mu(\varphi) \quad \text{si } \mu \in F' \qquad \text{et} \qquad \langle \varphi | \mu \rangle_F := \mu(\varphi) \quad \text{si } \mu \in F^\dagger.$$

Les fonctions

$$(\varphi, \mu) \longmapsto \langle \varphi, \mu \rangle_F : F \times F' \longrightarrow \mathbb{K} \qquad \text{et} \qquad (\varphi, \mu) \longmapsto \langle \varphi | \mu \rangle_F : F \times F^\dagger \longrightarrow \mathbb{K}$$

sont respectivement bilinéaire et sesquilinéaire.

Nous pouvons également poser

$$\langle \mu, \varphi \rangle_{F'} := \mu(\varphi) \quad \text{si } \mu \in F' \qquad \text{et} \qquad \langle \mu | \varphi \rangle_{F^\dagger} := \overline{\mu(\varphi)} \quad \text{si } \mu \in F^\dagger \ .$$

Les fonctions

$$(\mu, \varphi) \longmapsto \langle \mu, \varphi \rangle_{F'} : F' \times F \longrightarrow \mathbb{K} \qquad \text{et} \qquad (\mu, \varphi) \longmapsto \langle \mu | \varphi \rangle_{F^\dagger} : F^\dagger \times F \longrightarrow \mathbb{K}$$

sont respectivement bilinéaire et sesquilinéaire.

Ceci nous conduit à poser la

DEFINITION 1 On dit qu'une forme bilinéaire ou sesquilinéaire $\mathfrak{s} : F \times G \longrightarrow \mathbb{K}$ définit une *dualité* $\langle F, G \rangle_{\mathfrak{s}}$, respectivement une *semi-dualité* $\langle F | G \rangle_{\mathfrak{s}}$, ou bien que F et G sont en dualité, ou en semi-dualité, par $\mathfrak{s}$. On écrit aussi

$$\langle \varphi, \gamma \rangle_{\mathfrak{s}} := \mathfrak{s}(\varphi, \gamma) \quad \text{, resp.} \quad \langle \varphi | \gamma \rangle_{\mathfrak{s}} := \mathfrak{s}(\varphi, \gamma) \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \gamma \in G \ .$$

On supprime l'indice $\mathfrak{s}$ si aucune confusion n'en résulte. Nous ne traiterons dorénavant que le cas de la semi-dualité, celui-ci étant le plus important pour la suite.

Nous avons défini ci-dessus les semi-dualités $\left\langle F | F^\dagger \right\rangle$ et $\left\langle F^\dagger \middle| F \right\rangle$. De manière générale on a la

DEFINITION 2 La semi-dualité $\langle G | F \rangle$ est définie en posant

$$\langle \gamma | \varphi \rangle := \overline{\langle \varphi | \gamma \rangle} \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \gamma \in G \ .$$

Pour tout $\varphi \in F$, soit

$$\langle \varphi | : \gamma \longmapsto \langle \varphi | \gamma \rangle : G \longrightarrow \mathbb{K} \ .$$

C'est une forme linéaire sur G , i.e. $\langle \varphi | \in G^*$.

Pour tout $\gamma \in G$, soit

$$| \gamma \rangle : \varphi \longmapsto \langle \varphi | \gamma \rangle : F \longrightarrow \mathbb{K} \ .$$

C'est une forme semi-linéaire sur F , i.e. $| \gamma \rangle \in F^{\circledast}$.

DEFINITION 3 On dit que les topologies localement convexes définies respectivement par les familles de semi-normes $\left(\left|\,|\gamma\rangle\right|\right)_{\gamma\in G}$ sur F et $\left(\left|\,\langle\varphi|\right|\right)_{\varphi\in F}$ sur G , sont les *topologies faibles* sur F et G (par rapport à la semi-dualité $\langle F|\, G\rangle$) ; on les désignent par $\sigma(F,G)$ et $\sigma(G,F)$, les espaces localement convexes correspondants par F_σ et G_σ .

Cette semi-dualité est dite *séparante à gauche* si

$$\varphi\in F \text{ et } \langle\varphi|\,\gamma\rangle = 0 \quad \text{pour tout } \gamma\in G \quad\Longrightarrow\quad \varphi=0\ ,$$

i.e. si l'application semi-linéaire

$$\langle\cdot| : \varphi\longmapsto\langle\varphi| : F\longrightarrow G^* \quad \text{est injective,}$$

ou encore si $\sigma(F,G)$ est séparée (proposition 2.5).

On dit qu'elle est *séparante à droite* si

$$\gamma\in G \text{ et } \langle\varphi|\,\gamma\rangle = 0 \quad \text{pour tout } \varphi\in F \quad\Longrightarrow\quad \gamma=0\ ,$$

i.e. si l'application linéaire

$$|\cdot\rangle : \gamma\longmapsto|\gamma\rangle : G\longrightarrow F^{\circledast} \quad \text{est injective,}$$

ou encore si $\sigma(G,F)$ est séparée.

On dit qu'elle est *séparante* si elle est séparante à gauche et à droite.

REMARQUE 1 Dans ce cas on identifie φ avec $\langle\varphi|$ et γ avec $|\gamma\rangle$. Les physiciens disent que $\langle\varphi|$ est un *vecteur bra* et $|\mu\rangle$ est un *vecteur ket* , puisque $\langle\varphi|\,\gamma\rangle$ est une "bracket" . Cette notation permettant de distinguer $\langle\varphi|$ et $\langle\gamma|$ comme des formes linéaires sur G et F , ainsi que $|\gamma\rangle$ et $|\varphi\rangle$ comme des formes semi-linéaires sur F et G en considérant respectivement les semi-dualités $\langle F|\,G\rangle$ et $\langle G|\,F\rangle$, est à la base du formalisme de Dirac (cf. 5.19).

EXEMPLE 1 La semi-dualité $\left\langle F|\,F^\dagger\right\rangle$ définie au début de ce paragraphe est séparante à droite, puisque la forme semi-linéaire μ est nulle si, et seulement si, pour tout $\varphi\in F$, on a $\langle\varphi|\,\mu\rangle_F = 0$. En fait $\mu = |\mu\rangle$! La topologie faible $\sigma\left(F^\dagger,F\right)$ est évidemment la même que celle de la définition 3.1.5. Si p est une semi-norme sur F , pour tout $\mu\in F^\dagger$, nous poserons (cf. définition 3.1.2)

$$\|\mu\|_p := \|\mu\|_{p,|\cdot|} := \sup\nolimits_{\varphi\in F,p(\varphi)\leqslant 1}|\langle\varphi|\,\mu\rangle| \in \overline{\mathbb{R}}_+\ .$$

Grâce au lemme 2.2, si $\|\mu\|_p<\infty$ on a

$$|\langle\varphi|\,\mu\rangle| \leqslant p(\varphi)\cdot\|\mu\|_p \quad \text{pour tout } \varphi\in F \text{ et } \mu\in F^\dagger\ .$$

Nous dirons que c'est l' *inégalité de Hölder abstraite* .

Dire que la semi-dualité $\left\langle F|\,F^\dagger\right\rangle$ est séparante à gauche signifie que, pour tout $\varphi\in F$, il existe une forme semi-linéaire continue sur F telle que $\mu(\varphi) = \langle\varphi|\,\mu\rangle_F \neq 0$. Le théorème de Hahn-Banach (cf. théorème 3.6) répondra à la question : elle est séparante à gauche si, et seulement si, F est séparé.

EXEMPLE 2 Si $\mu\in F^\dagger$, alors

$$\langle\mu| : F\longrightarrow\mathbb{K} : \varphi\longmapsto\langle\mu|\,\varphi\rangle_{F^\dagger} = \overline{\langle\varphi|\,\mu\rangle_F}$$

est la forme linéaire canonique associée à la forme semi-linéaire $|\mu\rangle$ et

$$|\mu\rangle\longmapsto\langle\mu| : F^\dagger\longrightarrow F'$$

est une bijection semi-linéaire.

EXEMPLE 3 Soit $\overline{\diamond} : F \longrightarrow F$ une *involution* , i.e. une application semi-linéaire dont le carré est l'identité :

$$\overline{\alpha \cdot \varphi} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\varphi} \quad , \quad \overline{\varphi + \psi} = \overline{\varphi} + \overline{\psi} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\varphi}} = \varphi \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{K} \text{ et } \varphi, \psi \in F \ .$$

Alors

$$(\varphi, \mu) \longmapsto \langle \varphi | \, \mu \rangle_F := \langle \overline{\varphi}, \mu \rangle_F : F \times F' \longrightarrow \mathbb{K}$$

définit une semi-dualité $\langle F | \, F' \rangle$. Dans ce cas on considère F' comme le semi-dual de F grâce à l'application semi-linéaire

$$F' \longrightarrow F^{\dagger} : \mu \longmapsto |\mu\rangle : \text{"}\varphi \longmapsto \langle \overline{\varphi}, \mu \rangle = \mu(\overline{\varphi})\text{"} \ .$$

L'involution duale est définie par

$$\langle \varphi | \, \overline{\mu} \rangle := \overline{\langle \overline{\varphi} | \, \mu \rangle} \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \mu \in F^{\dagger} \ .$$

EXEMPLE 4 Soient X un espace topologique séparé, μ une intégrale de Radon sur X et $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On définit une semi-dualité $\langle \mathbf{L}^p(\mu) | \, \mathbf{L}^q(\mu) \rangle$ en posant

$$\langle f | \, g \rangle := \int \overline{f} \cdot g \, d\mu \quad \text{pour tout } f \in \mathbf{L}^p(\mu) \text{ et } g \in \mathbf{L}^q(\mu) \ ,$$

ce qui a un sens puisque $\overline{f} \cdot g \in \mathbf{L}^1(\mu)$ par l'inégalité de Hölder. Elle est séparante.

En effet si $p \neq \infty$ et $f \in \mathbf{L}^p(\mu) \smallsetminus \{0\}$, la fonction $g := \operatorname{sgn} f \cdot |f|^{p-1} \in \mathbf{L}^q(\mu)$. C'est évident si $p = 1$; si $p \in \,]1, \infty[$, on a $(p-1) \cdot q = p$ et

$$\int^* |g|^q \, d\mu = \int^* |f|^{(p-1)q} \, d\mu = \int^* |f|^p \, d\mu < \infty \ .$$

Il vient alors

$$\langle f | \, g \rangle = \int \overline{f} \cdot \operatorname{sgn} f \cdot |f|^{p-1} \, d\mu = \int |f|^p \, d\mu \neq 0 \ .$$

Si $p = \infty$ et $f \in \mathbf{L}^{\infty}(\mu) \smallsetminus \{0\}$, il existe une partie μ-intégrable A telle que $\mu(A) > 0$ et $|f| > 0$ μ-p.p. sur A . La fonction $g := 1_A \cdot \operatorname{sgn} f \in \mathbf{L}^1(\mu)$ et

$$\langle f | \, g \rangle = \int_A \overline{f} \cdot \operatorname{sgn} f \, d\mu = \int_A |f| \, d\mu > 0 \ .$$

Nous avons donc démontré que cette semi-dualité est séparante à gauche. Par symétrie elle l'est aussi à droite. □

En particulier si $X = n = \{0, \ldots, n-1\}$ et $\mu = \#$, on retrouve la semi-dualité séparante $\langle \mathbb{K}^n | \, \mathbb{K}^n \rangle$ définie par

$$\langle x | \, y \rangle = \sum_{j \in n} \overline{x_j} \cdot y_j \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{K}^n \ .$$

Cette formule montre qu'il est raisonnable de considérer les vecteurs bra et ket comme des vecteurs ligne et respectivement colonne :

$$\langle x | = (\overline{x_j})_{j \in n} \quad , \quad |y\rangle = (y_j)^{\intercal}_{j \in n} \ .$$

La "bracket" est alors une multiplication matricielle :

$$\langle x|\, y\rangle = \left(\overline{x_j}\right)_{j\in n} \left(y_j\right)_{j\in n}^{\intercal} \ .$$

EXEMPLE 5 Reprenons les notations de l'exemple 1.2.3. On définit une semi-dualité,

$$\left\langle \mathbf{L}^2(\mu,\rho) \middle| \mathbf{L}^2\left(\mu,\frac{1}{\rho}\right) \right\rangle$$

en posant

$$\langle f|\, g\rangle_{\mu,\rho} := \int \bar{f}\cdot g\, d\mu \quad \text{pour tout } f\in \mathbf{L}^2(\mu,\rho) \text{ et } g\in \mathbf{L}^2\left(\mu,\frac{1}{\rho}\right) \ .$$

En effet on a $f=0$ μ-p.p. sur $\{\rho=\infty\}$, $g=0$ μ-p.p. sur $\left\{\frac{1}{\rho}=\infty\right\}=\{\rho=0\}$ et l'inégalité de Hölder montre que

$$\left(\int^* \left|\bar{f}\cdot g\right|\, d\mu\right)^2 = \left(\int^* |f|\cdot\sqrt{\rho}\cdot|g|\cdot\frac{1}{\sqrt{\rho}}\, d\mu\right)^2 \leqslant \int^* |f|^2\cdot\rho\, d\mu\cdot\int^* |g|^2\cdot\frac{1}{\rho}\, d\mu < \infty \ .$$

Attention aux notations, il ne faut pas confondre le produit scalaire $(\cdot|\,\cdot)_{\mu,\rho}$ de $\mathbf{L}^2(\mu,\rho)$ et la semi-dualité $\langle\cdot|\,\cdot\rangle_{\mu,\rho}$!

L'application

$$M_\rho : f\longmapsto \rho\cdot f : \mathbf{L}^2(\mu,\rho)\longrightarrow \mathbf{L}^2\left(\mu,\frac{1}{\rho}\right)$$

est manisfestement une isométrie, puisque

$$\|\rho\cdot f\|_{2,\mu,\frac{1}{\rho}}^2 = \int^* |\rho\cdot f|^2\cdot\frac{1}{\rho}\, d\mu = \int^* |f|^2\cdot\rho\, d\mu = \|f\|_{2,\mu,\rho}^2 \ .$$

Elle est surjective et son inverse est évidemment $M_{\frac{1}{\rho}}$. Le théorème de représentation de Riesz montre donc que $\mathbf{L}^2\left(\mu,\frac{1}{\rho}\right)$ est isométrique au semi-dual fort de $\mathbf{L}^2(\mu,\rho)$ par $R\circ M_{1/\rho}$, et en les identifiant, que M_ρ est l'application de Riesz :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}^2(\mu,\rho) & \stackrel{R}{\longrightarrow} & \mathbf{L}^2(\mu,\rho)^{\dagger}_{\beta} \\ M_\rho \downarrow & \nearrow R\circ M_{\frac{1}{\rho}} & \\ \mathbf{L}^2\left(\mu,\frac{1}{\rho}\right) & & \end{array} .$$

Nous verrons plus tard qu'il est plus naturel de considérer $\mathbf{L}^2\left(\mu,\frac{1}{\rho}\right)$ comme le semi-dual de $\mathbf{L}^2(\mu,\rho)$.

DEFINITION 4 On dit que les deux suites $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,n}\subset F$ et $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n}\subset F^{\circledast}$ sont *biorthogonales* si

$$\langle\varphi_k|\,\mu_l\rangle_F = \delta_{k,l} \quad \text{pour tout } k,l=1,\ldots,n \ . \tag{$*$}$$

On vérifie immédiatement que ces suites sont linéairement indépendantes.

LEMME *Soient F un espace vectoriel, $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n} \subset F^{\circledast}$ une suite finie libre de formes semi-linéaires sur F . Alors*

(i)

(a) Il existe une suite finie $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,n}$ qui soit biorthogonale avec $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n}$.

(b) Pour tout $\mu \in F^{\circledast}$, on a l'implication

$$\operatorname{Ker} \mu \supset \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} \mu_j \quad \Longrightarrow \quad \mu \textit{ est une combinaison linéaire des } \mu_j \ .$$

(ii) Si H un sous-espace vectoriel de F tel que

$$F = H \oplus \left(\bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} \mu_j \right) \ ,$$

il existe une unique suite finie $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,n} \subset H$ qui soit biorthogonale avec $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n}$.

C'est une base de H et tout $\varphi \in H$ s'écrit sous la forme

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \langle \mu_j | \varphi \rangle \cdot \varphi_j \ .$$

Dmonstration de (i) Remarquons tout d'abord que (a) $\Rightarrow$ (b). Si $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,n}$ est une suite biorthogonale avec $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n}$,

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \overline{\langle \varphi | \mu_j \rangle} \cdot \varphi_j + \gamma$$

est l'unique décomposition de $\varphi \in F$ telle que

$$\gamma := \varphi - \sum_{j=1}^{n} \overline{\langle \varphi | \mu_j \rangle} \cdot \varphi_j \in \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} \mu_j \ .$$

En particulier

$$F = \left(\bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{K} \cdot \varphi_j \right) \oplus \left(\bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} \mu_j \right) \ .$$

L'assertion (b) est alors immédiate, car si $\mu \in F^{\circledast}$ et $\operatorname{Ker} \mu \supset \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} \mu_j$, pour tout $\varphi \in F$, il vient

$$\langle \varphi | \mu \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \overline{\langle \varphi | \mu_j \rangle} \cdot \varphi_j \middle| \mu \right\rangle + \langle \gamma | \mu \rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi | \mu_j \rangle \cdot \langle \varphi_j | \mu \rangle = \left\langle \varphi \middle| \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j | \mu \rangle \cdot \mu_j \right\rangle \ ,$$

donc

$$\mu = \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j | \mu \rangle \cdot \mu_j \ .$$

Nous aurons donc prouvé (i) lorsque nous aurons prouvé l'existence d'une suite biorthogonale avec $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n}$, ce qui découle de (ii), puisque $\bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker}\mu_j$ possède un supplémeentaire algébrique : il suffit de compléter une base algébrique de ce sous-espace vectoriel en une base de F .

Dmonstration de (ii) Elle se fait par récurrence sur n . Le cas $n = 0$ est trivial en considérant les suites vides, puisque $\bigcap_{j=1}^0 \operatorname{Ker}\mu_j = F$, donc $H = \{0\}$. Supposons que le résultat soit vrai pour n et soient $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n+1}$ une suite de formes semi-linéaires libre. Comme μ_{n+1} n'est pas une combinaison linéaire des μ_j pour $j = 1,\ldots,n$, grâce à l'hypothèse de récurrence et au fait que (a) entraîne (b), le noyau $\operatorname{Ker}\mu_{n+1}$ ne contient pas $\bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker}\mu_j$; il existe donc $\widetilde{\varphi_{n+1}} \in \bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker}\mu_j$ tel que $\left\langle \widetilde{\varphi_{n+1}} \middle| \mu_{n+1}\right\rangle = 1$, donc tel que $\left\langle \widetilde{\varphi_{n+1}} \middle| \mu_l\right\rangle = \delta_{n+1,l}$ pour tout $l = 1,\ldots,n+1$. Considérons la décomposition $\widetilde{\varphi_{n+1}} = \varphi_{n+1} + \gamma$ telle que $\varphi_{n+1} \in H$ et $\gamma \in \bigcap_{j=1}^{n+1} \operatorname{Ker}\mu_j$. Il vient

$$\delta_{n+1,l} = \left\langle \widetilde{\varphi_{n+1}} \middle| \mu_l\right\rangle = \left\langle \varphi_{n+1} + \gamma \middle| \mu_l\right\rangle = \left\langle \varphi_{n+1} \middle| \mu_l\right\rangle \quad \text{pour tout } l = 1,\ldots,n+1 \ .$$

On en déduit que

$$H = H \cap \operatorname{Ker}\mu_{n+1} \oplus \mathbb{K}\cdot\varphi_{n+1} \ ,$$

donc que

$$F = H \oplus \left(\bigcap_{j=1}^{n+1} \operatorname{Ker}\mu_j\right) = H \cap \operatorname{Ker}\mu_{n+1} \oplus \left(\bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker}\mu_j\right) \ .$$

Par l'hypothèse de récurrence, il existe une suite $\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n} \subset H\cap\operatorname{Ker}\mu_{n+1}$ biorthogonale avec $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n}$. Il est alors clair que $\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n+1}$ est biorthogonale avec $\left(\mu_j\right)_{j=1,\ldots,n+1}$.

Puisque

$$F = \left(\bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{K}\cdot\varphi_j\right) \oplus \left(\bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker}\mu_j\right) = H \oplus \left(\bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker}\mu_j\right)$$

et

$$\bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{K}\cdot\varphi_j \subset H \ ,$$

on a $\bigoplus_{j=1}^n \mathbb{K}\cdot\varphi_j = H$, donc $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,n}$ est une base de H .

Pour prouver l'unicité, soit $(\psi_k)_{k=1,\ldots,n} \subset H$ une autre suite biorthogonale avec $\left(\mu_j\right)$. On a $\varphi_k = \sum_{j=1}^n c_{k,j}\cdot\psi_j$, donc

$$\delta_{k,l} = \left\langle \varphi_k \middle| \mu_l\right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{c_{k,j}}\cdot\left\langle \psi_j \middle| \mu_l\right\rangle = \overline{c_{k,l}} \ ,$$

et par suite $\psi_k = \varphi_k$. □

REMARQUE 2 Il est possible de simplifier quelque peu la démonstration de (i)(a); par contre la version duale de cette assertion est beaucoup plus simple à démontrer. Si $\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n} \subset F$ est une suite linéairement indépendante, alors tout $\varphi \in \operatorname{lin}\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j(\varphi)\cdot\varphi_j \ .$$

L'application $\varphi \longmapsto \overline{c_j(\varphi)} : \mathrm{lin}\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme semi-linéaire que l'on peut prolonger (existence d'un supplémentaire algébrique) en une forme semi-linéaire μ_j sur F . Il est alors clair que $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,n}$ et $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n}$ sont biorthogonales.

Si $\dim F = n$, alors $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,n}$ et $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n}$ sont des bases de F et $F^{\circledast}$ respectivement, dites *duales* l'une de l'autre.

THEOREME *Soit $\langle F|\, G\rangle$ une semi-dualité. On a*

$$(F_\sigma)^\dagger = |G\rangle \ ,$$

où $|G\rangle$ désigne l'image de l'application canonique

$$|\cdot\rangle : \gamma \longmapsto |\gamma\rangle : G \longrightarrow F^{\circledast} \ .$$

Pour tout $\gamma \in G$, la forme semi-linéaire $|\gamma\rangle$ est continue sur F_σ par définition de $\sigma(F,G)$. Réciproquement, si μ est une forme semi-linéaire continue sur F_σ , il existe (corollaire 2.2) une partie finie $\Gamma \subset G$ telle que

$$|\mu| \leqslant \max \left| \, |\Gamma\rangle \right| \ .$$

On peut supposer que Γ , donc aussi $|\Gamma\rangle$, est linéairement indépendante ; il suffit en effet de considérer une partie $\Gamma' \subset \Gamma$ et engendrant Γ , car il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\max \left| \, |\Gamma\rangle \right| \leqslant \max \left| \, |c \cdot \Gamma'\rangle \right| \ .$$

Si $\varphi \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{Ker}\,|\gamma\rangle$, alors $|\langle \varphi|\, \mu\rangle| \leqslant \max |\langle \varphi|\, \Gamma\rangle| = 0$, donc $\varphi \in \mathrm{Ker}\,\mu$. Par le lemme (ii), il existe $(c_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \mathbb{K}^{(\Gamma)}$ telle que $\mu = \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma \cdot |\gamma\rangle = \left| \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma \cdot \gamma \right\rangle$, ce qu'il fallait démontrer.

□

DEFINITION 5 Nous dirons qu'une topologie localement convexe $\mathfrak{T}$ sur F est *compatible* avec la semi-dualité $\langle F|\, G\rangle$ si

$$(F_{\mathfrak{T}})^\dagger = |G\rangle \ .$$

EXEMPLE 6 Le théorème montre que la topologie faible $\sigma(F,G)$ est compatible avec la dualité. C'est la moins fine, i.e. $F_{\mathfrak{T}} \longrightarrow F_\sigma$ est continue, puisque chaque $\left| \, |\gamma\rangle \right|$ pour $\gamma \in G$ est évidemment une semi-norme continue sur $F_{\mathfrak{T}}$.

REMARQUE 3 Si $\langle F|\, G\rangle$ est une semi-dualité séparante à droite, on peut identifier G avec $|G\rangle$, donc G avec le semi-dual $(F_\sigma)^\dagger$ de F muni de la topologie faible $\sigma(F,G)$.

Par symétrie si $\langle F|\, G\rangle$ est une semi-dualité séparante à gauche, on peut identifier F avec $\langle F|$, donc F avec le semi-dual $(G_\sigma)^\dagger$ de G muni de la topologie faible $\sigma(G,F)$.

REMARQUE 4 Si F est un espace localement convexe, il existe au moins deux topologies localement convexes compatible avec la semi-dualité $\left\langle F|\, F^\dagger \right\rangle$: la topologie initiale $\mathfrak{T}_F$ et la topologie faible $\sigma\left(F, F^\dagger\right)$, mais elles sont en général différentes, i.e.

$$F^\dagger = (F_\sigma)^\dagger \quad , \text{mais} \quad F \neq F_\sigma \text{ en général} \ .$$

EXEMPLE 7 Soit F un espace préhilbertien. Le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ définit une semi-dualité $(F|F)$ séparante.

Mais attention, $\mathfrak{T}_F$ n'est pas nécessairement compatible avec cette semi-dualité et les différentes topologies à disposition sont différentes ; on a les inclusions, en général strictes, suivantes :

$$\sigma(F,F) \subset \sigma\left(F,F^{\dagger}\right) \subset \mathfrak{T}_F \ .$$

Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, le théorème de représentation de Riesz montre que l'on peut considérer l'espace de droite $\mathcal{H}$ dans la semi-dualité $(\mathcal{H}|\mathcal{H})$ comme le semi-dual $\mathcal{H}^{\dagger}$ de $\mathcal{H}$, ce qui montre $\mathfrak{T}_{\mathcal{H}}$ est compatible avec cette semi-dualité.

EXEMPLE 8 (Intégrales de Radon réelles et complexes)

Rappelons qu'une intégrale de Radon sur X peut être identifiée à une forme linéaire positive sur $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$ (cf. cours d'Analyse [17], théorème 14.6). Nous préciserons en disant que c'est une *intégrale de Radon positive* .

DEFINITION 6 On dit qu'une forme linéaire continue μ sur $\mathcal{K}(X)$, i.e. $\mu \in \mathcal{M}(X) := \mathcal{K}(X)'$, est une *intégrale de Radon réelle* respectivement *complexe* si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ respectivement $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Nous considérerons toujours la semi-dualité $\langle \mathcal{K}(X)|\, \mathcal{M}(X)\rangle$ définie par

$$\langle \varphi|\, \mu\rangle_{\mathcal{K}(X)} := \langle \overline{\varphi}, \mu\rangle = \mu(\overline{\varphi}) \ .$$

Par restriction, on obtient une correspondance biunivoque entre les intégrales de Radon complexes, qui sont réelles sur $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$, et les intégrales de Radon réelles.

Par définition de la topologie localement convexe finale sur $\mathcal{K}(X)$ (cf. exemple 2.10.2), la proposition 2.10 montre qu'une forme linéaire μ sur $\mathcal{K}(X)$ est une intégrale de Radon si, et seulement si, pour tout compact $K \subset X$, la restriction de μ à $\mathcal{K}(X,K)$ est continue, ce qui signifie qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\left|\langle \varphi|\, \mu\rangle_{\mathcal{K}(X)}\right| \leqslant c \cdot \|\varphi\|_{\infty,K} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}(X,K) \ .$$

Cette définition est justifiée par le résultat suivant :

PROPOSITION *Toute forme linéaire positive sur $\mathcal{K}(X)$ est continue, et toute forme linéaire continue sur $\mathcal{K}(X)$ est une combinaison linéaire de formes linéaires positives.*

Si μ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{K}(X)$, pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$ et $\varphi \in \mathcal{K}(X,K)$, on a

$$\left|\langle \varphi|\, \mu\rangle_{\mathcal{K}(X)}\right| = \left|\int \overline{\varphi}\, d\mu\right| \leqslant \mu(K) \cdot \|\varphi\|_{\infty} \ ,$$

ce qui montre que μ est continue. Pour la seconde partie on peut consulter le livre de Dieudonné [7], XIII.1-3. □

REMARQUE 5 L'étape importante de la démonstration de cette proposition est de prouver l'existence de la *valeur absolue* $|\mu|$ d'une intégrale de Radon complexe μ , puis que $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X)$ est un espace vectoriel réticulé : Pour tout $\varphi \in \mathcal{K}_+(X)$, on posant

$$\langle \varphi|\, |\mu|\rangle_{\mathcal{K}(X)} = \sup_{\psi\in\mathcal{K}(X),|\psi|\leqslant\varphi} \left|\langle \psi|\, \mu\rangle_{\mathcal{K}(X)}\right| \ ,$$

on définit une forme linéaire croissante sur le cône convexe $\mathcal{K}_+(X)$, qui se prolonge en une forme linéaire positive sur $\mathcal{K}(X)$. On définit également l' *intégrale de Radon conjuguée* $\overline{\mu}$ (cf. exemple 3 ci-dessus) par

$$\langle \varphi | \overline{\mu} \rangle_{\mathcal{K}(X)} := \overline{\langle \overline{\varphi} | \mu \rangle_{\mathcal{K}(X)}} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}(X) \ ,$$

ainsi que la *partie réelle* $\operatorname{Re}\mu$ et la *partie imaginaire* $\operatorname{Im}\mu$ de μ par

$$\operatorname{Re}\mu := \frac{1}{2} \cdot (\mu + \overline{\mu}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\mu := \frac{1}{2i} \cdot (\mu - \overline{\mu}) \ .$$

On peut alors poser

$$\mu_1 := \max(\operatorname{Re}\mu, 0) \quad , \quad \mu_{-1} := \max(-\operatorname{Re}\mu, 0) \ ,$$

ainsi que

$$\mu_i := \max(\operatorname{Im}\mu, 0) \quad , \quad \mu_{-i} := \max(-\operatorname{Im}\mu, 0) \ .$$

Ces intégrales de Radon sont les seules telles que

$$\mu = \sum_{\varepsilon^4 = 1} \varepsilon \cdot \mu_\varepsilon \quad \text{et} \quad \min(\mu_1, \mu_{-1}) = \min(\mu_i, \mu_{-i}) = 0$$

(cf. aussi ibid., XIII.15). On a

$$\mu_\varepsilon \leqslant |\mu| \leqslant \sum_{\varepsilon^4 = 1} \mu_\varepsilon \ .$$

Si f est une fonction μ-intégrable, i.e. $|\mu|$-intégrable ou encore μ_ε-intégrable pour chaque ε , on pose

$$\int f \, d\mu := \sum_{\varepsilon^4 = 1} \varepsilon \cdot \int f \, d\mu_\varepsilon \ ,$$

et on a

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leqslant \int |f| \ d|\mu| \ .$$

On désigne encore par $\mathbf{L}^1(\mu)$ l'espace vectoriel des classes, modulo les fonctions μ-négligeables, i.e. $|\mu|$-négligeables, de fonctions μ-intégrables, muni de la norme

$$\|f\|_1 := \int |f| \ d|\mu| \ .$$

Si μ est une intégrale de Radon complexe et $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) := \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(|\mu|)$, alors

$$|f \cdot \mu| = |f| \cdot |\mu|$$

(cf. ibid., XIII.16).

EXERCICE 1 On considère la semi-dualité $\langle \mathcal{C}([0,1]) | \mathcal{M}([0,1]) \rangle$. Montrer qu'il existe une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([0,1])$ qui converge ponctuellement vers 0 sur $[0,1]$ et une suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}([0,1])$ qui converge faiblement vers l'intégrale de Dirac ε_0 en 0 , mais telles que

$$\langle f_k | \mu_k \rangle = 1 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

et

$$\lim_k \lim_l \langle f_k | \mu_l \rangle = 0 = \lim_l \lim_k \langle f_k | \mu_l \rangle \ .$$

EXERCICE 2 Soit F un espace vectoriel.

(a) Montrer que tout sous-espace vectoriel W de F est de la forme $\operatorname{Ker} B$, où B est une application linéaire surjective de F sur un espace vectoriel H .

(b) Si $P : F \longrightarrow F$ est un projecteur, i.e. $P^2 = P$, alors

$$F = \operatorname{Ker} P \oplus P(F) \ .$$

(c) Soit D une application linéaire surjective de F sur un espace vectoriel G . Une application linéaire $R : G \longrightarrow F$ telle que $DR = \mathrm{Id}_G$ est dite une *rétraction linéaire* de D . C'est un choix, dépendant linéairement de $g \in G$, parmi les solutions de l'équation $Df = g$. Montrer que

$$F = \operatorname{Ker} D \oplus R(G) \ .$$

(d) Soit W un sous-espace vectoriel de F . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) On a

$$F = \operatorname{Ker} D \oplus W$$

(ii) $D_{|W} : W \longrightarrow G$ est bijective.

(iii) Il existe une rétraction linéaire R de D telle que $R(G) = W$.

(iv) Il existe un projecteur $P : F \longrightarrow F$ tel que $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} D$ et $P(F) = W$.

Dans ce cas $\overset{-1}{D} := \overset{-1}{D_{|W}} : G \longrightarrow F$ est l'unique rétraction de D dont l'image est W et $\overset{-1}{D}D$ est l'unique projecteur satisfaisant à (iv).

(e) Soit B une application linéaire surjective de F sur un espace vectoriel H . Pour que la somme $\operatorname{Ker} D + \operatorname{Ker} B$ soit directe, respectivement que $F = \operatorname{Ker} D + \operatorname{Ker} B$, il faut et il suffit que $B_{|\operatorname{Ker} D} : \operatorname{Ker} D \longrightarrow H$ soit injective, respectivement surjective.

Ainsi

$$F = \operatorname{Ker} D \oplus \operatorname{Ker} B \ ,$$

si, et seulement si, $B_{|\operatorname{Ker} D} : \operatorname{Ker} D \longrightarrow H$ est bijective. Dans ce cas $\overset{-1}{B}B$ est l'unique projecteur Q tel $Q(F) = \operatorname{Ker} D$ et $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Ker} B$. En particulier $\overset{-1}{D}D = \mathrm{Id} - \overset{-1}{B}B$.

Si S est une rétraction quelconque de D , alors $R := \left(\mathrm{Id} - \overset{-1}{B}B\right) S$ est l'unique rétraction de D telle que $R(G) = \operatorname{Ker} B$.

(f) Supposons que $B = (\mu_l)_{l=1,\ldots,n}$, où $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n}$ est une suite linéairement indépendante de $F^{\circledast}$. Nous allons calculer la suite $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,n} \subset \operatorname{Ker} D$ qui lui est biorthogonale (cf. lemme 3.4), en supposant connu des suites biorthogonales $(\psi_k)_{k=1,\ldots,n}$ et $(\nu_l)_{l=1,\ldots,n}$, tel que $(\psi_k)_{k=1,\ldots,n}$ soit une base de $\operatorname{Ker} D$.

(i) Déterminer la matrice M de $B_{|\operatorname{Ker} D}$ dans les bases $(\psi_k)_{k=1,\ldots,n}$ et $(e_k)_{k=1,\ldots,n}$ de $\operatorname{Ker} D$ et $\mathbb{K}^n$.

(ii) Si T est l'application linéaire dans $\operatorname{Ker} D$ telle que $T\psi_k = \varphi_k$, montrer que la matrice de T dans la base $(\psi_k)_{k=1,\ldots,n}$ est l'inverse de M .

(iii) Quelle est la décomposition de φ_k dans la base $(\psi_k)_{k=1,\ldots,n}$?

(g) Considérons l'exemple $F := \mathcal{AC}^{(n)}(J)$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\tau \in J$, $n \in \mathbb{N}$ et

$$D := \partial^n : \mathcal{AC}^{(n)}(J) \longrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J) \ .$$

Pour $l = 0, \ldots, n-1$, soit $\nu_l : \mathcal{AC}^{(n)}(J) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \partial^l \varphi(\tau)$.

Montrer que $\operatorname{Ker} \partial^n = \mathcal{P}_{n-1}(J)$, l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n-1$ et calculer la base $(\psi_k)_{k=0,\ldots,n-1}$ biorthogonale à $(\nu_l)_{l=0,\ldots,n-1}$ et la rétraction S de ∂^n telle que $\nu_l \circ S(\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)) = \{0\}$. Déterminer le noyau $\varkappa : J \times J \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que S s'écrive comme un opérateur intégral

$$S : \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J) \longrightarrow \mathcal{AC}^{(n)}(J) : g \longmapsto \int_J \varkappa(\cdot, s) \cdot g(s)\, ds \ .$$

Utiliser la solution générale de l'équation différentielle $\partial^n f = g$ pour $g \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ en n'oubliant pas d'appliquer le théorème de Fubini !

(h) Soient $(\tau_l)_{l=0,\ldots,n-1} \subset J$, $\mu_l : \mathcal{AC}^{(n)}(J) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \varphi(\tau_l)$ et $B := (\mu_l)_{l=0,\ldots,n-1} : \mathcal{AC}^{(n)}(J) \longrightarrow \mathbb{C}^n$. Sous quelle condition est-ce que $B_{|\operatorname{Ker}\partial^n} : \operatorname{Ker}\partial^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est bijective ? Dans ce cas calculer la base $(\varphi_k)_{k=0,\ldots,n-1}$ biorthogonale à $(\mu_l)_{l=0,\ldots,n-1}$, la rétraction R de ∂^n telle que $\mu_l \circ R(\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)) = \{0\}$ et le noyau correspondant.

(i) Soient $(J_l)_{l=0,\ldots,n-1}$ une suite d'intervalles de J et $\mu_l : \mathcal{AC}^{(n)}(J) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \int_{J_l} \partial^l \varphi$. Sous quelle condition est-ce que $B_{|\operatorname{Ker}\partial^n} : \operatorname{Ker}\partial^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est bijective ? Dans ce cas calculer la base $(\varphi_k)_{k=0,\ldots,n-1}$ biorthogonale à $(\mu_l)_{l=0,\ldots,n-1}$, la rétraction R de ∂^n telle que $\mu_l \circ R(\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)) = \{0\}$ et le noyau correspondant.

3.5 Applications linéaires de rang fini

DEFINITION 1 Rappelons qu'une application linéaire $T : F \longrightarrow G$ est de *rang fini* si le sous-espace vectoriel $T(F)$ de G est de dimension finie. On désigne par $L^f(F, G)$ le sous-espace vectoriel de $L(F, G)$ formé de ces applications, et par $\mathcal{L}^f(F, G)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F, G)$ de celles qui sont continues.

Soient $m = \dim T(F)$ et $\Phi : T(F) \longrightarrow \mathbb{K}^m$ un isomorphisme d'espace vectoriel, ce qui revient à choisir une base $\left(\gamma_j\right)_{j=1,\ldots,m}$ de $T(F)$ telle que $\Phi\gamma_j = e_j$. Pour tout $\varphi \in F$, on peut écrire

$$T\varphi = \Phi^{-1}(\Phi \circ T(\varphi)) = \Phi^{-1}\left(\sum_{j=1}^{m} \mathrm{pr}_j(\Phi \circ T(\varphi)) \cdot e_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{pr}_j \circ\Phi \circ T(\varphi) \cdot \gamma_j$$

et

$$\mu_j := \overline{\mathrm{pr}_j \circ\Phi \circ T} : F \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto \overline{\mathrm{pr}_j \circ\Phi \circ T}$$

est une forme semi-linéaire sur F . On a donc

$$T\varphi = \sum_{j=1}^{m} \overline{\left\langle \varphi \,|\mu_j \right\rangle_F} \cdot \gamma_j = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \cdot \left\langle \mu_j \middle| \varphi \right\rangle_{F^{\circledast}} \ .$$

Réciproquement, quelles que soient les suites $\left(\gamma_j\right)_{j=1,\ldots,m} \subset G$ et $\left(\mu_j\right)_{j=1,\ldots,m} \subset F^{\circledast}$, l'application linéaire définie par

$$T := \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \cdot \left\langle \mu_j \middle| \cdot \right\rangle_{F^{\circledast}} \tag{$*$}$$

est de rang fini.

Remarquons que T est continue si, et seulement si, $T : F \longrightarrow T(F)$ est continue en munissant $T(F)$ de la topologie induite. On a alors immédiatement le résultat suivant :

PROPOSITION *Supposons que G est séparé. Une application linéaire $T : F \longrightarrow G$ de rang fini est continue si, et seulement si, elle est de la forme $(*)$, où $\left(\gamma_j\right)_{j=1,\ldots,m} \subset T(F)$, et chaque μ_j est une forme semi-linéaire continue sur F .*

Si T est continue, il est clair que $\mu_j = \overline{\mathrm{pr}_j \circ\Phi \circ T} \in F^{\dagger}$, puisque Φ est un isomorphisme d'espace localement convexe (théorème 2.7). Réciproquement, si q est une semi-norme continue sur G , alors $q \circ T \leqslant \sum_{j=1}^{m} \left|\left\langle \mu_j \middle| \cdot \right\rangle\right| \cdot q\left(\gamma_j\right)$ et le membre de droite est une semi-norme continue sur F . □

REMARQUE 1 Cette proposition généralise le corollaire 2.7.ii : Si $\left(\mu_j\right)_{j=1,\ldots,m} \subset F^{\dagger}$, alors une application linéaire de rang fini de la forme $(*)$ est continue de F dans tout espace localement convexe G contenant $\left(\gamma_j\right)_{j=1,\ldots,m}$.

COROLLAIRE *Il existe une unique application linéaire bijective de* $|G\rangle\left\langle F^{\dagger}\right|$ *sur* $\mathcal{L}^{f}(F,G)$ *telle que l'image de* $|\gamma\rangle\langle\mu|$ *soit l'application linéaire*

$$\gamma\cdot\langle\mu|\cdot\rangle_{F^{\dagger}}:F\longrightarrow G:\varphi\longmapsto\gamma\cdot\langle\mu|\,\varphi\rangle_{F^{\dagger}}$$

de rang 1 *. Nous identifierons* $|G\rangle\left\langle F^{\dagger}\right|$ *à* $\mathcal{L}^{f}(F,G)$ *.*

Plus précisément toute application linéaire de rang fini $T:F\longrightarrow G$ *s'écrit sous la forme*

$$T:=\sum_{j=1}^{m}\left|\gamma_{j}\right\rangle\left\langle\mu_{j}\right| \ ,$$

où $\left(\gamma_{j}\right)_{j=1,\ldots,m}\subset T(F)$ *et* $\left(\mu_{j}\right)_{j=1,\ldots,m}\subset F^{\circledast}$ *. Elle est continue si, et seulement si,* $\left(\mu_{j}\right)_{j=1,\ldots,m}\subset F^{\dagger}$ *.*

En particulier $|F\rangle\left\langle F^{\dagger}\right|$ *s'identifie à* $\mathcal{L}^{f}(F)$ *et* $\left|F^{\dagger}\right\rangle\left\langle F^{\dagger}\right|$ *à* $\mathcal{L}^{f}\left(F,F^{\dagger}\right)$ *. En outre il existe une unique forme linéaire*

$$\operatorname{Tr}:\mathcal{L}^{f}(F)\longrightarrow\mathbb{K}$$

telle que

$$\operatorname{Tr}(|\varphi\rangle\langle\mu|)=\langle\mu|\,\varphi\rangle_{F^{\dagger}}\quad\text{pour tout }\varphi\in F\text{ et }\mu\in F^{\dagger}\ .$$

Elle est continue pour la topologie induite par $|F\rangle_{i}\left\langle F^{\dagger}\right|$ *. Si* $(\psi_{k})_{k=1,\ldots,n}$ *et* $(\nu_{k})_{k=1,\ldots,n}$ *sont biorthogonales et* $T\in\mathcal{L}^{f}(F)$ *est tel que* $T(F)\subset\operatorname{lin}(\psi_{k})_{k=1,\ldots,n}$ *, alors*

$$\operatorname{Tr}T=\sum_{k\in K}\langle\nu_{k}|\,T\psi_{k}\rangle\ .$$

L'application

$$\mathfrak{s}:G\times F^{\circledast}\longrightarrow L(F,G):(\gamma,\mu)\longmapsto\gamma\cdot\langle\mu|\cdot\rangle_{F^{\circledast}}$$

est sesquilinéaire à droite, donc définit une application linéaire $\widetilde{\mathfrak{s}}:|G\rangle\left\langle F^{\circledast}\right|\longrightarrow L(F,G)$. Utilisant la proposition, il nous suffit de montrer que cette application est injective. Etant donné $t\in|G\rangle\left\langle F^{\circledast}\right|$ tel que $\widetilde{\mathfrak{s}}(t)=0$, nous pouvons supposer que $t=\sum_{j=1}^{n}\left|\gamma_{j}\right\rangle\left\langle\mu_{j}\right|$ et que $\left(\gamma_{j}\right)_{j=1,\ldots,n}$ est libre par le lemme 2.14. Etant donné $\varphi\in F$, on a

$$0=\widetilde{\mathfrak{s}}(t)\,\varphi=\sum_{j=1}^{n}\gamma_{j}\cdot\left\langle\mu_{j}\right|\varphi\rangle\ ,$$

donc $\left\langle\mu_{j}\right|\varphi\rangle=0$ pour tout $j=1,\ldots,n$; ceci montre que $\mu_{j}=0$, et par suite que $t=0$, ce qui démontre la première partie.

L'application $F\times F^{\dagger}\longrightarrow\mathbb{K}:(\varphi,\mu)\longmapsto\langle\mu|\,\varphi\rangle_{F^{\dagger}}$ est semi-linéaire à droite et séparément continue, donc induit une forme linéaire continue Tr sur $|F\rangle_{i}\left\langle F^{\dagger}\right|$. Etant donné $T\in\mathcal{L}^{f}(F)$, que nous pouvons supposer être de la forme $T=\sum_{j=1}^{m}\left|\varphi_{j}\right\rangle\left\langle\mu_{j}\right|$, où $\left(\varphi_{j}\right)_{j=1,\ldots,m}\subset T(F)$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}\langle\nu_{k}|\,T\psi_{k}\rangle=\sum_{k=1}^{n}\left\langle\nu_{k}\left|\sum_{j=1}^{m}\left|\varphi_{j}\right\rangle\left\langle\mu_{j}\right|\psi_{k}\right.\right\rangle=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left\langle\nu_{k}\right|\varphi_{j}\rangle\cdot\left\langle\mu_{j}\right|\psi_{k}\rangle=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left\langle\mu_{j}\left|\sum_{k=1}^{n}\left\langle\nu_{k}\right|\varphi_{j}\right\rangle\cdot\psi_{k}\right\rangle=\sum_{j=1}^{m}\left\langle\mu_{j}\,|\varphi_{j}\right\rangle=\operatorname{Tr}T\ .$$

□

DEFINITION 2 Pour tout $T \in \mathcal{L}^f(F)$, on dit que $\mathrm{Tr}\, T$ est la trace de T .

Cette notion correspond bien avec celle donnée dans le cours d'Algèbre linéaire, puisque pour toute base $(\psi_k)_{k=1,\ldots,n}$ de F , si $(\nu_k)_{k=1,\ldots,n}$ est la base duale associée (cf. remarque 3.4.2), les coefficient $\langle \nu_k | T\psi_k \rangle$ sont ceux de la diagonale de la matrice de T dans la base $(\psi_k)_{k=1,\ldots,n}$.

REMARQUE 2 De la même manière on montre que $G \otimes F'$ s'identifie à $\mathcal{L}^f(F, G)$ en identifiant $\gamma \otimes \mu$ avec l'application linéaire

$$\gamma \cdot \langle \mu, \cdot \rangle_{F'} : F \longrightarrow G : \varphi \longmapsto \gamma \cdot \langle \mu, \varphi \rangle_{F'}$$

de rang 1 .

EXEMPLE 1 (Cas des noyaux à variables séparées)

Nous utilisons les notations de 3.3 et de l'exemple 2.14.2. Supposons que le noyau $\varkappa$ soit de la forme

$$\varkappa = \sum_{j=1}^{m} |f_j\rangle \langle g_j| : (x, y) \longmapsto \sum_{j=1}^{m} f_j(x) \cdot \overline{g_j(y)} : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K} .$$

On dit que c'est un *noyau à variables séparées* . Les hypothèses (a)-(d) de 3.3 sont satisfaites si, pour tout $j = 1, \ldots, m$, on a

(a) $g_j \in \mathbf{L}^1(\nu)$.

(b) $f_j \in \mathcal{C}(X)$.

(c) C'est automatiquement vérifié grâce à (a) et (b).
L'application linéaire K s'écrit alors

$$K : \mathcal{C}^b(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X) : \gamma \longmapsto \sum_{j=1}^{m} \left(\int \gamma \cdot \overline{g_j}\, d\nu \right) \cdot f_j .$$

Elle est de rang fini et bien de la forme $(*)$, puisque $\gamma \longmapsto \int \gamma \cdot \overline{g_j}\, d\nu$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^b(Y)$ quel que soit j . Ces formes linéaires sont continues, car on a

$$\left| \int \gamma \cdot \overline{g_j}\, d\nu \right| \leqslant \int |\gamma| \cdot |g_j|\, d\nu \leqslant \left(\int |g_j|\, d\nu \right) \cdot \|\gamma\|_\infty .$$

Ceci montre aussi que si K est à valeurs dans un espace localement convexe $F \subset \mathcal{C}(X)$, alors K est continue.

(d) $f_j \in \mathcal{C}^b(X)$.
On a $M \leqslant \sum_{j=1}^{m} \|f_j\|_\infty \cdot \int |g_j|\, d\nu$.

Pour conclure remarquons que $\overline{g_j}$ intervient comme une densité par rapport à ν . On a

$$\int \gamma \cdot \overline{g_j}\, d\nu = \langle g_j \cdot \nu | \gamma \rangle_{\mathcal{M}(Y)}$$

et il vient

$$K\gamma = \sum_{j=1}^{m} \left(\int \gamma \cdot \overline{g_j}\, d\nu \right) \cdot f_j = \sum_{j=1}^{m} f_j \cdot \langle g_j \cdot \nu | \gamma \rangle_{\mathcal{M}(Y)} = \left(\sum_{j=1}^{m} |f_j\rangle \langle g_j \cdot \nu| \right)(\gamma) ,$$

i.e.

$$K=\sum_{j=1}^{m}|f_j\rangle\langle g_j\cdot\nu| \ .$$

EXERCICE Peut-on exprimer M simplement à l'aide des f_j et g_j ? Etudier le cas $X = Y := \{1,\ldots,n\}$ et $\nu := \#$.

EXEMPLE 2 Soient $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,n}\subset F$ et $(\mu_l)_{l=0,\ldots,n}\subset F^{\circledast}$ des suites biorthogonales (cf. définition 3.4.4). L'application

$$P:=\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi_j\right\rangle\left\langle\mu_j\right|:F\longrightarrow F$$

est le projecteur, i.e. $P^2=P$, sur $\operatorname{lin}\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n}$ tel que $\operatorname{Ker}P=\bigcap_{j=1}^{n}\operatorname{Ker}\mu_j$.

En effet, pour tout $\varphi\in F$, on a

$$P^2\varphi=\left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi_k\rangle\langle\mu_k|\right)\left(\sum_{l=1}^{n}\varphi_l\cdot\langle\mu_l|\,\varphi\rangle\right)=\sum_{k,l=1}^{n}\varphi_k\cdot\langle\mu_k|\,\varphi_l\rangle\langle\mu_l|\,\varphi\rangle=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\cdot\langle\mu_k|\,\varphi\rangle=\left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi_k\rangle\langle\mu_k|\right)(\varphi)=P\varphi$$

et

$$0=P\varphi=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\cdot\langle\mu_k|\,\varphi\rangle$$

est équivalent à $\langle\mu_k|\,\varphi\rangle=0$ pour tout $k=1,\ldots,n$, donc à $\varphi\in\bigcap_{j=1}^{n}\operatorname{Ker}\mu_j$ puisque $\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n}$ est libre. $\square$

3.6 Théorème de Hahn-Banach

L'un des problèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle consiste à montrer l'existence d'une forme (semi-)linéaire ayant certaines propriétés, que nous supposerons s'exprimer par des égalités et des inégalités. On peut toujours se ramener à un un problème du type : trouver une forme $\mathbb{R}$-linéaire μ sur l'espace vectoriel réel F telle que

$$\mu\left(\varphi_j\right) \leqslant \alpha_j \quad \text{pour tout } j \in J \ ,$$

où $\left(\varphi_j\right)_{j\in J}$ et $\left(\alpha_j\right)_{j\in J}$ sont des familles quelconques de F et $\mathbb{R}$ respectivement. En effet $\mu\left(\varphi\right) \geqslant \alpha$ est équivalent à $\mu\left(-\varphi\right) \leqslant -\alpha$.

Il est préférable en général de remplacer ces données en introduisant une famille (en général finie) de fonctionnelles sous-linéaires $\left(q_j\right)_{j\in J}$. Par exemple l'inégalité $\mu\left(\varphi_j\right) \leqslant \alpha_j$ est équivalente à $\mu \leqslant r_j^{\infty}$ en définissant

$$r : \mathbb{R}_+ \cdot \varphi_j \longrightarrow \mathbb{R} : a \cdot \varphi_j \longmapsto a \cdot \alpha_j$$

(cf. théorème 2.1.iii).

Nous écrirons donc le problème sous la forme

$$\mu \leqslant q_j \quad \text{pour tout } j \in J \ .$$

Grâce au théorème 2.1.i cela est équivalent à

$$\mu \leqslant \bigwedge_{j\in J} q_j \ .$$

PROPOSITION *Soit p une **forme sous-linéaire**. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *p est $\mathbb{R}$-linéaire.*

(ii) *p est minimale dans $\mathcal{SL}(F)$ par rapport à $\leqslant$, i.e.*

$$q \in \mathcal{SL}(F) \ \ \text{et } q \leqslant p \quad \Longrightarrow \quad q = p \ .$$

(iii) *Pour tout $\varphi \in F$, on a*

$$p\left(\varphi\right) = -p\left(-\varphi\right) \ .$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Par la proposition 2.1.i appliqué à q , pour tout $\varphi \in F$, on obtient

$$-q\left(\varphi\right) \leqslant q\left(-\varphi\right) \leqslant p\left(-\varphi\right) = -p\left(\varphi\right) \ ,$$

ce qui montre que $p \leqslant q$, donc que $q = p$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si p est minimale, pour tout $\varphi \in F$, introduisons la fonctionnelle

$$r : \mathbb{R}_+ \cdot \varphi \longrightarrow \mathbb{R} : \alpha \cdot \varphi \longmapsto -\alpha \cdot p\left(-\varphi\right) \ .$$

Ell est évidemment positivement homogène et sous-linéaire sur le cône convexe $\mathbb{R}_+ \cdot \varphi$. Par le théorème 2.1.ii $p \wedge r^{\infty} \in \mathcal{SL}(F)$, car pour tout $\psi \in F$, on a

$$p \wedge r^{\infty}\left(\psi\right) = \inf_{\substack{\varphi_1,\varphi_2\in F \\ \varphi_1+\varphi_2=\varphi}} \left[p\left(\varphi_1\right) + r^{\infty}\left(\varphi_2\right)\right] = \inf_{\alpha\in\mathbb{R}_+} \left[p\left(\psi - \alpha\cdot\varphi\right) - \alpha\cdot p\left(-\varphi\right)\right] \ ,$$

puisqu'il suffit de considérer les φ_2 de la forme $\alpha \cdot \psi$, et

$$p(\psi - \alpha \cdot \varphi) - \alpha \cdot p(-\varphi) = p(\psi - \alpha \cdot \varphi) - p(\psi - \alpha \cdot \varphi - \psi) \geqslant$$

$$\geqslant p(\psi - \alpha \cdot \varphi) - p(\psi - \alpha \cdot \varphi) - p(-\psi) \geqslant -p(-\psi) > -\infty ,$$

ce qui montre que $p \wedge r^\infty(\psi) > -\infty$.

Mais comme $p \wedge r^\infty \leqslant p$, on a $p \wedge r^\infty = p$ par la minimalité de p . On en déduit, en prenanr $\alpha = 1$ dans la définition, que

$$p(\varphi) = p \wedge r^\infty(\varphi) \leqslant -p(-\varphi) \leqslant p(\varphi)$$

grâce à la proposition 2.1.i. Nous avons donc prouvé que $p(\varphi) = -p(-\varphi)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) La condition entraîne immédiatement l'homogénéité de p . Pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a alors

$$p(\varphi + \psi) \leqslant p(\varphi) + p(\psi) = p(\varphi) + p(\varphi + \psi - \varphi) \leqslant p(\varphi) + p(\varphi + \psi) + p(-\varphi) = p(\varphi + \psi) ,$$

donc l'additivité. Ceci finit de prouver que p est $\mathbb{R}$-linéaire. □

SCOLIE (Principe d'Orlicz) *Si p est une forme sous-linéaire, il existe une forme $\mathbb{R}$-linéaire μ sur F telle que $\mu \leqslant p$.*

En particulier, si $(q_j)_{j \in J}$ est une famille de fonctionnelles sous-linéaires sur l'espace vectoriel F telle que

$$-\infty < \bigwedge_{j \in J} q_j < \infty \quad sur\ F ,$$

alors il existe une forme $\mathbb{R}$-linéaire μ sur F telle que

$$\mu \leqslant q_j \quad pour\ tout\ j \in J .$$

Par le principe de maximalité de Hausdorff, il existe une chaîne maximale $S \subset \mathcal{SL}(F)$ telle que $p \in S$. Posons $\mu := \inf S \leqslant p$. Pour tout $q \in S$, on a ou bien $q \geqslant p$ ou bien $q \leqslant p$. Dans ce dernier cas, pour tout $\varphi \in F$, il vient

$$-p(-\varphi) \leqslant -q(-\varphi) \leqslant q(\varphi)$$

par la proposition 2.1.i. On en déduit que $\mu(\varphi) \geqslant -p(-\varphi)$, donc que $\mu(\varphi) \in \mathbb{R}$. Il est clair que μ est positivement homogène. Montrons que μ est additive. Pour tout $\varphi, \psi \in F$ et tout $q, r \in S$, on a $q \leqslant r$ ou $r \leqslant q$, donc $\min(q, r) \in \mathcal{SL}(F)$; ainsi

$$\mu(\varphi + \psi) \leqslant \min(q, r)(\varphi + \psi) \leqslant \min(q, r)(\varphi) + \min(q, r)(\psi) \leqslant q(\varphi) + r(\psi) ,$$

et par suite $\mu(\varphi + \psi) \leqslant \mu(\varphi) + \mu(\psi)$.

Ainsi $\mu \in \mathcal{SL}(F)$ et $\mu \leqslant q$ pour tout $q \in \mathcal{SL}(F)$. Par la maximalité de S , on en déduit que μ est un élément minimal de $\mathcal{SL}(F)$, donc que μ est linéaire par la proposition.

La dernière assertion est triviale, puisque la proposition 2.1.ii montre que $\bigwedge_{j \in J} q_j$ est une forme sous-linéaire. □

REMARQUE 1 L'assertion d'existence de la proposition peut être généralisée au cas où $p \in \mathcal{SL}(F)$, mais en supposant qu'il existe une fonctionnelle q surlinéaire, i.e. $q : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ est positivement homogène et suradditive, et telle que $p \geqslant q$. On peut aussi généraliser tous ces résultats dans le cadre des conoïdes.

Dans le cas particulier, on peut montrer que la condition suivante est nécessaire et suffisante : il existe une fonctionnelle surlinéaire $q : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ telle que $\bigwedge_{j \in J} q_j \geqslant q$.

THEOREME (de Hahn-Banach sur $\mathbb{R}$) *Soient F un espace vectoriel réel, p une forme sous-linéaire sur F , E un sous-espace vectoriel de F et $\tau : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $\tau \leqslant p$ sur E . Alors il existe une forme linéaire μ sur F qui prolonge τ et telle que $\mu \leqslant p$.*

Remarquons que $\mu = \tau$ sur E est équivalent à $\mu \leqslant \tau$ sur E , donc à $\mu \leqslant \tau^\infty$. C'est évidemment nécessaire. Réciproquement, pour tout $\psi \in E$, on a

$$\mu(\psi) \leqslant \tau(\psi) = -\tau(-\psi) \leqslant -\mu(-\psi) = \mu(\psi) \ .$$

Par le principe d'Orlicz il nous suffit donc de considérer la fonctionnelle $p \wedge \tau^\infty$. Pour tout $\varphi \in F$, on a

$$p \wedge \tau^\infty(\varphi) = \inf_{\psi \in E} \left[p(\varphi - \psi) + \tau(\psi)\right] \ ,$$

et

$$-\tau(\psi) = \tau(-\psi) \leqslant p(-\psi) = p(\varphi - \psi - \varphi) \leqslant p(\varphi - \psi) + p(-\varphi) \ ,$$

donc

$$p(\varphi - \psi) + \tau(\psi) \geqslant -p(-\varphi) > -\infty \ .$$

Ceci montre que $p \wedge \tau^\infty(\varphi) > -\infty$. On a $p \wedge \tau^\infty < \infty$ sur F , puisque $p \wedge \tau^\infty \leqslant p$. — □

REMARQUE 2 Une forme $\mathbb{C}$-semi-linéaire μ sur un espace vectoriel complexe F est univoquement déterminée par sa partie réelle. En effet

$$\operatorname{Re}\langle i \cdot \varphi | \mu\rangle = \operatorname{Re}\left[-i \cdot \{\operatorname{Re}\langle \varphi | \mu\rangle + i \cdot \operatorname{Im}\langle \varphi | \mu\rangle\}\right] = \operatorname{Im}\langle \varphi | \mu\rangle \ ,$$

donc

$$\langle \varphi | \mu\rangle = \operatorname{Re}\langle \varphi | \mu\rangle + i \cdot \operatorname{Re}\langle i \cdot \varphi | \mu\rangle \ .$$

Plus généralement l'application

$$\nu \longmapsto \nu + i \cdot \nu(i \cdot \diamond) : (F_\mathbb{R})^* \longrightarrow F^\circledast$$

est une bijection $\mathbb{R}$-linéaire, où $F_\mathbb{R}$ désigne l'espace vectoriel réel associé à F .

Elle est bien définie, puisque $\mu := \nu + i \cdot \nu(i \cdot \diamond)$ est semi-linéaire. En effet pour tout $\varphi \in F$, on a

$$\mu(i \cdot \varphi) = \nu(i \cdot \varphi) + i \cdot \nu(-\varphi) = -i \cdot [\nu(\varphi) + i \cdot \nu(i \cdot \varphi)] = \overline{i} \cdot \mu(\varphi) \ .$$

THEOREME (de Hahn-Banach sur $\mathbb{C}$) *Soient F un espace vectoriel complexe, p une semi-norme sur F , E un sous-espace vectoriel de F et $\tau : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme semi-linéaire telle que $\left||\tau\rangle\right| \leqslant p$ sur E . Alors il existe une forme semi-linéaire μ sur F qui prolonge τ et telle que $\left||\mu\rangle\right| \leqslant p$.*

La fonction

$$\operatorname{Re}|\tau\rangle : E \longrightarrow \mathbb{R} : \psi \longmapsto \operatorname{Re}\langle \psi | \tau\rangle$$

est évidemment une forme $\mathbb{R}$-linéaire. Par le théorème précédent, il existe une forme $\mathbb{R}$-linéaire ν qui prolonge $\operatorname{Re}|\tau\rangle$ et telle que $\nu \leqslant p$. Définissons μ comme dans la remarque ci-dessus. Elle prolonge τ , car pour tout $\psi \in E$, on a

$$\langle \psi | \mu\rangle = \nu(\psi) + i \cdot \nu(i \cdot \psi) = \operatorname{Re}\langle \psi | \tau\rangle + i \cdot \operatorname{Re}\langle i \cdot \psi | \tau\rangle = \langle \psi | \tau\rangle \ .$$

D'autre part il existe $\alpha \in \mathbb{U}$ tel que $|\langle \varphi | \mu\rangle| = \alpha \cdot \langle \varphi | \mu\rangle$; on a alors

$$|\langle \varphi | \mu\rangle| = \langle \overline{\alpha} \cdot \varphi | \mu\rangle = \nu(\overline{\alpha} \cdot \varphi) \leqslant p(\overline{\alpha} \cdot \varphi) = p(\varphi) \ ,$$

ce qui finit de prouver le théorème. □

THEOREME (de Hahn-Banach) *Soient F un espace localement convexe, E un sous-espace vectoriel de F et $\tau : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme semi-linéaire continue pour la topologie induite. Alors il existe une forme semi-linéaire continue μ sur F qui prolonge τ .*

En particulier F est séparé, si, et seulement si, pour tout $\varphi \in F \smallsetminus \{0\}$, il existe une forme semi-linéaire continue $\mu \in F^\dagger$ telle que $\langle \varphi | \mu \rangle \neq 0$, i.e. si, et seulement si, la semi-dualité $\left\langle F \middle| F^\dagger \right\rangle$ est séparante.

Si F est un espace normé, il existe une forme semi-linéaire continue μ sur F qui prolonge τ et qui soit de même norme.

Par hypothèse il existe une semi-norme continue p sur F telle que $\left| |\tau\rangle \right| \leqslant p$. Il suffit donc d'appliquer les théorèmes précédents.

Si F est séparé, il existe une semi-norme continue p telle que $p(\varphi) > 0$ par la proposition 2.5. Définissons

$$\tau : \mathbb{K} \cdot \varphi \longrightarrow \mathbb{K} : \alpha \cdot \varphi \longmapsto \overline{\alpha} \cdot p(\varphi) \ .$$

C'est une forme semi-linéaire telle que $\langle \varphi | \tau \rangle \neq 0$ et elle est évidemment continue. Le résultat découle donc de ce qui précède.

Si F est normé, on peut prendre $p := \left\| |\tau\rangle \right\| \cdot \|\diamond\|$. □

COROLLAIRE

(i) Soient F un espace vectoriel réel et p une forme sous-linéaire sur F . Alors p est l'enveloppe supérieure des formes linéaires qu'elle majore, i.e.

$$p = \sup \{ \mu \in F^* \mid \mu \leqslant p \} \ .$$

(ii) Soit F un espace localement convexe quelconque. Si p est une semi-norme sur F , alors

$$p = \sup \left\{ \left| |\mu\rangle \right| \;\middle|\; \mu \in F^{\circledast} \text{ et } \left| |\mu\rangle \right| \leqslant p \right\} \ .$$

Si p est continue, alors

$$p = \sup \left\{ \left| |\mu\rangle \right| \;\middle|\; \mu \in F^{\dagger} \text{ et } \left| |\mu\rangle \right| \leqslant p \right\} \ .$$

Dmonstration de (i) Pour tout $\varphi \in F$, on considère la forme linéaire

$$\tau : \mathbb{R} \cdot \varphi \longrightarrow \mathbb{R} : \alpha \cdot \varphi \longmapsto \alpha \cdot p(\varphi) \ .$$

Or $\tau \leqslant p$ sur $\mathbb{R} \cdot \varphi$, puisque

$$\tau(-\varphi) = -\tau(\varphi) = -p(\varphi) \leqslant p(-\varphi)$$

par la proposition 2.1.i. Il suffit donc d'appliquer le théorème de Hahn-Banach réel.

Dmonstration de (ii) On procède comme dans la démonstration du théorème de Hahn-Banach complexe (exercice). □

REMARQUE 3 La démonstration montre que les bornes supérieures sont ponctuellement atteintes.

EXEMPLE 1 Soit F un espace localement convexe séparé. Pour toute suite $(\psi_k)_{k=1,\ldots,n} \subset F$ linéairement indépendante, il existe une suite $(\nu_l)_{l=1,\ldots,n} \subset F^\dagger$ de formes semi-linéaires continues qui lui soit biorthogonale.

Dans la remarque 2.4.1 nous avons vu que $\psi \longmapsto \overline{c_j(\psi)} : \mathrm{lin}\left(\psi_j\right)_{j=1,\ldots,n} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme semi-linéaire, évidemment continue. Le résultat découle donc du théorème de Hahn-Banach. $\square$

EXEMPLE 2 Soient p, q des formes sous-linéaires sur un espace vectoriel réel F et μ une forme linéaire sur F telle que $\mu \leqslant p+q$. Alors il existe des formes linéaires ν et η sur F telles que $\mu = \nu + \eta$ et $\nu \leqslant p$, $\eta \leqslant q$.

Cela revient à construire une forme linéaire $\nu \leqslant p$ telle que $\mu - \nu = \eta \leqslant q$, i.e. $-\nu \leqslant q - \mu$ ou encore $\nu \leqslant q(-\diamond) + \mu$. Par le principe d'Orlicz, il nous suffit donc de considérer la fonctionnelle $p \wedge [q(-\diamond) + \mu]$ et de montrer qu'elle est $> -\infty$. Rappelons que, pour tout $\varphi \in F$, on a

$$p \wedge [q(-\diamond) + \mu](\varphi) = \inf_{\varphi_1, \varphi_2 \in F, \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi} \left[p(\varphi_1) + q(-\varphi_2) + \mu(\varphi_2)\right] \ .$$

Or

$$p(\varphi_1) + q(-\varphi_2) + \mu(\varphi_2) = p(\varphi_1) - p(-\varphi_2) + p(-\varphi_2) + q(-\varphi_2) + \mu(\varphi_2) \geqslant$$

$$\geqslant p(\varphi_1) - p(-\varphi_2) \geqslant -p(-\varphi_1 - \varphi_2) = -p(-\varphi) > -\infty \ ,$$

puisque $\mu(-\varphi_2) \leqslant (p+q)(-\varphi_2)$ et

$$p(-\varphi_2) \leqslant p(-\varphi_1 - \varphi_2) + p(\varphi_1) \ .$$

$\square$

EXEMPLE 3 Soient p, q des semi-normes sur un espace vectoriel F , réel ou complexe, et μ une forme semi-linéaire sur F telle que $\left|\,|\mu\rangle\right| \leqslant p+q$. Alors il existe des formes semi-linéaires ν et η telles $\mu = \nu + \eta$ et $\left|\,|\nu\rangle\right| \leqslant p$, $\left|\,|\eta\rangle\right| \leqslant q$.

Le cas réel est immédiat par l'exemple précédent en remarquant que, pour toute forme linéaire μ et toute semi-norme p , on a

$$|\mu| \leqslant p \quad \Longleftrightarrow \quad \mu \leqslant p \ .$$

Quant au cas complexe, on procède comme dans la démonstration du théorème de Hahn-Banach complexe 2.6 en considérant les parties réelles. $\square$

3.7 Continuité faible et adjonction

Dans tout ce qui suit F, G sont des espaces localement convexes

Nous allons maintenant étudier le semi-dual $F^{\dagger}$ de F , muni de sa topologie faible. Rappelons qu'elle est definie par les semi-normes

$$\mu \longmapsto |\langle \varphi | \mu \rangle| : F^{\dagger} \longrightarrow \mathbb{R}$$

pour $\varphi \in F$.

REMARQUE 1 Soit $T : F \longrightarrow G$ une application linéaire (respectivement semi-linéaire). Considérons, pour tout $\nu \in G^{\dagger}$, la forme semi-linéaire

$$T^{\circledast}\nu := \langle \cdot | \nu \rangle_G \circ T = \langle T \cdot | \nu \rangle_G : F \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto \langle T\varphi | \nu \rangle_G \ ,$$

respectivement

$$T^{\circledast}\nu := \overline{\langle \cdot | \nu \rangle_G} \circ T = \overline{\langle T \cdot | \nu \rangle_G} : F \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto \overline{\langle T\varphi | \nu \rangle_G} \ ) \ .$$

Dans la semi-dualité $\langle F | F^{\circledast} \rangle$, pour tout $\varphi \in F$ et $\nu \in G^{\dagger}$, on a l'égalité fondamentale

$$\langle T\varphi | \nu \rangle_G = \left\langle \varphi | T^{\circledast}\nu \right\rangle_F \ ,$$

respectivement

$$\langle T\varphi | \nu \rangle_G = \overline{\langle \varphi | T^{\circledast}\nu \rangle_F} = \left\langle T^{\circledast}\nu \middle| \varphi \right\rangle_{F^{\dagger}} \ .$$

Nous avons donc défini une application linéaire, respectivement semi-linéaire

$$T^{\circledast} : G^{\dagger} \longrightarrow F^{\circledast} : \nu \longmapsto T^{\circledast}\nu \ .$$

On constate souvent, en manipulant judicieusement l'expression $\langle T\varphi | \nu \rangle_G$, par exemple en intégrant par partie, que l'on a $T^{\circledast}\left(G^{\dagger}\right) \subset F^{\dagger}$. Plus précisément il est souvent possible de définir une application $S : G^{\dagger} \longrightarrow F^{\dagger}$ telle que l'on ait

$$\langle T\varphi | \nu \rangle_G = \langle \varphi | S\nu \rangle_F \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \nu \in G^{\dagger} \ .$$

Ceci nous conduit, pour des raisons d'ordre essentiellement pratique, à poser la

DEFINITION 1 On dit que $T^{\circledast} : G^{\dagger} \longrightarrow F^{\circledast}$est l' *adjointe algébrique* ou *formelle* de T .

Si $T^{\circledast}\left(G^{\dagger}\right) \subset F^{\dagger}$, i.e. s'il existe une (unique) application linéaire (respectivement semi-linéaire) $S : G^{\dagger} \longrightarrow F^{\dagger}$ telle que, pour tout $\varphi \in F$ et $\nu \in G^{\dagger}$, on ait

$$\langle T\varphi | \nu \rangle_G = \langle \varphi | S\nu \rangle_F \quad (\text{resp.} \quad \langle T\varphi | \nu \rangle_G = \overline{\langle \varphi | S\nu \rangle_F} \ ) \ ,$$

on dit que T *admet une adjointe* et on désigne par

$$T^{\dagger} : G^{\dagger} \longrightarrow F^{\dagger} : \nu \longmapsto T^{\circledast}\nu = \langle T \cdot | \nu \rangle$$

cette application.

Notons tout d'abord la propriété universelle suivante exprimant que la topologie faible est une topologie initiale :

LEMME *Soient $\langle F | G\rangle$ une semi-dualité, H un espace localement convexe et $T : H \longrightarrow F_\sigma$ une application (semi-) linéaire. Pour que T soit continue, il faut et il suffit que, pour tout $\gamma \in G$, la forme (semi-) linéaire $\langle T\cdot | \gamma\rangle = \langle \cdot | \gamma\rangle \circ T$ soit continue sur H .*

C'est immédiat par définition de la topologie faible (cf. définition 3.4.3), puisque l'on a $|\langle \cdot | \gamma\rangle| \circ T = |\langle T\cdot | \gamma\rangle|$. □

REMARQUE 2 Soit X est un espace topologique. On peut montrer qu'une application $f : X \longrightarrow F_\sigma$ est continue, si, et seulement si, la fonction $x \longmapsto \langle f(x) | \gamma\rangle : X \longrightarrow G$ est continue.

Cf. remarque 3.7.2. □

PROPOSITION *Soit $T : F \longrightarrow G$ une application linéaire.*

(i) L'application

$$T^{\circledast} : G^\dagger \longrightarrow F^{\circledast} : \nu \longmapsto T^{\circledast}\nu$$

est linéaire (respectivement semi-linéaire) et (faiblement) continue. Si T admet une adjointe, alors $T^\dagger$ est (faiblement) continue.

(ii) Si $T : F \longrightarrow G$ est continue, alors T admet une adjointe.

(iii) Pour que T admet une adjointe, il faut et il suffit que $T : F_\sigma \longrightarrow G_\sigma$ soit continue. En particulier si $T : F \longrightarrow G$ est continue, alors $T : F_\sigma \longrightarrow G_\sigma$ est continue.

(iv) Si $S, T : F \longrightarrow G$ sont des applications linéaires continues et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors

$$(S + T)^\dagger = S^\dagger + T^\dagger \quad \text{et} \quad (\alpha \cdot T)^\dagger = \overline{\alpha} \cdot T^\dagger \ .$$

(v) Si $T : F \longrightarrow G$ et $S : G \longrightarrow H$ sont des applications linéaires continues, alors

$$(ST)^\dagger = T^\dagger S^\dagger \ .$$

En particulier, si T est un isomorphisme de F sur G ou de F_σ sur G_σ , alors $T^\dagger$ en est aussi un et on a

$$\overset{-1}{T^\dagger} = \left(\overset{-1}{T}\right)^\dagger \ .$$

Dmonstration de (i) La continuité de $T^{\circledast}$ est immédiate par la lemme puisque, pour tout $\varphi \in F$,

$$\langle \varphi | \cdot\rangle_F \circ T^{\circledast} = \langle T\varphi | \cdot\rangle_G$$

est une forme semi-linéaire continue sur $G^\dagger$. Si T admet une adjointe $T^\dagger$ est continue comme factorisation de $T^{\circledast}$.

Dmonstration de (ii) En effet, pour tout $\nu \in G^\dagger$, la forme semi-linéaire $T^{\circledast}\nu = \langle \cdot | \nu\rangle_G \circ T$ est évidemment continue, donc $T^{\circledast}\nu \in F^\dagger$.

Dmonstration de (iii) Si $T : F_\sigma \longrightarrow G_\sigma$ est continue, (ii) montre que T admet une adjointe puisque $(F_\sigma)^\dagger = F^\dagger$ et $(G_\sigma)^\dagger = G^\dagger$. Réciproquement si T admet une adjointe, il nous suffit grâce au lemme de montrer que, pour tout $\nu \in G^\dagger$, la forme semi-linéaire $\langle T\cdot | \nu\rangle_G$ est continue sur F_σ . Mais $\langle T\cdot | \nu\rangle_G = \left\langle \cdot | T^\dagger\nu\right\rangle_F$ et $T^\dagger\nu \in F^\dagger$, d'oú l'assertion par définition de la topologie faible.

Le reste est alors immédiat. □

THEOREME *On suppose que F, G sont séparés.*

(i) Pour tout $\varphi \in F$, soit

$$|\varphi\rangle_{F^\dagger} : \mu \longmapsto \langle \mu | \varphi\rangle_{F^\dagger} := \overline{\langle \varphi | \mu\rangle_F}$$

la forme semi-linéaire continue sur $F^\dagger$ associée à φ . L'application canonique

$$|\cdot\rangle_{F^\dagger} : F_\sigma \longrightarrow \left(F^\dagger\right)^\dagger : \varphi \longmapsto |\varphi\rangle_{F^\dagger}$$

est un isomorphisme permettant d'identifier F_σ à $\left(F^\dagger\right)^\dagger$.

(ii) Si $T : F \longrightarrow G$ est continue, alors $T = \left(T^\dagger\right)^\dagger$.

Dmonstration de (i) Le théorème de Hahn-Banach 3.6 montre que la dualité $\left\langle F^\dagger \middle| F\right\rangle$ est séparante à droite, donc que $|\cdot\rangle_{F^\dagger}$ est bijective (théorème 3.4 et remarque 3.4.2). Ceci montre que les semi-dualités $\left\langle F \middle| F^\dagger\right\rangle$ et $\left\langle \left(F^\dagger\right)^\dagger \middle| F^\dagger\right\rangle$ peuvent être identifiées :

$$\langle |\varphi\rangle_{F^\dagger} | \mu\rangle_{\left(F^\dagger\right)^\dagger} = \overline{\langle \mu | \varphi\rangle_{F^\dagger}} = \langle \varphi | \mu\rangle_F \ ;$$

les topologies faibles sur F et $\left(F^\dagger\right)^\dagger$ sont en particulier les mêmes.

Dmonstration de (ii) On a évidemment

$$\left\langle \left(T^\dagger\right)^\dagger \varphi \middle| \nu\right\rangle_G = \left\langle \left(T^\dagger\right)^\dagger \varphi \middle| \nu\right\rangle_{\left(G^\dagger\right)^\dagger} = \left\langle \varphi \middle| T^\dagger \nu\right\rangle_F = \langle T\varphi | \nu\rangle_G \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

DEFINITION 2 Soit $\langle F | G\rangle$ une semi-dualité. Si F et G sont des espaces localement convexes séparés nous dirons qu'ils sont en semi-dualité si leur topologie est compatible avec cette semi-dualité.

La semi-dualité $\langle F | G\rangle$ est donc séparante et le théorème montre que dans ce cas on a $G_\sigma = F^\dagger$ et $F_\sigma = G^\dagger$. Par exemple un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est en semi-dualité avec lui-même grâce au produit scalaire (cf. exemple 3.4.7).

SCOLIE *On suppose que F et G sont séparés.*

(i) $\mathcal{L}(F_\sigma, G_\sigma) = \mathcal{L}(F, G_\sigma)$ est l'ensemble des applications linéaires de F dans G admettant une adjointe. En outre

$$T \longmapsto T^\dagger : \mathcal{L}_s(F_\sigma, G_\sigma) \longrightarrow \mathcal{L}_s\left(G^\dagger, F^\dagger\right)$$

est un isomorphisme, dont l'application réciproque est

$$S \longmapsto S^\dagger : \mathcal{L}_s\left(G^\dagger, F^\dagger\right) \longrightarrow \mathcal{L}_s(F_\sigma, G_\sigma) \ .$$

(ii) On a

$$\mathcal{L}(F, G) \subset \mathcal{L}(F_\sigma, G_\sigma) \ .$$

Si F est tonnelé, alors

$$\mathcal{L}(F, G) = \mathcal{L}(F_\sigma, G_\sigma) \ .$$

Dmonstration de (i) L'inclusion $\mathcal{L}(F_\sigma, G_\sigma) \subset \mathcal{L}(F, G_\sigma)$ découle du fait que $F \longrightarrow F_\sigma$ est continue (exemple 3.4.6 ou le lemme ci-dessus). Les éléments de $\mathcal{L}(F, G_\sigma)$ admettent une adjointe par la proposition (i) et les applications linéaires de F dans G admettant une adjointe sont faiblement continue par (ii). Finalement les formules

$$|\langle T\varphi|\,\nu\rangle_G| = \left|\left\langle \varphi|\,T^\dagger\nu\right\rangle_F\right| = \left|\left\langle T^\dagger\nu\right|\,\varphi\right\rangle_{F^\dagger}\right|$$

montrent que les semi-normes sur $\mathcal{L}_s(F_\sigma, G_\sigma)$ et $\mathcal{L}_s\left(G^\dagger, F^\dagger\right)$ se correspondent.

Dmonstration de (ii) L'inclusion découle de la proposition (i). Maintenant si F est tonnelé, il nous suffit de montrer que si $T : F_\sigma \longrightarrow G_\sigma$ est une application linéaire continue, alors $T : F \longrightarrow G$ l'est aussi. Mais pour toute semi-norme continue q sur G , le corollaire 3.6.ii montre que

$$q \circ T = \left(\sup_{\nu\in G^\dagger,|\nu|\leqslant q} |\langle \cdot|\,\nu\rangle|\right) \circ T = \sup_{\nu\in G^\dagger,|\nu|\leqslant q} |\langle T\cdot|\,\nu\rangle| = \sup_{\nu\in G^\dagger,|\nu|\leqslant q} \left|\left\langle \cdot\right|T^\dagger\nu\right\rangle\right| \ .$$

Or $T^\dagger\nu \in F^\dagger$ est une forme semi-linéaire continue sur F . Ceci montre que la semi-norme $q \circ T$ est l'enveloppe supérieure d'une famille de semi-norme continues, donc qu'elle est continue par le scolie 2.13. □

REMARQUE 3 Dans les applications on montre, ou bien directement que $T : F \longrightarrow G$ est continue, ou bien que T admet une adjointe, ce qui prouve la continuité faible, d'où la continuité si F est tonnelé ou plus généralement si F est muni de sa topologie de Mackey (cf. théorème 3.11.ii). La continuité faible n'est en fait qu'un outil théorique.

EXERCICE Soient F, G des espaces localement convexes tels que $F \cap G$ soit dense dans F et dans G . Montrer que l'on peut identifier $F^\dagger$ et $G^\dagger$ a des sous-espaces de $(F \cap G)^\dagger$ et que l'on a

$$(F \cap G)^\dagger = F^\dagger + G^\dagger \ .$$

Cf. définition 2.4.2 et exemple 3.6.2.

3.8 Dualité dans les espaces normés

Soit F un espace normé. Rappelons que $F_\beta^\dagger$ désigne le semi-dual fort de F (cf. définition 3.2.2). Il est muni de la norme

$$\|\mu\| := \|\mu\|_{\|\cdot\|_F,|\cdot|} := \sup_{\varphi\in F,\|\varphi\|\leqslant 1} |\langle\varphi|\,\mu\rangle| \ .$$

On a

$$|\langle\varphi|\,\mu\rangle| \leqslant \|\varphi\|\cdot\|\mu\| \quad \text{pour tout } \varphi\in F \text{ et } \mu\in F^\dagger \ .$$

En particulier $\mathrm{Id} : F_\beta^\dagger \longrightarrow F^\dagger$ ($= F_\sigma^\dagger$) est continue, donc $F = \left(F^\dagger\right)^\dagger \subset \left(F_\beta^\dagger\right)^\dagger$.

DEFINITION On dit que $\left(F_\beta^\dagger\right)^\dagger$ est le *bidual* de F et que F est *réflexif* si $F = \left(F_\beta^\dagger\right)^\dagger$.

THEOREME *Pour tout $\varphi\in F$, on a*

$$\|\varphi\| = \left\|\,|\varphi\rangle_{F^\dagger}\right\| = \sup_{\mu\in F^\dagger,\|\mu\|\leqslant 1} |\langle\varphi|\,\mu\rangle| \ ,$$

i.e.

$$|\cdot\rangle_{F^\dagger} : F \longrightarrow \left(F_\beta^\dagger\right)_\beta^\dagger : \varphi \longmapsto |\varphi\rangle_{F^\dagger}$$

est une isométrie.

En effet, on a

$$\left\|\,|\varphi\rangle_{F^\dagger}\right\| = \sup_{\mu\in F^\dagger,\|\mu\|\leqslant 1} \left|\langle\mu|\,\varphi\rangle_{F^\dagger}\right| = \sup_{\mu\in F^\dagger,\|\mu\|\leqslant 1} |\langle\varphi|\,\mu\rangle| = \|\varphi\|$$

par le corollaire 3.6.ii, car $\|\mu\| \leqslant 1$ signifie que $|\langle\cdot|\,\mu\rangle| \leqslant \|\cdot\|$. □

REMARQUE 1 Un espace normé réflexif est nécessairement un espace de Banach.

C'est évident puisque $\left(F_\beta^\dagger\right)_\beta^\dagger$ est complet par la proposition 3.2. □

REMARQUE 2 On identifie l'espace normé F avec son image dans $\left(F_\beta^\dagger\right)^\dagger$, mais en général on a $F \neq \left(F_\beta^\dagger\right)^\dagger$.

La fermeture de F dans son bidual fort $\left(F_\beta^\dagger\right)_\beta^\dagger$, muni de la norme induite, est évidemment un espace de Banach induisant la norme de F et dans lequel F est dense.

DEFINITION 1 On dit que la fermeture de F dans son bidual fort $\left(F_\beta^\dagger\right)_\beta^\dagger$ est le *complété* de F et on le note $\widehat{F}$.

LEMME *La boule unité de F est dense dans celle de $\widehat{F}$.*

Etant donné $\varphi \in \widehat{F}$ tel que $0 < \|\varphi\| \leqslant 1$, il existe une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset F$ telle que $\varphi = \lim_k \varphi_k$. Mais comme $0 \neq \|\varphi\| = \lim_k \|\varphi_k\|$, il vient

$$\varphi = \lim_k \frac{\|\varphi\|}{\|\varphi_k\|} \cdot \varphi_k \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\|\varphi\|}{\|\varphi_k\|} \cdot \varphi_k \right\| \leqslant 1 \ .$$

□

REMARQUE 3 Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, le théorème de représentation de Riesz 1.5 montre que l'on peut considérer l'espace de droite $\mathcal{H}$ dans la semi-dualité $(\mathcal{H}|\,\mathcal{H})$ comme le semi-dual fort $\mathcal{H}^\dagger_\beta$ de $\mathcal{H}$.

EXEMPLE 1 Si F est un espace préhilbertien, alors l'espace de Banach complété $\widehat{F}$ de F est un espace de Hilbert, puisque la norme du complété satisfait encore à l'égalité du parallélogramme (cf. corollaire1.3).

Remarquons qu'il n'est pas immédiat de démontrer directement que le produit scalaire se prolonge par continuité au complété, le produit scalaire n'étant pas **uniformément** continu sur $F \times F$.

On a les assertion suivantes :

(i) Soient F un espace préhilbertien et $\widehat{F}$ l'espace de Hilbert complété de F . Alors $\widehat{F}^\dagger_\beta = F^\dagger_\beta$ et l'application de Riesz $\xi \longmapsto |\xi) : F \longrightarrow F^\dagger_\beta$ est une isométrie d'image dense, qui se prolonge en une isométrie de $\widehat{F}$ sur $F^\dagger_\beta$.

(ii) Le bidual fort $\left(F^\dagger_\beta\right)^\dagger_\beta$ de F est égal au complété $\widehat{F}$ de F ; en particulier un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est réflexif.

Dmonstration de (i) Comme toute forme semi-linéaire continue μ sur F possède un seul prolongement continu $\widehat{\mu}$ à $\widehat{F}$ de même norme par le théorème de Hahn-Banach 3.6, on obtient $\widehat{F}^\dagger_\beta = F^\dagger_\beta$. Le théorème de Riesz montre alors que $R : \xi \longmapsto |\xi)$ est une isométrie de $\widehat{F}$ sur $F^\dagger_\beta$, d'où notre assertion.

Dmonstration de (ii) Si ζ est une forme semi-linéaire continue sur $F^\dagger_\beta$, qui est un espace de Hilbert par (i) et la remarque 1.5.2, il existe $\nu \in F^\dagger_\beta$ tel que l'on ait

$$\langle \mu|\, \zeta\rangle_{F^\dagger_\beta} = (\mu|\, \nu)_{F^\dagger_\beta} = \left\langle \mu|\, R^{-1}\nu\right\rangle_{\widehat{F}^\dagger} \quad \text{pour tout } \mu \in F^\dagger \ .$$

On a donc $\zeta = |R^{-1}\nu\rangle_{\widehat{F}^\dagger} \in \widehat{F}$ (cf. remarque 3). Il est alors clair qu'un espace de Hilbert est réflexif. □

COROLLAIRE *Si F et G sont des espaces normés et $T : F \longrightarrow G$ est une application linéaire continue, alors $T^\dagger : G^\dagger_\beta \longrightarrow F^\dagger_\beta$ est continue, $\left\|T^\dagger\right\| = \|T\|$ et*

$$\left(T^\dagger\right)^\dagger : \left(F^\dagger_\beta\right)^\dagger_\beta \longrightarrow \left(G^\dagger_\beta\right)^\dagger_\beta$$

est un prolongement de T de même norme.

Pour tout $\nu \in G^\dagger$, on a

$$\left\|T^\dagger \nu\right\| = \sup_{\varphi \in F, \|\varphi\| \leqslant 1} \left|\left\langle \varphi \right| T^\dagger \nu \right\rangle\right| = \sup_{\varphi \in F, \|\varphi\| \leqslant 1} \left|\left\langle T\varphi \right| \nu \right\rangle\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\varphi \in F, \|\varphi\| \leqslant 1} \|T\varphi\| \cdot \|\nu\| \leqslant \|T\| \cdot \|\nu\| \ ,$$

ce qui prouve que $\left\|T^\dagger\right\| \leqslant \|T\|$, et en particulier que $T^\dagger$ est (fortement) continue. Il en est donc de même de $\left(T^\dagger\right)^\dagger$ et $\left\|\left(T^\dagger\right)^\dagger\right\| \leqslant \left\|T^\dagger\right\|$. Mais comme $\left(T^\dagger\right)^\dagger$ est trivialement un prolongement de T par le théorème 3.7.ii, on a $\|T\| \leqslant \left\|\left(T^\dagger\right)^\dagger\right\|$, donc $\|T\| \leqslant \left\|\left(T^\dagger\right)^\dagger\right\| \leqslant \left\|T^\dagger\right\| \leqslant \|T\|$, ce qu'il fallait démontrer. □

PROPOSITION *Toute partie faiblement bornée d'un espace localement convexe F est bornée.*

Etant donné une partie $A \subset F$ faiblement bornée, il suffit de montrer que toute semi-norme continue p sur F est bornée sur A . Si $\pi : F \longrightarrow F/\{p=0\}$ désigne la projection canonique, elle est continue en munissant $F/\{p=0\}$ de la norme $[p]$. D'après la remarque 2 l'espace normé $F/\{p=0\}$ est un sous-espace de $\left(\left(F/\{p=0\}\right)_\beta^\dagger\right)_\beta^\dagger$. Puisque l'image $\pi(A)$ est faiblement bornée, ce qui signifie que l'ensemble

$$\langle \pi(A)| \subset \left(\left(F/\{p=0\}\right)_\beta^\dagger\right)^\dagger = \mathcal{L}_s\left(\left(F/\{p=0\}\right)_\beta^\dagger, \mathbb{K}\right)$$

est simplement borné, le théorème de la majoration uniforme 3.2 montre, car $\left(F/\{p=0\}\right)_\beta^\dagger$ est un espace de Banach par la proposition 3.2, que $\langle \pi(A)|$ est bornée dans

$$\mathcal{L}_b\left(\left(F/\{p=0\}\right)_\beta^\dagger, \mathbb{K}\right) = \left(\left(F/\{p=0\}\right)_\beta^\dagger\right)_\beta^\dagger \ .$$

Mais cela signifie que $[p]$ est bornée sur $\langle \pi(A)|$, donc que p est bornée sur A . □

EXEMPLE 2 Soient μ une intégrale de Radon sur un espace topologique X , $p \in \left]1, \infty\right[$ et $q \in \left]1, \infty\right[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour la semi-dualité $\left\langle \mathbf{L}^p(\mu) \right| \mathbf{L}^q(\mu) \rangle$ définie par

$$\langle f | g \rangle = \int \overline{f} \cdot g \, d\mu \quad \text{pour tout } f \in \mathbf{L}^p(\mu) \text{ et } g \in \mathbf{L}^q(\mu)$$

(cf. exemple 3.4.4), l'application

$$g \longmapsto |g\rangle : \mathbf{L}^q(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\mu)_\beta^\dagger$$

est une isométrie. En identifiant ces deux espaces on a

$$\mathbf{L}^p(\mu)_\beta^\dagger = \mathbf{L}^q(\mu) \ .$$

On en déduit que $\mathbf{L}^p(\mu)$ est réflexif pour tout $p \in \left]1, \infty\right[$ et que $\mathbf{L}^p(\mu)$ et $\mathbf{L}^q(\mu)$ sont en semi-dualité (cf. définition 3.7.2).

La démonstration utilise le théorème de Radon-Nikodym.

REMARQUE Les cas $p \in \{1, \infty\}$ sont spéciaux. Tout d'abord on peut montrer que

$$\mathbf{L}^1(\mu)_\beta^\dagger = \mathbf{L}^{\infty,\bullet}(\mu) \ .$$

Il est nécessaire d'utiliser l'intégration essentielle comme le montre la proposition 1.16 : si $|g\rangle = 0$, on a dans le cas non-modéré seulement $g = 0$ localement μ-p.p. .

Mais en général

$$\mathbf{L}^{\infty,\bullet}(\mu)^{\dagger}_{\beta} \neq \mathbf{L}^{1}(\mu) \ .$$

Les espaces $\mathbf{L}^{1}(\mu)$ et $\mathbf{L}^{\infty,\bullet}(\mu)$ ne sont donc pas en semi-dualité, au contraire de $\mathbf{L}^{1}(\mu)$ et $\mathbf{L}^{\infty,\bullet}_{\sigma}(\mu) = \mathbf{L}^{1}(\mu)^{\dagger}$ bien évidemment.

EXERCICE 1 Démontrer ce qui précède lorsque X est un espace métrique discret et μ l'intégrale de comptage, i.e. dans le cas de la semi-dualité $\langle \ell^{p}(X) | \ell^{q}(X) \rangle$. En d'autre termes

$$\ell^{p}(X)^{\dagger}_{\beta} = \ell^{q}(X) \quad \text{si } p \in [1, \infty[\ .$$

Montrer également que

$$c^{0}(X)^{\dagger}_{\beta} = \ell^{1}(X) \ .$$

On a donc

$$c^{0}(X) \subset \left(c^{0}(X)^{\dagger}_{\beta}\right)^{\dagger}_{\beta} = \ell^{1}(X)^{\dagger}_{\beta} = \ell^{\infty}(X) \ ,$$

l'inclusion étant évidemment stricte.

On peut aussi montrer que l'inclusion

$$\ell^{1}(X) \subset \left(\ell^{1}(X)^{\dagger}_{\beta}\right)^{\dagger}_{\beta} = \ell^{\infty}(X)^{\dagger}_{\beta}$$

est stricte en considérant un ultrafiltre sur X .

EXERCICE 2 Soit F un espace normé, $\mu \in F^{\dagger} \smallsetminus \{0\}$ et $\varphi \in F$. Montrer que

$$d\left(0, \{\langle \cdot | \mu \rangle = 1\}\right) = \frac{1}{\|\mu\|}$$

et

$$d(\varphi, \operatorname{Ker} \mu) = \frac{|\langle \varphi | \mu \rangle|}{\|\mu\|} \ .$$

3.9 Dualité de Fenchel

Nous allons montrer qu'il y a correspondance biunivoque entre les fonctionnelles convexes s.c.i. sur F et $F^\dagger$ respectivement. Ce problème étant purement réel, nous considérerons la dualité réelle $\langle F, F^\dagger \rangle$ définie par la forme bilinéaire

$$(\varphi, \mu) \longmapsto \mathrm{Re}\,\langle \varphi | \, \mu \rangle : F \times F^\dagger \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

On remarquera que l'application canonique $(F_{\mathbb{R}})' \longrightarrow F^\dagger : \nu \longmapsto \nu + i \cdot \nu\,(i \cdot \diamond)$ de la remarque 3.6.3 est un isomorphisme pour les topologies faibles.

DEFINITION 1 Nous dirons qu'une fonctionnelle $f : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ est *convexe* si, pour tout $\varphi, \psi \in F$ et tout $t \in [0,1]$, on a

$$f\,(t \cdot \varphi + (1-t) \cdot \psi) \leqslant t \cdot f\,(\varphi) + (1-t) \cdot f\,(\psi) \ .$$

REMARQUE 1 Pour que f soit convexe il faut et il suffit que son *surgraphe* , i.e. l'ensemble $\{(\varphi, \alpha) \in F \times \mathbb{R} \mid \alpha \geqslant f\,(\varphi)\}$, soit une partie convexe de $F \times \mathbb{R}$. On pourrait penser que l'on peut étendre la notion de convexité à des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, mais ceci ne conduit pas à des résultats intéressants.

REMARQUE 2 Si une fonctionnelle f définie sur une partie convexe A de F est convexe dans le sens ci-dessus pour tout $\varphi, \psi \in A$, alors son prolongement f^∞ par ∞ hors de A l'est aussi. Par exemple la fonctionnelle $\infty_{\complement A}$, égale à 0 sur A et à ∞ hors de A est convexe. Elle est s.c.i. si, et seulement si, A est fermée.

DEFINITION 2 Etant donné $f : F \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on pose

$$f_h\,(\varphi) := \inf_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{\alpha} \cdot f\,(\alpha \cdot \varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

REMARQUE 3 f_h est strictement positivement homogène. Pour que f_h soit une fonctionnelle positivement homogène, il faut et il suffit qu'il existe une fonctionnelle positivement homogène $q : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ telle que $f \geqslant q$. Dans ce cas on a $q \leqslant f_h \leqslant f$.

Pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, il vient

$$f_h\,(\beta \cdot \varphi) = \beta \cdot \inf_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{\alpha \cdot \beta} \cdot f\,(\alpha \cdot \beta \cdot \varphi) = \beta \cdot f_h\,(\varphi) \ ,$$

ce qui prouve la première partie. La condition de la seconde partie est trivialement nécessaire puisque $f_h \leqslant f$. Réciproquement on a $f\,(0) \geqslant 0$, donc $f_h\,(0) = 0$. En outre $f_h \geqslant q$, car

$$\frac{1}{\alpha} \cdot f\,(\alpha \cdot \varphi) \geqslant \frac{1}{\alpha} \cdot q\,(\alpha \cdot \varphi) = q\,(\varphi) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ .$$

$\square$

LEMME *Soit $f : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle convexe.*

(i) Si f est s.c.i. en 0 et telle que $f(0) > 0$, il existe une semi-norme continue q telle que $f \geqslant -q$.

(ii) S'il existe une fonctionnelle positivement homogène $q : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ telle que $f \geqslant q$, alors f_h est une fonctionnelle sous-linéaire telle que $q \leqslant f_h \leqslant f$.

Dmonstration de (i) Comme $\left\{f > \frac{f(0)}{2}\right\}$ est un ouvert contenant 0 , il existe une semi-norme continue q telle

$$\{q \leqslant f(0)\} \subset \left\{f > \frac{f(0)}{2}\right\} .$$

Etant donné $\varphi \in F$ tel que $q(\varphi) \leqslant f(0)$, on a

$$f(\varphi) \geqslant \frac{f(0)}{2} \geqslant 0 \geqslant -q(\varphi) .$$

Si maintenant $q(\varphi) > f(0)$, posons $\psi := \frac{f(0)}{q(\varphi)} \cdot \varphi$. On a $q(\psi) = f(0)$, donc

$$\frac{f(0)}{2} \leqslant f(\psi) = f\left(\left[1 - \frac{f(0)}{q(\varphi)}\right] \cdot 0 + \frac{f(0)}{q(\varphi)} \cdot \varphi\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left[1 - \frac{f(0)}{q(\varphi)}\right] \cdot f(0) + \frac{f(0)}{q(\varphi)} \cdot f(\varphi) \leqslant f(0) + \frac{f(0)}{q(\varphi)} \cdot f(\varphi) .$$

Il vient alors

$$f(\varphi) \geqslant -\frac{q(\varphi)}{2} \geqslant -q(\varphi) .$$

Dmonstration de (ii) Par la remarque qui précède, il nous suffit de prouver que f_h est sous-additive. Mais pour tout $\varphi, \psi \in F$, la convexité de f montre que

$$f_h(\varphi) + f_h(\psi) = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{\alpha} \cdot f(\alpha \cdot \varphi) + \inf_{\beta \in \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{\beta} \cdot f(\beta \cdot \psi) =$$

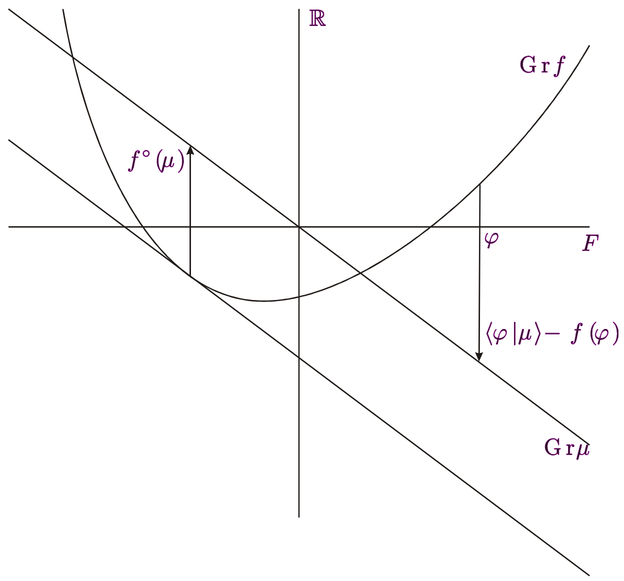
$$= \inf_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+^*} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \cdot \left[\frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} f(\alpha \cdot \varphi) + \frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} f(\beta \cdot \psi)\right] \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+^*} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \cdot f\left(\frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} \cdot (\varphi + \psi)\right) = f_h(\varphi + \psi) .$$

$\square$

DEFINITION 3 Soient $f : F \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Pour tout $\mu \in F^\dagger$, on pose

$$f^\circ(\mu) := \sup_{\varphi \in F} \left[\operatorname{Re} \langle \varphi | \mu \rangle - f(\varphi)\right] \in \overline{\mathbb{R}} .$$



On dit que c'est la fonction *conjuguée* ou la *transformée de Legendre-Fenchel* de f .

REMARQUE 4 On a $(\pm\infty)^\circ = \mp\infty$. Si $f : F \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est $\neq \infty$, alors f° est une fonctionnelle convexe s.c.i. sur $F^\dagger$ et on a

$$f^{\circ\circ} \leqslant f \ .$$

Montrons que f° est à valeurs dans $\widetilde{\mathbb{R}}$; comme $f(\psi) < \infty$ pour un $\psi \in F$, on a

$$f^\circ(\mu) \geqslant \operatorname{Re}\langle \psi | \mu \rangle - f(\psi) > -\infty \quad \text{pour tout } \mu \in F^\dagger \ .$$

Comme pour tout $\varphi \in F$, la fonction

$$\mu \longmapsto \operatorname{Re}\langle \varphi | \mu \rangle - f(\varphi)$$

est affine continue sur $F^\dagger$, il est clair que f° est convexe et s.c.i.. Pour tout $\gamma \in F$, on a

$$f^{\circ\circ}(\gamma) = \sup_{\mu \in F'} \left[\operatorname{Re}\langle \gamma | \mu \rangle - f^\circ(\mu)\right] = \sup_{\mu \in F'} \inf_{\varphi \in F} \left[\operatorname{Re}\langle \gamma - \varphi | \mu \rangle + f(\varphi)\right] \leqslant f(\gamma) \ .$$

□

REMARQUE 5 On a $f^\circ \neq \infty$ si, et seulement si, il existe $\mu \in F^\dagger$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\operatorname{Re}|\mu\rangle - c \leqslant f \ .$$

En effet $f^\circ(\mu) < \infty$ signifie que l'on a

$$\operatorname{Re}\langle \varphi | \mu \rangle - f^\circ(\mu) \leqslant f(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

□

THEOREME (de Fenchel) *Soit* $f : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$.

(i) *Si* f *est convexe s.c.i., alors*

$$f = f^{\circ\circ} \ .$$

Une telle fonction est en particulier minorée par une fonction réelle affine continue.

(ii) $f^{\circ\circ} = -\infty$ *ou* $f^{\circ\circ}$ *est la plus grande des fonctionnelles convexes s.c.i. qui sont plus petites que* f .

(iii) Les fonctionnelles convexes s.c.i. sont les mêmes pour toutes les topologies sur F compatibles avec la semi-dualité. En particulier les parties convexes fermées sont les mêmes pour toutes ces topologies.

Dmonstration de (i) Si $f = \infty$, c'est immédiat. Si $f \neq \infty$, étant donné $\gamma \in F$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que $r < f(\gamma)$, il nous suffit d'après la remarque 4 de montrer qu'il existe $\mu \in F^\dagger$ tel que

$$\operatorname{Re}\langle \gamma - \varphi | \mu \rangle + f(\varphi) \geqslant r \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ ,$$

c'est-à-dire qu'il existe $\nu \in F'_{\mathbb{R}}$ tel que

$$\nu(\varphi) \leqslant f(\varphi + \gamma) - r =: g(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

Nous allons appliquer le principe d'Orlicz 3.6.

La fonctionnelle g est évidemment convexe, s.c.i. et on a $g(0) = f(\psi) - r > 0$. Grâce au lemme (i), il existe une semi-norme continue q sur F telle $g \geqslant -q$. Comme $-q$ est positivement homogène, le lemme (ii) montre que p_g est une fonctionnelle sous-linéaire, et $\nu \leqslant g$ si, et seulement si, on a $\nu \leqslant p_g$, puisque ν est positivement homogène.

Il nous faut aussi assurer la continuité de ν . Pour cela nous allons imposer $\nu \leqslant q$, ce qui revient à considérer la fonctionnelle $p \wedge q$. Elle satisfait à $p \wedge q \leqslant q$ et, pour tout $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in F$ tels que $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$, on a

$$p(\varphi_1) + q(\varphi_2) \geqslant -q(\varphi_1) + q(-\varphi_2) \geqslant -q(\varphi) \ ,$$

ce qui prouve que $p \wedge q \geqslant -q$. Nous avons donc $-\infty < p \wedge q < \infty$ partout, ce qu'il fallait démontrer.

Dmonstration de (ii) Si $f^\circ = \infty$, on a $f^{\circ\circ} = -\infty$. Si $f^\circ \neq \infty$ et si g est une fonctionnelle convexe s.c.i. $\leqslant f$, il en existe par la remarque 5, alors $f^\circ \leqslant g^\circ$, puis $g = g^{\circ\circ} \leqslant f^{\circ\circ}$ par (i).

Dmonstration de (iii) C'est évident puisque les fonctions affines $\gamma \longmapsto \operatorname{Re}\langle \gamma | \mu \rangle - p^\circ(\mu)$ sont continues pour toutes les topologies compatibles avec la semi-dualité. □

DEFINITION 4 Soit $f : F \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On pose

$$\mathrm{co}_f := \{f^\circ \leqslant 0\} := \left\{ \mu \in F^\dagger \;\middle|\; \operatorname{Re}|\mu\rangle \leqslant f \right\} \ .$$

On dit que c'est l' *ensemble dual* de f . Si $A \subset F^\dagger$, on définit

$$\mathrm{sl}_A := \sup \operatorname{Re}|A\rangle \quad \text{et} \quad \mathrm{sn}_A := \sup \left| |A\rangle \right| \ .$$

On dit que sl_A est la *fonctionnelle duale* de A .

PROPOSITION co_f *est une partie convexe fermée intersection de demi-espaces réels fermés dans* $F^\dagger$ *, tandis que* sl_A *et* sn_A *sont ou bien égales à* $-\infty$ *ou bien des fonctionnelles sous-linéaires s.c.i. sur* F *;* sn_A *est en plus absolument homogène, donc une semi-norme si elle est finie.*

En effet

$$\mathrm{co}_f = \bigcap_{\varphi \in F} \left\{ \mu \in F^\dagger \;\middle|\; \operatorname{Re}\langle \varphi | \mu \rangle \leqslant f(\varphi) \right\}$$

et $\left\{ \mu \in F^\dagger \;\middle|\; \operatorname{Re}\langle \varphi | \mu \rangle \leqslant f(\varphi) \right\}$ est une partie convexe fermée de $F^\dagger$, puisque $\mu \longmapsto \operatorname{Re}\langle \varphi | \mu \rangle$ est linéaire continue. La seconde partie est bien connue (cf. exemple 2.1.3). □

DEFINITION 5 On dit qu'une partie A de F est *absolument symétrique* si, pour tout $\alpha \in \mathbb{U} \cap \mathbb{K}$, on a $\alpha \cdot A = A$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on dit simplement *symétrique* .

REMARQUE 6 L'enveloppe convexe $\operatorname{co}(A)$ d'une partie A de F , i.e. la plus petite partie convexe contenant A , est formée de toutes les combinaisons convexes d'éléments de A , c'est-à-dire

$$\operatorname{co}(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j \cdot \varphi_j \;\middle|\; (\varphi_j)_{j=1,\ldots,n} \subset F \text{ et } (t_j)_{j=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}_+ \text{ telle que } \sum_{j=1}^{n} t_j = 1 \right\} .$$

C'est évident puisque l'ensemble de ces combinaisons est convexe. □

REMARQUE 7 Désignons par $\operatorname{cs}(A)$ l'enveloppe convexe absolument symétrique d'une partie A de F , i.e. la plus petite partie convexe absolument symétrique contenant A . On a

$$\operatorname{cs}(A) = \operatorname{co}\left(\bigcup_{\alpha \in \mathbb{U}\cap\mathbb{K}} \alpha \cdot A \right) .$$

S'il faut préciser nous écrirons $\operatorname{cs}_{\mathbb{K}}(A)$.

Si C est convexe et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{cs}_{\mathbb{R}}(C) = \operatorname{co}(C \cup -C) = \{ t \cdot \varphi - (1-t) \cdot \psi \mid \varphi, \psi \in C \text{ et } t \in [0,1] \} ,$$

tandis que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a seulement

$$\operatorname{cs}_{\mathbb{C}}(C) \subset \operatorname{cs}_{\mathbb{R}}(C) + i \cdot \operatorname{cs}_{\mathbb{R}}(C) .$$

Si C est une partie convexe compacte de F , alors $\operatorname{cs}_{\mathbb{R}}(C)$ et $\overline{\operatorname{cs}_{\mathbb{C}}}(C)$ sont des parties compactes de F .

La première partie est immédiate en remarquant que le membre de droite est absolument symétrique. La deuxième aussi, mais attention $\operatorname{cs}_{\mathbb{R}}(C) + i \cdot \operatorname{cs}_{\mathbb{R}}(C)$ n'est pas absolument symétrique. Quant à la troisième $\operatorname{cs}_{\mathbb{R}}(C)$ est l'image de l'application continue

$$C \times C \times [0,1] \longrightarrow F : (\varphi, \psi, t) \longmapsto t \cdot \varphi - (1-t) \cdot \psi ,$$

et $\operatorname{cs}_{\mathbb{R}}(C) + i \cdot \operatorname{cs}_{\mathbb{R}}(C)$ celle de

$$\operatorname{cs}_{\mathbb{R}}(C) \times \operatorname{cs}_{\mathbb{R}}(C) \longrightarrow F : (\varphi, \psi) \longmapsto \varphi + i \cdot \psi .$$

□

Nous pouvons maintenant généraliser le corollaire 3.6.

COROLLAIRE *Soient $f : F \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $A \subset F^{\dagger}$.*

(i) On a

$$(f_h)^{\circ} = \infty_{\complement \operatorname{co}_f} \quad \text{et} \quad (\infty_{\complement A})^{\circ} = \operatorname{sl}_A .$$

(ii) $\operatorname{sl}_{\operatorname{co}_f} = -\infty$ ou $\operatorname{sl}_{\operatorname{co}_f}$ est la plus grande fonctionnelle sous-linéaire s.c.i. qui soit plus petite que f .

(iii) On a

$$\operatorname{co}_{\operatorname{sl}_A} = \overline{\operatorname{co}}(A) \quad , \quad \operatorname{co}_{\operatorname{sn}_A} = \overline{\operatorname{cs}}(A) .$$

et

$$\mathrm{sn}_A = \mathrm{sl}_{\overline{\mathrm{cs}}(A)} \ .$$

(iv) Il y a correspondance biunivoque entre les parties convexes fermées C de $F^\dagger$ et les fonctionnelles sous-linéaires s.c.i. p sur F par $C \longmapsto \mathrm{sl}_C$ et $p \longmapsto \mathrm{co}_p$, i.e.

$$p = \mathrm{sl}_{\mathrm{co}_p} \quad \textit{et} \quad C = \mathrm{co}_{\mathrm{sl}_C} \ ,$$

et

(a) Pour que C contienne 0 , il faut et il suffit que $p \geqslant 0$.

(b) Pour que C soit absolument symétrique, il faut et il suffit que p soit absolument homogène.

(c) Pour que C soit bornée, il faut et il suffit que p soit finie.

Dmonstration de (i) Si $\mu \in \mathrm{co}_f$, pour tout $\varphi \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\alpha \cdot \mathrm{Re} \langle \varphi | \mu \rangle - f(\alpha \cdot \varphi) = \mathrm{Re} \langle \alpha \cdot \varphi | \mu \rangle - f(\alpha \cdot \varphi) \leqslant 0 \ ,$$

donc

$$\mathrm{Re} \langle \varphi | \mu \rangle - f_h(\alpha \cdot \varphi) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*} \left[\mathrm{Re} \langle \varphi | \mu \rangle - \frac{1}{\alpha} \cdot f(\alpha \cdot \varphi) \right] \leqslant 0 \ ,$$

et par suite $(f_h)^\circ(\mu) = 0$. Si $\mu \notin \mathrm{co}_f$, il existe $\psi \in F$ tel que $\mathrm{Re} \langle \psi | \mu \rangle - f(\psi) > 0$; mais comme pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\mathrm{Re} \langle \alpha \cdot \psi | \mu \rangle - f_h(\alpha \cdot \psi) = \alpha \cdot [\mathrm{Re} \langle \psi | \mu \rangle - f_h(\psi)] \geqslant \alpha \cdot [\mathrm{Re} \langle \psi | \mu \rangle - f(\psi)]$$

par la remarque 3, il vient $(f_h)^\circ(\mu) = \infty$.

Pour tout $\varphi \in F$, on a

$$(\infty_{\complement A})^\circ(\varphi) = \sup_{\mu \in F'} [\mathrm{Re} \langle \varphi | \mu \rangle - \infty_{\complement A}(\varphi)] = \sup \mathrm{Re} \langle \varphi | A \rangle = \mathrm{sl}_A(\varphi) \ .$$

Dmonstration de (ii) On a

$$\mathrm{sl}_{\mathrm{co}\, f} = \left(\infty_{\complement\, \mathrm{co}_f} \right)^\circ = (f_h)^{\circ\circ}$$

d'où le résultat par le théorème (ii).

Dmonstration de (iii) Il vient tout d'abord

$$\infty_{\complement\, \mathrm{co}_{\mathrm{sl}_A}} = (\mathrm{sl}_A)^\circ = (\infty_{\complement A})^{\circ\circ} \ ;$$

si maintenant C est une partie convexe fermée contenant A , on a $\infty_{\complement C} \leqslant \infty_{\complement A}$, donc

$$\infty_{\complement C} = (\infty_{\complement C})^{\circ\circ} \leqslant (\infty_{\complement A})^{\circ\circ} = \infty_{\complement\, \mathrm{co}_{\mathrm{sl}_A}}$$

et par suite $\mathrm{co}_{\mathrm{sl}_A} \subset C$. Ceci montre que $\mathrm{co}_{\mathrm{sl}_A}$ est la plus petite partie convexe fermée contenant A et prouve la première formule. Pour tout $\varphi \in F$, il existe $\alpha \in \mathbb{U}$ tel que

$$\mathrm{Re} \langle \varphi | \mu \rangle \leqslant |\langle \varphi | \mu \rangle| = \alpha \cdot \langle \varphi | \mu \rangle = \mathrm{Re} \langle \varphi | \alpha \cdot \mu \rangle \ .$$

Grâce à la remarque 7, on obtient

$$\mathrm{sl}_{\overline{\mathrm{cs}}(A)} = \sup \mathrm{Re} \left| \overline{\mathrm{cs}}(A) \right\rangle \leqslant \sup \left| \left| \overline{\mathrm{cs}}(A) \right\rangle \right| \leqslant \sup \left| |A\rangle \right| = \mathrm{sn}_A \leqslant \mathrm{sl}_{\overline{\mathrm{cs}}(A)} \ .$$

La première formule montre alors que

$$\mathrm{co}_{\mathrm{sn}_A} = \mathrm{co}_{\mathrm{sl}_{\overline{\mathrm{cs}}(A)}} = \overline{\mathrm{cs}}(A) \ .$$

Dmonstration de (iv) La première partie, ainsi que le point (a), sont immédiats. Pour démontrer (b) remarquons, si C est absolument symétrique, que $C = \overline{\mathrm{cs}}\,(C)$, donc $p = \mathrm{sn}_C$ est absolument homogène. Réciproquement, pour tout $\mu \in C$, $\alpha \in \mathbb{U}$ et $\varphi \in F$, on a

$$\mathrm{Re}\,\langle \varphi |\, \alpha \cdot \mu \rangle = \mathrm{Re}\,\langle \overline{\alpha} \cdot \varphi |\, \mu \rangle \leqslant p\,(\overline{\alpha} \cdot \varphi) = p\,(\varphi) \ ,$$

donc $\alpha \cdot \mu \in C$.

Il nous reste à prouver (c). Rappelons (définition 3.1.4) que C est bornée dans $F^{\dagger}$ si, et seulement si, pour tout $\varphi \in F$, la semi-norme $\left| \langle \varphi | \right|$ est bornée sur C . Le résultat en découle car on a d'une part

$$\mathrm{sl}_C\,(\varphi) = \sup \mathrm{Re}\,\langle \varphi |\, C \rangle \leqslant \sup |\langle \varphi |\, C \rangle| < \infty \ ,$$

et d'autre part

$$\mathrm{Re}\,\langle \varphi |\, C \rangle \subset [-\,\mathrm{sl}_C\,(-\varphi)\,, \mathrm{sl}_C\,(\varphi)]$$

et

$$\mathrm{Im}\,\langle \varphi |\, C \rangle = \mathrm{Re}\,\langle i \cdot \varphi |\, C \rangle \subset [-\,\mathrm{sl}_C\,(-i \cdot \varphi)\,, \mathrm{sl}_C\,(i \cdot \varphi)] \ .$$

□

EXERCICE 1 Calculer la fonction conjuguée f° des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes :

(a) $f : x \longmapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ pour $a \geqslant 0$.

(b) $f = \exp$.

(c) $f = \frac{1}{p} \cdot |\mathrm{id}|^p$ pour $p \in [1, \infty[$.

(d) Donner une formule générale pour f° dans le cas où $f \in \mathcal{C}^{(1)}\,(\mathbb{R})$ et f' est strictement croissante.

EXERCICE 2 Soient F un espace localement convexe métrisable. Montrer

(a) Si A est une partie précompacte de F , alors $\overline{\mathrm{co}}\,(A)$ et $\overline{\mathrm{cs}}\,(A)$ sont précompactes.

(b) Si F est un espace de Fréchet et A une partie compacte de F , alors $\overline{\mathrm{co}}\,(A)$ et $\overline{\mathrm{cs}}\,(A)$ sont des parties compactes de F .

Utiliser le théorème 14.7 du cours d'Analyse [17].

EXERCICE 3 Soient F un espace de Fréchet, X un espace topologique séparé et $f : X \longrightarrow F$ une application telle que, pour tout $K \in \mathfrak{K}\,(X)$, la partie $f\,(K)$ soit contenue dans une partie compacte de F et que f tende vers 0 à l'infini, i.e. telle que pour toute semi-norme continue p sur F , il existe $K \in \mathfrak{K}\,(X)$ telle que $p\,(f\,(X \setminus K)) \leqslant 1$.

Montrer que $f\,(X)$ est contenue dans une partie convexe compacte de F .

REMARQUE 8 Ces deux derniers exercices peuvent être généralisés au cas où F est un espace localement convexe complet, mais la définition de ce concept nécessite l'introduction des filtres. Il suffit en fait que F soit quasi-complet, i.e. que toute partie fermée convexe bornée (cf. définition 3.1.4) soit complète. Il est aussi nécessaire de généraliser la notion d'ensemble précompact et la caractérisation des ensembles compacts : un ensemble est compact si, et seulement s'il est précompact et complet.

3.10 Polarité et orthogonalité

DEFINITION 1 Soient A une partie de F et $\mathrm{sl}_A : F^\dagger \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (cf. définition 3.9.4).

(a) On pose

$$A^\circ := \left\{ \mu \in F^\dagger \;\middle|\; \mathrm{Re}\,\langle A|\,\mu\rangle \geqslant -1 \right\} = \{\mathrm{sl}_{-A} \leqslant 1\} \ ,$$

$$A^a := \left\{ \mu \in F^\dagger \;\middle|\; |\langle A|\,\mu\rangle| \leqslant 1 \right\} = \{\mathrm{sn}_A \leqslant 1\}$$

et

$$A^\perp := \left\{ \mu \in F^\dagger \;\middle|\; \langle A|\,\mu\rangle = \{0\} \right\} = \{\mathrm{sn}_A = 0\} \ .$$

On dit que A° , A^a et $A^\perp$ sont respectivement les *ensembles polaire* et *polaire absolu* de A et l' *ensemble orthogonal* à A .

(b) On définit la *jauge de Minkowsky* de A par

$$j_A(\varphi) := \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_+^* \;\middle|\; \varphi \in \alpha \cdot A \right\} \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

(c) On dit que A est radialement fermée si, pour tout $\varphi \in F$, l'ensemble

$$I_\varphi := \{\beta \in \mathbb{R}_+ \mid \beta \cdot \varphi \in A\}$$

est un intervalle fermé contenant 0 .

REMARQUE 1 On vérifie facilement les assertions suivantes :

(a) Si A est un cône, on a

$$A^\circ = \left\{ \mu \in F^\dagger \;\middle|\; \mathrm{Re}\,\langle A|\,\mu\rangle \geqslant 0 \right\} \ .$$

(b) Si A est absolument symétrique, respectivement un espace vectoriel, on a

$$A^\circ = A^a \quad \text{, resp.} \quad A^\circ = A^\perp \ .$$

(c) Si $A \subset B$, alors

$$B^\circ \subset A^\circ \quad , \quad B^a \subset A^a \quad , \quad B^\perp \subset A^\perp \,;$$

en outre

$$A \subset A^{\circ\circ} \quad , \quad A \subset A^{aa} \quad , \quad A \subset A^{\perp\perp}$$

et

$$A^\circ = A^{\circ\circ\circ} \quad , \quad A^a = A^{aaa} \quad , \quad A^\perp = A^{\perp\perp\perp} \ .$$

Si $\ddagger \in \{\circ, a, \perp\}$, alors $A \subset A^{\ddagger\ddagger}$, donc $\left(A^{\ddagger\ddagger}\right)^\ddagger \subset A^\ddagger$ et par suite

$$A^\ddagger \subset \left(A^\ddagger\right)^{\ddagger\ddagger} = \left(A^{\ddagger\ddagger}\right)^\ddagger \subset A^\ddagger \ .$$

(d) Si A est convexe fermée et contient 0 , alors A est radialement fermée.

REMARQUE 2 Si F est un espace préhilbertien, le produit scalaire définit une semi-dualité $(F|\, F)$. En munissant F de la topologie faible $\sigma(F, F)$, sont semi-dual $\left(F_{\sigma(F,F)}\right)^\dagger$ s'identifie à F et, pour toute partie $A \subset F$, on a

$$A^\perp = \{\mu \in F \mid (A|\, \mu) = \{0\}\} \ .$$

On retrouve la notion d'orthogonalité définie dans le cadre des espaces préhilbertiens (cf. définition 1.4.1).

PROPOSITION *Soit A une partie de F .*

(i) On a

$$[\overline{\mathrm{co}}\,(A \cup \{0\})]^\circ = A^\circ \quad , \quad \overline{\mathrm{cs}}\,(A)^a = A^a \quad et \quad \overline{\mathrm{lin}}\,(A)^\perp = A^\perp \ .$$

(ii) On a

$$j_A = (1 + \infty_{\complement A})_h \quad et \quad A^\circ = -\,\mathrm{co}_{\,1+\infty_{\complement A}} \ ;$$

en particulier j_A est une fonctionnelle positivement homogène $\geqslant 0$ et A° est une partie convexe fermée contenant 0 de $F^\dagger$.

(iii) Si A est convexe, alors j_A est une fonctionnelle sous-linéaire.

(iv) On a $A = \{j_A \leqslant 1\}$ si, et seulement si, A est radialement fermée.

(v) Si A est radialement fermée, alors j_A est s.c.i. si, et seulement si, A est fermée.

(vi) Soit $(q_j)_{j\in J}$ une famille de fonctionnelles sous-linéaires telle que $\bigwedge_{j\in J} q_j$ soit une fonctionnelle sous-linéaire s.c.i. Alors

$$\left\{\bigwedge_{j\in J} q_j \leqslant 1\right\} = \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{j\in J} \{q_j \leqslant 1\}\right) \ .$$

(vii) Si p est une fonctionnelle sous-linéaire s.c.i. $\geqslant 0$, on a

$$p = j_{\{p\leqslant 1\}} \ .$$

En particulier si p est une semi-norme sur F , alors

$$p = j_{B_p(0,1)} \ .$$

Dmonstration de (i) Etant donné $\mu \in F^\dagger$ tel que $\mathrm{Re}\,\langle A|\, \mu\rangle \geqslant -1$, par linéarité on obtient

$$\mathrm{Re}\,\langle \mathrm{co}\,(A)|\, \mu\rangle \geqslant -1 \ ,$$

puis $\mathrm{Re}\,\langle \overline{\mathrm{co}}\,(A)|\, \mu\rangle \geqslant -1$ par continuité. Ceci montre que $A^\circ \subset \overline{\mathrm{co}}\,(A \cup \{0\})^\circ$. L'autre inclusion est triviale. Les deux autres formules se prouvent de la même manière.

Dmonstration de (ii) En effet, pour tout $\varphi \in F$, il vient

$$j_A(\varphi) = \inf\left\{\frac{1}{\beta} \in \mathbb{R}_+^* \;\middle|\; \beta \cdot \varphi \in A\right\} = (1 + \infty_{\complement A})_h(\varphi)$$

par la définition 3.9.2. Comme j_A est positive, elle est positivement homogène par la remarque 3.9.3. D'autre part

$$\mathrm{co}_{1+\infty_{\complement A}} = \left\{\mu \in F^\dagger \;\middle|\; \mathrm{Re}\,|\mu\rangle \leqslant 1 + \infty_{\complement A}\right\} = \left\{-\mu \in F^\dagger \;\middle|\; \mathrm{Re}\,\langle A|\, \mu\rangle \geqslant -1\right\} = -A^\circ \ ,$$

et il suffit d'appliquer la proposition 3.9.

Dmonstration de (iii) Cela découle du lemme 3.9.ii.

Dmonstration de (iv) Pour tout $\varphi \in F$, on a

$$j_A(\varphi) = \frac{1}{\sup I_\varphi} \ .$$

Si $A = \{j_A \leqslant 1\}$, pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+$, l'assertion $\beta \cdot \varphi \in A$ est équivalente à $j_A(\beta \cdot \varphi) \leqslant 1$, donc à $\beta \leqslant \frac{1}{j_A(\varphi)}$, ce qui montre que $I_\varphi = \left[0, \frac{1}{j_A(\varphi)}\right]$. Réciproquement on a évidemment $A \subset \{j_A \leqslant 1\}$. Si maintenant $j_A(\varphi) \leqslant 1$, il vient $\sup I_\varphi \geqslant 1$, donc $1 \in I_\varphi$, ce qui montre que $\varphi \in A$.

Dmonstration de (v) La condition est évidemment nécessaire par (iv). Réciproquement on a

$$\{j_A \leqslant \gamma\} = \begin{cases} \gamma \cdot A & \\ & \text{si} \\ \emptyset & \end{cases} \begin{matrix} \gamma \in \mathbb{R}_+^* \\ \\ \gamma \in \mathbb{R}_-^* \end{matrix} \ ,$$

tandis que

$$\{j_A \leqslant 0\} = \{j_A = 0\} = \bigcap_{\gamma \in \mathbb{R}_+^*} \{j_A \leqslant \gamma\} \ .$$

Dmonstration de (vi) L'inclusion

$$\overline{\text{co}}\left(\bigcup_{j\in J} \{q_j \leqslant 1\}\right) \subset \left\{\bigwedge_{j\in J} q_j \leqslant 1\right\}$$

est évidente car on a $\bigwedge_{j\in J} q_j \leqslant q_k$ pour tout $k \in J$ et l'ensemble du membre de droite est fermé par hypothèse. Réciproquement nous pouvons supposer que $\bigwedge_{j\in J} q_j(\varphi) < 1$ car, pour tout $\varphi \in F$, on a $\varphi = \lim_{r\to 1-} r \cdot \varphi$. Il existe donc $\left(\varphi_j\right)_{j\in J} \subset F^{(J)}$ tel que $\varphi = \sum_{j\in J} \varphi_j$ et $\sum_{j\in J} q_j\left(\varphi_j\right) \leqslant 1$; en considère les parties finies

$$K := \left\{j \in J \;\middle|\; \varphi_j \neq 0\right\} \quad \text{et} \quad L := \left\{j \in J \;\middle|\; q_j\left(\varphi_j\right) \neq 0\right\} \ .$$

Il suffit alors de décomposer φ sous la forme

$$\varphi = \left(1 - \sum_{j\in J} q_j\left(\varphi_j\right)\right) \cdot 0 + \sum_{l\in L} q_l\left(\varphi_l\right) \cdot \frac{\varphi_l}{q_l\left(\varphi_l\right)}$$

si $K \smallsetminus L = \emptyset$, et

$$\varphi = \sum_{k\in K\smallsetminus L} \frac{1}{\#\left(K \smallsetminus L\right)} \cdot \left(1 - \sum_{j\in J} q_j\left(\varphi_j\right)\right) \cdot \varphi_k + \sum_{l\in L} q_l\left(\varphi_l\right) \cdot \frac{\varphi_l}{q_l\left(\varphi_l\right)}$$

sinon.

Dmonstration de (vii) C'est immédiat, puisque $\varphi \in \alpha \cdot \{p \leqslant 1\}$ est équivalent à $p(\varphi) \leqslant \alpha$. □

EXEMPLE Dans la dualité $\langle \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \rangle$, on a

$$\left(\mathbb{R}_+^n\right)^\circ = \mathbb{R}_+^n \ .$$

Si X est un espace localement compact, dans la dualité $\langle \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X), \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X)\rangle$, on a

$$\mathcal{K}_+(X)^\circ = \mathcal{M}_+(X) \ .$$

Dans la semi-dualité $\langle \mathbb{C} | \mathbb{C}\rangle$, on a

$$(\mathbb{R}_+)^\circ = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ .$$

THEOREME (des bipolaires) *Pour toute partie A de F , on a*

$$(j_A)^{\circ\circ} = \mathrm{sl}_{-A^\circ} \ .$$

En outre les fonctionnelles sous-linéaires sl_{-A° et sl_{A^a} sont respectivement les jauges de Minkowsky de

$$\overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\}) \quad et \quad \overline{\mathrm{cs}}(A) \ ,$$

et on a

$$A^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\}) \quad , \quad A^{aa} = \overline{\mathrm{cs}}(A) \quad et \quad A^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{lin}}(A) \ .$$

En particulier si p est une fonctionnelle sous-linéaire s.c.i. $\geqslant 0$, alors

$$p = \mathrm{sl}_{-\{p \leqslant 1\}^\circ} \ .$$

Grâce à (ii) de la proposition, on a

$$(j_A)^{\circ\circ} = [(1 + \infty_{\complement A})_h]^{\circ\circ} = \left[\infty_{\complement\, \mathrm{co} 1 + \infty_{\complement A}}\right]^\circ = \mathrm{sl}_{-A^\circ}$$

par le corollaire 3.9.i.

Pour l'assertion concernant sl_{-A° et la première formule, nous pouvons supposer en utilisant la proposition que A est une partie convexe fermée contenant 0 et que j_A est une fonctionnelle sous-linéaire s.c.i. Grâce au théorème 3.9.i, on obtient

$$\mathrm{sl}_{-A^\circ} = (j_A)^{\circ\circ} = j_A \ ,$$

donc

$$A^{\circ\circ} = \{\varphi \in F \mid \mathrm{Re}\langle \varphi | A^\circ\rangle \geqslant -1\} =$$

$$= \{\varphi \in F \mid \mathrm{Re}\langle \varphi | -A^\circ\rangle \leqslant 1\} = \{\mathrm{sl}_{-A^\circ} \leqslant 1\} = \{j_A \leqslant 1\} = A \ .$$

Pour l'assertion concernant sl_{A^a} et la deuxième formule, nous pouvons supposer en utilisant la proposition que A est une partie convexe absolument symétrique ; mais comme $A^a = -A^\circ$, il vient $\mathrm{sl}_{A^a} = j_A$ et

$$A^{aa} = A^{\circ\circ} = A \ .$$

Pour la troisième formule nous pouvons supposer que A est un sous-espace vectoriel fermé et on obtient $A^{\perp\perp} = A^{\circ\circ} = A$. Finalement (vii) de la proposition montre que

$$p = j_{\{p \leqslant 1\}} = j_{\{p \leqslant 1\}}^{\circ\circ} = \mathrm{sl}_{-\{p \leqslant 1\}^\circ} \ .$$

$\square$

REMARQUE 3 La formule $A^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{lin}}(A)$ étant très importante, nous en donnons une démonstration directe.

On vérifie immédiatement que $\overline{\mathrm{lin}}(A) \subset A^{\perp\perp}$. Si $\varphi \notin \overline{\mathrm{lin}}(A)$, considérons l'application canonique $\pi : F \longrightarrow F \big/ \overline{\mathrm{lin}}(A)$. Puisque l'espace localement convexe $F \big/ \overline{\mathrm{lin}}(A)$ est séparé (théorème 2.8), et comme $[\varphi] \in F \big/ \overline{\mathrm{lin}}(A) \setminus \{0\}$, il existe par le théorème de Hahn-Banach une forme semi-linéaire continue ν sur $F\,/\overline{\mathrm{lin}}\,(A)$ telle que $\langle[\varphi]|\,\nu\rangle \neq 0$. Posons $\mu := \nu\circ\pi \in F^\dagger$. On a $\left\langle \overline{\mathrm{lin}}\,(A)\right|\mu\rangle = \{0\}$, donc $\mu \in A^\perp$, et $\langle\varphi|\,\mu\rangle = \langle[\varphi]|\,\nu\rangle \neq 0$, donc $\varphi \notin A^{\perp\perp}$, ce qui prouve l'autre inclusion. □

REMARQUE 4 Soient F un espace préhilbertien, $(F|\,F)$ la semi-dualité associée et $A \subset F$ (celui de droite !). Puisque

$$A^\perp = \bigcap_{\xi\in A} \{(\cdot|\,\xi) = 0\} \subset F \quad \text{(celui de gauche !)}$$

et $(\cdot|\,\xi)$ est continue pour les topologies $\sigma(F,F)$, $\sigma\left(F,F^\dagger\right)$ et $\mathfrak{T}_F$, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de F pour ces topologies. Cela découle aussi de la proposition (ii) ci-dessus. L'image de $A^\perp$ dans $F^\dagger$ par l'application de Riesz n'est en général pas fermée (pour $\sigma\left(F^\dagger,F\right)$). Le théorème des bipolaires montre que son adhérence est l'orthogonal de A dans la semi-dualité $\left\langle F|\,F^\dagger\right\rangle$.

L'assertion $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{\perp\perp}$ du théorème de la projection 1.4.v montre que $\mathcal{G}$ est fermé pour $\sigma(F,F)$. Réciproquement on peut montrer $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{\perp\perp}$ à l'aide du théorème des bipolaires. En effet $\mathcal{G}$ est complet, donc fermé pour $\mathfrak{T}_F$ et on obtient $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{\perp\perp}$ dans la semi-dualité $\left\langle F|\,F^\dagger\right\rangle$, donc en calculant $\mathcal{G}^\perp$ dans $F^\dagger$! Par ce qui précède ce $\mathcal{G}^\perp$ est l'adhérence pour $\sigma\left(F^\dagger,F\right)$ de $\mathcal{G}^\perp$ calculé dans F . Leurs orthogonaux dans F sont donc égaux.

DEFINITION 2 On dit qu'une partie A de F est *totale* dans F , si le sous-espace vectoriel engendré par A est dense dans F , i.e. si le sous-espace vectoriel fermé engendré par A est égal à F .

COROLLAIRE *Soit $A \subset F$ et $T : F \longrightarrow G$ une application linéaire continue.*

(i) Un sous-espace vectoriel de F est fermé si, et seulement si, il est faiblement fermé.

(ii) Pour que A soit totale, il faut et il suffit que $A^\perp = \{0\}$, i.e. que pour tout $\mu \in F^\dagger$ tel que $\mu = 0$ sur A , on ait $\mu = 0$.

(iii) On a

$$T(A)^\perp = \left(T^\dagger\right)^{-1}\left(A^\perp\right) \ ,$$

et le sous-espace vectoriel fermé engendré par $T(A)$ est $\left[\left(T^\dagger\right)^{-1}\left(A^\perp\right)\right]^\perp$.

En particulier

$$\mathrm{Ker}\,T^\dagger = (\mathrm{Im}\,T)^\perp \ .$$

(iv) Pour que T soit d'image dense, respectivement injective, il faut et il suffit que $T^\dagger$ soit injective, respectivement d'image dense.

Dmonstration de (i) C'est immédiat par le théorème 3.9.iii, puisqu'un sous-espace vectoriel est une partie convexe. Directement il suffit de montrer qu'un sous-espace vectoriel fermé A est faiblement fermé. Mais on a

$$A = A^{\perp\perp} = \bigcap_{\mu\in A^\perp} \{\varphi \in F \mid \langle\varphi|\,\mu\rangle = 0\}$$

et $\{\langle\cdot|\,\mu\rangle = 0\}$ est faiblement fermé.

Dmonstration de (ii) Pour que A soit totale, il faut et il suffit que $A^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{lin}}\,(A) = F$, d'où le résultat car $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$ et $F^{\perp} = \{0\}$.

Dmonstration de (iii) Soit $\nu \in G^{\dagger}$. On a $\nu \in T\,(A)^{\perp}$ si, et seulement si, $\langle T\,(A)|\,\nu\rangle = \{0\}$, i.e. $\left\langle A\left|T^{\dagger}\nu\right.\right\rangle = \{0\}$, ce qui signifie que $T^{\dagger}\nu \in A^{\perp}$.

Dmonstration de (iv) Par (ii), on a $G = \overline{T\,(F)}$ si, et seulement si, $T\,(F)^{\perp} = \{0\}$, i.e. $\left(T^{\dagger}\right)^{-1}(0) = \{0\}$, ce qui est équivalent à l'injectivité de $T^{\dagger}$. Finalement en appliquant ce résultat à $T^{\dagger}$, on obtient le résultat dual par (i), puisque $T = \left(T^{\dagger}\right)^{\dagger}$ (théorème 3.7.ii). □

3.11 La topologie de Mackey

DEFINITION Soit $\langle F| G\rangle$ une semi-dualité. La *topologie de Mackey* $\tau(F,G)$ sur F est définie par l'ensemble de toutes les *semi-normes de Mackey* p sur F , i.e. telles que

$$\mu \in F^{\circledast} \text{ et } \left| |\mu\rangle \right| \leqslant p \quad \Longrightarrow \quad |\mu\rangle \in |G\rangle \ .$$

Le corollaire 3.6.ii montre que toute semi-norme de Mackey sur F est s.c.i.

PROPOSITION

(i) Si p est une semi-norme de Mackey et q une semi-norme telle que $q \leqslant p$, alors q est une semi-norme de Mackey.

(ii) Si p et q sont des semi-normes de Mackey, alors $p+q$ est une semi-norme de Mackey.

(iii) La topologie de Mackey $\tau(F,G)$ est la plus fine des topologies localement convexes qui sont compatibles avec la semi-dualité $\langle F| G\rangle$.

La première partie est immédiate et la deuxième découle de l'exemple 3.6.3. Pour la troisième, si μ est une forme semi-linéaire continue pour la topologie de Mackey, il existe une suite $(p_j)_{j=1,\ldots,n}$ de semi-normes de Mackey et une constante $c \in \mathbb{R}_+$ telles que $\left| |\mu\rangle \right| \leqslant c \cdot \max_{j=1,\ldots,n} p_j$. Mais $c \cdot \max_{j=1,\ldots,n} p_j$ est une semi-norme de Mackey par (i) et (ii), donc $|\mu\rangle \in |G\rangle$. Réciproquement, si $|\mu\rangle \in |G\rangle$ et ν est une forme semi-linéaire sur F telle que $\left| |\nu\rangle \right| \leqslant \left| |\mu\rangle \right|$, alors ν est proportionnelle à μ par le lemme 3.4 ; ceci montre que $\left| |\mu\rangle \right|$ est une semi-norme de Mackey, donc que $\mu \in (F_\tau)^\dagger$. Nous avons ainsi prouvé que la topologie de Mackey est compatible avec la semi-dualité. C'est la plus fine, car toute semi-norme continue pour une topologie compatible avec la dualité est évidemment une semi-norme de Mackey. — □

Nous pouvons maintenant généraliser le scolie 3.7.ii.

THEOREME

(i) La topologie d'un espace tonnelé est celle de Mackey.

(ii) Soient F,G des espaces localement convexes et $T : F \longrightarrow G$ une application linéaire. Pour que T soit continue pour les topologies de Mackey, il faut et il suffit que T soit faiblement continue. On a donc

$$\mathcal{L}(F,G) \subset \mathcal{L}(F_\sigma, G_\sigma) = \mathcal{L}(F, G_\sigma) = \mathcal{L}(F_\tau, G) = \mathcal{L}(F_\tau, G_\tau) \ .$$

(iii) Si p est une forme sous-linéaire continue sur F , alors

$$\mathrm{co}_p = \left\{ \mu \in F^\dagger \ \middle| \ \mathrm{Re}\, |\mu\rangle \leqslant p \right\}$$

est une partie convexe (faiblement) compacte de $F^\dagger$.

En particulier la boule unité du semi-dual fort d'un espace normé est faiblement compacte.

En outre si A est une partie de $F^\dagger$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $\overline{\mathrm{co}}(A)$ est compacte.

(b) $\overline{\mathrm{cs}}(A)$ *est compacte.*

(c) $\mathrm{sn}_A = \sup\left|\left|A\right\rangle\right|$ *est une semi-norme de Mackey.*

(d) $\mathrm{sl}_A = \sup \mathrm{Re}\left|A\right\rangle$ *une forme sous-linéaire continue pour la topologie de Mackey.*

Dmonstration de (i) Il nous suffit de montrer que la topologie de Mackey est moins fine que celle de F , donc que toute semi-norme de Mackey sur F est continue. Mais une telle semi-norme est s.c.i. et par suite continue, puisque F est tonnelé.

Dmonstration de (ii) On a tout d'abord $\mathcal{L}(F_\tau, G_\tau) \subset \mathcal{L}(F_\tau, G)$, car

$$F_\tau \xrightarrow{T} G_\tau \xrightarrow{\mathrm{Id}} G$$

est continue. L'inclusion $\mathcal{L}(F_\tau, G) \subset \mathcal{L}(F_\tau, G_\sigma)$ est triviale, et $\mathcal{L}(F_\tau, G_\sigma) = \mathcal{L}(F_\sigma, G_\sigma)$ par le scolie 3.7.i. Puisque $\mathcal{L}(F, G) \subset \mathcal{L}(F_\sigma, G_\sigma)$ par le scolie 3.7.ii, il nous reste à prouver que $\mathcal{L}(F_\sigma, G_\sigma) \subset \mathcal{L}(F_\tau, G_\tau)$.

Si q est une semi-norme de Mackey sur G , nous devons montrer que $q \circ T$ est une semi-norme de Mackey sur F , i.e. que $\mu \in F^{\circledast}$ et $\left|\,|\mu\rangle\right| \leqslant q \circ T$ entraînent $\mu \in F^{\dagger}$. Or μ s'annule sur $\mathrm{Ker}\, T$, donc factorise par T en une forme semi-linéaire $\tilde{\nu} : \mathrm{Im}\, T \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $\mu = \tilde{\nu} \circ T$ et $\left|\,|\tilde{\nu}\rangle\right| \leqslant q$ sur $\mathrm{Im}\, T$. Elle possède donc un prolongement ν à G par le théorème de Hahn-Banach 3.6 tel que $\left|\,|\nu\rangle\right| \leqslant q$. Puisque q est une semi-norme de Mackey on a $\nu \in G^{\dagger}$, puis $\mu = \nu \circ T \in F^{\dagger}$ par la continuité faible de T .

Dmonstration de (iii) L'application canonique $(F_{\mathbb{R}})^{*} \longrightarrow F^{\circledast}$ de la remarque 3.6.3 étant évidemment un homéomorphisme pour les topologies faibles, on peut se restreindre au cas réel. On a

$$\mathrm{co}_p = \left\{ \mu \in F^{\circledast} \;\middle|\; |\mu\rangle \leqslant p \right\} .$$

Cet ensemble convexe est fermé dans $F^{\circledast}$ par la proposition 3.9. Remarquons maintenant que $F^{\circledast}$ est un sous-espace topologique de $\mathbb{R}^F$, muni de la topologie de la convergence ponctuelle. Il est également fermé puisqu'il est défini par des égalités ponctuelles. Finalement, on a

$$\mathrm{co}_p \subset \prod_{\varphi \in F} \left[-p(-\varphi), p(\varphi)\right] ,$$

et le produit des intervalles compacts $\left[-p(-\varphi), p(\varphi)\right]$ est compact par le théorème de Tychonoff.

En particulier la boule unité du semi-dual fort d'un espace normé est égale à $\mathrm{co}_{\|\cdot\|}$, donc faiblement compacte.

Soit maintenant $A \subset F^{\dagger}$.

(a) ⇒ (b) Si $\overline{\mathrm{co}}(A)$ est compacte, il en est de même de $\overline{\mathrm{cs}}(A) = \overline{\mathrm{cs}}(\overline{\mathrm{co}}(A))$ par la remarque 3.9.7.

(b) ⇒ (c) Puisque $F^{\dagger} \hookrightarrow F^{\circledast}$ est continue, $\overline{\mathrm{cs}}(A)$ est une partie convexe compacte, donc fermée, de $F^{\circledast}$. Par le corollaire 3.9.iii, dans la semi-dualité $\langle F | F^{\circledast} \rangle$, on a $\overline{\mathrm{cs}}(A) = \mathrm{co}_{\,\mathrm{sn}_A}$, donc

$$\left\{ \mu \in F^{\circledast} \;\middle|\; \left|\,|\mu\rangle\right| \leqslant \mathrm{sn}_A \right\} = \overline{\mathrm{cs}}(A) \subset F^{\dagger} ,$$

ce qui montre que sn_C est une semi-norme de Mackey.

(c) ⇒ (d) Cela découle de la remarque 2.3.2.ii car on a $\mathrm{sl}_A \leqslant \mathrm{sn}_A$.

(d) ⇒ (a) Par le corollaire 3.9.iii, on a $\overline{\mathrm{co}}(A) = \mathrm{co}_{\mathrm{sl}_A}$, d'où le résultat par ce qui précède, puisque la topologie de Mackey est compatible avec la dualité par la proposition (iii). – □

REMARQUE Soit F un espace de Banach. Puisque F est tonnelé, sa topologie est celle de Mackey $\tau\left(F, F^{\dagger}\right)$. Si F est réflexif, la topologie forte de son semi-dual est la topologie de Mackey $\tau\left(F^{\dagger}, F\right)$.

3.12 Intégration vectorielle faible

Soient X un espace topologique, m une intégrale de Radon positive sur X et F un espace localement convexe séparé.

Nous allons définir la notion d'intégrale d'une fonction à valeurs dans le semi-dual $F^\dagger$ de F . Rappelant que tout espace localement convexe séparé est le semi-dual de son semi-dual faible (cf. théorème 3.7.i), nous aurons ainsi aussi défini la notion d'intégrale (faible) d'une fonction à valeurs dans un espace localement convexe séparé quelconque. La situation que nous considérons est en fait plus simple dans les notations et correspond aux besoins pratiques.

Si l'on considère la semi-dualité $\langle \mathbb{K}^n | \mathbb{K}^n \rangle$ définie par $\langle \varphi | \mu \rangle := \sum_{j=1}^n \overline{\varphi_j} \cdot \mu_j$ et la base canonique $(e_j)_{j=1,\ldots,n}$ de $\mathbb{K}^n$, on a

$$\langle e_j | \mu \rangle = \mu_j \quad \text{pour tout } j = 1, \ldots, n \, .$$

Ceci nous conduit à interpréter dans la semi-dualité $\left\langle F \middle| F^\dagger \right\rangle$ le nombre $\langle \varphi | \mu \rangle$ comme une "combinaison linéaire" de "composantes" de μ (voir aussi 4.1).

DEFINITION 1 On dit qu'une application

$$\zeta : X \longrightarrow F^\dagger$$

est *scalairement m-intégrable* , *scalairement m-négligeable* et *scalairement m-mesurable* si, pour tout $\varphi \in F$, la fonction

$$\langle \varphi | \zeta \rangle : x \longmapsto \langle \varphi | \zeta(x) \rangle : X \longrightarrow \mathbb{K}$$

est respectivement m-intégrable, m-négligeable et m-mesurable.

Si $\zeta : X \longrightarrow F^\dagger$ est scalairement m-intégrable, alors

$$\int \zeta \, dm : \varphi \longmapsto \int \langle \varphi | \zeta \rangle \, dm$$

est une forme semi-linéaire sur F , i.e. un élément de $F^{\circledast}$. Dans la semi-dualité $\left\langle F \middle| F^{\circledast} \right\rangle$ on a donc

$$\left\langle \varphi \middle| \int \zeta \, dm \right\rangle = \int \langle \varphi | \zeta \rangle \, dm \quad \text{pour tout } \varphi \in F \, .$$

DEFINITION 2 On dit que $\int \zeta \, dm$ est l' *intégrale (faible)* de ζ (par rapport à m).

Si $\int \zeta \, dm \in F^\dagger$, i.e. si

$$\int \zeta \, dm : \varphi \longmapsto \int \langle \varphi | \zeta \rangle \, dm$$

est une forme semi-linéaire continue sur F , nous dirons que ζ est *scalairement m-intégrable dans $F^\dagger$* .

Cette notion d'intégrabilité est malheureusement trop faible. Par exemple si ζ est scalairement m-intégrable dans $F^\dagger$, pour tout $g \in \mathbf{L}^\infty(m)$, l'application

$$g \cdot \zeta : x \longmapsto g(x) \cdot \zeta(x)$$

est scalairement m-intégrable, mais pas nécessairement dans $F^\dagger$. Remarquons encore que

$$\langle \cdot | \zeta \rangle : F \longrightarrow \mathbf{L}^1(m)$$

est une application semi-linéaire et que

$$\varphi \longmapsto \int |\langle \varphi | \zeta \rangle| \, dm$$

est une semi-norme sur F , mais qu'elles ne sont pas nécessairement continues.

Rappelons qu'une application linéaire Φ d'un espace localement convexe séparé G dans F possède une adjointe $\Phi^\dagger : F^\dagger \longrightarrow G^\dagger$ si, et seulement si, Φ est faiblement continue (cf. scolie 3.7.i) ; de même une application $\Psi : F^\dagger \longrightarrow G^\dagger$ est (faiblement) continue si, et seulement si, elle est l'adjointe d'une application $\Phi : G \longrightarrow F$.

En outre le semi-dual fort de $\mathbf{L}^1(m)$ est $\mathbf{L}^{\infty,\bullet}(m)$ dans la semi-dualité

$$\langle f | g \rangle_{\mathbf{L}^1(m)} := \int \overline{f} \cdot g \, dm \ .$$

(cf. exemple 3.8.2).

PROPOSITION *Soit $\zeta : X \longrightarrow F^\dagger$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Pour tout $g \in \mathbf{L}^\infty(m)$, l'application $g \cdot \zeta$ est scalairement m-intégrable dans $F^\dagger$.

(ii) ζ est scalairement m-intégrable et l'application linéaire

$$\langle \zeta | \cdot \rangle : F \longrightarrow \mathbf{L}^1(m) : \varphi \longmapsto \langle \zeta | \varphi \rangle$$

est faiblement continue, i.e. possède une adjointe.

(iii) ζ est scalairement m-intégrable et

$$\varphi \longmapsto \|\langle \varphi | \zeta \rangle\|_1 = \int |\langle \varphi | \zeta \rangle| \, dm$$

est une semi-norme continue sur F , si F est tonnelé, ou dans le cas général une semi-norme de Mackey sur F .

Dans ce cas l'adjointe de $\langle \zeta | \cdot \rangle$ est

$$\int \diamond \cdot \zeta \, d\mu : g \longmapsto \int g \cdot \zeta \, dm : \mathbf{L}^\infty(m) \longrightarrow F^\dagger$$

et elle est faiblement continue pour $\sigma\left(\mathbf{L}^{\infty,\bullet}(m), \mathbf{L}^1(m)\right)$.

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) Il est clair que ζ est scalairement m-intégrable si, et seulement si $g \cdot \zeta$ est scalairement m-intégrable pour tout $g \in \mathbf{L}^{\infty,\bullet}(m)$. Dans la semi-dualité $\left\langle F \middle| F^{\circledast} \right\rangle$ on a

$$\left\langle \varphi \middle| \int g \cdot \zeta \, dm \right\rangle = \int \langle \varphi | g \cdot \zeta \rangle \, dm = \int \overline{\langle \zeta | \varphi \rangle} \cdot g \, dm = \langle \langle \zeta | \varphi \rangle | g \rangle_{\mathbf{L}^1(m)} \ ,$$

montrant que l'adjointe algébrique de $\langle \zeta | \cdot \rangle$ est

$$\langle \zeta | \cdot \rangle^{\circledast} = \int \diamond \cdot \zeta \, dm : \mathbf{L}^{\infty,\bullet}(m) \longrightarrow F^{\circledast} \ .$$

On en déduit immédiatement que $\langle \zeta | \cdot \rangle$ possède une adjointe si, et seulement si, $\int g \cdot \zeta \, dm \in F^{\dagger}$ pour tout $g \in \mathbf{L}^{\infty,\bullet}(m)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) L'application $\langle \zeta | \cdot \rangle$ étant faiblement continue, elle est continue si F est tonnelé grâce au scolie 3.7.ii. Plus généralement elle est continue pour les topologies de Mackey par le théorème 3.11.ii. Mais comme $\mathbf{L}^1(m)$ est un espace de Banach, il est muni de sa topologie de Mackey par le théorème 3.11.i, d'où le résultat.

(iii) $\Rightarrow$ (i) On a

$$\left| \int \langle \varphi | g \cdot \zeta \rangle \, dm \right| \leqslant \|g\|_{\infty} \cdot \int |\langle \varphi | \zeta \rangle| \, dm ,$$

donc

$$\varphi \longmapsto \int \langle \varphi | g \cdot \zeta \rangle \, dm$$

est une forme semi-linéaire continue sur F_{τ} , donc aussi sur F . □

DEFINITION 3 Nous dirons que ζ est *m-intégrable (au sens de Pettis)* dans $F^{\dagger}$ si l'une des conditions équivalentes de la proposition ci-dessus est satisfaite.

Il est possible de généraliser cette notion au cas où m est une intégrale de Radon complexe.

Du point de vue pratique on peut se dispenser d'introduire la topologie de Mackey, car on a la condition suffisante suivante :

SCOLIE *Si $\|\langle \cdot | \zeta \rangle\|_1$ est continue sur F , alors ζ est m-intégrable dans $F^{\dagger}$.*

C'est immédiat puisqu'une semi-norme continue est continue pour la topologie de Mackey, mais en recopiant la démonstration (iii)$\Rightarrow$(i) de la proposition on évite l'introduction de cette notion. □

LEMME

(i) L'ensemble des applications m-intégrables dans $F^{\dagger}$ est un espace vectoriel.

(ii) Une application scalairement m-négligeable est m-intégrable dans $F^{\dagger}$ et son intégrale est 0 .

(iii) Soient $\Phi : F^{\dagger} \longrightarrow G^{\dagger}$ une application continue et $\zeta : X \longrightarrow F^{\dagger}$ une application m-intégrable dans $F^{\dagger}$. Alors $\Phi \circ \zeta : X \longrightarrow G^{\dagger}$ est m-intégrable dans $G^{\dagger}$ et on a

$$\Phi\left(\int \zeta \, dm\right) = \int \Phi \circ \zeta \, dm .$$

La première et la deuxième parties sont immédiates. Quant à la troisième, si ζ est m-intégrable dans $F^{\dagger}$, pour tout $\gamma \in G$ et $g \in \mathbf{L}^{\infty}(m)$, on a

$$\langle \gamma | g \cdot (\Phi \circ \zeta) \rangle = \left\langle \Phi^{\dagger}\gamma \middle| g \cdot \zeta \right\rangle \in \mathbf{L}^1(m)$$

et

$$\int \langle \gamma | g \cdot (\Phi \circ \zeta) \rangle \, dm = \int \left\langle \Phi^{\dagger}\gamma \middle| g \cdot \zeta \right\rangle dm = \left\langle \Phi^{\dagger}\gamma \middle| \int g \cdot \zeta \, dm \right\rangle = \left\langle \gamma \middle| \Phi\left(\int g \cdot \zeta \, dm\right) \right\rangle ,$$

donc $\gamma \longmapsto \int \langle \gamma | g \cdot (\Phi \circ \zeta) \rangle \, dm$ est évidemment une forme semi-linéaire continue sur G . □

DEFINITION 4 Nous désignerons par $\mathbf{L}^1\left(m, F^\dagger\right)$ l'espace vectoriel des classes d'applications $\zeta : X \longrightarrow F^\dagger$ qui sont m-intégrables dans $F^\dagger$, modulo les applications scalairement m-négligeables. L'intégrale d'une telle application, qui ne dépend évidemment que de sa classe, définit une application linéaire

$$\int : \mathbf{L}^1\left(m, F^\dagger\right) \longrightarrow F^\dagger \ .$$

REMARQUE 1 Il est important de préciser qu'avec cette notion d'intégrale nous n'avons en aucune manière aborder le problème de l'approximation de $\int \zeta \, dm$, par exemple par des intégrales de fonctions élémentaires (continues à support compact ou en escalier). Il en est de même de la validité du théorème de Lebesgue.

THEOREME *Soit $\zeta : X \longrightarrow F^\dagger$ une application scalairement m-mesurable.*

(i) Si p est une semi-norme continue sur F (ou plus généralement sur F_τ) et si

$$\|\zeta\|_p : x \longmapsto \|\zeta(x)\|_p := \sup_{\varphi \in F, p(\varphi) \leqslant 1} |\langle \varphi | \zeta(x) \rangle| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

est m-intégrable, alors ζ est m-intégrable dans $F^\dagger$. On a

$$\int \zeta \, dm \in \int \|\zeta\|_p \, dm \cdot \mathrm{co}_p \ .$$

(ii) On suppose que F est tonnelé et que ζ est scalairement m-intégrable. S'il existe une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de parties m-intégrables telles que

$$m^*\left(X \smallsetminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = 0$$

et que $\zeta_{|A_k}$ soit bornée dans $F^\dagger$, alors ζ est m-intégrable dans $F^\dagger$.

La condition est en particulier satisfaite si m est modérée et si ζ est m-mesurable au sens de Lusin, par exemple continue.

Dmonstration de (i) Utilisant l'inégalité de Hölder abstraite (exemple 3.4.1) on obtient

$$\int |\langle \varphi | \zeta \rangle| \, dm \leqslant \int p(\varphi) \cdot \|\zeta(x)\|_p \, dm(x) = \left(\int \|\zeta(x)\|_p \, dm(x)\right) \cdot p(\varphi) \ ,$$

d'où le résultat par le scolie. En outre

$$\left|\int \langle \cdot | \zeta \rangle \, dm\right| \leqslant \int \|\zeta\|_p \, dm \cdot p \ ,$$

donc $\int \zeta \, dm \in \int \|\zeta\|_p \, dm \cdot \mathrm{co}_p$.

Dmonstration de (ii) Remarquons tout d'abord que, pour tout $\varphi \in F$, on a

$$\int |\langle \varphi | \zeta \rangle| \, dm = \sup_{k \in \mathbb{N}} \int 1_{A_k} \cdot |\langle \varphi | \zeta \rangle| \, dm$$

par le théorème de Beppo Levi. D'autre part il vient

$$\int 1_{A_k} \cdot |\langle \varphi | \zeta \rangle| \, dm \leqslant m(A_k) \cdot \sup_{x \in A_k} |\langle \varphi | \zeta(x) \rangle| < \infty \, ;$$

mais le membre de droite est une semi-norme continue sur F par le scolie 2.13, donc aussi le membre de gauche. Une seconde utilisation du scolie 2.13 montre que

$$\varphi \longmapsto \int |\langle \varphi | \zeta \rangle| \, dm$$

est une semi-norme continue sur F , d'où le résultat par le scolie ci-dessus. $\square$

REMARQUE 2 La condition de (i) signifie que ζ est de la forme $\zeta = f \cdot \widetilde{\zeta}$ pour $f \in \mathbf{L}^1(m)$ et une application scalairement m-mesurable $\widetilde{\zeta} : X \longrightarrow F^\dagger$ telle que $\left|\left\langle \cdot \middle| \widetilde{\zeta} \right\rangle\right| \leqslant p$, où p est une semi-norme de Mackey sur F , ce qui revient à dire que $\widetilde{\zeta}(X)$ est contenue dans une partie convexe (absolument symétrique et faiblement) compacte de $F^\dagger$.

Il suffit de poser

$$f := \|\zeta\|_p \quad \text{et} \quad \widetilde{\zeta} := \frac{1}{\|\zeta\|_p} \cdot \zeta \, ;$$

on a donc $\widetilde{\zeta}(X) \subset \mathrm{co}_p$ et co_p est une partie convexe absolument symétrique compacte de $F^\dagger$ par le théorème 3.11.iii. Pour la réciproque il suffit de poser $p := \mathrm{sn}_C$. $\square$

Cette remarque est essentiellement utilisée dans la situation suivante. On veut intégrer une application $\zeta : X \longrightarrow G$, où G est un espace localement convexe qui n'est pas naturellement un dual faible. Il suffit de poser $F := G^\dagger$, donc $F^\dagger = \left(G^\dagger\right)^\dagger = G_\sigma$. En général F , même muni de la topologie $\tau\left(G^\dagger, G\right)$, n'est pas tonnelé.

Si G est un espace de Fréchet, une condition suffisante pour que $\widetilde{\zeta}(X)$ soit contenue dans une partie convexe (absolument symétrique et faiblement) compacte de G est décrite dans l'exercice 3.9.3

REMARQUE 3 Soit $\zeta : X \longrightarrow F^\dagger$ de la forme $\zeta = f \cdot \widetilde{\zeta}$ pour $f \in \mathbf{L}^1(m)$. Si $\widetilde{\zeta}$ est m-mesurable au sens de Lusin (pour la topologie faible sur $F^\dagger$) et $\widetilde{\zeta}(X)$ est contenue dans une partie convexe absolument symétrique (cf. définition 3.9.5) bornée et complète C pour $\tau\left(F^\dagger, F\right)$, alors ζ est m-intégrable dans $F^\dagger$.

Par hypothèse il existe une suite disjointe $(K_l)_{l \in \mathbb{N}}$ d'ensembles compacts telle que

$$(f \cdot m)^* \left(X \smallsetminus \bigcup_l K_l \right) = 0$$

et que $\widetilde{\zeta}_{|K_l}$ soit continue pour tout l . En modifiant légèrement le théorème de Krein [3], IV, §5, n° 5, théorème 3, on voit que $\overline{\mathrm{cs}}\left[\widetilde{\zeta}(K_l)\right]$ est une partie convexe absolument symétrique compacte de $F^\dagger$ contenue dans C et on a

$$\int 1_{K_l} \cdot \zeta \, dm \in \left(\int 1_{K_l} \cdot |f| \, dm \right) \cdot C \, .$$

Pour toute semi-norme continue q sur $F_\tau^\dagger$, on a donc

$$q\left(\int 1_{K_l} \cdot \zeta \, dm \right) \leqslant \left(\int 1_{K_l} \cdot |f| \, dm \right) \cdot \sup\nolimits_{\mu \in C} q(\mu) \ .$$

Comme $\sum_l \int 1_{K_l} \cdot |f| \, dm = \int |f| \, dm$, la suite $\left(\sum_{l=0}^k \int 1_{K_l} \cdot \zeta \, dm\right)$ est de Cauchy dans F_τ , donc converge dans C . Par le théorème de Lebesgue, pour tout $\varphi \in F$, on obtient

$$\left\langle \varphi \middle| \sum_{l=0}^{\infty} \int 1_{K_l} \cdot \zeta \, dm \right\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \int 1_{K_l} \cdot \langle \varphi | \zeta \rangle \, dm = \int \langle \varphi | \zeta \rangle \, dm ,$$

ce qui finit de prouver que ζ est m-intégrable dans $F^\dagger$, puisque pour tout $g \in \mathbf{L}^\infty (m)$, on a $g \cdot f \in \mathbf{L}^1 (m)$. □

REMARQUE 4 Si $\zeta : X \longrightarrow F^\dagger$ est une application scalairement m-intégrable telle que $\zeta(K)$ soit contenue dans une partie convexe compacte de $F^\dagger$, pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, alors

$$\int \zeta \, dm \in (F_\beta)^\dagger .$$

La topologie forte $\beta\left(F, F^\dagger\right)$ est définie en 3.16.

En effet $\left|\left\langle \cdot \middle| \int 1_K \cdot \zeta \, dm \right\rangle\right|$ est une semi-norme continue sur F et, puisque $\langle \varphi | \zeta \rangle$ est m-intégrable, donc m-modérée, pour tout $\varphi \in F$, la proposition 15.12.ii du cours d'Analyse [17] montre que

$$\left|\left\langle \varphi \middle| \int \zeta \, dm \right\rangle\right| \leqslant \int |\langle \varphi | \zeta \rangle| \, dm = \sup\nolimits_{K \in \mathfrak{K}(X)} \int |\langle \varphi | 1_K \cdot \zeta \rangle| \, dm < \infty .$$

Le membre de droite est donc une semi-norme s.c.i. sur F , donc continue sur F_β par définition, ce qui finit de prouver que $\int \zeta \, dm \in (F_\beta)^\dagger$. □

REMARQUE 5 On dit que F possède la *propriété* (GDF) (graphe dénombrablement fermé) si toute application linéaire T de F dans un espace de Banach G dont le graphe $\operatorname{Gr} T$ est séquentiellement fermé est continue. Le théorème du graphe fermé 3.14 montre qu'un espace de Fréchet possède la propriété (GDF) . On peut montrer [3], Appendice, n° 2, proposition 2, que F possède aussi la propriété (GDF) s'il est final par rapport à une famille d'applications linéaires $T_j : F_j \longrightarrow F$ et si chaque F_j possède la propriété (GDF) .

Les espaces $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{K}(X)$ pour X localement compact et $\mathcal{D}(X)$ pour un ouvert X de $\mathbb{R}^n$ possèdent la propriété (GDF) .

En outre [3], §1, n° 4, théorème 1, on a le

THEOREME (de Gelfand-Dunford) *Si F possède la propriété (GDF) , alors toute application $\zeta : X \longrightarrow F^\dagger$ scalairement m-intégrable est m-intégrable dans $F^\dagger$.*

Dans les exemples qui suivent

X est un espace localement compact

et nous considérons la semi-dualité $\langle \mathcal{K}(X) | \mathcal{M}(X) \rangle$ de l'exemple 3.4.8.

EXEMPLE 1 Soient Y un espace topologique séparé, ν une intégrale de Radon positive sur Y et $\left(\mu_y\right)_{y \in Y}$ une famille d'intégrales de Radon positives sur X . Si l'application

$$\mu_\diamond : y \longmapsto \mu_y : Y \longrightarrow \mathcal{M}(X)$$

est scalairement ν-intégrable, alors elle est ν-intégrable dans $\mathcal{M}(X)$.

En effet, pour tout $g \in \mathbf{L}^{\infty}(\nu)$,

$$\varphi \longmapsto \int \langle \varphi | \mu_{\diamond} \rangle \cdot g \, d\nu : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est une combinaison linéaire de formes linéaires positives puisque

$$g = \sum_{\varepsilon^4=1} \varepsilon \cdot g_{\varepsilon} \quad \text{pour certaines fonctions } g_{\varepsilon} \in \mathbf{L}_{+}^{\infty}(\mu) \ ;$$

c'est donc une intégrale de Radon. Ceci montre que $g \cdot \mu_{\diamond}$ est scalairement ν-intégrable dans $\mathcal{M}(X)$, donc que $\mu_{\diamond}$ est ν-intégrable par définition. □

Cet exemple se généralise au cas où ν est une intégrale de Radon quelconque sur Y , puisque $\mu_{\diamond}$ est scalairement ν_{ε}-intégrable pour tout $\varepsilon \in \{\pm 1, \pm i\}$. On peut également le généraliser au cas où $(\mu_y)_{y \in Y}$ une famille d'intégrales de Radon quelconques sur X , mais en supposant alors que $|\mu_{\diamond}|$ est scalairement ν-intégrable.

EXEMPLE 2 Soit μ une intégrale de Radon. L'application

$$\varepsilon_{\diamond} : x \longmapsto \varepsilon_x : X \longrightarrow \mathcal{M}(X)$$

est scalairement μ-intégrable puisque, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$, on a

$$\langle \varepsilon_{\diamond} | \varphi \rangle = \varphi \in \mathcal{K}(X) \subset \mathbf{L}^1(\mu) \ .$$

Elle est donc μ-intégrable dans $\mathcal{M}(X)$ par l'exemple précédent et on a

$$\int \varepsilon_x \, d\mu(x) = \mu \ .$$

En effet

$$\int \langle \varphi | \varepsilon_x \rangle \, d\mu(x) = \int \overline{\varphi(x)} \, d\mu(x) = \langle \varphi | \mu \rangle \ .$$

En fait il est également clair que

$$\varphi \longmapsto \int |\langle \varphi | \varepsilon \rangle| \, d|\mu| = \|\varphi\|_1$$

est une semi-norme continue sur $\mathcal{K}(X)$, puisque pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, on a

$$\|\varphi\|_1 \leqslant |\mu|(K) \cdot \|\varphi\|_{\infty} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}(X, K) \ .$$

En particulier étant donné $v \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varepsilon_v = \int \varepsilon_x \, d\varepsilon_v(x) \ .$$

En utilisant les "fonctions de Dirac", le physicien écrira

$$\delta(u - v) = \int \delta(u - x) \cdot \delta(x - v) \, dx \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{R}^n \ .$$

EXEMPLE 3 Soit μ une intégrale de Radon positive sur X telle que

$$\mu = \int \mu_y \, d\nu(y)$$

soit une décomposition de μ . Alors $\mu_{\diamond}$ est ν-intégrable dans $\mathcal{M}(X)$ et $\mu = \int \mu_{\diamond} \, d\nu$.

En effet par le théorème d'intégrations successives (cf. AN.22.1), pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$, la fonction

$$y \longmapsto \int \varphi \, d\mu_y = \left\langle \mu_y \middle| \, \varphi \right\rangle$$

est ν-intégrable, ce qui montre que $\mu_\diamond$ est scalairement ν-intégrable dans $\mathcal{M}(X)$. On conclut à l'aide de l'exemple 1. □

3.13 Formes sesquilinéaires, applications linéaires et produits tensoriels

DEFINITION Etant donné des espaces localement convexes F, G nous désignerons par $\mathcal{S}(F,G)$ et $\mathbf{S}(F,G)$ les espaces vectoriels des formes sesquilinéaires à gauche sur $F \times G$ qui sont séparément respectivement globalement continues.

Utilisant la propriété universelle du produit tensoriel inductif semi-linéaire à droite (proposition 2.14.i), on vérifie immédiatement les assertions suivantes :

PROPOSITION *Il y a une correspondance biunivoque entre les applications linéaires*

$$S : G \longrightarrow F^{\circledast} \ ,$$

les formes sesquilinéaires à gauche

$$\mathfrak{s} : F \times G \longrightarrow \mathbb{K}$$

et les formes semi-linéaires

$$\widetilde{\mathfrak{s}} : |F\rangle\langle G| \longrightarrow \mathbb{K}$$

donnée par

$$\left\langle |\varphi\rangle\langle\gamma| \middle| \widetilde{\mathfrak{s}} \right\rangle_{|F\rangle\langle G|} = \mathfrak{s}(\varphi,\gamma) = \langle\varphi| S\gamma\rangle \quad \textit{pour tout } \varphi \in F \textit{ et } \gamma \in G \ .$$

En outre

(i) Pour que $S(G) \subset F^{\dagger}$, il faut et il suffit que $\mathfrak{s}$ soit continue, ou faiblement continue, en la première variable.

(ii) Pour que S soit continue, ou faiblement continue, il faut et il suffit que $\mathfrak{s}$ soit continue, ou faiblement continue, en la seconde variable.

(iii) Pour que S soit une application linéaire continue de G dans $F^{\dagger}$, il faut et il suffit que $\mathfrak{s}$ soit séparément continue ou que $\widetilde{\mathfrak{s}} \in \left(|F\rangle_i \langle G|\right)^{\dagger}$.

REMARQUE 1 Nous identifierons $\mathfrak{s}$ et $\widetilde{\mathfrak{s}}$ avec l'application linéaire S et grâce à la semi-dualité

$$\left\langle |F\rangle_i \langle G| \middle| \mathcal{L}_s\left(G, F^{\dagger}\right) \right\rangle \ ,$$

définie par

$$\left\langle |\varphi\rangle\langle\gamma| \middle| S \right\rangle_{|F\rangle\langle G|} = \langle\varphi| S\gamma\rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ , \gamma \in G \text{ et } S \in L\left(G, F^{\circledast}\right) \ ,$$

nous avons les égalités et inclusions suivantes :

$$\left|F^{\dagger}\right\rangle\left\langle G^{\dagger}\right| = \mathcal{L}^f\left(G, F^{\dagger}\right) = \mathbf{S}(F_\sigma, G_\sigma) \subset \mathbf{S}(F,G) \subset \mathcal{S}(F,G) = \mathcal{L}_s\left(G, F^{\dagger}\right) = \left(|F\rangle_i \langle G|\right)^{\dagger} \ ,$$

la dernière égalité étant interprétée entre espaces localement convexes : la topologie de la convergence simple sur G à valeurs dans $F^\dagger$ est identique à la topologie faible du semi-dual de $|F\rangle_i \langle G|$.

En effet la première égalité découle directement du corollaire 3.5, les inclusions sont triviales, les deux dernières égalités proviennent de la proposition et on vérifie facilement l'égalité des topologies de $\mathcal{L}_s\left(G, F^\dagger\right)$ et $\left(|F\rangle_i \langle G|\right)^\dagger$.

Il nous reste à montrer que l'application linéaire $S \in \mathcal{L}\left(G, F^\dagger\right)$ définissant $\mathfrak{s} \in \mathbf{S}\left(F_\sigma, G_\sigma\right)$ est de rang fini. Mais la continuité signifie (proposition 2.4) qu'il existe des suites finies $\left(\mu_k\right)_{k=1,\ldots,n} \subset F^\dagger$ et $\left(\nu_l\right)_{l=1,\ldots,m} \subset G^\dagger$ telles que

$$\left|\langle\varphi|\, S\gamma\rangle\right| = \left|\mathfrak{s}\left(\varphi,\gamma\right)\right| \leqslant \max\nolimits_{k=1,\ldots,n} \left|\langle\varphi\,|\mu_k\rangle\right| \cdot \max\nolimits_{l=1,\ldots,m} \left|\langle\gamma\,|\nu_l\rangle\right| \ .$$

Mais cette inégalité montre que, pour tout $\gamma \in G$, on a

$$\bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} |\mu_k\rangle \subset \operatorname{Ker} |S\gamma\rangle \ ,$$

donc que $S\gamma$ est une combinaison linéaire de μ_k par le lemme 3.4.ii, i.e.

$$S\left(G\right) \subset \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{K} \cdot \mu_k \ .$$

□

REMARQUE 2 Puisque $G_\sigma = \left(G^\dagger\right)^\dagger$ par le théorème 3.7.i, on obtient également

$$|F\rangle\langle G| = \mathcal{L}^f\left(G^\dagger, F\right) = \mathbf{S}\left(F^\dagger, G^\dagger\right) \subset \mathcal{L}\left(G^\dagger, F\right) \subset \mathcal{S}\left(F^\dagger, G^\dagger\right) = \mathcal{L}\left(G^\dagger, F_\sigma\right) = \left(\left|F^\dagger\right\rangle_i \left\langle G^\dagger\right|\right)^\dagger \ ,$$

sans oublier que $F^\dagger$ et $G^\dagger$ sont munis de la topologie faible.

Les premières égalités conduisent certains auteurs à définir le produit tensoriel algébrique de cette manière, évidemment en dimension finie. Cela ne me semble pas très naturel puisqu'en dimension infinie il est nécessaire d'introduire la topologie faible !

On pourrait aussi utiliser le fait que

$$|F\rangle\langle G| = \mathcal{L}_s\left(G, F^\dagger\right)^\dagger \ ;$$

on a besoin d'encore plus de topologie !

REMARQUE 3 Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des espaces de Hilbert. Si l'on identifie $\mathcal{G}_\sigma$ avec son semi-dual faible $\mathcal{G}^\dagger$, on a

$$\mathcal{L}_s\left(\mathcal{H}, \mathcal{G}_\sigma\right) = \left(|\mathcal{G}\rangle_i \langle\mathcal{H}|\right)^\dagger \ ,$$

et la semi-dualité $\left\langle |\mathcal{G}\rangle_i \langle\mathcal{H}| \,\middle|\, \mathcal{L}\left(\mathcal{H}, \mathcal{G}\right)\right\rangle$ est donnée par la formule

$$\left\langle |\gamma\rangle\langle\xi| \,\middle|\, S\right\rangle = \left(\gamma|\, S\xi\right) \ .$$

REMARQUE 4 Utilisant la propriété universelle du produit tensoriel projectif (cf. définition 2.14.2), on voit immédiatement que $\mathfrak{s}$ est (gobalement) continue si, et seulement si,

$\widetilde{\mathfrak{s}} \in \left(|F\rangle_p \langle G| \right)^\dagger$, i.e.

$$\mathbf{S}(F,G) = \left(|F\rangle_p \langle G| \right)^\dagger \ .$$

Soient Y un espace topologique séparé et ν une intégrale de Radon sur Y . Par linéarité, une application $\zeta : Y \longrightarrow \mathcal{L}_s\left(G, F^\dagger\right)$ est scalairement ν-intégrable si, et seulement si, pour tout $\varphi \in F$ et $\gamma \in G$, la fonction $\langle \varphi | \zeta\gamma \rangle$ est ν-intégrable.

EXEMPLE 1 Soient X, Y des ensembles. Le dual topologique de $\mathbb{K}^{(X)}$ est égal à son dual algébrique, puisque $\mathbb{K}^{(X)}$ est muni de la topologie localement convexe la plus fine (exemple 2.10.4). Mais comme $\left(1_{\{x\}}\right)_{x\in X}$ est une base algébrique de $\mathbb{K}^{(X)}$, on en déduit qu'il est égal à $\mathbb{K}^X$ et que la semi-dualité est donnée par

$$\langle \varphi | \mu \rangle := \sum_{x\in X} \overline{\varphi(x)} \cdot \mu(x) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathbb{K}^{(X)} \text{ et } \mu \in \mathbb{K}^X \ ,$$

puis que la topolgie faible $\sigma\left(\mathbb{K}^X, \mathbb{K}^{(X)}\right)$ est égale à celle de la convergence ponctuelle. On obtient ainsi les égalités

$$\mathcal{L}_s\left(\mathbb{K}^{(Y)}, \mathbb{K}^X\right) = \left(\left|\mathbb{K}^{(X)}\right\rangle_i \left\langle \mathbb{K}^{(Y)}\right| \right)^\dagger = \mathbb{K}^{(X\times Y)\dagger} = \mathbb{K}^{X\times Y}$$

à l'aide de l'exemple 2.14.3. Ceci montre que toute application linéaire (continue)

$$K : \mathbb{K}^{(Y)} \longrightarrow \mathbb{K}^X$$

est donnée par un noyau $\varkappa \in \mathbb{K}^{X\times Y}$. Plus précisément, pour tout $\varphi \in \mathbb{K}^{(X)}$ et $\gamma \in \mathbb{K}^{(Y)}$, on a

$$\Big\langle |\varphi\rangle \langle\gamma| \,\Big|\, \varkappa \Big\rangle = \sum_{(x,y)\in X\times Y} \overline{\varphi(x)} \cdot \gamma(y) \cdot \varkappa(x,y) = \sum_{x\in X} \overline{\varphi(x)} \cdot \sum_{y\in Y} \varkappa(x,y) \cdot \gamma(y) = \langle \varphi | K\gamma \rangle \ ,$$

en ayant posé

$$K\gamma = \sum_{y\in Y} \varkappa(\cdot, y) \cdot \gamma(y) \ ,$$

et

$$\varkappa(x,y) = \left\langle 1_{\{x\}} \middle| K 1_{\{y\}} \right\rangle \ .$$

THEOREME *Le noyau $\varkappa^\dagger : Y \times X \longrightarrow K$ de l'application adjointe $K^\dagger$ de K est donné par*

$$\varkappa^\dagger(y,x) = \overline{\varkappa(x,y)} \quad \textit{pour tout } x \in X \textit{ et } y \in Y \ .$$

En effet

$$\left\langle K^\dagger\varphi \middle| \gamma \right\rangle = \langle \varphi | K\gamma \rangle = \sum_{(x,y)\in X\times Y} \overline{\varphi(x)} \cdot \gamma(y) \cdot \varkappa(x,y) =$$

$$\sum_{y\in Y} \overline{\sum_{x\in X} \varkappa^\dagger(y,x) \cdot \varphi(x)} \cdot \gamma(y) = \left\langle \sum_{x\in X} \varkappa^\dagger(\cdot,x) \cdot \varphi(x) \middle| \gamma \right\rangle \ .$$

$\square$

EXEMPLE 2 Soit X, Y des espaces localement compacts. Utilisant l'exemple 2.14.4, on obtient une injection continue canonique

$$\mathcal{M}(X \times Y) \hookrightarrow (|\mathcal{K}(X)\rangle_i \langle \mathcal{K}(Y)|)^\dagger = \mathcal{L}_s(\mathcal{K}(Y), \mathcal{M}(X)) : \varkappa \longmapsto S_\varkappa \ ,$$

où $S_\varkappa : \mathcal{K}(Y) \longrightarrow \mathcal{M}(X)$ est l'application (faiblement) continue définie, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ et $\gamma \in \mathcal{K}(Y)$, par

$$\langle \varphi | S_\varkappa \gamma \rangle := \Big\langle |\varphi\rangle \langle \gamma| \Big| \varkappa \Big\rangle = \int \overline{\varphi(x)} \cdot \gamma(y) \ d\varkappa(x,y) \ .$$

L'adjointe $S_\varkappa^\dagger : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(Y)$ est définie par l'intégrale de Radon $\varkappa^\dagger := \%(\overline{\varkappa})$, où

$$\% : X \times Y \longrightarrow Y \times X : (x,y) \longmapsto (y,x) \ .$$

En effet

$$\left\langle \gamma \middle| S_\varkappa^\dagger \varphi \right\rangle = \overline{\langle \varphi | S_\varkappa \gamma \rangle} = \int \varphi(x) \cdot \overline{\gamma(y)} \, d\overline{\varkappa}(x,y) =$$

$$= \int \overline{\gamma(y)} \cdot \varphi(x) \ d\varkappa^\dagger(y,x) = \Big\langle |\gamma\rangle \langle \varphi| \Big| \varkappa^\dagger \Big\rangle \ .$$

Soit $\varkappa$ est une intégrale de Radon positive qui se désintègre par rapport à pr_2 , i.e. telle qu'il existe une intégrale de Radon positive ν sur Y et une famille $(\mu_y)_{y \in Y}$ d'intégrales de Radon positives sur X et que

$$\varkappa = \int |\mu_y\rangle \langle \varepsilon_y| \ d\nu(y)$$

soit une décomposition de $\varkappa$ (cf. cours d'Analyse [17], 16.1). L'exemple 3.12.3 montre que $|\mu_\diamond\rangle \langle \varepsilon_\diamond|$ est ν-intégrable dans $\mathcal{M}(X \times Y)$. On voit alors facilement que $\gamma \cdot \mu_\diamond$ est ν-intégrable dans $\mathcal{M}(X)$ pour tout $\gamma \in \mathcal{K}(Y)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$, on a alors

$$\langle \varphi | S_\varkappa \gamma \rangle = \int \left(\int \overline{\varphi} \, d\mu_y \right) \cdot \gamma(y) \ d\nu(y) =$$

$$= \int \langle \varphi | \mu_y \rangle \cdot \gamma(y) \ d\nu(y) = \left\langle \varphi \middle| \int \gamma(y) \cdot \mu_y \, d\nu(y) \right\rangle \ ,$$

i.e.

$$S_\varkappa \gamma = \int \gamma(y) \cdot \mu_y \, d\nu(y) \quad \text{dans } \mathcal{M}(X) \ .$$

On a $\varkappa^\dagger = \int |\varepsilon_y\rangle \langle \mu_y| \ d\nu(y)$, donc

$$S_\varkappa^\dagger \varphi = \langle \mu_\diamond | \varphi \rangle \cdot \nu \ .$$

Directement il suffit d'écrire

$$\left\langle \gamma \middle| S_\varkappa^\dagger \varphi \right\rangle = \overline{\langle \varphi | S_\varkappa \gamma \rangle} = \overline{\int \gamma(y) \cdot \left(\int \overline{\varphi(x)} \, d\mu_y(x) \right) \ d\nu(y)} = \langle \gamma | \langle \mu_\diamond | \varphi \rangle \cdot \nu \rangle \ .$$

EXEMPLE 3 Soient X, Y des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement. Sachant que la topologie induite par $\mathcal{D}(X \times Y)$ est celle de $|\mathcal{D}(X)\rangle_i \langle \mathcal{D}(Y)|$ (cf. exemple 2.14.5), on obtient

$$\mathcal{D}(X \times Y)' = (|\mathcal{D}(X)\rangle_i \langle \mathcal{D}(Y)|)^\dagger = \mathcal{L}_s(\mathcal{D}(Y), \mathcal{D}(X)') \ .$$

Cette égalité est en fait le théorème des noyaux de Schwartz. Elle exprime que toute application linéaire continue de $\mathcal{D}(Y)$ dans $\mathcal{D}(X)'$ est de la forme $S_{\varkappa}$ pour un $\varkappa \in \mathcal{D}(X \times Y)'$ et définie par

$$\langle \varphi | S_{\varkappa} \gamma \rangle := \left\langle |\varphi\rangle \langle\gamma| \,\middle|\, \varkappa \right\rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(X) \text{ et } \gamma \in \mathcal{D}(Y) \ .$$

REMARQUE 5 On peut voir (cf. 4.12, exercice 3 et remarque 7) que

$$\mathcal{M}(X \times Y) \neq \mathcal{L}_s(\mathcal{K}(Y), \mathcal{M}(X)) \ .$$

3.14 Les théorèmes du graphe fermé et d'isomorphie

Dans ce numéro F et G sont des espaces localement convexes **séparés** .

Ces deux théorèmes explicitent des conditions sur F et G telles que les assertions suivantes soient vraies :

Graphe fermé *Si le graphe* $\operatorname{Gr} T$ *d'une application linéaire* $T : F \longrightarrow G$ *est fermé dans* $F \times G$ *, alors* T *est continue.*

Isomorphie *Si* $\Phi : G \longrightarrow F$ *est une application linéaire continue bijective, alors* Φ *est un isomorphisme.*

REMARQUE 1 La condition dans le théorème du graphe fermé est évidemment nécessaire, puisque

$$\operatorname{Gr} T = \{(\varphi, \gamma) \in F \times G \mid \gamma = T\varphi\} = (T, \mathrm{Id})^{-1}(\Delta)$$

est fermé dans $F \times G$; en effet la diagonale

$$\Delta := (\mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2)^{-1}(\{0\})$$

de $G \times G$ est fermée, puisque G est séparé.

REMARQUE 2 Le théorème du graphe fermé entraîne celui d'isomorphie.

En effet si $\Phi : G \longrightarrow F$ est continue, alors $\operatorname{Gr} \Phi$ est fermé dans $G \times F$. Or

$$\% : G \times F \longrightarrow F \times G : (\gamma, \varphi) \longmapsto (\varphi, \gamma)$$

est un isomorphisme, donc $\operatorname{Gr} \Phi^{-1} = \% (\operatorname{Gr} \Phi)$ est fermé dans $F \times G$, ce qui montre que $\Phi^{-1} : F \longrightarrow G$ est continue. □

REMARQUE 3 Réciproquement si $T : F \longrightarrow G$ a un graphe fermé considérons l'application linéaire bijective continue

$$\Phi := \mathrm{pr}_{1|\operatorname{Gr} T} : \operatorname{Gr} T \longrightarrow F .$$

Si le théorème d'isomorphie est applicable à F et $\operatorname{Gr} T$, on en déduit que Φ^{-1} est continue, et il en est alors de même de $T = \mathrm{pr}_2 \circ \Phi^{-1}$. En particulier

Dans la catégorie des espaces de Fréchet, les théorèmes du graphe fermé et d'isomorphie sont équivalents.

En effet $\operatorname{Gr} T$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Fréchet $F \times G$, donc un espace de Fréchet. □

THEOREME *Si* F *et* G *sont des espaces de Fréchet, les théorèmes du graphe fermé et d'isomorphie sont vrais.*

Nous devons montrer, pour toute semi-norme continue q sur G que la semi-norme $q \circ T$ est continue. Ceci revient à généraliser le théorème 2.13 montrant qu'un espace de Fréchet est tonnelé. En fait il nous suffirait de montrer que cette semi-norme $q \circ T$ est s.c.i. Nous allons montrer directement qu'elle est continue.

Soit $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de semi-normes définissant la topologie de G . On peut supposer que $q_0 = q$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a évidemment

$$F = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \overline{\{q_k \circ T \leqslant m\}} \, ;$$

par le corollaire 2.12 du théorème de Baire, on a $\overset{\circ}{\overline{\{q_k \circ T \leqslant m_k\}}} \neq \emptyset$ pour un certain $m_k \in \mathbb{N}$. Il existe donc $\varphi_k \in F$ et une semi-norme continue p_k sur F tels que

$$B_{p_k}(\varphi_k, 1) \subset \overline{\{q_k \circ T \leqslant m_k\}} \; .$$

Puisque la topologie est définie par les grandes semi-normes, nous pouvons supposer que la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et définit la topologie de F .

Grâce au corollaire 2.2.iii, il nous suffit de montrer que $q_0 \circ T$ est majorée sur $B_{p_0}(0,1)$. Pour tout $\psi \in B_{p_k}(0,1)$, on a $\varphi_k, \varphi_k - \psi \in B_{p_k}(\varphi_k, 1)$, donc

$$\psi = \varphi_k - (\varphi_k - \psi) \in B_{p_k}(\varphi_k, 1) - B_{p_k}(\varphi_k, 1) \subset$$

$$\subset \overline{\{q_k \circ T \leqslant m_k\}} + \overline{\{q_k \circ T \leqslant m_k\}} = \overline{\{q_k \circ T \leqslant 2m_k\}}$$

puisque $+ : F \times F \longrightarrow F$ est continue, i.e.

$$B_{p_k}(0,1) \subset \overline{\{q_k \circ T \leqslant 2m_k\}} \; .$$

Choisissons une suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ telle

$$\alpha_0 = 1 \quad , \quad \lim_k \alpha_k = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_k \cdot m_k < \infty \; .$$

On a évidemment

$$B_{p_k}(0, \alpha_k) \subset \overline{\{q_k \circ T \leqslant 2\alpha_k \cdot m_k\}} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \; .$$

Remarquons que la différence avec le théorème 2.13 réside dans la présence de l'adhérence.

Soit donc $\varphi \in B_{p_0}(0,1)$. Comme

$$B_{p_0}(0,1) \subset \overline{\{q_0 \circ T \leqslant 2m_0\}} \; ,$$

il existe $\varphi_0 \in \{q_0 \circ T \leqslant 2m_0\}$ tel que $p_1(\varphi - \varphi_0) \leqslant \alpha_1$. Ceci nous permet de construire par récurrence une suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset F$ telle que

$$p_{k+1}\left(\varphi - \sum_{l=0}^{k} \varphi_l\right) \leqslant \alpha_{k+1} \quad \text{et} \quad q_k(T\varphi_k) \leqslant 2\alpha_k \cdot m_k \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \; .$$

En effet

$$\varphi - \sum_{l=0}^{k} \varphi_l \in B_{p_{k+1}}(0, \alpha_{k+1}) \subset \overline{\{q_{k+1} \circ T \leqslant 2\alpha_{k+1} \cdot m_{k+1}\}} \, ;$$

il existe donc $\varphi_{k+1} \in \{q_{k+1} \circ T \leqslant 2\alpha_{k+1} \cdot m_{k+1}\}$ tel que $p_{k+2}\left(\varphi - \sum_{l=0}^{k+1} \varphi_l\right) \leqslant \alpha_{k+2}$.

Ceci montre que $\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l$ et que la série $\sum_{l=0}^{\infty} T\varphi_l$ est absolument convergente, car pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a

$$p_j\left(\varphi - \sum_{l=0}^{k} \varphi_l\right) \leqslant p_{k+1}\left(\varphi - \sum_{l=0}^{k} \varphi_l\right) \leqslant \alpha_{k+1} \quad \text{pour tout } k \geqslant j-1$$

et

$$\sum_{l=0}^{\infty} q_j(T\varphi_l) \leqslant \sum_{l=0}^{j-1} q_j(T\varphi_l) + \sum_{l=j}^{\infty} q_l(T\varphi_l) \leqslant \sum_{l=0}^{j-1} q_j(T\varphi_l) + \sum_{l=j}^{\infty} 2\alpha_l \cdot m_l < \infty \ .$$

Puisque le graphe de T est fermé dans $F \times G$, on a

$$\left(\varphi, \sum_{l=0}^{\infty} T\varphi_l\right) = \sum_{l=0}^{\infty} (\varphi_l, T\varphi_l) \in \operatorname{Gr} T \ ,$$

donc $T\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} T\varphi_l$ et par suite

$$q(T\varphi) \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} q(T\varphi_l) \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} q_l(T\varphi_l) \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} 2\alpha_l \cdot m_l < \infty \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Nous allons maintenant discuter une généralisation très utile du théorème du graphe fermé. Pour commencer on a le

LEMME *Soit $T : F \longrightarrow G$ une application linéaire. Pour que $\operatorname{Gr} T$ soit fermé dans $F \times G$, il faut et il suffit qu'il existe une topologie localement convexe séparée $\mathfrak{S}$ sur G telle que*

$$T : F \longrightarrow G_{\mathfrak{S}} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Id} : G \longrightarrow G_{\mathfrak{S}}$$

soient continues.

La condition est suffisante, puisque

$$(T, \mathrm{Id}) : F \times G \longrightarrow G_{\mathfrak{S}} \times G_{\mathfrak{S}}$$

est continue et Δ est fermée dans $G_{\mathfrak{S}} \times G_{\mathfrak{S}}$. Réciproquement, considérons l'application surjective

$$S : (\varphi, \gamma) \longmapsto T\varphi - \gamma : F \times G \longrightarrow G \ .$$

On a

$$\operatorname{Ker} S = \{(\varphi, \gamma) \in F \times G \mid T\varphi - \gamma = 0\} = \operatorname{Gr} T \ ,$$

donc S induit une bijection

$$\widetilde{S} : F \times G / \operatorname{Gr} T \longrightarrow G \ .$$

Comme $\operatorname{Gr} T$ est fermé, l'espace localement convexe $F \times G / \operatorname{Gr} T$ est séparé par le théorème 2.8. Soit $\mathfrak{S}$ la topologie localement convexe transportée (i.e. finale) par $\widetilde{S}$ sur G . La commutativité des diagrammes

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "{(0,-\mathrm{Id})}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & F \times G \arrow[d] \arrow[dl, "S"'] \\ G_{\mathfrak{S}} & F \times G \,/ \mathrm{Gr}\, T \arrow[l, "\widetilde{S}"'] \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "{(\mathrm{Id},0)}"] \arrow[d, "T"'] & F \times G \arrow[d] \arrow[dl, "S"'] \\ G_{\mathfrak{S}} & F \times G \,/ \mathrm{Gr}\, T \arrow[l, "\widetilde{S}"'] \end{tikzcd}$$

montrent alors que $\mathrm{Id} : G \longrightarrow G_{\mathfrak{S}}$ et $T : F \longrightarrow G_{\mathfrak{S}}$ sont continues. $\square$

THEOREME (de Ptak) *Le théorème du graphe fermé est vrai pour toute application linéaire d'un espace tonnelé F dans un espace localement convexe G de l'une des classes suivantes :*

(i) Il existe une topologie localement convexe métrisable $\mathfrak{M}$ sur $G^\dagger$ compatible avec la semi-dualité $\left\langle G^\dagger \middle| G \right\rangle$, par exemple G est un espace de Banach réflexif, en particulier un espace de Hilbert.

(ii) G est un espace de Fréchet.

Dmonstration de (i) L'idée de la démonstration est simple. L'application

$$T_{fine} : F_{fine} \longrightarrow G$$

égale à T , mais en ayant muni F de la topologie localement convexe la plus fine, est continue (cf. exemple 2.10.4), donc

$$(T_{fine})^\dagger : G^\dagger \longrightarrow (F_{fine})^\dagger = F^\circledast$$

est continue. Il nous suffit de montrer que

$$(T_{fine})^\dagger \left(G^\dagger\right) \subset F^\dagger \ .$$

En effet cette inclusion montre que $T : F \longrightarrow G$ possède une adjointe, donc que T est faiblement continue, puis continue par le scolie 2.7.

Puisque T a un graphe fermé, il existe grâce au lemme une topologie localement convexe séparée $\mathfrak{S}$ sur G moins fine que celle de G et telle que $T : F \longrightarrow G_{\mathfrak{S}}$ soit continue. On en déduit que

$$(T_{fine})^\dagger \left((G_{\mathfrak{S}})^\dagger \right) \subset F^\dagger \ .$$

En outre $(G_{\mathfrak{S}})^\dagger$ est dense dans $G^\dagger$. En effet toute forme linéaire continue $\neq 0$ sur $G^\dagger$ est de la forme $\langle \gamma |$ pour un $\gamma \in G \setminus \{0\}$ (théorème 2.7), mais puisque $\mathfrak{S}$ est séparée, il existe $\nu \in (G_{\mathfrak{S}})^\dagger$ tel que $\langle \gamma | \nu \rangle \neq 0$; ceci montre que $\left[(G_{\mathfrak{S}})^\dagger \right]^\perp = \{0\}$, d'où notre assertion par le corollaire 2.10.ii.

Grâce à notre hypothèse, le corollaire 2.10.i montre alors que $(G_{\mathfrak{S}})^\dagger$ est dense dans $G^\dagger_{\mathfrak{M}}$. Pour tout $\nu \in G^\dagger_{\mathfrak{M}}$, il existe donc une suite $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (G_{\mathfrak{S}})^\dagger$ telle que $\nu = \lim_k \nu_k$ dans $G^\dagger_{\mathfrak{M}}$, et par suite dans $G^\dagger_\sigma$. Il vient alors

$$(T_{fine})^\dagger \nu = \lim_k (T_{fine})^\dagger \nu_k \quad \text{dans } F^\circledast \ .$$

Or $F^\dagger$ est séquentiellement complet par le théorème de Banach-Steinhaus 3.1, donc

$$(T_{fine})^\dagger \nu \in F^\dagger \ .$$

Dmonstration de (ii) Cela découle d'une propriété satisfaite par les espaces de Fréchet, mais dont la démonstration est trop longue pour être reproduite ici : le théorème de Krein-Šmulian (cf. H. Schaefer [20], Chap. IV, theorem 6.4). Avec les notations de la remarque 4 ci-dessous on a

$$(G_{\mathfrak{S}})^\dagger \subset (G_{\mathfrak{T}})^\dagger \cap G^\dagger \subset G^{\circledast} \ ,$$

donc $(G_{\mathfrak{T}})^\dagger \cap G^\dagger$ est dense dans $G^\dagger$. Si q est une semi-norme continue sur G l'ensemble convexe co_q est compact dans $G^\dagger$ par le théorème 3.11.iii, donc fermé dans $G^{\circledast}$. En outre $\mathrm{co}_q \cap (G_{\mathfrak{T}})^\dagger$ est faiblement borné, donc

$$K := \overline{\mathrm{co}_q \cap (G_{\mathfrak{T}})^\dagger}^{(G_{\mathfrak{T}})^\dagger}$$

est compacte, puisque $\mathfrak{T}$ est tonnelée, et par suite fermée dans $G^{\circledast}$. Ceci montre que

$$K := \overline{\mathrm{co}_q \cap (G_{\mathfrak{T}})^\dagger}^{(G_{\mathfrak{T}})^{\circledast}} \subset \mathrm{co}_q \ ,$$

donc que $K := \mathrm{co}_q \cap (G_{\mathfrak{T}})^\dagger$ est fermée dans $G^\dagger$. Le théorème de Krein-Šmulian montre alors que $(G_{\mathfrak{T}})^\dagger \cap G^\dagger$ est fermé dans $G^\dagger$, donc égal à $G^\dagger$ et par suite que $(G_{\mathfrak{T}})^\dagger \supset G^\dagger$. On en déduit évidemment que $\mathfrak{T}$ est plus fine que la topologie de G . $\square$

REMARQUE 4 Pour que le théorème du graphe fermé soit vrai pour tout espace tonnelé F , il faut et il suffit que G satisfasse à la propriété suivante :

Toute topologie tonnelée $\mathfrak{T}$ sur G contenant une topologie localement convexe séparée $\mathfrak{S}$ contenue dans celle de G , i.e. $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T} \cap \mathfrak{T}_G$, est plus fine que celle de G , i.e. $\mathfrak{T}_G \subset \mathfrak{T}$.

La condition est nécessaire, car $\mathrm{Id} : G_{\mathfrak{T}} \longrightarrow G$ a un graphe fermé par le lemme, donc est continue par le théorème du graphe fermé. Réciproquement il existe une topologie localement convexe séparé $\mathfrak{S}$ sur G , moins fine que celle de G , telle que $T : F \longrightarrow G_{\mathfrak{S}}$ soit continue. Considérons sur G la topologie localement convexe finale $\mathfrak{T}$ par rapport à T . Elle est plus fine que $\mathfrak{S}$, donc séparée, et par suite tonnelée par la proposition 2.13. La condition montre qu'elle est plus fine que celle de G , donc que

$$T : F \xrightarrow{T} G_{\mathfrak{T}} \xrightarrow{\mathrm{Id}} G$$

est continue. $\square$

EXEMPLE 1 La classe décrite en (i) contient plus généralement les espaces localement convexes qui sont réunion d'une suite d'ensembles faiblement compacts, mais cela nécessite de pousser plus à fond la théorie de la dualité.

EXEMPLE 2 Soit G un espace de Fréchet de dimension infinie. Cet espace muni de la topologie localement convexe la plus fine $\mathfrak{T}_{fine}$ ne satisfait pas à la propriété de la remarque 4 précédente. En effet la topologie de G , qui est tonnelée, donc séparée, est **strictement** moins fine que $\mathfrak{T}_{fine}$. En effet $\mathfrak{T}_{fine}$ n'est pas métrisable, puisque G a une dimension algébrique nécesairement non-dénombrable (cf. théorème 2.11 et remarque 2.11.1).

3.15 Quelques applications du théorème du graphe fermé

(1) Soient μ une intégrale de Radon sur X , $p, r \in [1, \infty]$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{L}^p(\mu) \cap \mathbf{L}^r(\mu)$. Si F est fermé dans $\mathbf{L}^p(\mu)$ comme dans $\mathbf{L}^r(\mu)$, alors les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_r$ sont équivalentes sur F .

Il nous suffit par symétrie de montrer que $\mathrm{Id} : F_{\|\cdot\|_p} \longrightarrow F_{\|\cdot\|_r}$ est continue, donc que son graphe est fermé, puisque ces espaces sont de Banach. Soit donc $((\varphi_k, \varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{Gr\,Id}$ convergente vers (φ, ψ) dans $F_{\|\cdot\|_p} \times F_{\|\cdot\|_r} \subset \mathbf{L}^p(\mu) \times \mathbf{L}^r(\mu)$. Par le théorème de Riesz-Fischer, il existe donc une sous-suite $\left(\varphi_{\alpha(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge μ-p.p. vers φ . Mais comme cette sous-suite converge encore vers ψ dans $\mathbf{L}^r(\mu)$, il existe une nouvelle sous-suite $\left(\varphi_{\beta\circ\alpha(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge μ-p.p. vers ψ , donc aussi vers φ . Ceci montre que $\varphi = \psi$, donc que

$$(\varphi, \psi) = \lim\nolimits_k (\varphi_k, \varphi_k) = (\varphi, \varphi) \in \mathrm{Gr\,Id} \ .$$

□

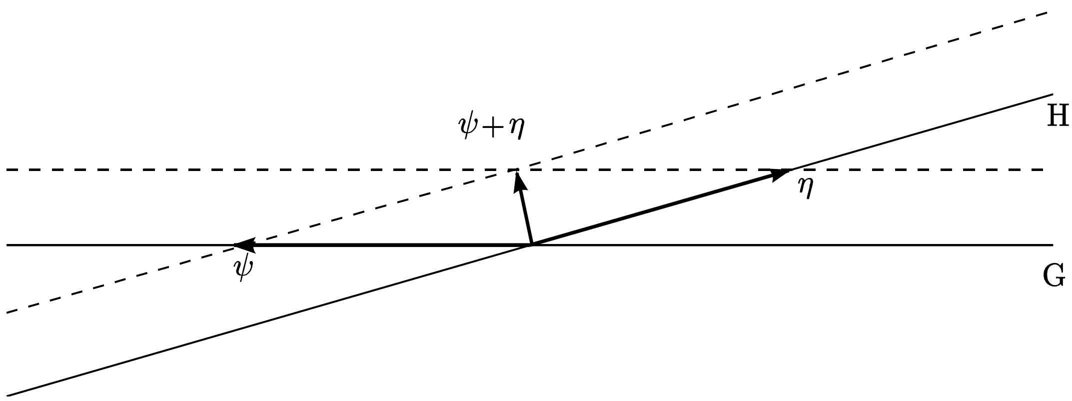
(2) Soient F un espace de Fréchet et G, H des sous-espaces vectoriels fermés de F tels que $F = G \oplus H$. Alors

$$(\gamma, \eta) \longmapsto \gamma + \eta : G \times H \longrightarrow F$$

est un isomorphisme. Si F est un espace de Banach cela signifie qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\|\gamma\| + \|\eta\| \leqslant M \cdot \|\gamma + \eta\| \leqslant M \cdot (\|\gamma\| + \|\eta\|)$$

pour tout $\gamma \in G$ et $\eta \in H$.



C'est immédiat par le théorème d'isomorphie. □

(3) Soient μ une intégrale de Radon bornée sur X et $p \in [1, \infty[$. Si F est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbf{L}^p(\mu)$ contenu dans $\mathbf{L}^\infty(\mu)$, alors F est de dimension finie.

C'est un résultat de A. Grothendieck (cf. W. Rudin [18], theorem 5.2). Ainsi tout sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie de $\mathbf{L}^p(\mu)$ contient des fonctions non-bornées, typiquement de la forme $\frac{1}{(\mathrm{id}-\tau)^s}$ sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$, pour autant que $s < \frac{1}{p}$.

Comme dans l'exemple 1 on montre que l'injection canonique de F , muni de la norme

$\|\cdot\|_p$, dans $\mathbf{L}^\infty(\mu)$ est continue. Il existe donc une constante $M \in \mathbb{R}_+$ telle que l'on ait

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant M \cdot \|\varphi\|_p \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

On se ramène maintenant au cas $p = 2$.

Si $p < 2$, on applique l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués $\frac{2}{p}$ et $\frac{2}{2-p}$ et on obtient

$$\int |\varphi|^p \, d\mu \leqslant \left(\int |\varphi|^2 \, d\mu\right)^{\frac{p}{2}} \cdot \left(\int d\mu\right)^{\frac{2-p}{2}} ,$$

donc

$$\|\varphi\|_p \leqslant \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \cdot \|\varphi\|_2 \ .$$

Si $p \geqslant 2$, on a

$$|\varphi|^p \leqslant \|\varphi\|_\infty^{p-2} \cdot |\varphi|^2 \quad \mu\text{-p.p.} ,$$

d'où

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant M \cdot \|\varphi\|_p \leqslant M \cdot \|\varphi\|_\infty^{\frac{p-2}{2}} \cdot \|\varphi\|_2^{\frac{2}{p}}$$

et par suite

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant M^{\frac{p}{2}} \cdot \|\varphi\|_2 \ .$$

Soient alors $n \in \mathbb{N}$ et $(\varepsilon_j)_{j=1,\ldots,n}$ un système linéairement indépendant de $F \subset \mathbf{L}^2(\mu)$. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram_schmidt (cf. 3.8), on peut supposer que $(\varepsilon_j)_{j=1,\ldots,n}$ est orthonormé. Nous allons montrer que n est majoré par $M^2 \cdot \mu(X) < \infty$, ce qui prouve que F est de dimension finie.

Pour tout $c = (c_j)_{j=1,\ldots,n} \in \mathbb{B}_{|\cdot|_2} \subset \mathbb{K}^n$, on a

$$\left\|\sum_{j=1}^n c_j \cdot \varepsilon_j\right\|_\infty \leqslant M \cdot \left\|\sum_{j=1}^n c_j \cdot \varepsilon_j\right\|_2 = M \cdot |c|_2 \leqslant M$$

en ayant utiliser les relations d'orthogonalité (on peut aussi utiliser la proposition 3.7). Nous avons donc prouvé que

$$\left|\sum_{j=1}^n c_j \cdot \varepsilon_j\right| \leqslant M \quad \mu\text{-p.p.} ,$$

cet ensemble négligeable dépendant de c . Puisqu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable, il existe un ensemble négligeable $N \subset X$ tel que l'on ait

$$\left|\sum_{j=1}^n c_j \cdot \varepsilon_j\right| \leqslant M$$

pour tout $x \in X \smallsetminus N$ et tout $c \in \mathbb{Q}^n$ ou $(\mathbb{Q} + i \cdot \mathbb{Q})^n$ satisfaisant à $|c|_2 \leqslant 1$. Mais par la densité de ce dernier ensemble dans $\mathbb{B}_{|\cdot|_2}$ et la continuité de l'application

$$c \longmapsto \sum_{j=1}^n c_j \cdot \varepsilon_j(x) \ ,$$

pour $x \in X \smallsetminus N$ donné, on en déduit que l'inégalité est vraie pour tout $c \in \mathbb{B}_{|\cdot|_2}$. Finalement il vient

$$\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j(x)|^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{\varepsilon_j(x)}}{\left(\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \varepsilon_j(x) \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot M$$

en posant

$$c_j := \frac{\overline{\varepsilon_j(x)}}{\left(\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{si } \sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j(x)|^2 \neq 0 \ .$$

Dans tous les cas il vient

$$\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j(x)|^2 \leqslant M^2 \quad \text{pour tout } x \in X \smallsetminus N \ ,$$

d'où

$$n \leqslant M^2 \cdot \mu(X) < \infty$$

en intégrant. □

EXERCICE Soient μ une intégrale de Radon sur X et ρ, κ des fonctions μ-mesurables > 0 μ-p.p. . Montrer

(a) $\mathbf{L}^2(\mu, \rho)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{L}^2(\mu, \kappa)$ si, et seulement si, $\frac{\kappa}{\rho}$ est essentiellement μ-bornée.

Dans ce cas

(b) L'injection canonique est continue et $\mathbf{L}^2(\mu, \rho)$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mu, \kappa)$. En particulier si A est une partie totale de $\mathbf{L}^2(\mu, \rho)$, c'est aussi une partie totale de $\mathbf{L}^2(\mu, \kappa)$.

3.16 La topologie forte

DEFINITION 1 Soit $\langle F|\, G\rangle$ une semi-dualité. La *topologie forte* $\beta\,(F,G)$ sur F est définie par l'ensemble des semi-normes s.c.i. pour l'une des topologies compatibles avec la dualité. On pose

$$F_\beta := F_{\beta\left(F,F^\dagger\right)} \quad \text{et} \quad F_\beta^\dagger := F_{\beta\left(F^\dagger,F\right)} \ .$$

PROPOSITION

(i) La topologie forte $\beta\,(F,G)$ est plus fine que la topologie de Mackey $\tau\,(F,G)$.

(ii) Un espace localement convexe séparé est tonnelé si, et seulement si, $F = F_\beta$, i.e. si sa topologie coïncide avec la topologie forte $\beta\left(F,F^\dagger\right)$.

(iii) Toute semi-norme continue pour la topologie forte $\beta\left(F,F^\dagger\right)$ est de la forme sn_C *où C est une partie (convexe absolument symétrique faiblement fermée) bornée de $F^\dagger$.*

Dmonstration de (i) Toute semi-norme de Mackey sur F est s.c.i. par le corollaire 3.6.ii.

Dmonstration de (ii) C'est une reformulation de la définition.

Dmonstration de (iii) Cela découle du corollaire 3.9. □

REMARQUE 1 C'est essentiellement la topologie forte $\beta\left(F^\dagger,F\right)$ sur un semi-dual qui est intéressante. Dans ce cas les semi-normes continues sont toutes de la forme sn_C , où C est une partie bornée de F .

Rappelons que les parties bornées, ainsi que les parties convexes fermées sont les mêmes pour toutes les topologies compatibles avec la semi-dualité (proposition 3.8 et théorème de Fenchel 3.9.iii).

REMARQUE 2 Si F est un espace normé l'espace de Banach $F_\beta^\dagger$ définit en 3.2.2 est muni de la topologie forte.

En effet toute partie bornée de F est contenue dans une boule, donc toute semi-norme pour la topologie forte de $F_\beta^\dagger$ est majorée par un multiple de la norme duale. □

REMARQUE 3 Pour toute semi-norme continue p sur F , considérons l'espace quotient $F_p := F/\{p=0\}$ muni de la norme $[p]$. Puisque l'application quotient $\pi_p : F \longrightarrow F_p$ est continue et surjective, on obtient une injection canonique

$$\pi_p^\dagger : (F_p)_\beta^\dagger \hookrightarrow F_\beta^\dagger : |\nu\rangle \longmapsto \langle \pi_p \cdot |\, \nu\rangle = |\nu\rangle \circ \pi_p \ .$$

Elle est continue, car si C est une partie bornée de F , on a $\sup p\,(C) < \infty$ et

$$\mathrm{sn}_C\left(\left|\pi_p^\dagger \nu\right\rangle\right) = \sup_{\varphi\in C}\left|\left\langle \varphi|\, \pi_p^\dagger \nu\right\rangle_F\right| = \sup_{\varphi\in C}\left|\left\langle \pi_p\varphi|\, \nu\right\rangle_{F_p}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\varphi\in C} \|\pi_p\varphi\|_{F_p} \cdot \|\nu\|_{[p]} \leqslant \sup p(C) \cdot \|\nu\|_{[p]} \ .$$

D'autre part

$$\bigcup_{p\in\overline{\mathcal{P}}} (F_p)^\dagger = F^\dagger$$

et la topologie localement convexe finale sur $F^\dagger$ de $\varinjlim \left((F_p)^\dagger_\beta, \pi_p^\dagger\right)$ est plus fine que celle de $F^\dagger_\beta$, qui elle est plus fine que celle de $F^\dagger$.

D'autre part si $\mathfrak{s} \in \mathbf{S}(F,G)$ (cf. définition 3.13), il existe des semi-normes continues p et q sur F et G respectivement telles que

$$|\langle\varphi| S\gamma\rangle| = |\mathfrak{s}(\varphi,\gamma)| \leqslant p(\varphi)\cdot q(\gamma) \ .$$

Cette dernière inégalité peut s'écrire

$$\|S\gamma\|_p \leqslant q(\gamma)$$

et montre que S factorise par $(F_p)^\dagger_\beta$ en une application linéaire

$$S : G \longrightarrow (F_p)^\dagger_\beta \hookrightarrow \varinjlim \left((F_p)^\dagger_\beta, \pi_p^\dagger\right)$$

continue.

Utilisant les remarques 1 et 4 de 3.13 on obtient les inclusions et égalités suivantes :

$$\left|F^\dagger\right\rangle\left\langle G^\dagger\right| = \mathcal{L}^f\left(G,F^\dagger\right) = \mathbf{S}(F_\sigma,G_\sigma) \subset \mathbf{S}(F,G) = \Big(|F\rangle_p\langle G|\Big)^\dagger \subset \mathcal{L}\left(G, \varinjlim\left((F_p)^\dagger_\beta,\pi_p^\dagger\right)\right) \subset$$

$$\subset \mathcal{L}\left(G,F^\dagger_\beta\right) \subset \mathcal{S}(F,G) = \mathcal{L}_s\left(G,F^\dagger\right) = \Big(|F\rangle_i\langle G|\Big)^\dagger \ .$$

PROBLEME Quand a-t-on l'égalité

$$\mathbf{S}(F,G) = \mathcal{S}(F,G) \quad \text{, i.e.} \quad \Big(|F\rangle_p\langle G|\Big)^\dagger = \Big(|F\rangle_i\langle G|\Big)^\dagger \ .$$

i.e. quand est-ce que toute forme sesquilinéaire séparément continue est continue ? Voici une réponse élémentaire.

THEOREME *Si F est un espace localement convexe et G un espace tonnelé, alors*

$$\mathcal{L}\left(G,F^\dagger_\beta\right) = \mathcal{L}\left(G,F^\dagger\right) \ .$$

Si $T : G \longrightarrow F^\dagger$ est continue et si p est une semi-norme s.c.i. sur $F^\dagger$, on a $p = \sup\left|\langle \mathrm{co}_p|\right|$ par le corollaire 3.9.iv appliqué à la semi-dualité $\left\langle F^\dagger\middle| F\right\rangle$; on a donc

$$p\circ T = \sup|\langle \mathrm{co}_p|\circ T| = \sup|\langle \mathrm{co}_p| T\cdot\rangle|$$

et $\langle \mathrm{co}_p| T\cdot\rangle \subset F^\dagger$. Le scolie 2.13 montre que $p\circ T$ est une semi-norme continue, donc que $T : G \longrightarrow F^\dagger_\beta$ est continue. La réciproque est évidente puisque la topologie forte est plus fine que la topologie faible. □

COROLLAIRE *Si F est normé et G tonnelé, alors toute forme sesquilinéaire séparément continue sur $F\times G$ est continue.*

Puisque $\mathcal{L}\left(G, F^{\dagger}\right) = \mathcal{L}\left(G, F_{\beta}^{\dagger}\right)$, la semi-norme $\gamma \longmapsto \|S\gamma\|_{F_{\beta}^{\dagger}}$ est continue sur G ; mais comme

$$|\langle \varphi | S\gamma \rangle_F| \leqslant \|\varphi\|_F \cdot \|S\gamma\|_{F_{\beta}^{\dagger}} \ ,$$

la proposition 2.4 permet de conclure. □

Nous renvoyons à 2.13 pour des exemples d'espaces tonnelés et à N. Bourbaki [3], III, corollaire 1, p. 30 et IV, théorème 2, p. 26 pour d'autres résultats du même type.

Les topologies de la convergence uniforme

DEFINITION 2 Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornée de F . On désigne par $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(F, G)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues muni des semi-normes

$$q_B : T \longmapsto \sup_{\varphi \in B} q(T\varphi)$$

où q est une semi-norme continue sur G et $B \in \mathfrak{S}$. On dit que c'est la *topologie de la convergence* (dans G) *uniforme sur les parties de* $\mathfrak{S}$.

On ne change pas cette topologie en remplaçant les parties de $\mathfrak{S}$ par l'ensemble de toutes les parties contenues dans l'enveloppe fermée convexe absolument symétrique d'une partie de $\mathfrak{S}$. Puisque $\mathrm{sn}_B = \mathrm{sn}_{\overline{\mathrm{cs}}(B)}$, il est équivalent de se donner $\mathfrak{S}$ ou une famille de semi-normes s.c.i. sur $F^{\dagger}$.

EXEMPLE On considère essentiellement les topologies de la convergence uniforme sur les parties suivantes :

(a) finies : $\mathcal{L}_s(F, G)$.

(b) convexes compactes : $\mathcal{L}_{cc}(F, G)$.

(c) compactes : $\mathcal{L}_c(F, G)$.

(d) bornées : $\mathcal{L}_b(F, G)$.

On dit que c'est la topologie de la convergence simple (cf. définition 3.1.3), convexe compacte, compacte et respectivement bornée.

On a $\mathcal{L}_b(F, \mathbb{K}) = F'_{\beta}$ par la remarque 1 ci-dessus. Attention l'enveloppe fermée convexe d'une partie compacte n'est pas nécessairement compacte.

(e) Soit $\mathfrak{E}$ l'ensemble des parties de $F^{\dagger}$ contenues dans une partie de la forme co_p , où p est une semi-norme continue sur F . Ce sont exactement les ensembles *équicontinus* de formes semi-linéaires sur F .

Puisque toute semi-norme continue p sur F s'écrit $p = \mathrm{sn}_E = |\cdot|_E$, où $E \in \mathfrak{E}$ (corollaire 3.9.iv), on a

$$F = \not{\mathcal{L}}_{\mathfrak{E}}\left(F^{\dagger}, \mathbb{K}\right) = \left(F^{\dagger}\right)_{\mathfrak{E}}^{\dagger} \ .$$

Rappelons que $F_{\sigma} = \left(F^{\dagger}\right)^{\dagger}$ (théorème 3.7).

3.17 Les opérateurs dans un espace de Hilbert

DEFINITION 1 Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des espaces de Hilbert et $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ une application linéaire continue. On dit que c'est un *opérateur borné* . On dit aussi opérateur continu. Comme précédemment (cf. 3.8), nous désignerons par

$$T^{\dagger} : \mathcal{G}_{\beta}^{\dagger} \longrightarrow \mathcal{H}_{\beta}^{\dagger}$$

l' *opérateur adjoint* .

Rappelons que le dual fort $\mathcal{H}_{\beta}^{\dagger}$ de $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, mais que l'on n'identifie pas nécessairement avec $\mathcal{H}$ (cf. remarque 1.5.2). Si l'on fait toutefois cette identification, alors

DEFINITION 2 Nous désignerons l'opérateur adjoint par

$$T^{*} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \ .$$

Il est caractérisé par

$$(\xi | T^{*}\gamma)_{\mathcal{H}} = (T\xi | \gamma)_{\mathcal{G}} \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H} \text{ et } \gamma \in \mathcal{G} \ ,$$

i.e. $T^{*}\gamma$ est l'unique élément de $\mathcal{H}$ qui grâce au théorème de Riesz représente la forme semi-linéaire continue

$$\xi \longmapsto (T\xi | \gamma)_{\mathcal{G}} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K} \ .$$

Les formules de la proposition 3.7 et des corollaires 3.8 et 3.10 sont évidemment valables pour $\diamond^{*}$ à la place de $\diamond^{\dagger}$.

Nous n'utiliserons donc la notation T^{*} que lorsque $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sont identifiés avec leur semi-dual fort.

THEOREME (Hellinger-Toeplitz) *Soient $\mathcal{H}, \mathcal{G}$ des espaces de Hilbert et $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ une application linéaire possédant une adjointe $S : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$, i.e. telle que*

$$(\xi | S\gamma)_{\mathcal{H}} = (T\xi | \gamma)_{\mathcal{G}} \quad \textit{pour tout } \xi \in \mathcal{H} \textit{ et } \gamma \in \mathcal{G} \ .$$

Alors T est un opérateur borné et $S = T^{*}$.

C'est immédiat par le scolie 3.7.ii. C'est aussi une conséquence du théorème du graphe fermé 3.14. Si $((\xi_k, T\xi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers (ξ, γ) dans $\mathcal{H} \times \mathcal{G}$, il nous suffit de montrer que $\gamma = T\xi$. Mais pour tout $\theta \in \mathcal{G}$, par la continuité du produit scalaire on a

$$(T\xi | \theta)_{\mathcal{G}} = (\xi | S\theta)_{\mathcal{H}} = (\lim_k \xi_k | S\theta)_{\mathcal{H}} = \lim_k (\xi_k | S\theta)_{\mathcal{H}} =$$

$$= \lim_k (T\xi_k | \theta)_{\mathcal{G}} = (\lim_k T\xi_k | \gamma)_{\mathcal{G}} = (\gamma | \theta)_{\mathcal{G}} \ ,$$

donc $T\xi = \gamma$. □

Rappelons les notions suivantes :

DEFINITION 3 Soit $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ un opérateur borné. On dit que T est

(a) *unitaire* si

$$T^*T = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \quad \text{et} \quad TT^* = \mathrm{Id}_{\mathcal{G}} \ .$$

Si T un opérateur borné dans $\mathcal{H}$, on dit qu'il est

(a) *normal* si

$$T^*T = TT^* \ ,$$

(b) *auto-adjoint* (ou *hermitien*) si

$$T = T^* \ ,$$

(c) *auto-adjoint* (ou *hermitien*) *positif* si T est auto-adjoint et

$$(\xi | T\xi) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H} \ .$$

EXERCICE Montrer que $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ est une isométrie si, et seulement si, T est borné et $T^*T = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$. En déduire que T est unitaire si, et seulement si, T est une isométrie surjective, ou encore si T est un opérateur borné bijectif et

$$\overset{-1}{T} = T^* \ ,$$

PROPOSITION *Soit T un opérateur dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.*

(i) On a

$$\|T\| = \sup\nolimits_{\xi,\eta \in \mathcal{H}, \|\xi\|, \|\eta\| \leqslant 1} |(\xi | T\eta)| \ .$$

Si T est auto-adjoint, alors

$$\|T\| = \sup\nolimits_{\xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leqslant 1} |(\xi | T\xi)| \ .$$

(ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors

$$\|T\| \leqslant 2 \cdot \sup\nolimits_{\xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leqslant 1} |(\xi | T\xi)| \ ,$$

$$T \text{ auto-adjoint} \iff (\xi | T\xi) \in \mathbb{R} \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H}$$

et

$$T \text{ auto-adjoint positif} \iff (\xi | T\xi) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H} \ .$$

(iii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $T = U + i \cdot V$, où U, V sont des opérateurs auto-adjoints dans $\mathcal{H}$, alors

$$U = \mathrm{Re}\, T := \frac{1}{2} \cdot (T + T^*) \quad , \quad V = \mathrm{Im}\, T := \frac{1}{2i} \cdot (T - T^*)$$

et

$$T \text{ est borné} \iff U, V \text{ sont bornés.}$$

En outre

$$T \text{ est normal} \iff U, V \text{ commutent.}$$

Dmonstration de (i) Utilisant le théorème 2.8, on obtient tout d'abord

$$\|T\| = \sup\nolimits_{\|\eta\| \leqslant 1} \|T\eta\| = \sup\nolimits_{\|\eta\| \leqslant 1} \sup\nolimits_{\|\xi\| \leqslant 1} |(\xi | T\eta)| \geqslant \sup\nolimits_{\|\xi\| \leqslant 1} |(\xi | T\xi)| =: M \ ,$$

ce qui prouve en particulier la première partie. Remarquons que l'on a

$$|(\xi|\,T\xi)| \leqslant M \cdot \|\xi\|^2 \ .$$

Si T est auto-adjoint, on a

$$(\xi|\,T\eta) = (T^*\xi|\,\eta) = (T\xi|\,\eta) = \overline{(\eta|\,T\xi)} \ ,$$

donc

$$4 \cdot \operatorname{Re}(\xi|\,T\eta) = 2 \cdot \left[(\xi|\,T\eta) + \overline{(\xi|\,T\eta)}\right] = 2 \cdot [(\xi|\,T\eta) + (\eta|\,T\xi)] =$$

$$= (\xi + \eta|\,T(\xi + \eta)) - (\xi - \eta|\,T(\xi - \eta))$$

en appliquant la première formule de polarisation, proposition 1.3.i, à la forme sesquilinéaire

$$(\xi, \eta) \longmapsto (\xi|\,T\eta) \ .$$

Grâce à l'égalité du parallélogramme, corollaire 1.3, on obtient alors

$$4 \cdot |\operatorname{Re}(\xi|\,T\eta)| \leqslant |(\xi + \eta|\,T(\xi + \eta))| + |(\xi - \eta|\,T(\xi - \eta))| \leqslant$$

$$\leqslant M \cdot \left(\|\xi + \eta\|^2 + \|\xi - \eta\|^2\right) = 2M \cdot \left(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2\right) \leqslant 4M$$

si $\|\xi\|, \|\eta\| \leqslant 1$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on en déduit que $|(\xi|\,T\eta)| \leqslant M$, donc que $\|T\| \leqslant M$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il existe $u \in \mathbb{U}$ tel que

$$|(\xi|\,T\eta)| = u \cdot (\xi|\,T\eta) = (u \cdot \xi|\,T\eta) = |\operatorname{Re}(u \cdot \xi|\,T\eta)| \leqslant M \ ,$$

ce qui prouve aussi que $\|T\| \leqslant M$.

Dmonstration de (ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la formule de polarisation, proposition 1.3.iii, et l'égalité du parallélogramme, corollaire 1.3, montrent que

$$4 \cdot |(\xi|\,T\eta)| \leqslant \sum_{\varepsilon^4 = 1} |(\xi + \overline{\varepsilon} \cdot \eta|\,T(\xi + \overline{\varepsilon} \cdot \eta))| \leqslant M \cdot \sum_{\varepsilon^4 = 1} \|\xi + \overline{\varepsilon} \cdot \eta\|^2 =$$

$$= 2M \cdot \left(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 + \|\xi\|^2 + \|i \cdot \eta\|^2\right) \leqslant 8M \ ,$$

si $\|\xi\|, \|\eta\| \leqslant 1$, donc que $\|T\| \leqslant 2M$.

Les conditions sont évidemment nécessaires, puisque

$$(\xi|\,T\xi) = (T^*\xi|\,\xi) = (T\xi|\,\xi) = \overline{(\xi|\,T\xi)} \ .$$

Réciproquement, si $(\xi|\,T\xi) \in \mathbb{R}$, on a

$$(\xi|\,(T - T^*)\,\xi) = (\xi|\,T\xi) - (T\xi|\,\xi) = (\xi|\,T\xi) - \overline{(\xi|\,T\xi)} = 0 \ ,$$

donc

$$\|T - T^*\| \leqslant 2 \cdot \sup\nolimits_{\xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leqslant 1} |(\xi|\,(T - T^*)\,\xi)| = 0 \ ,$$

et par suite $T = T^*$. La dernière partie est alors immédiate.

Dmonstration de (iii) La démonstration est laissé au lecteur. □

REMARQUE 1 Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les assertions de (ii) sont fausses comme le montre une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans $\mathbb{R}^2$.

REMARQUE 2 Il est recommandé de comparer ces résultats avec ceux de 3.13 et 1.5.

EXERCICE (Théorème de Lax-Milgram) Soient F, G des espaces normés et T une application linéaire de F dans G . Montrer :

(a) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\|T\varphi\| \geqslant \varepsilon \cdot \|\varphi\| \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

(ii) T est injectif et $\overset{-1}{T} : T(F) \longrightarrow F$ est continu.

(b) Si F est complet, T est continu et l'une des propriétés de (a) est satisfaite, alors $T(F)$ est complet.

(c) Si T est un isomorphisme, alors F est complet si, et seulement si, G est complet.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

(d) $\operatorname{Im} T$ dense dans $\mathcal{H}$, si, et seulement si, T^* est injectif.

(e) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) T est inversible.

(ii) T^* est inversible.

(iii) T^* est injectif et il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\|T\xi\| \geqslant \varepsilon \cdot \|\xi\| \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H} \ .$$

3.18 Les opérateurs intégraux de Hilbert-Schmidt

Soient μ et ν des intégrales de Radon sur X et Y respectivement.

Etant donné $\varkappa \in \mathbf{L}^2(\mu \otimes \nu)$, le théorème de Tonelli et Fubini, cours d'Analyse [17] 16.3, ainsi que le critère d'intégrabilité, cours d'Analyse [17] 15.10, montrent que $\varkappa(x,\cdot) \in \mathbf{L}^2(\nu)$ pour μ-presque tous les $x \in X$. Si $\eta \in \mathbf{L}^2(\nu)$, on peut donc définir

$$T_\varkappa \eta(x) := \int \varkappa(x,\diamond) \cdot \eta \, d\nu \quad \text{pour } \mu\text{-presque tous les } x \in X \ ,$$

et par 0 sinon.

Pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, on a

$$1_K \cdot T_\varkappa \eta := \int \varkappa(\diamond, y) \cdot 1_K \cdot \eta(y) \, d\nu(y) \quad \mu\text{-p.p.} \ ,$$

et $1_K \otimes \eta \in \mathbf{L}^2(\mu \otimes \nu)$ (cours d'Analyse [17], corollaire 16.3 et critère d'intégrabilité 15.10). On en déduit que $\varkappa \cdot 1_K \otimes \eta \in \mathbf{L}^1(\mu \otimes \nu)$, et le théorème de Fubini, (cf. aussi cours d'Analyse [17], théorème 15.2.ii), montre que $1_K \cdot T_\varkappa \eta \in \mathbf{L}^1(\mu)$. Cette fonction est en particulier μ-mesurable, donc $T_\varkappa \eta$ est μ-mesurable (cf. cours d'Analyse [17], théorème 15.9.i). D'autre part, on a

$$\int^* |T_\varkappa \eta|^2 \, d\mu = \int^* \left| \int \varkappa(x,\diamond) \cdot \eta \, d\nu \right|^2 d\mu(x) \leqslant \int^* \left(\int |\varkappa(x,\diamond)|^2 \, d\nu \cdot \int |\eta|^2 \, d\nu \right) d\mu(x) =$$

$$= \|\eta\|_{2,\nu}^2 \cdot \int^* \left(\int^* |\varkappa(x,\diamond)|^2 \, d\nu \right) d\mu(x) = \|\eta\|_{2,\nu}^2 \cdot \|\varkappa\|_{2,\mu\otimes\nu} < \infty \ .$$

Le critère d'intégrabilité montre donc que $T_\varkappa \eta \in \mathbf{L}^2(\mu)$. Nous avons donc prouvé

THEOREME *Si $\varkappa \in \mathbf{L}^2(\mu \otimes \nu)$, il existe un opérateur continu*

$$T_\varkappa : \mathbf{L}^2(\nu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) : \eta \longmapsto T_\varkappa \eta$$

tel que

$$T_\varkappa \eta(x) := \int \varkappa(x,\diamond) \cdot \eta \, d\nu \quad \textit{pour } \mu\textit{-presque tous les } x \in X \ ,$$

et

$$\|T_\varkappa\| \leqslant \|\varkappa\|_{2,\mu\otimes\nu} \ .$$

On dit que c'est un opérateur intégral de Hilbert-Schmidt *de noyau $\varkappa$.*

Son adjoint

$$T_\varkappa^* : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\nu)$$

est l'opérateur intégral de Hilbert-Schmidt provenant du noyau $\varkappa^* \in \mathbf{L}^2(\nu \otimes \mu)$ défini par

$$\varkappa^*(y,x) := \overline{\varkappa(x,y)} \ .$$

Il nous reste à calculer $T_{\varkappa}^*$. Pour tout $\eta \in \mathbf{L}^2(\nu)$ et $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$, le corollaire 16.3.i et le théorème de Fubini 16.3 (cours d'Analyse [17]) nous permettent d'écrire

$$(\eta | T_{\varkappa}^* \xi) = (T_{\varkappa}\eta | \xi) = \int \overline{T_{\varkappa}\eta} \cdot \xi \, d\mu = \int \left(\overline{\int \varkappa(x,y) \cdot \eta(y) \, d\nu(y)} \right) \cdot \xi(x) \, d\mu(x) =$$

$$= \int \overline{\varkappa} \cdot |\xi\rangle \langle\eta| \, d\mu \otimes \nu = \int \overline{\eta} \cdot \left(\int \overline{\varkappa(x,\diamond)} \cdot \xi(x) \, d\mu(x) \right) d\nu = \left(\eta \middle| \int \overline{\varkappa(x,\diamond)} \cdot \xi(x) \, d\mu(x) \right) ,$$

d'où notre assertion. □

REMARQUE L'inégalité $\|T_{\varkappa}\| \leqslant \|\varkappa\|_{2,\mu\otimes\nu}$ est en général stricte.

EXERCICE 1 (Les opérateurs abstraits de Hilbert-Schmidt)

Soient $\mathcal{H}, \mathcal{G}$ des espaces de Hilbert. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ est de *Hilbert-Schmidt* si pour une base hilbertienne $(\epsilon_j)_{j\in J}$ de $\mathcal{H}$, on a

$$\sum_{j\in J} \|T\epsilon_j\|_{\mathcal{G}}^2 < \infty \ . \qquad (*)$$

On désigne par $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ l'ensemble de ces opérateurs. Montrer

EXERCICE 2 (a)

$$T \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G}) \quad \Longleftrightarrow \quad T^* \in \mathcal{L}^2(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \ .$$

Utiliser l'égalité de Parseval.

(b) Si $T \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$, on a $(*)$ pour toute base hilbertienne de $\mathcal{H}$ et les sommes sont égales.

(c) La fonction

$$(T,S) \longmapsto (T|S) := \sum_{j\in J} (T\epsilon_j | S\epsilon_j)_{\mathcal{G}} : \mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G}) \times \mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ et on a

$$\|T\| \leqslant (T|T)^{\frac{1}{2}} =: \|T\|_2 \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G}) \ .$$

(d) $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ est un espace de Hilbert.

(e) On a

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G}) = |\mathcal{G}\rangle \widehat{\otimes}_2 \langle\mathcal{H}| \ .$$

EXERCICE 3 Soient μ, ν des intégrales de Radon respectivement sur les espaces séparés X et Y , $\varkappa \in \mathbf{L}^2(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ et $T_{\varkappa}$ l'opérateur de Hilbert-Schmidt associé. Montrer :

(a) Si $(\epsilon_j)_{j\in J}$ est une base hilbertienne de $\mathbf{L}^2(\nu)$, pour μ-presque tous les $x \in X$ il existe une famille $(\alpha_j(x))_{j\in J} \in \ell^2(J)$ telle que

$$\varkappa(x,\cdot) = \sum_{j\in J} \alpha_j(x) \cdot \epsilon_j \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\nu) \ .$$

(b) Pour toute base hilbertienne $(\epsilon_j)_{j\in J}$ de $\mathbf{L}^2(\nu)$, on a

$$\sum_{j\in J} \|T_{\varkappa}\epsilon_j\|_{2,\mu}^2 = \int_{X\times Y} |\varkappa|^2 \, d\,\mu\otimes\nu = \|\varkappa\|_2^2 \ .$$

Remarquer que si $(\epsilon_j)_{j\in J}$ est une base hilbertienne de $\mathbf{L}^2(\nu)$, il en est de même de $(\overline{\epsilon_j})_{j\in J}$.

(c) On a

$$\mathcal{L}^2\left(\mathbf{L}^2(\nu), \mathbf{L}^2(\mu)\right) = \left|\mathbf{L}^2(\mu)\right) \widehat{_2} \left(\mathbf{L}^2(\nu)\right| = \mathbf{L}^2(\mu\otimes\nu) \ .$$

3.19 Les opérateurs intégraux faiblement singuliers

Soient μ et ν des intégrales de Radon sur X et Y respectivement.

THEOREME *Soit $\varkappa : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction $\mu \otimes \nu$-mesurable telle que l'on ait*

$$M := \sup_{\|\xi\|_{2,\mu},\|\eta\|_{2,\nu}\leqslant 1} \iint^* |\xi(x) \cdot \varkappa(x,y) \cdot \eta(y)| \, d(\mu \otimes \nu)(x,y) < \infty \ .$$

Alors, pour tout $\eta \in \mathbf{L}^2(\nu)$, la fonction $\varkappa(x,\diamond) \cdot \eta$ est ν-intégrable pour localement μ-presque tous les $x \in X$ et la fonction

$$T_\varkappa \eta := \int \varkappa(\diamond,y) \cdot \eta(y) \, d\nu(y) \ ,$$

qui est définie localement μ-p.p. , appartient à $\mathbf{L}^2(\mu)$. L'application linéaire $T_\varkappa : \mathbf{L}^2(\nu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$ ainsi définie est continue et $\|T_\varkappa\| \leqslant M$.

En effet, la forme sesquilinéaire sur $\mathbf{L}^2(\mu) \times \mathbf{L}^2(\nu)$ définie par

$$\mathfrak{s} : (\xi,\eta) \longmapsto \iint \overline{\xi(x)} \cdot \varkappa(x,y) \cdot \eta(y) \, d(\mu \otimes \nu)(x,y)$$

est bornée, puisque

$$|\mathfrak{s}(\xi,\eta)| \leqslant M \cdot \|\xi\|_{2,\mu} \cdot \|\eta\|_{2,\nu} \ .$$

Il existe donc d'après le corollaire 1.5 une application linéaire continue $T_\varkappa : \mathbf{L}^2(\nu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$ telle que

$$(\xi | T_\varkappa \eta) = \iint \overline{\xi(x)} \cdot \varkappa(x,y) \cdot \eta(y) \, d(\mu \otimes \nu)(x,y) \ ,$$

et on a

$$\|T_\varkappa\| = \sup_{\|\xi\|_{2,\mu},\|\eta\|_{2,\nu}\leqslant 1} |(\xi | T_\varkappa \eta)| \leqslant M \ .$$

Pour tout $\eta \in \mathbf{L}^2(\nu)$ et $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu, 1_K)$, les théorèmes de Tonneli et Fubini montrent que la fonction $\overline{\xi(x)} \cdot \varkappa(x,\diamond) \cdot \eta$ est ν-intégrable pour μ-presque tous les $x \in X$ et que la fonction $\overline{\xi} \cdot \int \varkappa(\diamond,y) \cdot \eta(y) \, d\nu(y)$, qui est définie μ-p.p. , est μ-intégrable. En particulier, pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, la fonction $1_K \cdot \int \varkappa(\diamond,y) \cdot \eta(y) \, d\nu(y)$ est définie μ-p.p. et μ-mesurable. On en déduit par le lemme 1.16.i et le théorème 15.9.i du cours d'Analyse [17] que $\int \varkappa(\diamond,y) \cdot \eta(y) \, d\nu(y)$ est définie localement μ-p.p. et μ-mesurable. On a alors

$$\int \overline{\xi} \cdot T_\varkappa \eta \, d\mu = (\xi | T_\varkappa \eta) = \int \overline{\xi} \cdot \left(\int \varkappa(x\diamond,y) \cdot \eta(y) \, d\nu(y) \right) d\mu \ .$$

Grâce à la proposition et l'exemple 1.16.1, on obtient

$$T_\varkappa \eta = \int \varkappa(\diamond,y) \cdot \eta(y) \, d\nu(y) \quad \text{localement } \mu\text{-p.p.} \ ,$$

et prouve que $\int \varkappa(\diamond,y) \cdot \eta(y) \, d\nu(y) \in \mathbf{L}^2(\mu)$ (cf. lemme 1.16.iv). □

DEFINITION On dit que $T_\varkappa$ est un *opérateur intégral faiblement singulier* de noyau $\varkappa$.

REMARQUE 1 Ce résultat est évidemment applicable aux noyaux de carré intégrables de l'exemple précédent. Il suffit de constater que

$$\iint^* |\xi(x) \cdot \varkappa(x,y) \cdot \eta(y)| \; d(\mu \otimes \nu)(x,y) \leqslant$$

$$\leqslant \left[\iint^* |\varkappa(x,y)|^2 \; d(\mu \otimes \nu)(x,y)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\iint^* |\xi(x) \cdot \eta(y)|^2 \; d(\mu \otimes \nu)(x,y)\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|\varkappa\|_{2,\mu\otimes\nu} \cdot \|\xi\|_{2,\mu} \cdot \|\eta\|_{2,\nu} \ .$$

APPLICATION Pour pouvoir estimer le nombre M il suffit appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, mais de manière un peu moins brutale que ci-dessus. L'idée consiste à décomposer le noyau.

Si

$$\varkappa = u \cdot v \quad \text{, où } u, v \text{ sont } \mu \otimes \nu\text{-mesurables ,}$$

on a

$$\left[\iint^* |\xi(x) \cdot \varkappa(x,y) \cdot \eta(y)| \; d(\mu \otimes \nu)(x,y)\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left[\iint^* |\xi(x)|^2 \cdot |u(x,y)|^2 \; d(\mu \otimes \nu)(x,y)\right] \left[\iint^* |v(x,y)|^2 \cdot |\eta(y)|^2 \; d(\mu \otimes \nu)(x,y)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int^* |\xi|^2 \cdot \left(\int^* |u(\cdot,y)|^2 \; d\nu(y)\right) d\mu\right] \left[\int^* |\eta|^2 \cdot \left(\int^* |v(x,\cdot)|^2 \; d\mu(x)\right) d\nu\right] \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\int^* |u(\cdot,y)|^2 \; d\nu(y)\right\|_{\infty,\mu} \cdot \left\|\int^* |v(x,\cdot)|^2 \; d\mu(x)\right\|_{\infty,\nu} \cdot \|\xi\|_{2,\mu}^2 \cdot \|\eta\|_{2,\nu}^2 \ .$$

Ainsi, si les deux suprema essentiels sont finis, le noyau $\varkappa$ définit une application linéaire continue $T_\varkappa$ de $\mathbf{L}^2(\nu)$ dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ telle que

$$\|T_\varkappa\| \leqslant \left\|\int^* |u(\cdot,y)|^2 \; d\nu(y)\right\|_{\infty,\mu}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\|\int^* |v(x,\cdot)|^2 \; d\mu(x)\right\|_{\infty,\nu}^{\frac{1}{2}} \ .$$

Plaçons-nous maintenant dans un ouvert X de $\mathbb{R}^n$. Ces conditions sont par exemple satisfaites si

$$\varkappa(x,y) = b(x,y) \cdot \widetilde{\varkappa}(x-y) \quad \text{pour tout } x, y \in X \ ,$$

pour un $\widetilde{\varkappa} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et b une fonction $\lambda_X \otimes \lambda_X$-mesurable et bornée.

Il suffit de poser

$$u := |\varkappa|^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad v := \operatorname{signum}(\varkappa) \cdot |\varkappa|^{\frac{1}{2}} \ ;$$

il vient alors

$$\int^* |u(x,y)|^2 \; dy = \int^* |b(x,y) \cdot \widetilde{\varkappa}(x-y)| \; dy \leqslant \|b\|_\infty \cdot \|\widetilde{\varkappa}\|_1 < \infty \quad \text{pour tout } x \in X \ ,$$

et de même

$$\int^{*} |v(x,y)|^2 \, dx \leqslant \|b\|_{\infty} \cdot \|\widetilde{\varkappa}\|_1 < \infty \quad \text{pour tout } y \in X \ .$$

En particulier si X est borné et si, pour un $s < n$, on a

$$\varkappa(x,y) = \frac{b(x,y)}{|x-y|^s} \quad \text{pour tout } x,y \in X \ ,$$

il suffit de prendre

$$\widetilde{\varkappa}(x) := \begin{cases} \frac{1}{|x|^s} & & x \in \mathbb{B}_R^n \\ & \text{si} & \\ 0 & & \text{sinon} \end{cases}$$

en ayant choisi R tel que $X - X \subset \mathbb{B}_R^n$, par exemple si $X \subset \mathbb{B}_{\frac{R}{2}}^n$.

Ces noyaux sont dits *faiblement singuliers* car, bien que singuliers au voisinage de la diagonale, ils satisfont à une condition d'intégrabilité.

3.20 Les opérateurs intégraux généraux

Soient μ et ν des intégrales de Radon
sur des espaces localement compacts X et Y respectivement.

Rappelons que si $\varkappa$ est une intégrale de Radon quelconque sur $X \times Y$, nous avons défini dans l'exemple 3.13.2 une application linéaire (faiblement) continue $S_\varkappa : \mathcal{K}(Y) \longrightarrow \mathcal{M}(X)$ définie par

$$\langle \varphi | S_\varkappa \gamma \rangle = \left\langle |\varphi\rangle \langle\gamma| \,\middle|\, \varkappa \right\rangle = \int \overline{\varphi(x)} \cdot \gamma(y) \; d\varkappa(x,y) \ .$$

De même si X, Y sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et respectivement $\mathbb{R}^m$, pour tout $\varkappa \in \mathcal{D}(X \times Y)'$, nous avons défini dans l'exemple 3.13.3 une application linéaire (faiblement) continue $S_\varkappa$: $\mathcal{D}(Y) \longrightarrow \mathcal{D}(X)'$ définie par

$$\langle \varphi | S_\varkappa \gamma \rangle = \left\langle |\varphi\rangle \langle\gamma| \,\middle|\, \varkappa \right\rangle \ .$$

On dit que $\varkappa$ est le *noyau* de $S_\varkappa$.

PROBLEME Peut-on trouver des conditions sur $\varkappa$ telles que $S_\varkappa$ se factorise par $\mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$, puis se prolonge continûment à $\mathbf{L}^2(\nu)$, i.e. qu'il existe une application linéaire continue $T_\varkappa : \mathbf{L}^2(\nu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$ telle que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "S_\varkappa"'] \arrow[dr] & \mathbf{L}^2(\nu) \arrow[d, "T_\varkappa"] \\
\mathcal{M}(X) & \mathbf{L}^2(\mu) \arrow[l, hook']
\end{tikzcd} .$$

C'est l'un des problèmes les plus difficiles de l'Analyse fonctionnelle. Même dans le cadre des noyaux dits singuliers ou plus généralement des noyaux de Calderon-Zygmund (au sens de Meyer [16]), la réponse est très complexe !

Comme nous l'avons déjà mentionné dans la remarque 3.13.5 (cf. exercice et remarque 4.12.3), on a

$$\mathcal{M}(X \times Y) \subsetneq \mathcal{L}_s(\mathcal{K}(Y), \mathcal{M}(X)) \ ,$$

tandis que dans le cadre des distributions on a le théorème des noyaux de Schwartz

$$\mathcal{D}(X \times Y)' = \mathcal{L}_s\left(\mathcal{D}(Y), \mathcal{D}(X)'\right)$$

(cf. exemple 3.13.3).

EXEMPLE Si $X = Y$ et

$$\varkappa = \int |\varepsilon_x\rangle \langle\varepsilon_x| \; d\mu(x) = \iota(\mu) \in \mathcal{M}(X \times X) \ ,$$

où $\iota : X \longrightarrow X \times X : x \longmapsto (x, x)$ désigne l'application diagonale, on a

$$S_{\varkappa} : \gamma \longmapsto \gamma \cdot \mu : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(X) \ ,$$

donc $T_{\varkappa} = \mathrm{Id}_{\mathbf{L}^2(\mu)}$. Ceci montre que $\mathrm{Id} : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$ ne peut pas être défini par un noyau-fonction.

3.21 La matrice d'un operateur

Si $\mathcal{H}, \mathcal{G}$ sont des espaces de Hilbert identifiés avec leur semi-dual, les remarques 2 et 3 de 3.13 montrent que

$$\mathcal{L}_s(\mathcal{H}, \mathcal{G}_\sigma) = (|\mathcal{G}\rangle_i \langle\mathcal{H}|)^\dagger \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^f(\mathcal{H}, \mathcal{G}) = |\mathcal{G}\rangle\langle\mathcal{H}| \ .$$

(cf. corollaire 3.5). Ceci montre la première partie du

THEOREME

(i) Tout opérateur de rang fini R de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$ est de la forme

$$R = \sum_{j=1}^n |\gamma_j)(\xi_j| \ ,$$

pour des suites $(\xi_j)_{j=1,\ldots,n} \subset \mathcal{H}$ et $(\gamma_j)_{j=1,\ldots,n} \subset \mathcal{G}$.

Pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ et $\gamma \in \mathcal{G}$, on a

$$\Big(|\gamma)(\xi|\Big)^* = |\xi)(\gamma| \ ,$$

et plus généralement

$$R^* = \sum_{j=1}^n |\xi_j)(\gamma_j| \ .$$

(ii) Soient $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ et $(\epsilon_x)_{x\in X}$ une base hilbertiennes de $\mathcal{H}$. La famille $(|T\epsilon_x)(\epsilon_x|)_{x\in X}$ d'opérateurs de rang 1 est sommable dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ et on a

$$T = \sum_{x\in X} |T\epsilon_x)(\epsilon_x| \ .$$

En particulier $\mathcal{L}^f(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ est dense dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ et

$$\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} = \sum_{x\in X} |\epsilon_x)(\epsilon_x| \ .$$

(iii) Si $(\vartheta_y)_{y\in Y}$ est une base hilbertiennes de $\mathcal{G}$, alors

$$T = \sum_{x\in X} \left|\sum_{y\in Y} \vartheta_y \cdot (\vartheta_y| T\epsilon_x)\right)\left(\epsilon_x\right| = \sum_{y\in Y} \left|\vartheta_y\right)\left(\sum_{x\in X} (\vartheta_y| T\epsilon_x) \cdot \epsilon_x\right|$$

dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}, \mathcal{G})$.

Dmonstration de (i) La seconde partie découle immédiatement de l'exemple 3.7.1.

Dmonstration de (ii) Puisque les semi-normes $p_\xi : T \longmapsto \|T\xi\|_{\mathcal{G}}$ pour $\xi \in \mathcal{H}$ définissent la topologie de $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ et que $\xi = \sum_{x\in X} \epsilon_x \cdot (\epsilon_x| \xi)$ d'après le théorème 1.10.iii, on a $T\xi = \sum_{x\in X} T\epsilon_x \cdot (\epsilon_x| \xi)$ par continuité (cf. remarque 2.6.2), donc

$$\lim_{K\in\mathfrak{K}(X)} p_\xi\left(\sum_{x\in K} |T\epsilon_x)(\epsilon_x| - T\right) = \lim_{K\in\mathfrak{K}(X)} \left\|\sum_{x\in K} T\epsilon_x \cdot (\epsilon_x| \xi) - T\xi\right\|_{\mathcal{G}} = 0 \ .$$

Dmonstration de (iii) En effet

$$T\epsilon_x \cdot (\epsilon_x|\,\xi) = \left(\sum_{y\in Y} \vartheta_y \cdot (\vartheta_y|\,T\epsilon_x)\right) \cdot (\epsilon_x|\,\xi) \quad \text{dans } \mathcal{G} \ ,$$

donc

$$|T\epsilon_x)\,(\epsilon_x| = \left|\sum_{y\in Y} \vartheta_y \cdot (\vartheta_y|\,T\epsilon_x)\right)\left(\epsilon_x\right| \quad \text{dans } \mathcal{L}_s(\mathcal{H},\mathcal{G}) \ .$$

On en déduit que

$$T = \sum_{x\in X} |T\epsilon_x)\,(\epsilon_x| = \sum_{x\in X}\left|\sum_{y\in Y} \vartheta_y \cdot (\vartheta_y|\,T\epsilon_x)\right)\left(\epsilon_x\right| \ ,$$

dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{H},\mathcal{G})$.

Il vient alors

$$T = (T^*)^* = \left[\sum_{y\in Y}\left|\sum_{x\in X} \epsilon_x \cdot (\epsilon_x|\,T^*\vartheta_y)\right)\left(\vartheta_y\right|\right]^* = \sum_{y\in Y}\left|\vartheta_y\right)\left(\sum_{x\in X} (\vartheta_y|\,T\epsilon_x)\cdot\epsilon_x\right| \ ,$$

puisque l'adjonction est continue. Directement il aurait suffit d'écrire

$$T\xi = \sum_{y\in Y} \vartheta_y \cdot \left(\vartheta_y \left| T\left(\sum_{x\in X} \epsilon_x \cdot (\epsilon_x|\,\xi)\right)\right.\right) = \sum_{y\in Y}\left|\vartheta_y\right)\left(\sum_{x\in X} (\vartheta_y|\,T\epsilon_x)\cdot\epsilon_x\right|(\xi) \ .$$

□

DEFINITION On dit que $\Big((\vartheta_y|\,T\epsilon_x)\Big)_{(y,x)\in Y\times X}$ est la *matrice* de T dans les bases $(\epsilon_x)_{x\in X}$ et $(\vartheta_y)_{y\in Y}$.

REMARQUE 1 La seconde formule correspond à la formule classique en dimension finie.

REMARQUE 2 Attention la famille $\Big(|\vartheta_y)\cdot(\vartheta_y|\,T\epsilon_x)\cdot(\epsilon_x|\Big)_{(x,y)\in X\times Y}$ n'est pas nécessairement sommable dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{H},\mathcal{G})$.

REMARQUE 3 Si $S,T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors la matrice de ST est

$$\left(\sum_{u\in X} (\epsilon_y|\,S\epsilon_u)\,(\epsilon_u|\,T\epsilon_x)\right)_{y,x\in X} \ .$$

En effet

$$\sum_{u\in X} (\epsilon_y|\,S\epsilon_u)\,(\epsilon_u|\,T\epsilon_x) = \left(\epsilon_y \left| S\left(\sum_{u\in X} \epsilon_u \cdot (\epsilon_u|\,T\epsilon_x)\right)\right.\right) = (\epsilon_y\,|ST\epsilon_x) \ .$$

On aurait aussi pu écrire

$$ST = \left[\sum_{y\in Y}\left|\epsilon_y\right)\left(\sum_{x\in X} \overline{(\epsilon_y|\,S\epsilon_x)}\cdot\epsilon_x\right|\right] \circ \left[\sum_{u\in X}\left|\sum_{v\in Y} \epsilon_v \cdot (\epsilon_v|\,T\epsilon_u)\right)\left(\epsilon_u\right|\right] =$$

$$= \sum_{y \in Y} \left| \epsilon_y \right) \left(\left[\sum_{u \in X} \left(\sum_{x \in X} \overline{(\epsilon_y | \, S\epsilon_x)} \cdot (\epsilon_x | \, T\epsilon_u) \right) \right] \epsilon_u \right| \; .$$

3.22 Le formalisme de Dirac

Le formalisme de Dirac consiste à composer des applications linéaires entre espaces localement convexes et leur semi-dual. Plus particulièrement si F est un espace localement convexe séparé, pour $\varphi \in F$ et $\mu \in F^\dagger$, on considère les vecteurs bra :

$$\langle\varphi| : F^\dagger \longrightarrow \mathbb{K} : \nu \longmapsto \langle\varphi|\,\nu\rangle \quad \text{et} \quad \langle\mu| : F \longrightarrow \mathbb{K} : \psi \longmapsto \langle\mu|\,\psi\rangle \ ,$$

comme des formes linéaires continues et les vecteurs ket :

$$|\varphi\rangle : \mathbb{K} \longrightarrow F : \alpha \longmapsto \varphi\cdot\alpha \quad \text{et} \quad |\mu\rangle : \mathbb{K} \longrightarrow F^\dagger : \alpha \longmapsto \mu\cdot\alpha$$

comme des droites paramétrées. En général le signe $\circ$ de composition n'est pas écrit. Il est probablement superflu de préciser que les compositions doivent être correctement définies ; cela correspond aux règles de calcul du formalisme.

On a

$$\langle\mu|^\dagger = |\mu\rangle \quad \text{et} \quad |\mu\rangle^\dagger = \langle\mu| \ ,$$

puisque pour tout $\varphi \in F$, il vient trivialement

$$\left\langle \varphi \,\middle|\, \langle\mu|^\dagger\,\alpha \right\rangle = \left\langle\ \langle\mu|\,\varphi\rangle \,\middle|\, \alpha \right\rangle = \overline{\langle\mu|\,\varphi\rangle}\cdot\alpha = \langle\varphi|\,\mu\cdot\alpha\rangle \ .$$

Par symétrie on obtient également

$$\langle\varphi|^\dagger = |\varphi\rangle \quad \text{et} \quad |\varphi\rangle^\dagger = \langle\varphi| \ .$$

Cet exemple montre que les deux semi-dualités $\left\langle F \,\middle|\, F^\dagger \right\rangle$ et $\left\langle F^\dagger \,\middle|\, F \right\rangle$ sont fondamentales pour le formalisme de Dirac (cf. 5.19) : $\langle\varphi|$ dépend de $\left\langle F \,\middle|\, F^\dagger \right\rangle$, tandis que $\langle\mu|$ de $\left\langle F^\dagger \,\middle|\, F \right\rangle$!

Ce formalisme tire toute sont importance essentiellement des formules suivantes. Pour tout $\gamma \in G$ et $\mu \in F^\dagger$, on a

$$|\gamma\rangle \circ \langle\mu| = |\gamma\rangle\,\langle\mu| : F \longrightarrow G \,;$$

c'est l'application linéaire de rang 1 définie dans le corollaire 3.5. En particulier

$$|\varphi\rangle \circ \langle\mu| = |\varphi\rangle\,\langle\mu| : F \longrightarrow F$$

et

$$|\mu\rangle \circ \langle\varphi| = |\mu\rangle\,\langle\varphi| : F^\dagger \longrightarrow F^\dagger \ .$$

En effet

$$|\gamma\rangle \circ \langle\mu| : \varphi \longmapsto |\gamma\rangle \Big(\langle\mu|\,\varphi\rangle \Big) = \gamma\cdot\langle\mu|\,\varphi\rangle = |\gamma\rangle\,\langle\mu| \Big(\psi\Big) \ .$$

On a

$$\Big(|\gamma\rangle\,\langle\mu| \Big)^\dagger = |\mu\rangle\,\langle\gamma| : G^\dagger \longrightarrow F^\dagger \ ,$$

puisque

$$\Big(|\gamma\rangle\,\langle\mu| \Big)^\dagger = \Big(|\gamma\rangle \circ \langle\mu| \Big)^\dagger = |\mu\rangle \circ \langle\gamma| = |\mu\rangle\,\langle\gamma| \ .$$

L'identification $\mathbb{K}^\dagger = \mathbb{K}$ et celle décrite dans la remarque 3.13.1 :

$$\left|F^\dagger\right\rangle = \left|F^\dagger\right\rangle\langle\mathbb{K}| = \mathcal{L}\left(\mathbb{K}, F^\dagger\right) : |\mu\rangle \longmapsto |\mu\rangle\,\langle 1| := \text{"}\alpha \longmapsto |\mu\rangle\cdot\alpha\text{"} \ ,$$

montrent qu'il est naturel de considéré un vecteur ket comme une droite paramétrée, tandis que par adjonction un vecteur bra est bien une forme linéaire :

$$\langle\mu| = |\mu\rangle^\dagger = \Big(|\mu\rangle\langle 1|\Big)^\dagger = |1\rangle\langle\mu| = \text{"}\varphi \longmapsto 1\cdot\langle\mu|\,\varphi\rangle\text{"} = \langle\mu| \ .$$

On retrouve la bijection canonique semi-linéaire

$$\diamond^\dagger : F^\dagger = \mathcal{L}\left(\mathbb{K}, F^\dagger\right) \longrightarrow \mathcal{L}\left(F, \mathbb{K}\right) = F' : |\mu\rangle \longmapsto \langle\mu|$$

de l'exemple 3.4.2.

Nous ferons l'identification

$$\langle\varphi| \circ |\mu\rangle = \langle\varphi|\,\mu\rangle \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{K}} = \langle\varphi|\,\mu\rangle \quad \text{et} \quad \langle\mu| \circ |\varphi\rangle = \langle\mu|\,\varphi\rangle \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{K}} = \langle\mu|\,\varphi\rangle \ .$$

On peut donc écrire

$$\langle\varphi|\,\mu\rangle = \langle\varphi|\,\mu\rangle \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{K}} = \langle\varphi| \circ |\mu\rangle = |\varphi\rangle^\dagger \circ |\mu\rangle \ .$$

Si $\psi \in F$ et $\nu \in F^\dagger$, on a par exemple

$$|\varphi\rangle\langle\mu|\,|\psi\rangle\langle\nu| = |\varphi\rangle \cdot \langle\mu|\,\psi\rangle \cdot \langle\nu| = \langle\mu|\,\psi\rangle \cdot |\varphi\rangle\langle\nu| \ .$$

En outre la semi-dualité $\Big\langle |F\rangle_i \langle G| \,\Big|\, \mathcal{L}_s\left(G, F^\dagger\right) \Big\rangle$ définie en 3.13 s'écrit

$$\Big\langle |\varphi\rangle\langle\gamma| \,\Big|\, S \Big\rangle_{|F\rangle\langle G|} = \langle\varphi|\,S\gamma\rangle = \mathrm{Tr}\Big(|\gamma\rangle\langle\varphi| \circ S\Big) = \mathrm{Tr}\Big(\left(|\varphi\rangle\langle\gamma|\right)^\dagger \circ S\Big)$$

pour tout $\varphi \in F$, $\gamma \in G$ et $S \in L\left(G, F^{\circledast}\right)$, en ayant utilisé la trace d'une application linéaire de rang fini définie dans le corollaire 3.4.

Comme autre exemple si $\xi \in \mathcal{H}$, on a

$$h^\dagger\,|\xi) = h^\dagger \circ |\xi) = \left|h^\dagger\xi\right\rangle = |\xi\rangle$$

et

$$(\xi|\,h = \Big(h^\dagger\,(\xi|^\dagger\Big)^\dagger = \Big(h^\dagger\,|\xi)\Big)^\dagger = |\xi\rangle^\dagger = \langle\xi| \ .$$

Chapitre 4

ESPACES DE DISTRIBUTIONS

Version du 12 juillet 2004

4.1 Une manière d'interpréter la notion de dualité

Exemple physique

Soient F un ensemble de fonctions-test sur un espace métrique X et m une intégrale de Radon sur X , canoniques pour le problème considéré, par exemple un ouvert X de $\mathbb{R}^n$ et l'intégrale de Lebesgue λ . Une fonction m-mesurable f sur X décrivant un certain phénomène est en général connue par l'intermédiaire de moyennes pondérées de f :

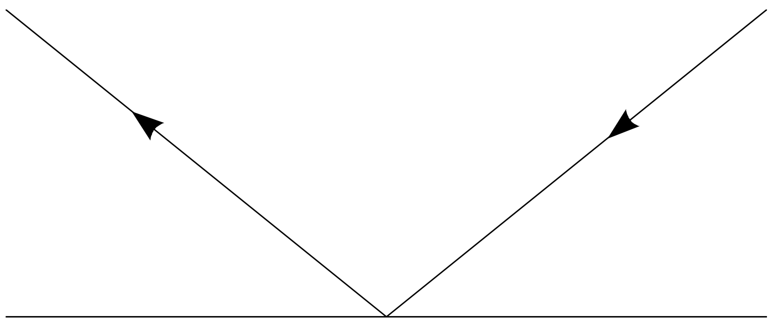
$$\langle \varphi | f \cdot m \rangle := \int \overline{\varphi} \cdot f \, dm \, ;$$

ce sont des "mesures" de f à l'aide des "appareils" φ . La forme semi-linéaire

$$\langle \diamond | f \cdot m \rangle : \varphi \longmapsto \langle \varphi | f \cdot m \rangle \quad ,$$

i.e. l'intégrale de densité f par rapport à m , est donc plus naturelle que la fonction f elle-même.

Ceci va nous conduire à la théorie des distributions. Voici une manière de comprendre la nécessité de leur utilisation, et le rôle tout à fait naturel qu'elles jouent. Considérons une boule de billard et le problème de la réflexion sur une bande :



Admettons que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, il existe un appareil qui, entre les temps a et b , mesure la variation de la seconde coordonné p de l'impulsion. On obtient

$$p(b) - p(a) = \begin{cases} \alpha & \text{si } a \leqslant \tau \leqslant b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour un certain $\alpha > 0$, dépendant de la vitesse et de l'angle d'incidence, et τ le temps du choc. Si ce phénomène est décrit par une fonction force de composante F , la loi de Newton $F = \dot{p}$ entraîne

$$p(b) - p(a) = \int_a^b \dot{p} = \int_a^b F = \int 1_{[a,b]} \cdot F \ .$$

Si F est continue, voire même $F \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, le théorème de Lebesgue montre que

$$\int 1_{[a,b]} \cdot F \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad a \leqslant \tau \leqslant b \text{ et } b - a \longrightarrow 0 \ ,$$

ce qui est absurde. Il n'existe donc pas de fonction force. Par quoi faut-il la remplacer ?

En fait l'expérience nous fournit la correspondance

$$1_{[a,b]} \longmapsto \alpha \cdot 1_{[a,b]}(\tau) \ ,$$

puis

$$\alpha \cdot \varepsilon_\tau : \varphi \longmapsto \alpha \cdot \varphi(\tau) : \mathcal{E}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} \ ,$$

où $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions en escalier sur $\mathbb{R}$. Cela nécessite évidemment une caractérisation convenable d'un appareil par une fonction, dite test, l'addition de deux fonctions s'exprimant par un certain amalgamme des appareils correspondants. Remarquons en outre que dans le cas classique, l'opération de moyenne pondérée de F

$$\varphi \longmapsto \int \varphi \cdot F \ ,$$

est plus proche de la réalité expérimentale, une fonction n'étant connue ponctuellement que par certaines limites de telles moyennes.

Ceci montre qu'il est plus général et plus naturel de considérer des formes linéaires (semi-linéaires si l'on travail sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$) que des fonctions. L'espace vectoriel des fonctions-test peut être de nature très différente suivant les besoins :

$\mathcal{E}(\mathbb{R})$ pour les probabilités (théorie de la mesure)

$\mathcal{K}(\mathbb{R})$ pour l'analyse (théorie de l'intégration)

$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour l'analyse fonctionnelle (théorie des distributions).

Nous allons dans la suite concentrer notre attention sur le dernier cas, la théorie de l'intégration ne suffisant pas. Par exemple en électrodynamique, il est nécessaire de pouvoir dériver les intégrales de Dirac ε_τ pour formaliser la notion de dipôle.

Exemple économique

On interprète F ($= \mathbb{R}^n$) comme un ensemble de *corbeilles (de biens)* qu'un certain fabricant pourrait produire. Le vecteur

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j \cdot e_j$$

désigne la corbeille contenant φ_j du j-ième bien. Le dual F' ($= \mathbb{R}^n$) est interprété comme un ensemble d'*économies* :

$\mu(\varphi)$ est le *prix* de la corbeille φ réalisable dans l'économie μ .

La linéarité de μ traduit bien la manière de payer ! On se donne une *fonction de coût* $f : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$:

$f(\varphi)$ est le *coût de production* de la corbeille φ.

Alors

$$\mu(\varphi) - f(\varphi) \text{ est le } \textit{profit} \text{ fait sur la corbeille } \varphi \text{ dans l'économie } \mu \ ,$$

donc

$$f^{\circ}(\mu) := \sup_{\varphi \in F}\left[\mu(\varphi) - f(\varphi)\right]$$

est le *profit maximum* réalisable dans l'économie μ . Remarquons que dans certains cas il existe une corbeille $\varphi_{\max}$ telle que

$$f^{\circ}(\mu) = \mu(\varphi_{\max}) - f(\varphi_{\max}) \ ,$$

qui engendre donc le profit maximum dans l'économie μ .

Le nombre $\mu(\varphi) - f^{\circ}(\mu)$ est le coût de production "idéal" de la corbeille φ qu'il ne faudrait pas dépasser pour réaliser le profit maximum dans l'économie μ , donc

$$f^{\circ\circ}(\varphi) := \sup_{\mu \in F'}\left[\mu(\varphi) - f^{\circ}(\mu)\right]$$

est le plus grand coût "idéal" de production de la corbeille φ .

Nous avons vu en 3.9 que f° et $f^{\circ\circ}$ sont des fonctions convexes s.c.i.. Si f est convexe et s.c.i. $\neq \infty$, alors le théorème de Fenchel (théorème 3.9) exprime que

$$f = f^{\circ\circ} \ ,$$

donc que le coût de la corbeille φ est égal au coût "idéal" maximal de φ .

4.2 Les intégrales de Radon comme fonctions généralisées

Dans ce paragraphe X désigne un espace localement compact.

DEFINITION 1 Si μ est une intégrale de Radon positive, nous désignerons par $\dot{\mathcal{N}}(\mu)$ l'espace vectoriel des fonctions localement μ-négligeables et nous poserons

$$\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) := \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) / \dot{\mathcal{N}}(\mu) \ ;$$

Remarquons que si $f = g$ localement μ-p.p. , alors $\varphi \cdot f = \varphi \cdot g$ μ-p.p. pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$, puisque $\varphi \cdot f$ et $\varphi \cdot g$ sont μ-modérées (cf. lemme 1.16).

DEFINITION 2 Nous munirons $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ de la topologie localement convexe définie par les semi-normes

$$f \longmapsto \int |\varphi \cdot f| \, d\mu \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{K}(X) \ .$$

Les semi-normes

$$f \longmapsto \int_K |f| \, d\mu \quad \text{pour } K \in \mathfrak{K}(X)$$

forment un système équivalent, car

$$\int |\varphi \cdot f| \, d\mu \leqslant \|\varphi\|_\infty \cdot \int_{\operatorname{supp} \varphi} |f| \, d\mu \ ,$$

et

$$\int_K |f| \, d\mu \leqslant \int |\chi \cdot f| \, d\mu$$

en choisissant $\chi \in \mathcal{K}(X)$ telle que $\chi \geqslant 1_K$.

LEMME *Les applications canoniques*

$$\mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$$

sont continues et d'image dense.

En effet, pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$ et $\varphi \in \mathcal{K}(X, K)$, on a

$$\|\varphi\|_2^2 = \int |\varphi|^2 \, d\mu \leqslant \mu(K) \cdot \|\varphi\|_\infty^2 \ ,$$

ce qui prouve la continuité de la première application. Elle est d'image dense d'après le théorème de densité pour $\mathbf{L}^2(\mu)$ (cf. cours d'Analyse [17], théorème 15.15). Quant à la seconde, elle est injective par le lemme 1.16.iv et continue, car pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ et $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$, on a

$$\int |\varphi \cdot \xi| \, d\mu \leqslant \|\varphi\|_2 \cdot \|\xi\|_2 \ .$$

Pour la densité soit $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$, $K \in \mathfrak{K}(X)$ et $\varepsilon > 0$. On a $1_K \cdot f \in \mathbf{L}^1(1_K \cdot \mu)$ et, puisque $[\mathcal{K}(X)]$ est dense dans $\mathbf{L}^1(\mu)$, il existe $\psi \in \mathcal{K}(X) \subset \mathbf{L}^2(\mu)$ tel que

$$\int_K |\psi - f| \, d\mu = \int |\psi - 1_K \cdot f| \cdot 1_K \, d\mu \leqslant \varepsilon ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Rappelons l'exemple 3.4.8.

THEOREME

(i) Si μ est une intégrale de Radon positive, alors l'application

$$f \longmapsto f \cdot \mu : \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) \longrightarrow \mathcal{M}(X)$$

est injective et continue.

(ii) Si pour tout ouvert $O \neq \emptyset$, on a $\mu(O) > 0$, alors

$$\varphi \longmapsto \varphi \cdot \mu : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(X)$$

est injective, continue et d'image dense.

Dmonstration de (i) Remarquons tout d'abord, en écrivant f comme combinaison linéaire de fonctions positives, que $f \cdot \mu \in \mathcal{M}(X)$. Si $f \cdot \mu = 0$, on a $\int \varphi \cdot f \, d\mu = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$, donc $f = 0$ localement μ-p.p. puisque $\mathcal{K}(X)$ est un espace test (cf. exemple 1.16.2). La continuité découle du lemme 3.7 car on a

$$|\langle \varphi | f \cdot \mu \rangle| \leqslant \int |\varphi \cdot f| \, d\mu .$$

Dmonstration de (ii) $\mathcal{K}(X)$ se plonge injectivement dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ (cf. remarque 1.2.1), donc dans $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$, et par suite dans $\mathcal{M}(X)$ par (i). Cette application est continue par le lemme. Finalement la densité découle du corollaire 3.10.ii car, pour tout $\psi \in \mathcal{K}(X)$, si $\langle \psi | \mathcal{K}(X) \cdot \mu \rangle = \{0\}$, i.e. $\int \overline{\psi} \cdot \varphi \, d\mu = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$, on obtient $\int |\psi|^2 \, d\mu = 0$, donc $\psi = 0$. □

REMARQUE 1 Dans le cas général, on a

$$\mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) \hookrightarrow \mathcal{M}(X) .$$

Il ne faut pas oublier que l'image $[\mathcal{K}(X)]$ de $\mathcal{K}(X)$ dans $\mathcal{M}(X)$ dépend de l'intégrale μ , dite *pivot* , que l'on a choisie. S'il faut préciser, on désigne cette image par $\mathcal{K}(X) \cdot \mu$. On pourrait aussi écrire $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) \cdot \mu$ pour l'image de $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$.

REMARQUE 2 Sous l'hypothèse de (ii), on a

$$\mathcal{K}(X) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$$

et toutes ces applications sont d'image dense.

Puisque $\mathcal{M}(X)$ est séquentiellement complet par le théorème de Banach-Steinhaus (corollaire 3.1) et l'exemple 2.13.2, cet espace est une complétion séquentielle de $\mathcal{K}(X) \cdot \mu$ (ou de $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$) pour la topologie induite par la topologie faible $\sigma(\mathcal{M}(X), \mathcal{K}(X))$ de $\mathcal{M}(X)$. Cela nous permet de dire que les intégrales de Radon sont des *fonctions généralisées* , les fonctions de $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ étant identifiées avec les intégrales de Radon de la forme $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) \cdot \mu$ correspondantes.

Remarquons que l'image de la fonction 1 est $1 \cdot \mu = \mu$, donc μ est la fonction (généralisée) 1 !

EXEMPLE 1 Pour tout $x \in X$, l'intégrale de Dirac ε_x définie par

$$\langle \varphi | \, \varepsilon_x \rangle := \overline{\varphi(x)} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}(X)$$

est une fonction généralisée bien connue des physiciens. On représente souvent ε_x comme la limite dans $\mathcal{M}(X)$ d'une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$; on écrit

$$\varepsilon_x = \lim_k f_k \ ,$$

mais cette limite ne peut pas être représentée par une fonction ! Rappelons que, par définition de la topologie faible sur $\mathcal{M}(X)$, cela signifie que

$$\overline{\varphi(x)} = \langle \varphi | \varepsilon_x \rangle = \lim_k \langle \varphi | f_k \cdot \mu \rangle = \lim_k \int \overline{\varphi} \cdot f_k \, d\mu$$

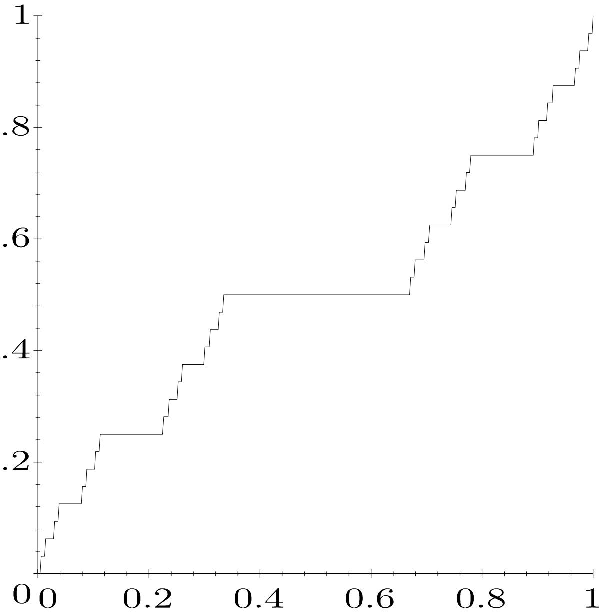
pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$.

EXEMPLE 2 Soit ρ une fonction croissante sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$. Il est clair que

$$\lambda_\rho : \varphi \longmapsto \int \varphi(x) \, d\rho(x)$$

est une forme linéaire positive sur $\mathcal{K}(J)$ (cf. cours d'Analyse [17], exemple 14.6.2). Nous verrons dans les exemples 3 et 4 de 4.4 la correspondance réciproque entre λ_ρ et ρ .

On peut construire une fonction ρ strictement croissante et continue, qui définisse l'intégrale de Hausdorff sur l'ensemble de Cantor. Rappelons que cet ensemble a une mesure de Lebesgue nulle ! Le graphe approximatif de cette fonction est



Comme exemple simple

$$\lambda := \lambda_{\mathrm{id}} : \varphi \longmapsto \int \varphi$$

est l'intégrale de Lebesgue.

On dit, pour $t \in J$, que

$$h_t := 1_{[t,\infty[\cap J}$$

est la *fonction de Heaviside* en t . On a

$$\int \overline{\varphi}\, dh_t = \overline{\varphi(t)} = \langle \varphi | \, \varepsilon_t \rangle \ ,$$

ce qui montre que λ_{h_t} est l'intégrale de Dirac ε_t en t . Par commodité en écrit h et δ pour h_0 et ε_0 .

EXEMPLE 3 Voici encore un espace d'intégrales, donc de fonctions généralisées, que nous rencontrerons. On pose

$$\mathcal{M}^b(X) := \mathcal{C}^0(X)' \ .$$

L'injection canonique $\mathcal{K}(X) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(X)$ est évidemment continue et d'image dense par le théorème de Stone-Weierstraß. Son application adjointe, qui est l'application de restriction

$$\mu \longmapsto \mu_{|\mathcal{K}(X)} : \mathcal{M}^b(X) \longrightarrow \mathcal{M}(X)$$

est aussi injective, continue et d'image dense. On voit immédiatement que toute intégrale de Radon *bornée* , i.e telle que $|\mu|^*(X) < \infty$, définit par

$$\varphi \longmapsto \int \varphi\, d\mu : \mathcal{C}^0(X) \longrightarrow \mathbb{K}$$

une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^0(X)$. On peut montrer que toute forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^0(X)$ est de cette forme (cf. Dieudonné, ibid., XIII.20). On a

$$\|\mu\| = |\mu|(X) \ .$$

Si μ est une intégrale de Radon quelconque sur X et $f \in \mathbf{L}^1(\mu)$, alors $f \cdot \mu \in \mathcal{M}^b(X)$ et

$$\|f \cdot \mu\| = \|f\|_{1,\mu} \ ,$$

ce qui montre que

$$\mathbf{L}^1(\mu) \hookrightarrow \mathcal{M}^b(X)_\beta = \mathcal{C}^0(X)'_\beta$$

est une isométrie et que

$$\mathbf{L}^1(\mu) \hookrightarrow \mathcal{M}^b(X) = \mathcal{C}^0(X)'_\sigma$$

est continue.

4.3 Les distributions

Dans tout les paragraphes qui suivent X désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

DEFINITION On dit qu'une forme linéaire continue μ sur $\mathcal{D}(X)$, i.e. $\mu \in \mathcal{D}(X)'$, est une *distribution* , ou une *fonction généralisée* . Nous considérerons toujours la semi-dualité $\left\langle \mathcal{D}(X) \middle| \mathcal{D}(X)' \right\rangle$ définie par

$$\langle \varphi | \mu \rangle := \langle \overline{\varphi}, \mu \rangle \ .$$

Par définition de la topologie localement convexe finale sur $\mathcal{D}(X)$ (cf. exemple 2.10.3), la proposition 2.10 montre qu'une forme linéaire μ sur $\mathcal{D}(X)$ est une distribution si, et seulement si, pour tout compact $K \subset X$, la restriction de μ à $\mathcal{D}(X, K)$ est continue, ce qui signifie qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$|\langle \varphi | \mu \rangle| \leqslant c \cdot p_{K,k}(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(X, K) \ .$$

THEOREME

(i) L'injection canonique $\mathcal{D}(X) \hookrightarrow \mathcal{K}(X)$ est continue et d'image dense. Son application adjointe, qui est l'application de restriction

$$\mu \longmapsto \mu_{|\mathcal{D}(X)} : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X)' \ ,$$

est aussi injective, continue et d'image dense.

(ii) Il en est de même de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, ainsi que de leur application adjointe

$$\mu \longmapsto \mu_{|\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \quad \textit{et} \quad \xi \longmapsto \xi \cdot \lambda : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

En outre, si l'on prend l'intégrale de Lebesgue λ comme pivot, $\mathcal{D}(X)$ est dense dans $\mathcal{D}(X)'$, de même que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.

Dmonstration de (i) La continuité est immédiate par la proposition 2.10, car pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, l'espace $\mathcal{D}(X, K)$ est continûment plongé dans $\mathcal{K}(X, K)$, la norme $\|\cdot\|_{\infty,K}$ de ce dernier espace étant aussi par restriction une norme sur $\mathcal{D}(X, K)$, et l'injection canonique $\mathcal{K}(X, K) \hookrightarrow \mathcal{K}(X)$ est continue. Quant à la densité, elle découle du théorème de Stone-Weierstraß, puisque $\mathcal{K}(X, K)_{|K^\circ} = \mathcal{C}^0(K^\circ)$ et $\mathcal{D}(X, K)_{|K^\circ}$ est une sous-algèbre involutive séparant fortement les points de K° . Calculons l'adjointe $j^\dagger : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X)'$ de $j : \mathcal{D}(X) \hookrightarrow \mathcal{K}(X)$: pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ et $\mu \in \mathcal{M}(X)$, on a

$$\left\langle \varphi \middle| j^\dagger \mu \right\rangle_{\mathcal{D}(X)} = \langle j\varphi | \mu \rangle_{\mathcal{M}(X)} = \left\langle \varphi \middle| \mu_{|\mathcal{D}(X)} \right\rangle_{\mathcal{D}(X)} \ ,$$

d'où le résultat par le corollaire 3.10.iv.

Dmonstration de (ii) Pour tout $K \in \mathfrak{K}(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, K)$, on a

$$p_k(\varphi) = \max_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^\alpha \varphi \right\|_\infty \leqslant \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \right\|_{\infty,K} \cdot \max_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|_1 \leqslant k} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K} =$$

$$= \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \right\|_{\infty,K} \cdot p_{K,k}(\varphi) \ ,$$

ce qui prouve la continuité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n, K) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, donc celle de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par la proposition 2.10. Pour prouver celle de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$, il suffit de constater que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\|\varphi\|_2^2 = \int \langle \mathrm{id} \rangle^{2k} \cdot |\varphi|^2 \cdot \langle \mathrm{id} \rangle^{-2k} \, d\lambda \leqslant \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \varphi \right\|_\infty^2 \cdot \int^* \langle \mathrm{id} \rangle^{-2k} \, d\lambda \leqslant$$

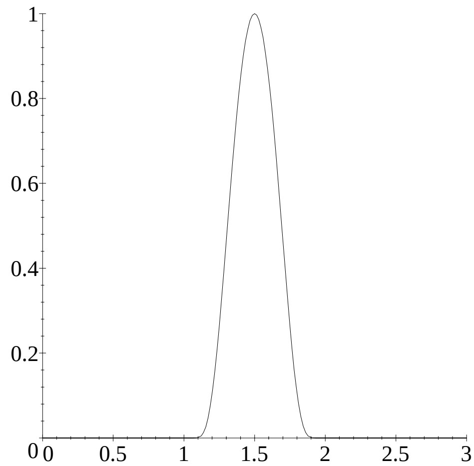
$$\leqslant \left(\int^* \langle \mathrm{id} \rangle^{-2k} \, d\lambda \right) \cdot p_k(\varphi)^2$$

et que

$$\int^* \langle \mathrm{id} \rangle^{-2k} \, d\lambda < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad 2k > \frac{n}{2} \ .$$

Pour la densité considérons tout d'abord la fonction $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ définie par

$$\chi(x) := \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ e^4 \cdot \exp\left(-\frac{1}{(x-1)\cdot(2-x)}\right) \quad \text{si} & 1 < x < 2 \\ 0 & 2 \leqslant x \end{cases} \ .$$



χ

On a

$$\int_1^2 e^4 \cdot \exp\left(-\frac{1}{(x-1)\cdot(2-x)}\right) dx \simeq .38382$$

Définissons alors la fonction $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ par

$$\rho(x) := 1 - \frac{1}{\int_0^\infty \chi \, d\lambda} \cdot \int_0^x \chi \, d\lambda \ .$$

On a

$$\rho(x) \begin{cases} = 1 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \in \left]0,1\right[\quad \text{si} & 1 < x < 2 \\ = 0 & 2 \leqslant x \end{cases} \ .$$

Cette fonction nous permet alors de définir les fonctions $\rho_l \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pour $l \in \mathbb{N}^*$ par

$$\rho_l(x) := \rho\left(\frac{|x|^2}{l}\right) .$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nous allons montrer que $\varphi = \lim_l \rho_l \cdot \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; pour cela estimons

$$p_k(\rho_l \cdot \varphi - \varphi) = \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^\alpha [(\rho_l - 1) \cdot \varphi] \right\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^\beta (\rho_l - 1) \cdot \partial^{\alpha - \beta} \varphi \right\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \right] \cdot \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{k+1} \cdot \partial^\alpha \varphi \right\|_\infty \cdot \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{-1} \cdot \partial^\alpha (\rho_l - 1) \right\|_\infty .$$

Le membre de droite tend vers 0 car on a

$$\left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{-1} \cdot (\rho_l - 1) \right\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\rho\left(\frac{|x|^2}{l}\right) - 1}{1 + |x|^2} \right| = \sup_{y \in \mathbb{R}_+, y \geqslant 1} \left| \frac{\rho(y) - 1}{1 + l \cdot y} \right| \leqslant \frac{1}{l}$$

et

$$\left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{-1} \cdot \partial^\alpha (\rho_l - 1) \right\|_\infty \leqslant \|\partial^\alpha \rho_l\|_\infty \leqslant \frac{cst}{l} \quad \text{pour } |\alpha|_1 \leqslant k \ , \ \alpha \neq 0 \ .$$

En effet par récurrence on obtient

$$\partial^\alpha \rho_l(x) = \sum_{j=0}^{|\alpha|_1} P_j^\alpha(x) \cdot \left(\frac{2}{l}\right)^j \cdot \partial^j \rho\left(\frac{|x|^2}{l}\right) ,$$

où P_j^α sont des polynômes tels que $P_0^0 = 1$, $P_0^\alpha = 0$ si $\alpha \neq 0$, $\deg P_j^\alpha \leqslant 1$ si $j < |\alpha|_1$ et $\deg P_{|\alpha|_1}^\alpha = |\alpha|_1$. Notre assertion est évidemment vraie pour $\alpha = 0$. On a alors

$$\partial^{\alpha + e_k} \rho_l(x) = \partial_k \left(\sum_{j=0}^{|\alpha|_1} P_j^\alpha(x) \cdot \left(\frac{2}{l}\right)^j \cdot \partial^j \rho\left(\frac{|x|^2}{l}\right) \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{|\alpha|_1} \left[\partial_k P_j^\alpha(x) \cdot \left(\frac{2}{l}\right)^j \cdot \partial^j \rho\left(\frac{|x|^2}{l}\right) + P_j^\alpha(x) \cdot \left(\frac{2}{l}\right)^j \cdot \partial^{j+1} \rho\left(\frac{|x|^2}{l}\right) \cdot \frac{2}{l} \cdot x_k \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{|\alpha|_1 + 1} P_j^{\alpha + e_k}(x) \cdot \left(\frac{2}{l}\right)^j \cdot \partial^j \rho\left(\frac{|x|^2}{l}\right)$$

en ayant posé

$$P_j^{\alpha + e_k} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & & j = 0 \\ \partial_k P_j^\alpha + P_{j-1}^\alpha & \text{si} & j = 1, \ldots, |\alpha|_1 \\ x_k \cdot P_j^\alpha & & j = |\alpha|_1 + 1 \end{array} \right. .$$

Ceci finit de prouver la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

La densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ découle de celle de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, qui elle provient de (i) et du lemme 4.2, ou bien directement de l'exemple 1.16.3.

Le calcul de d'adjointe de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se fait comme dans (i). Calculons maintenant celle de $j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\left\langle \varphi \middle| j^\dagger \xi \right\rangle = (j\varphi | \xi) = \int \overline{\varphi} \cdot \xi \, d\lambda = \langle \varphi | \xi \cdot \lambda \rangle \ .$$

Le reste découle du corollaire 3.10.iv. □

REMARQUE Comme $\mathcal{D}(X)'$ est séquentiellement complet par le théorème de Banach-Steinhaus (corollaire 3.1) et l'exemple 2.13.3, cet espace est une complétion séquentielle de $\mathcal{D}(X)$ (ou de $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$). Comme pour les intégrales de Radon, cela justifie le terme de fonctions généralisées. L'importance de cet espace de distributions provient du fait que l'on peut généraliser la notion de dérivée partielle et que toute distribution est indéfiniment dérivable.

Il en est de même de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$. On dit que c'est l'espace des *distributions tempérées* .

Plus généralement si F est un espace test de fonctions par rapport à μ (cf. définition 1.16.2), dont l'injection canonique dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ est continue, par adjonction on obtient le diagramme

$$F \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow F^\dagger \ .$$

Dorénavant nous identifierons une fonction $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$ avec la distribution $f \cdot \lambda \in \mathcal{D}(X)'$ correspondante. Nous écrirons donc simplement f à la place de $f \cdot \lambda$ si aucune confusion n'en résulte.

Soient F et G des espaces localement convexes et $j : F \longrightarrow G$ une application linéaire continue d'image dense. Son application adjointe, qui est l'application de restriction

$$\nu \longmapsto \nu_{|F} : G^\dagger \longrightarrow F^\dagger \ ,$$

est injective. L'un des problèmes fondamentaux, dit de *régularité* , est le suivant : Si $\mu \in F^\dagger$, quand a-t-on $\mu \in G^\dagger$? Plus précisément, quand existe-t-il $\nu \in G^\dagger$ tel que $\mu = \nu_{|F}$? Le problème le plus simple de ce type est de donner des conditions assurant qu'une fonction $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ appartienne à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.

PROPOSITION *Soit $\mu \in F^\dagger$. Pour que $\mu \in G^\dagger$, il faut et il suffit que μ soit continue pour la topologie induite par G sur F .*

La condition est évidemment nécessaire. La réciproque est aussi immédiate par le théorème de Hahn-Banach 3.6. □

EXEMPLE 1 Pour tout $x \in X$, on désigne en général par δ_x la restriction de l'intégrale de Dirac ε_x à $\mathcal{D}(X)$ et on dit que c'est la *distribution de Dirac* en x . Nous ne ferons par contre aucune distinction lorsque nous considérerons une intégrale comme une distribution.

EXEMPLE 2 (Intégrales à croissance modérée) Soit μ une intégrale de Radon sur $\mathbb{R}^n$. S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int^* \langle \mathrm{id} \rangle^{-k} \, d|\mu| < \infty \ ,$$

on dit que μ est *à croissance modérée* et on désigne par $\mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des ces intégrales. On a

$$\mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$|\langle \varphi | \, \mu \rangle| \leqslant \int |\varphi| \, d|\mu| = \int^* \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot |\varphi| \cdot \langle \mathrm{id} \rangle^{-k} \, d|\mu| \leqslant \left(\int^* \langle \mathrm{id} \rangle^{-k} \, d|\mu| \right) \cdot p_k(\varphi) \ ,$$

ce qui prouve que $\mu_{|\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$ est continue pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Dans beaucoup de situations il est nécessaire de connaître le prolongement de $\mu_{|\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$ à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, que nous noterons évidemment par μ . La dernière inégalité ci-dessus est encore valable pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ce qui montre que φ est μ-intégrable et que $\varphi \longmapsto \int \overline{\varphi} \, d\mu$ est une forme semi-linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On en déduit que

$$\langle \varphi | \, \mu \rangle = \int \overline{\varphi} \, d\mu \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ .$$

EXEMPLE 3 (Fonctions à croissance modérée et à croissance lente) Nous désignerons par $\mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions *à croissance modérée* , i.e. l'ensemble des $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\int^* \frac{|f|}{\langle \mathrm{id} \rangle^k} d\lambda < \infty$$

pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et par $\mathbf{L}^1_{\mathrm{len}}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions f *à croissance lente* , i.e. l'ensemble des $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{-l} \cdot f \right\|_\infty < \infty$$

pour un certain $l \in \mathbb{N}$.

(a) On a

$$\mathbf{L}^1_{\mathrm{len}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

En effet

$$\int^* |f| \cdot \langle \mathrm{id} \rangle^{-k} \, d\lambda \leqslant \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{-l} \cdot f \right\|_\infty \cdot \int^* \langle \mathrm{id} \rangle^{l-k} \, d\lambda < \infty$$

en choisissant $k > \frac{n}{2} + l$, ce qui prouve la première inclusion. La deuxième est évidente, puisque $|f \cdot \lambda| = |f| \cdot \lambda$ et la troisième découle de l'exemple 2. $\square$

(b) On a

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{len}}(\mathbb{R}^n) \ ,$$

où $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}^n$. Plus généralement, toute fonction majorée par un polynôme est à croissance lente et réciproquement.

(c) Pour tout $p \in [1, \infty]$, on a

$$\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \ .$$

Si $f \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\int^* |f| \cdot \langle \mathrm{id} \rangle^{-k} \, d\lambda \leqslant \|f\|_p \cdot \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{-k} \right\|_q < \infty$$

en choisissant $k > \frac{n}{2q}$. $\square$

REMARQUE On a donc des injections canoniques d'image dense

$$\mathcal{D}(X) \hookrightarrow \mathcal{K}(X) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(X) \hookrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X) \hookrightarrow \mathcal{M}(X) \hookrightarrow \mathcal{D}(X)' \ ,$$

ainsi que

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \arrow[dr, phantom, "\subset"] & & & & \\
& \mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \arrow[dr, phantom, "\subset"] & & & \\
& \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \arrow[dr, hook] & & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \arrow[dr, hook] & \\
\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \\
& \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \arrow[ur, hook] & & \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \arrow[ur, hook] & \\
& & \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \arrow[ur, phantom, "\subset"] & &
\end{tikzcd}$$

EXEMPLE 4 Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^n$, nous poserons

$$e_\lambda(x) := e^{2\pi i \cdot \langle \lambda | x \rangle} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \ ,$$

où

$$\langle \lambda | x \rangle := \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_j} \cdot x_j \ .$$

On a $e^{2\pi i \cdot \langle \lambda | x \rangle} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, car

$$\left| e^{2\pi i \cdot \langle \lambda | \mathrm{id} \rangle} \right| = e^{2\pi \cdot \langle \mathrm{Im}\, \lambda | \mathrm{id} \rangle} \ .$$

Plus généralement on montre, comme dans l'exercice 1ci-dessous, que $e^{2\pi i \cdot \langle \lambda | \mathrm{id} \rangle} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^n$ et que $e^{2\pi i \cdot \langle \lambda | \mathrm{id} \rangle} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ si, et seulement si, $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

EXERCICE 1 On a évidemment $\exp \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$, mais $\exp \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})'$.

On le démontre en utilisant la méthode de la bosse glissante. Il suffit de choisir un $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset [0,1]$ et de considérer la suite $(\varphi(\diamond - l))_{l \in \mathbb{N}}$.

EXERCICE 2 On a évidemment $\exp \cdot \cos(\exp) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$, mais aussi

$$\exp \cdot \cos(\exp) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})' \ .$$

Mais attention, l'expression de $\langle \varphi | \exp \cdot \cos(\exp) \rangle$ pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ n'est pas celle que l'on espère.

On intègre par partie, ce qui revient à utiliser les idées du numéro suivant.

EXERCICE 3 (Suite de Dirac) Soit $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ tel que $\int f \, d\lambda = 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$, on définit la fonction $f_{x,\varepsilon}$ sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f_{x,\varepsilon}(y) := \frac{1}{\varepsilon^n} \cdot f\left(\frac{y - x}{\varepsilon}\right) .$$

Montrer que, pour toute fonction $g \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ continue en x , on a

$$g(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int g \cdot f_{x,\varepsilon} \, d\lambda .$$

En particulier

$$\delta_x = \lim_{\varepsilon \to 0} f_{x,\varepsilon} \quad \text{dans } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \text{ et } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' .$$

On dit que $(f_{x,\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ est une *suite de Dirac* .

EXERCICE 4 Construire une fonction $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}) \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R})$ mais telle que $\left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{-l} \cdot f \right\|_\infty = \infty$ pour tout $l \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 5 Montrer que si $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ et $\langle \varphi | \mu \rangle \geqslant 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^n)$, alors $\mu \in \mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$.

Utiliser les fonctions ρ_l qui ont été introduites dans la démonstration du théorème 3.3.ii.

4.4 Dérivation

Si $f \in \mathcal{C}^{(1)}(X)$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, on peut choisir une partition de l'unité $(\rho_l)_{l \in \mathbb{N}}$ indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^n$, associée au réseau de maille $\varepsilon := \frac{1}{2} \cdot d\left(\operatorname{supp} \varphi, \complement X\right)$ (cf. cours d'Analyse [17] 17.4). On a alors

$$\langle \varphi | \partial f_j \cdot \lambda \rangle = \int \overline{\sum_l \rho_l \cdot \varphi} \cdot \partial_j f \, d\lambda = \sum_l \int \overline{\rho_l \cdot \varphi} \cdot \partial_j f \, d\lambda = -\sum_l \int \overline{\partial_j (\rho_l \cdot \varphi)} \cdot f \, d\lambda =$$

$$= -\int \overline{\partial_j \left[\left(\sum_l \rho_l \right) \cdot \varphi \right]} \cdot f \, d\lambda = -\langle \partial_j \varphi | f \cdot \lambda \rangle$$

en ayant utilisé le théorème de Fubini et la formule d'intégration par partie.

LEMME *L'application linéaire*

$$\partial_j : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X) : \varphi \longmapsto \partial_j \varphi$$

est continue. En particulier, si $\mu \in \mathcal{D}(X)'$ est une distribution, alors la forme semi-linéaire

$$|\mu\rangle \circ \partial_j : \varphi \longmapsto \langle \partial_j \varphi | \mu \rangle$$

est continue.

En effet, pour tout $K \in \mathfrak{K}(\mathbb{X})$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$p_{K,k}(\partial_j \varphi) = \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \|\partial^\alpha \partial_j \varphi\|_{\infty,K} \leqslant p_{K,k+1}(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(X, K) \ .$$

Ceci montre que

$$\partial_j : \mathcal{D}(X, K) \longrightarrow \mathcal{D}(X, K) \hookrightarrow \mathcal{D}(X)$$

est continue, d'où notre assertion par la proposition 2.10. □

Ceci nous conduit à poser la

DEFINITION Pour tout $\mu \in \mathcal{D}(X)'$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit une distribution

$$|\partial_j \mu\rangle := -|\mu\rangle \circ \partial_j \in \mathcal{D}(X)' \ ,$$

ce qui revient à poser

$$\langle \varphi | \partial_j \mu \rangle := -\langle \partial_j \varphi | \mu \rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(X) \ .$$

On dit que c'est la *j-ième dérivée partielle* de μ (au sens des distributions). Plus généralement, si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on définit la distribution $\partial^\alpha \mu \in \mathcal{D}(X)'$ par

$$\partial^\alpha \mu := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \ldots \partial_n^{\alpha_n} \mu \ .$$

On a

$$\langle \varphi | \partial^\alpha \mu \rangle := (-1)^{|\alpha|_1} \langle \partial^\alpha \varphi | \mu \rangle \ .$$

REMARQUE 1 Le calcul du début montre par récurrence que si $f \in \mathcal{C}^{(k)}(X)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha|_1 \leqslant k$, la dérivée ∂^α au sens des distributions de f coïncide avec la dérivée classique $\partial^\alpha f$, i.e.

$$\partial^\alpha (f \cdot \lambda) = \partial^\alpha f \cdot \lambda \ .$$

Ceci justifie l'identification de $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$ avec la fonction généralisée $f \cdot \lambda$.

REMARQUE 2 Le lemme montre que $\partial^\alpha : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X) : \varphi \longmapsto \partial^\alpha \varphi$ est continue. La définition peut être formulée à l'aide de l'adjonction. On a

$$\partial^{\alpha\dagger} = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \partial^\alpha : \mathcal{D}(X)' \longrightarrow \mathcal{D}(X)' : \mu \longmapsto (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \partial^\alpha \mu \ .$$

Si l'on pose $\not\partial_j := \frac{1}{2\pi i} \cdot \partial_j$, donc $\not\partial^\alpha = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{|\alpha|_1} \cdot \partial^\alpha$, on a

$$\not\partial^{\alpha\dagger} = \not\partial^\alpha \ ,$$

en considérant les applications $\not\partial^\alpha$ dans les bons espaces. Ceci montre en particulier que $\partial^\alpha : \mathcal{D}(X)' \longrightarrow \mathcal{D}(X)'$ est continue.

On dit que $\not\partial^\alpha$ est *formellement auto-adjoint* car $\not\partial^{\alpha\dagger}$ est un prolongement de $\not\partial^\alpha$:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{D}(X) & \hookrightarrow & \mathcal{D}(X)' & \\ \not\partial^\alpha = \not\partial^{\alpha\dagger} & \downarrow & & \downarrow & \not\partial^\alpha = \not\partial^{\alpha\dagger} \\ & \mathcal{D}(X) & \hookrightarrow & \mathcal{D}(X)' & \end{array} \ .$$

Nous reviendrons plus tard sur cette notion (cf. définition 7.3).

Un des problèmes de base consiste à étudier les espaces $\not\partial^\alpha (\mathbf{L}^2(X))$ et surtout

$$(\not\partial^\alpha)^{-1} \left(\mathbf{L}^2(X)\right) \cap \mathbf{L}^2(X) \ .$$

Faisons quelques calcules dans l'espace des distributions sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE 1 Calculons

$$\langle \varphi | \partial |\mathrm{id}| \rangle = -\langle \partial\varphi | |\mathrm{id}| \rangle = -\int \overline{\partial\varphi(x)} \cdot |x| \, dx = \int_{-\infty}^0 \overline{\partial\varphi(x)} \cdot x \, dx - \int_0^\infty \overline{\partial\varphi(x)} \cdot x \, dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^0 \overline{\varphi(x)} \, dx + \int_0^\infty \overline{\varphi(x)} \, dx = \int \overline{\varphi(x)} \cdot \mathrm{signum}(x) \, dx = \langle \varphi | \mathrm{signum} \rangle \ .$$

Ceci montre que

$$\partial |\mathrm{id}| = \mathrm{signum} \ .$$

EXEMPLE 2 De même, on a

$$\langle \varphi | \partial \mathrm{signum} \rangle = -\langle \partial\varphi | \mathrm{signum} \rangle = \int_{-\infty}^0 \overline{\partial\varphi(x)} \, dx - \int_0^\infty \overline{\partial\varphi(x)} \, dx = \overline{\varphi(0)} + \overline{\varphi(0)} = \langle \varphi | 2\delta \rangle \ ,$$

ce qui montre que

$$\partial \mathrm{signum} = 2\delta \ .$$

Avec un calcul analogue on obtient

$$\partial h_t = \delta_t \ .$$

Plus généralement :

EXEMPLE 3 Soit F une fonction absolument continue sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ (cf. cours d'Analyse [17], définition 15.19.3). Rappelons qu'il existe une unique fonction $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ telle que, pour tout $\tau \in J$, on ait

$$F = F(\tau) + \int_\tau^{\cdot} f \ .$$

Alors la dérivée (au sens des distributions) ∂F de F est f , donc coïncide avec la notion de dérivée d'une fonction absolument continue.

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(J)$, il existe $a, b \in J$ tels que $\operatorname{supp}\varphi \subset \left]a, b\right[$ et en intégrant par parties (cf. cours d'Analyse [17], théorème 16.4), on obtient

$$\langle \varphi | \, \partial F \rangle = -\int_a^b \overline{\partial\varphi} \cdot F = -\overline{\varphi} \cdot F|_a^b + \int_a^b \overline{\varphi} \cdot f = \langle \varphi | \, f \rangle \ .$$

□

EXEMPLE 4 Soit ρ une fonction croissante sur J . Etant donné $\varphi \in \mathcal{D}(J)$ et (x_j) une subdivision de son support, il existe $y_j \in [x_j, x_{j+1}]$ tel que

$$\partial\varphi(y_j) = \frac{\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j)}{x_{j+1} - x_j} \ .$$

Par le théorème de Lebesgue, il vient alors

$$\langle \varphi | \, \partial\rho \rangle = -\langle \partial\varphi | \, \rho \rangle = -\int \overline{\partial\varphi} \cdot \rho \, d\lambda = -\int \overline{\partial\varphi(x)} \cdot \rho(x-) \ dx =$$

$$= -\lim \sum \overline{\partial\varphi(y_j)} \cdot \rho(x_j-) \cdot (x_{j+1} - x_j) = -\lim \sum \overline{[\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j)]} \cdot \rho(x_j-) =$$

$$= -\lim \left[\sum \overline{\varphi(x_j)} \cdot \rho(x_{j-1}-) - \sum \overline{\varphi(x_j)} \cdot \rho(x_j-) \right] = \lim \sum \overline{\varphi(x_j)} \left[\rho(x_j-) - \rho(x_{j-1}-) \right] =$$

$$= \int \overline{\varphi} \, d\rho = \langle \varphi | \, \lambda_\rho \rangle \ ,$$

car $\sum \overline{\partial\varphi(y_j)} \cdot 1_{[x_j, x_{j+1}[}$ converge ponctuellement vers $\overline{\partial\varphi}$ et $\sum \cdot\rho(x_j-) \cdot 1_{[x_j, x_{j+1}[}$ vers $\rho(\diamond-)$. Ainsi

$$\partial\rho = \lambda_\rho \ .$$

REMARQUE 3 Avant la théorie des distributions, les électrotechniciens et les physiciens ont "résolu" le problème du choc d'une boule de billard en introduisant un nouvel objet δ , dite *fonction de Dirac* , ayant les propriétés suivantes :

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \neq 0 \quad \text{et} \quad \delta(0) = \infty \ ,$$

mais telle que

$$\int \delta(x) \ dx = 1 \, !$$

On en "déduisait" que

$$h(x) = \int_{-\infty}^{t} \delta(x)\ dx \quad \text{, i.e.} \quad \partial h = \delta \ ,$$

puis que

$$\int \varphi(x) \cdot \delta(x)\ dx = \Big[\varphi(x) \cdot h(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int \partial\varphi(x) \cdot h(x)\ dx = -\int_0^{\infty} \partial\varphi(x)\ dx = \varphi(0) \ .$$

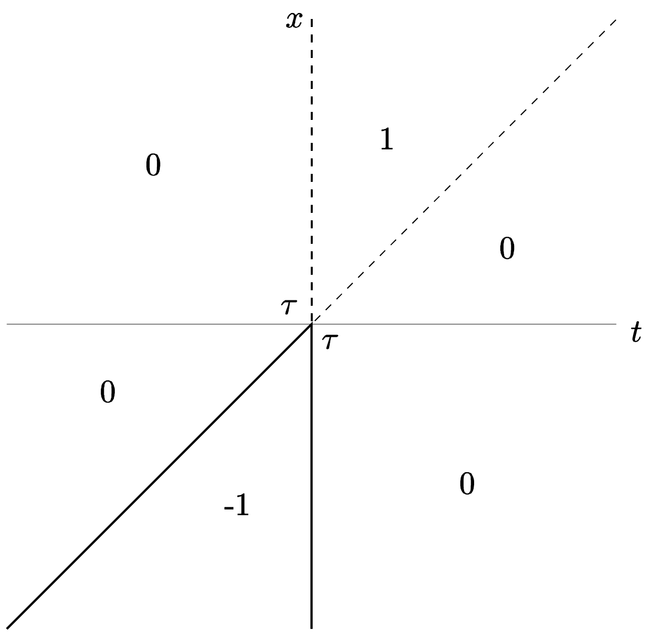
Ces calculs sont analogues à ceux que nous avons faits ci-dessus, à la seule différence que les objets avec lesquels nous travaillons sont maintenant mathématiquement bien définis.

EXEMPLE 5 Soient J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\tau \in J$ et $\rho : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante (continue à gauche) telle que $\rho(\tau+) = 0$ (cf. exemple 4.2.2). Considérons l'application

$$\chi : J \longrightarrow \mathcal{M}(J) : t \longmapsto \chi(t, \cdot)$$

définie par

$$\chi(t, \cdot) = \begin{cases} 1_{]t,\infty[\cap J} & \text{si} \quad \tau < t \\ -1_{]-\infty,t]\cap J} & \phantom{\text{si}} \quad t \leqslant \tau \end{cases} \qquad \text{pour tout } t \in J \ .$$



Montrons que l'application χ est λ_ρ-intégrable dans $\mathcal{M}(J)$. Remarquons tout d'abord que

$$\chi(\cdot, x) = \begin{cases} 1_{]\tau,x[} & \text{si} \quad \tau < x \\ -1_{[x,\tau]} & \phantom{\text{si}} \quad x \leqslant \tau \end{cases} \qquad \text{pour tout } x \in J \ ,$$

donc pour tout $a, b \in J$ tels que $a \leqslant \tau \leqslant b$ et $x \in [a, b]$, on a

$$|\chi(t, x)| \leqslant 1_{[a,b]}(t) \ .$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(J, [a, b])$, il vient alors

$$|\langle \varphi | \chi(t, \cdot) \rangle| \leqslant \int |\varphi(x)| \cdot |\chi(t, x)|\ dx \leqslant 1_{[a,b]}(t) \cdot (b-a) \cdot \|\varphi\|_{\infty,[a,b]} \leqslant (b-a) \cdot \|\varphi\|_\infty \ ,$$

ce qui montre que χ est scalairement λ_ρ-intégrable et (faiblement) bornée dans $\mathcal{M}(J)$. Nous pouvons donc appliquer le théorème 3.12.ii.

Puisque

$$|\varphi(x)| \cdot |\chi(t,x)| \leqslant 1_{[a,b]}(x) \cdot 1_{[a,b]}(t) \cdot \|\varphi\|_\infty \ ,$$

nous pouvons appliquer le théorème de Fubini et nous obtenons finalement

$$\int \langle \varphi | \chi(t,\cdot)\rangle \, d\lambda_\rho(t) = \int \left(\int \overline{\varphi(x)} \cdot \chi(t,x) \, dx\right) d\lambda_\rho(t) =$$

$$= \int \overline{\varphi(x)} \cdot \left(\int \chi(t,x) \, d\lambda_\rho(t)\right) dx = \int \overline{\varphi(x)} \cdot [\rho(x-) - \rho(\tau+)] \, dx =$$

$$= \int \overline{\varphi(x)} \cdot \rho(x) \, dx = \langle \varphi | \rho\rangle \ ,$$

ce qui prouve que

$$\int \chi(t,\cdot) \, d\lambda_\rho(t) = \rho \quad \text{dans } \mathcal{M}(J) \ .$$

L'injection canonique $j : \mathcal{M}(J) \hookrightarrow \mathcal{D}(J)'$ étant continue, les applications $\delta_\diamond = j \circ \varepsilon$ et $\chi := j \circ \chi$ sont aussi λ_ρ-intégrables dans $\mathcal{D}(J)'$ (cf. 3.12, lemme (iii) et exemple 2). Comme $\partial : \mathcal{D}(J)' \longrightarrow \mathcal{D}(J)'$ est continue, on en déduit que

$$\partial\rho = \partial\left(\int \chi(t,\cdot) \, d\lambda_\rho(t)\right) = \int \partial_x \chi(t,\cdot) \, d\lambda_\rho(t) = \int \delta_t \, d\lambda_\rho(t) = \lambda_\rho \ .$$

Nous avons redémontré le résultat de l'exemple 3 ci-dessus.

EXERCICE Soient J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\nu \in \mathcal{D}(J)'$. Montrer que l'équation différentielle $\partial\mu = \nu$ possède dans $\mathcal{D}(J)'$ une unique solution à une constante additive près.

Décomposer $\mathcal{D}(J)$ à l'aide de la forme linéaire λ_J , montrer que $\partial : \mathcal{D}(J) \longrightarrow \operatorname{Ker} \lambda_J$ est bijective et calculer $\overset{-1}{\partial}$.

4.5 Multiplication

Soient $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$ et $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$. On a $M_g f := g \cdot f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$ et, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, on a

$$\langle \varphi | \, g \cdot f \rangle = \int \overline{\varphi} \cdot g \cdot f \, d\lambda = \langle \overline{g} \cdot \varphi | \, f \rangle \ ,$$

puisque $g \cdot \varphi \in \mathcal{D}(X)$.

LEMME *L'application bilinéaire*

$$\mathcal{C}^{(\infty)}(X) \times \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X) : (g, \varphi) \longmapsto g \cdot \varphi$$

est séparément continue. En particulier, si $\mu \in \mathcal{D}(X)'$ est une distribution, alors la forme semi-linéaire

$$|\mu\rangle \circ M_{\overline{g}} : \varphi \longmapsto \langle \overline{g} \cdot \varphi | \, \mu \rangle$$

est continue.

Etant donné $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$, $K \in \mathfrak{K}(X)$, $k \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(X, K)$, on a

$$p_{K,k}(g \cdot \varphi) = \max\nolimits_{|\alpha|_1 \leqslant k} \|\partial^\alpha (g \cdot \varphi)\|_{\infty,K} \leqslant \max\nolimits_{|\alpha|_1 \leqslant k} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \left\|\partial^\beta g \cdot \partial^{\alpha-\beta} \varphi\right\|_{\infty,K} \leqslant$$

$$\leqslant \max\nolimits_{|\alpha|_1 \leqslant k} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \left\|\partial^\beta g\right\|_{\infty,K} \cdot \left\|\partial^{\alpha-\beta} \varphi\right\|_{\infty,K} \leqslant c_k \cdot p_{K,k}(g) \cdot p_{K,k}(\varphi) \ ,$$

ce qui montre d'une part la continuité de

$$M_g : \mathcal{D}(X, K) \longrightarrow \mathcal{D}(X, K) \hookrightarrow \mathcal{D}(X) \ ,$$

d'où la continuité de $M_g : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X)$ par la proposition 2.10, et d'autre part celle de

$$\diamond \cdot \varphi : \mathcal{C}^{(\infty)}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X, K) \hookrightarrow \mathcal{D}(X) \ .$$

□

Ceci nous conduit à poser la

DEFINITION Pour tout $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$ et $\mu \in \mathcal{D}(X)'$, on définit une distribution

$$|M_g \mu\rangle := |g \cdot \mu\rangle := |\mu\rangle \circ M_{\overline{g}} \in \mathcal{D}(X)' \ ,$$

ce qui revient à poser

$$\langle \varphi | \, g \cdot \mu \rangle := \langle \overline{g} \cdot \varphi | \, \mu \rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(X) \ .$$

On dit que c'est la *distribution produit* de g et μ .

REMARQUE 1 Le calcul du début montre que, pour tout $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$, on a

$$g \cdot (f \cdot \lambda) = (g \cdot f) \cdot \lambda \ ,$$

i.e. la multiplication de de f par g au sens des distributions coïncide avec ce produit au sens classique des fonctions.

REMARQUE 2 La définition signifie que

$$M_{\bar{g}}^{\dagger} = M_g : \mathcal{D}(X)' \longrightarrow \mathcal{D}(X)' : \mu \longmapsto g \cdot \mu \ .$$

Ceci montre en particulier que $M_g : \mathcal{D}(X)' \longrightarrow \mathcal{D}(X)'$ est continue.

Remarquons que M_g est formellement auto-adjoint si, et seulement si, g est réelle.

EXEMPLE 1 Pour tout $x \in X$, on a

$$g \cdot \delta_x = g(x) \cdot \delta_x \ .$$

En particulier, $\mathrm{id} \cdot \delta = 0$. Si l'on utilise, comme les physiciens, les fonctions de Dirac de variable t , on a

$$g(t) \cdot \delta(t-x) = g(x) \cdot \delta(t-x) \ .$$

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, il vient

$$\langle \varphi | \, g \cdot \delta_x \rangle = \langle \bar{g} \cdot \varphi | \, \delta_x \rangle = g(x) \cdot \overline{\varphi(x)} = g(x) \cdot \langle \varphi | \, \delta_x \rangle = \langle \varphi | \, g(x) \cdot \delta_x \rangle \ .$$

□

EXEMPLE 2 Pour tout $\mu \in \mathcal{M}(X)$, la distribution $g \cdot \mu$ coïncide avec l'intégrale de densité g par rappport à μ .

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, on a

$$\langle \varphi | \, g \cdot \mu \rangle = \langle \bar{g} \cdot \varphi | \, \mu \rangle = \int g \cdot \overline{\varphi} \, d\mu = \int \overline{\varphi} \, d(g \cdot \mu) \ .$$

Le résultat en découle, puisque l'intégrale $g \cdot \mu$ est univoquement déterminée par sa restriction à $\mathcal{D}(X)$. □

PROPOSITION *On a*

$$\partial_j (g \cdot \mu) = \partial_j g \cdot \mu + g \cdot \partial_j \mu \ .$$

Plus généralement on a la formule de Leibniz

$$\partial^\alpha (g \cdot \mu) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \partial^\beta g \cdot \partial^{\alpha - \beta} \mu \ .$$

En effet

$$\langle \varphi | \, \partial_j g \cdot \mu + g \cdot \partial_j \mu \rangle = \left\langle \overline{\partial_j g} \cdot \varphi \middle| \, \mu \right\rangle + \langle \overline{g} \cdot \varphi | \, \partial_j \mu \rangle = \langle \partial_j \overline{g} \cdot \varphi | \, \mu \rangle - \langle \partial_j (\overline{g} \cdot \varphi) | \, \mu \rangle =$$

$$= - \langle \overline{g} \cdot \partial_j \varphi | \, \mu \rangle = - \langle \partial_j \varphi | \, g \cdot \mu \rangle = \langle \varphi | \, \partial_j (g \cdot \mu) \rangle \ .$$

La formule de Leibniz en découle par récurrence. □

EXEMPLE 3 Pour tout $x \in X$, on a

$$g \cdot \partial_j \delta_x = g(x) \cdot \partial_j \delta_x - \partial_j g(x) \cdot \delta_x \ .$$

En particulier $\mathrm{id} \cdot \partial \delta = -\delta$ sur $\mathbb{R}$.

En effet

$$g(x) \cdot \partial_j \delta_x = \partial_j (g(x) \cdot \delta) = \partial_j (g \cdot \delta_x) = \partial_j g \cdot \delta_x + g \cdot \partial_j \delta_x = \partial_j g(x) \cdot \delta(x) + g \cdot \partial_j \delta_x \ ,$$

d'où le résultat. □

Le physicien écrira

$$g(t) \cdot \partial_t \delta(t-x) = g(x) \cdot \partial_t \delta(t-x) - \partial g(x) \cdot \delta(t-x) \ .$$

4.6 Translation

DEFINITION 1 Si f est une fonction sur $\mathbb{R}^n$, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on définit la *fonction translatée* $T_y f = f_y$ par

$$f_y(x) := f(x-y) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \ .$$

Si $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \varphi | f_y \rangle = \int \overline{\varphi(x)} \cdot f(x-y)\, dx = \int \overline{\varphi(x+y)} \cdot f(x)\, dx = \left\langle \varphi_{-y} \middle| f \right\rangle \ .$$

LEMME *L'application*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : (\varphi, y) \longmapsto \varphi_y$$

est linéaire en la première variable et séparément continue. En particulier, si $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ *est une distribution sur* $\mathbb{R}^n$ *, alors la forme semi-linéaire*

$$|\mu\rangle \circ T_{-y} : \varphi \longmapsto \left\langle \varphi_{-y} \middle| \mu \right\rangle$$

est continue.

Pour tout $K \in \mathfrak{K}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, K)$ et $y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\operatorname{supp} \varphi_y = \operatorname{supp} \varphi + y \subset K + y$$

et

$$p_{K+y,k}\left(\varphi_y\right) = \max\nolimits_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \partial^\alpha \varphi_y \right\|_{\infty, K+y} = \max\nolimits_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \partial^\alpha \varphi \right\|_{\infty, K} = p_{K,k}(\varphi) \ ,$$

ce qui montre la continuité de

$$T_y : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, K) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, K+y) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ ,$$

donc aussi celle de $T_y : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ par la proposition 2.10.

Etant donné $z \in \mathbb{R}^n$, on a

$$T_z \varphi - T_y \varphi = T_{z-y}(T_y \varphi) - T_y \varphi \, ;$$

il suffit donc de prouver la continuité de

$$y \longmapsto \varphi_y : B(0,1) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, K + B(0,1)) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

en 0 . Mais si $y \in B(0,1)$, il vient

$$p_{K+B(0,1),k}\left(\varphi_y - \varphi\right) = \max\nolimits_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \partial^\alpha \left(\varphi_y - \varphi\right) \right\|_{\infty, K+B(0,1)} =$$

$$= \max\nolimits_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| (\partial^\alpha \varphi)_y - \partial^\alpha \varphi \right\|_{\infty, K+B(0,1)} \ .$$

Utilisant la continuité uniforme de chaque fonction $\partial^\alpha \varphi$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que l'on ait

$$\left| \left[(\partial^\alpha \varphi)_y - \partial^\alpha \varphi \right](z) \right| = \left| \partial^\alpha \varphi(z-y) - \partial^\alpha \varphi(z) \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{si } |y| \leqslant \delta \text{ et } |\alpha|_1 \leqslant k \ .$$

On a alors

$$p_{K+B(0,1),k}\left(\varphi_y-\varphi\right)\leqslant\varepsilon\quad\text{si }\ |y|\leqslant\delta\ .$$

□

Ceci nous conduit à poser la

DEFINITION 2 Pour tout $y\in\mathbb{R}^n$ et $\mu\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$, on définit une distribution

$$|T_y\mu\rangle:=\left|\mu_y\right\rangle:=|\mu\rangle\circ T_{-y}\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'\ ,$$

ce qui revient à poser

$$\left\langle\varphi\right|\mu_y\rangle:=\left\langle\varphi_{-y}\right|\mu\rangle\ .$$

On dit que c'est la *distribution translatée* de μ par y .

REMARQUE 1 Le calcul ci-dessus montre que

$$(f\cdot\lambda)_y=f_y\cdot\lambda\ .$$

Il est évident que h_t et δ_t sont les translatées de h et δ .

REMARQUE 2 La définition signifie que

$$T_{-y}^{\dagger}=T_y:\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'\longrightarrow\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)':\mu\longmapsto\mu_y\ .$$

Ceci prouve en particulier que $T_y:\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'\longrightarrow\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ est continue.

REMARQUE 3 L'invariance par translation de l'intégrale de Lebesgue montre que

$$T_y:\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

est un opérateur unitaire, i.e.

$$T_y^*=T_{-y}=\overset{-1}{T_y}\ .$$

REMARQUE 4 Si $\mu\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, alors $\mu_y\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ et, pour toute fonction f sur $\mathbb{R}^n$, on a $f\in\mathbf{L}^1\left(\mu_y\right)$ si, et seulement si, $f_{-y}\in\mathbf{L}^1(\mu)$. Dans ce cas on a

$$\int f\,d\mu_y=\int f_{-y}\,d\mu\ .$$

On se souvient facilement de cette formule en l'écrivant sous la forme

$$\int f(x)\,d\mu_y(x)=\int f(x)\,d\mu(x-y)=\int f(x+y)\,d\mu(x)=\int f_{-y}(x)\,d\mu(x)\ .$$

Il suffit de constater, de manière analogue à ce que nous venons de faire, que

$$\varphi\longmapsto\varphi_y:\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$$

est continue, puis de montrer que, pour toute fonction $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$, on a

$$\int^* f\,d\mu_y=\int^* f_{-y}\,d\mu\ .$$

□

PROPOSITION

(i) *Pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *, l'application*

$$y \longmapsto \varphi_y : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

est partiellement dérivable en 0 *et, pour tout* $j = 1, \ldots, n$ *, on a*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\varphi_{-h\cdot e_j} - \varphi\right] = \partial_j \varphi \quad \textit{dans } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ .$$

(ii) *Pour tout* $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ *, on a*

$$\partial_j \mu = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\mu_{-h\cdot e_j} - \mu\right] \quad \textit{dans } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

Dmonstration de (i) En posant $K := \operatorname{supp}\varphi + B_\infty(0,1)$, pour tout $h \in [-1,1]$, on a $\frac{1}{h} \cdot \left[\varphi_{-h\cdot e_j} - \varphi\right] \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, K)$. En utilisant la seconde inégalité de la moyenne (cf. cours d'Analyse [17], proposition 11.2.ii), pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $h \in [-\delta, \delta]$, on obtient

$$p_{K,k}\left(\frac{1}{h} \cdot \left[\varphi_{-h\cdot e_j} - \varphi\right] - \partial_j\varphi\right) =$$

$$= \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \sup_{x\in K} \left|\frac{1}{h} \cdot \left[\partial^\alpha \varphi_{-h\cdot e_j}(x) - \partial^\alpha \varphi(x)\right] - \partial^\alpha \partial_j \varphi(x)\right| =$$

$$= \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \sup_{x\in K} \left|\frac{1}{h} \cdot \left[\partial^\alpha \varphi(x + h\cdot e_j) - \partial^\alpha \varphi(x)\right] - \partial_j \partial^\alpha \varphi(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \sup_{x\in K} \sup_{h\in[-\delta,\delta]} \left|\partial^\alpha \varphi(x + h\cdot e_j) - \partial^\alpha \varphi(x)\right|$$

et le membre de droite tend vers 0 par la continuité uniforme des fonctions $\partial^\alpha\varphi$.

Dmonstration de (ii) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, il vient

$$\langle \varphi | \, \partial_j \mu \rangle = -\langle \partial_j \varphi | \, \mu \rangle = -\left\langle \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\varphi_{-h\cdot e_j} - \varphi\right] \middle| \, \mu \right\rangle = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left\langle \left[\varphi_{h\cdot e_j} - \varphi\right] \middle| \, \mu \right\rangle =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left\langle \varphi \middle| \mu_{-h\cdot e_j} - \mu \right\rangle = \lim_{h\to 0} \left\langle \varphi \middle| \frac{1}{h} \cdot \left[\mu_{-h\cdot e_j} - \mu\right] \right\rangle \ .$$

□

4.7 Dilatation

REMARQUE Les systèmes de semi-normes $(p_{K,k})_{k\in\mathbb{N},K\in\mathfrak{K}(X)}$, $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(p_{K,k|\mathcal{D}(X,K)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, que nous avons introduits dans les exemples 5 et 6 de 2.1, 5 et 6 de 2.3 et 3 de 2.10, ne sont pas très pratiques lorsqu'il est nécessaire d'utiliser la formule de dérivation des fonctions composées. Nous allons construire d'autres systèmes de semi-normes équivalents.

Soient X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction k-fois (totalement) dérivable (cf. cours d'Analyse [17], 11.5). On a

$$Df : X \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad \text{et} \quad D^2 f : X \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \ .$$

Comme en 3.13, on voit facilement que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ est isomorphe à l'espace vectoriel des applications bilinéaires $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ définies sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Pour tout $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, on a

$$D^2 f(x)(v_1, v_2) = \left[D^2 f(x) v_1\right] v_2 = \left((\partial_{l_2}\partial_{l_1} f(x))_{l_1=1,\ldots,n} v_1\right)_{l_2=1,\ldots,n} v_2 =$$

$$= \sum_{l_2=1}^n \left(\sum_{l_1=1}^n \partial_{l_2}\partial_{l_1} f(x) \cdot v_{1,l_1}\right) \cdot v_{2,l_2} \ .$$

Plus généralement

$$D^k f : X \longrightarrow \mathcal{L}_k\left([\mathbb{R}^n]^k, \mathbb{R}^m\right)$$

est à valeurs dans l'espace vectoriel des applications k-linéaires et on a

$$D^k f(x)(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{l_k=1}^n \left(\ldots \left(\sum_{l_1=1}^n \partial_{l_k} \ldots \partial_{l_1} f(x) \cdot v_{1,l_1}\right) \cdot \ldots\right) \cdot v_{k,l_k} \ .$$

Rappelons que $D^k f(x)$ est une application k-linéaire symétrique (cf. Dieudonné [6], 8.12.14).

En se rappelant le critère de continuité pour une application bilinéaire (cf. proposition 2.4), il est naturel d'introduire la norme d'une application k-linéaire $\mathfrak{s} \in \mathcal{L}_k\left([\mathbb{R}^n]^k, \mathbb{R}^m\right)$ par

$$\|\mathfrak{s}\| := \sup_{v_1,\ldots,v_k\in\mathbb{R}^n, |v_1|,\ldots,|v_k|\leqslant 1} |\mathfrak{s}(v_1, \ldots, v_k)| \ .$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a alors

$$\partial^\alpha f(x) = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f(x) = D^{|\alpha|_1} f(x)\left(\underbrace{e_n, \ldots, e_n}_{\alpha_n\text{-fois}}, \ldots, \underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{\alpha_1\text{-fois}}\right) \ ,$$

donc

$$|\partial^\alpha f(x)| \leqslant \left\|D^{|\alpha|_1} f(x)\right\| \ .$$

D'autre part

$$\left\|D^k f(x)\right\| \leqslant \sum_{l_k=1}^n \left(\ldots \left(\sum_{l_1=1}^n |\partial_{l_k} \ldots \partial_{l_1} f(x)|\right) \ldots\right) \leqslant kn \cdot \max_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|_1=k} |\partial^\alpha f(x)| \ .$$

Ceci nous montre que l'on peut remplacer les semi-normes $p_{K,k}$ et p_k par

$$r_{K,k}(\varphi) := \max_{j=0,\ldots,k} \left\| D^j f \right\|_{\infty,K} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$$

et

$$r_k(\varphi) := \max_{j=0,\ldots,k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k D^j f \right\|_{\infty} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ .$$

DEFINITION 1 Si f est une fonction sur $\mathbb{R}^n$, pour tout $A \in \mathbb{GL}(\mathbb{R}^n)$, on définit la fonction $D_A f$ par

$$D_A f(x) := |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot f\left(\overset{-1}{A} x\right) \ .$$

En particulier si $h \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$, on pose $D_h f := D_{h \cdot \mathrm{Id}} f$ et on dit que c'est la fonction *dilatée* de f par h ; on a

$$D_h f(x) := |h|^{-\frac{n}{2}} \cdot f\left(\frac{x}{h}\right) \ .$$

Si $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \varphi | D_A f \rangle = \int \overline{\varphi(x)} \cdot |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot f\left(\overset{-1}{A} x\right) dx =$$

$$= \int \overline{|\det A|^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi(Ax)} \cdot f(x)\, dx = \left\langle D_{\overset{-1}{A}} \varphi \middle| f \right\rangle \ .$$

LEMME *L'application*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{GL}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : (\varphi, A) \longmapsto D_A \varphi$$

est linéaire en la première variable et séparément continue. En particulier, si $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ est une distribution sur $\mathbb{R}^n$, alors la forme semi-linéaire

$$|\mu\rangle \circ D_{\overset{-1}{A}} : \varphi \longmapsto \left\langle D_{\overset{-1}{A}} \varphi \middle| \mu \right\rangle$$

est continue.

Pour tout $K \in \mathfrak{K}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, K)$ et $h \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\operatorname{supp} D_A \varphi = A(\operatorname{supp} \varphi) \subset A(K)$$

et

$$r_{A(K),k}(D_A \varphi) = \max_{j=0,\ldots,k} \left\| D^j (D_A \varphi) \right\|_{\infty,A(K)} =$$

$$= |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot \max_{j=0,\ldots,k} \left\| D^j \left(\varphi \circ \overset{-1}{A}\right) \right\|_{\infty,A(K)} \leqslant$$

$$\leqslant |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot \max_{j=0,\ldots,k} \left\| \left(D^j \varphi\right) \circ \overset{-1}{A} \right\|_{\infty,A(K)} \cdot \left\| \overset{-1}{A} \right\|^j =$$

$$= |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot \max_{j=0,\ldots,k} \left(\left\| D^j \varphi \right\|_{\infty,A} \cdot \left\| \overset{-1}{A} \right\|^j \right) \leqslant$$

$$\leqslant |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\max_{j=0,\ldots,k} \left\| \overset{-1}{A} \right\|^j \right) \cdot r_{K,k}(\varphi) \ ,$$

car

$$D^j \left(\varphi \circ \overset{-1}{A} \right) = \left(D^j \varphi \right) \circ \overset{-1}{A} \Big(\underbrace{\overset{-1}{A}, \ldots, \overset{-1}{A}}_{j\text{-fois}} \Big) : (v_l)_{l=1,\ldots,j} \longmapsto \left(D^j \varphi \right) \circ \overset{-1}{A} \left(\overset{-1}{A} v_1, \ldots, \overset{-1}{A} v_j \right) \ .$$

Ceci montre la continuité de

$$D_A : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, K) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, A(K)) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ ,$$

donc aussi celle de $D_A : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ par la proposition 2.10.

Etant donné $B \in \mathbb{GL}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$D_B \varphi - D_A \varphi = D_A \left(D_{\overset{-1}{A} B} \varphi - \varphi \right) \ ;$$

par ce que nous venons de démontrer, il suffit donc de prouver la continuité de

$$A \longmapsto D_A \varphi : B\left(\mathrm{Id}, \frac{1}{2} \right) \longrightarrow \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n, B\left(\mathrm{Id}, \frac{1}{2} \right)(K) \right) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

en Id . Mais si $A \in B\left(\mathrm{Id}, \frac{1}{2}\right)$, il vient

$$r_{B\left(\mathrm{Id},\frac{1}{2}\right)(K),k}(D_A \varphi - \varphi) = \max_{j=0,\ldots,k} \left\| D^j (D_A \varphi - \varphi) \right\|_{\infty, B\left(\mathrm{Id},\frac{1}{2}\right)(K)} =$$

$$= \max_{j=0,\ldots,k} \left\| |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(D^j \varphi \right) \circ \overset{-1}{A} \Big(\underbrace{\overset{-1}{A}, \ldots, \overset{-1}{A}}_{j\text{-fois}} \Big) - D^j \varphi \right\|_{\infty, B\left(1,\frac{1}{2}\right)(K)} \ .$$

Utilisant la continuité uniforme de chaque application $D^j \varphi$, puisqu'elles sont continues à support compact, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, si $\|A - \mathrm{Id}\| \leqslant \delta$, on ait

$$\left\| |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(D^j \varphi \right) \left(\overset{-1}{A} x \right) \Big(\underbrace{\overset{-1}{A}, \ldots, \overset{-1}{A}}_{j\text{-fois}} \Big) - D^j \varphi(x) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left\| \left[\left(D^j \varphi \right) \left(\overset{-1}{A} x \right) - D^j \varphi(x) \right] \Big(\underbrace{\overset{-1}{A}, \ldots, \overset{-1}{A}}_{j\text{-fois}} \Big) \right\|$$

$$+ |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left\| \left(D^j \varphi \right)(x) \Big(\underbrace{\overset{-1}{A}, \ldots, \overset{-1}{A}}_{j\text{-fois}} \Big) - D^j \varphi(x) \right\|$$

$$+ \left(|\det A|^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \cdot \left\| \left(D^j \varphi \right)(x) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left\| \overset{-1}{A} \right\|^j \cdot \left\| \left(D^j \varphi \right) \left(\overset{-1}{A} x \right) - D^j \varphi(x) \right\|$$

$$+ |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left\| \overset{-1}{A} - \mathrm{Id} \right\| \cdot \sum_{l=1}^{j} \left\| \overset{-1}{A} \right\|^{j-l} \cdot \left\| \left(D^j \varphi \right)(x) \right\|$$

$$+ \left(|\det A|^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \cdot \left\| \left(D^j \varphi \right)(x) \right\| \leqslant \varepsilon \ ,$$

puisque

$$\left\| \left(D^j \varphi \right)(x) \Big(\underbrace{\overset{-1}{A}, \ldots, \overset{-1}{A}}_{j\text{-fois}} \Big) - D^j \varphi(x) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{j} \left\| \left(D^j\varphi\right)(x)\left(\mathrm{Id},\ldots,\mathrm{Id},\underset{\text{position } j}{\overset{-1}{A}-\mathrm{Id}},\overset{-1}{A},\ldots,\overset{-1}{A}\right)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\overset{-1}{A}-\mathrm{Id}\right\| \cdot \sum_{l=1}^{j} \left\|\overset{-1}{A}\right\|^{j-l} \cdot \left\|\left(D^j\varphi\right)(x)\right\| \ .$$

On a alors

$$r_{B\left(\mathrm{Id},\frac{1}{2}\right)(K),k}\left(D_A\varphi-\varphi\right) \leqslant \varepsilon \quad \text{si } \ \|A-\mathrm{Id}\| \leqslant \delta \ .$$

□

Ceci nous conduit à poser la définition

DEFINITION 2 Pour tout $A \in \mathbb{GL}(\mathbb{R}^n)$ et $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$, on définit une distribution

$$|D_A\mu\rangle := |\mu\rangle \circ D_{\overset{-1}{A}} \ ,$$

ce qui revient à poser

$$\langle\varphi|\, D_A\mu\rangle := \langle D_{A^{-1}}\varphi|\,\mu\rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ .$$

On dit que $D_h\mu := D_{h\cdot\mathrm{Id}}\mu$ est la distribution *dilatée* de μ par h .

REMARQUE 1 Le calcul ci-dessus montre que

$$D_A(f\cdot\lambda) = D_Af\cdot\lambda \ .$$

REMARQUE 2 La définition signifie que

$$D_{\overset{-1}{A}}^{\dagger} = D_A : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' : \mu \longmapsto D_A\mu \ .$$

Ceci prouve en particulier que $D_A : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ est continue.

La formule de changement de variables montre que

$$D_A : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

est un opérateur unitaire, i.e.

$$D_A^* = D_{\overset{-1}{A}} = \overset{-1}{D_A} \ .$$

En effet

$$\|D_Af\|_2^2 = \int |\det A|^{-1}\cdot\left|f\left(\overset{-1}{A}x\right)\right|^2 dx = \int |\det A|^{-1}\cdot|f(y)|^2\cdot|\det A|\ dy = \|f\|_2^2 \ .$$

DEFINITION 3 Le cas particulier $h=-1$ de la symétrie centrale se note souvent

$$\overset{\vee}{f} := D_{-1}f \quad \text{et} \quad \overset{\vee}{\mu} := D_{-1}\mu \ .$$

On dit que $\overset{\vee}{f}$ (et $\overset{\vee}{\mu}$) est la fonction (la distribution) *symétrique* de f (de μ).

REMARQUE 3 Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, alors $D_A\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ et, pour toute fonction f sur $\mathbb{R}^n$, on a $f \in \mathbf{L}^1(D_A\mu)$ si, et seulement si, $D_{\overset{-1}{A}} f \in \mathbf{L}^1(\mu)$. Dans ce cas on a

$$\int f\, dD_A\mu = \int D_{\overset{-1}{A}} f\, d\mu \ .$$

On se souvient facilement de cette formule en l'écrivant sous la forme

$$\int f(x)\ dD_A\mu(x) = \int f(x) \cdot |\det A|^{-\frac{1}{2}}\ d\mu\left(\overset{-1}{A}x\right) = \int |\det A|^{\frac{1}{2}} \cdot f(Ax)\ d\mu(x) =$$

$$= \int D_{\overset{-1}{A}} f(x)\ d\mu(x)\ \ .$$

EXEMPLE Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$D_A\delta_x = |\det A|^{\frac{1}{2}} \cdot \delta_{Ax}\ .$$

En particulier $(\delta_x)^{\vee} = \delta_{-x}$ et $\overset{\vee}{\delta} = \delta$.

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \varphi |\, D_A\delta_x\rangle = \left\langle |\det A|^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi \circ A \middle|\, \delta_x \right\rangle = |\det A|^{\frac{1}{2}} \cdot \overline{\varphi(Ax)} = |\det A|^{\frac{1}{2}} \cdot \langle \varphi |\, \delta_{Ax}\rangle\ \ .$$

□

Les physiciens écrivent, à l'aide des fonctions de Dirac de variable t ,

$$\delta\left(\overset{-1}{A}t - x\right) = |\det A| \cdot \delta(t - Ax)\ \ ,$$

en particulier $\delta(-t) = \delta(t)$ et $\delta(-t-x) = \delta(t+x)$.

En effet

$$\delta\left(\overset{-1}{A}t - x\right) = |\det A|^{\frac{1}{2}} \cdot D_A\delta_x(t) = |\det A| \cdot \delta_{Ax}(t) = |\det A| \cdot \delta(t - Ax)\ \ .$$

4.8 Opérations et leurs liaisons dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$

DEFINITION 1 On désigne par $\mathcal{C}^{(\infty)}_{\text{temp}}(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables g sur $\mathbb{R}^n$, dont toutes les dérivées sont à croissance lente, i.e. telles que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on ait

$$\left\| \langle \text{id} \rangle^{-m} \cdot \partial^\alpha g \right\|_\infty < \infty$$

pour un certain $m \in \mathbb{N}$. On dit que ces fonctions sont *tempérées* .

Dans ce paragraphe, on se donne $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}_{\text{temp}}(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathbb{GL}(\mathbb{R}^n)$. On vérifie immédiatement que l'on peut définir les applications linéaires

$$\partial^\alpha \ , \ M_g \ , \ T_y \ , \ D_A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

de la même manière que dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

THEOREME *Les applications ∂^α , M_g , T_y et $D_A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sont continues, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ est laissé invariant par les applications correspondantes dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$, leurs restrictions à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ sont continues et on a les mêmes formules dans la semi-dualité $\left\langle \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \middle| \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \right\rangle$ que dans $\left\langle \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \middle| \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \right\rangle$.*

La continuité de ces application se démontre de la même manière que dans les lemmes 4.4 à 4.7, en remplaçant les semi-normes $p_{K,k}$ par p_k . Le reste de la démonstration est immédiat en considérant les diagrammes commutatifs suivants, Φ désignant l'une des applications $(-1)^\alpha \cdot \partial^\alpha$, $M_{\bar{g}}$, T_{-y} et $D_{\overset{-1}{A}}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{array}{ccccccccc} & \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & & & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' & \hookrightarrow & \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' & \\ \Phi_{|\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} & \downarrow & & \downarrow & \Phi \quad \text{et} \quad \Phi^\dagger & & \uparrow & & \uparrow & \Phi^\dagger_{|\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \\ & \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & & & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' & \hookrightarrow & \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' & \end{array}$$

En effet $\Phi^\dagger_{|\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$ est l'application correspondant respectivement à ∂^α , M_g , T_y et D_A dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ (cf. les remarques 4.4.2 à 4.7.2). □

EXERCICE 1 Caractériser $\mathcal{C}^{(\infty)}_{\text{temp}}(\mathbb{R}^n)$ comme l'ensemble des multiplicateurs de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$, i.e. comme l'ensemble des $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ telles que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on ait $g \cdot \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ou, plus généralement comme l'ensemble des distributions $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ telles que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on ait $\varphi \cdot \mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$.

Remarquer que si $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) \smallsetminus \mathcal{C}^{(\infty)}_{\text{temp}}(\mathbb{R}^n)$ on peut construire une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ telle que, pour un $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on ait

$$|x_k| + 2 \leqslant |x_{k+1}| \quad \text{et} \quad \langle x_k \rangle^{-1} \cdot |\partial^\alpha g(x_k)| \geqslant 1 \ .$$

Il suffit alors de considérer la fonction

$$\varphi := \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_k \rangle^{-1} \cdot \chi(\diamond - x_k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

pour $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ bien choisi.

REMARQUE 1 La formule de Leibniz 4.5, liant ∂^α et M_g , ainsi que la proposition 4.6, sont aussi valables dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.

Les liaisons entre les autres applications sont les suivantes :

PROPOSITION *On a*

(i)

$$\partial^\alpha T_y = T_y \partial^\alpha \quad et \quad \partial^\alpha D_h = \frac{1}{h^{|\alpha|_1}} \cdot D_h \partial^\alpha \ .$$

(ii)

$$M_g T_y = T_y M_{g_{-y}} \quad et \quad M_g D_h = |h|^{\frac{n}{2}} \cdot D_h M_{D_{\frac{1}{h}} g} \ .$$

(iii)

$$T_y D_h = D_h T_{\frac{y}{h}} \ .$$

On démontre ces formules dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, donc aussi dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, puis dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ par adjonction. □

EXEMPLE 1 Utilisant l'exemple 4.7, on obtient immédiatement

$$D_h \partial^\alpha \delta_y = h^{|\alpha|_1} \cdot \partial^\alpha D_h \delta_y = h^{|\alpha|_1} \cdot |h|^{\frac{n}{2}} \cdot (\partial^\alpha \delta)_{hy} \ .$$

En particulier on a $(\partial \delta_y)^\vee = -(\partial \delta)_{-y}$, ce que les physiciens écrivent sous la forme

$$\partial \delta(-t-y) = -\partial \delta(t+y) \ .$$

DEFINITION 2 Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que F est un *espace de distributions* (sur X) si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(X)'$ muni d'une topologie localement convexe telle que l'injection canonique $F \hookrightarrow \mathcal{D}(X)'$ soit continue.

Etant donné $m \in \mathbb{N}$ et $c_\alpha \in \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha|_1 \leqslant m$, on dit que

$$L : \mathcal{D}(X)' \longrightarrow \mathcal{D}(X)' : \mu \longmapsto \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} c_\alpha \cdot \partial\!\!\!/^\alpha \mu$$

est un *opérateur différentiel à coefficients indéfiniment dérivables* . Il est dit d'ordre m s'il existe $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha|_1 = m$ et $c_\alpha \neq 0$.

Plus généralement, si F est un espace de distributions et c_α des fonctions sur X telles que les produits $c_\alpha \cdot \partial\!\!\!/^\alpha \mu$ soient définis si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $|\alpha|_1 \leqslant m$, on dit que

$$L : F \longrightarrow \mathcal{D}(X)' : \mu \longmapsto \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} c_\alpha \cdot \partial\!\!\!/^\alpha \mu$$

est un *opérateur différentiel* .

COROLLAIRE *Soient F et G des espaces de Fréchet de distributions et L un opérateur différentiel à coefficients indéfiniment dérivables.*

(i) *Si $L(F) \subset G$, alors $L : F \longrightarrow G$ est continu.*

(ii) Soit $L : F \longrightarrow G$ est une bijection, i.e. si l'équation différentielle $L\mu = \nu$ possède, pour tout $\nu \in G$, une unique solution $\mu \in F$, alors $\overset{-1}{L} : G \longrightarrow F$ est continu, i.e. cette solution dépend continûment du second membre.

Dmonstration de (i) En effet $L : \mathcal{D}(X)' \longrightarrow \mathcal{D}(X)'$ est faiblement continu, donc $\operatorname{Gr} L$ est fermé dans $\mathcal{D}(X)' \times \mathcal{D}(X)'$. Mais comme l'injection canonique $F \times G \hookrightarrow \mathcal{D}(X)' \times \mathcal{D}(X)'$ est continue, le graphe de $L : F \longrightarrow G$, qui est égal à $\operatorname{Gr} L \cap F \times G$, est fermé dans $F \times G$, d'où le résultat par le théorème du graphe fermé 3.14 pour les espace de Fréchet.

Dmonstration de (ii) C'est immédiat par le théorème d'isomorphie 3.14 pour les espace de Fréchet. □

REMARQUE 2 Le point (i) est évidemment généralisable à un opérateur différentiel quelconque $L : F \longrightarrow \mathcal{D}(X)'$ faiblement continu. Mais remarquons que dans beaucoup de situations la continuité d'un opérateur différentiel L est immédiate à vérifier.

EXEMPLE 2 Soit X une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Nous désignerons par $\mathcal{C}^{(m),b}\left(\overline{X}\right)$ l'espace vectoriel des fonctions m-fois continûment dérivable f sur X telles que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ satisfaisant à $|\alpha|_1 \leqslant m$, la dérivée partielle $\partial^\alpha f$ possède un (unique) prologement continu borné sur $\overline{X}$. Muni de la norme

$$\|f\|_\infty^{(m)} := \max_{|\alpha|_1 \leqslant m} \|\partial^\alpha f\|_\infty \ ,$$

c'est évidemment un espace de Banach si $m < \infty$. Muni des semi-normes $\|f\|_\infty^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}$ si $m = \infty$, c'est un espace de Fréchet.

Si L est un opérateur différentiel à coefficients continus bornés sur X , et s'il existe un sous-espace vectoriel fermé $F \subset \mathcal{C}^{(m),b}\left(\overline{X}\right)$, défini par exemple par des conditions au bord, tel que $L : F \longrightarrow \mathcal{C}^b(X)$ soit une bijection, alors l'unique solution $f \in F$ de $Lf = g$ dépend continûment de $g \in \mathcal{C}^b(X)$.

En effet il est clair que L est continu, puisque

$$\|Lf\|_\infty \leqslant \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} \|c_\alpha\|_\infty \cdot \|\partial^\alpha f\|_\infty \leqslant \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} \|c_\alpha\|_\infty \cdot \|f\|_\infty^{(m)} \ .$$

□

Cet exemple peut être varié à l'infini, le vrai problème étant dans une situation pratique donnée de trouver les bons espaces, les bonnes normes et de prouver la bijectivité !

EXERCICE 2 Montrer que $\ln|\mathrm{id}| \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ et que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle \varphi | \, \partial(\ln|\mathrm{id}|) \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R} \smallsetminus]-\varepsilon,\varepsilon[} \overline{\varphi(x)} \cdot \frac{1}{x} \, dx \ .$$

Ceci montre que

$$PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) : \varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R} \smallsetminus]-\varepsilon,\varepsilon[} \overline{\varphi(x)} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$, dite *partie principale de Cauchy* , et que

$$\partial(\ln|\mathrm{id}|) = PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) \ .$$

EXERCICE 3 Soient $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$ et $c \in \mathbb{C}$. Montrer que μ est solution de l'équation $\mathrm{id} \cdot \mu = c$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$ si, et seulement s'il existe un $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$\mu = \alpha \cdot \delta + c \cdot PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) .$$

(a) Montrer que, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\psi(0) = 0$, on a $\psi(x) = x \cdot \int_0^1 \psi'(xs)\, ds$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4.9 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

DEFINITION 1 Soit $\mu \in \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\mathcal{F}\mu(\lambda) := \langle e_\lambda | \mu \rangle = \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet x} \, d\mu(x) \ .$$

On dit que $\mathcal{F}\mu$ est la *transformée de Fourier* de μ .

Si $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\mathcal{F}f(\lambda) := \mathcal{F}(f \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n})(\lambda) = \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet x} \cdot f(x) \ dx \ .$$

Le lecteur est prié de ne pas confondre la variable $\lambda \in \mathbb{R}^n$ et l'intégrale de Lebesgue λ ($= \lambda_{\mathbb{R}^n}$) sur $\mathbb{R}^n$. Bien que la situation soit symétrique, il est préférable dans les applications de faire une distinction entre l'espace $\mathbb{R}^n$ des positions de variable x et l'espace $\mathbb{R}^n$ des valeurs propres (simultanées) de variable λ .

EXEMPLE 1 Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathcal{F}\delta_x = e^{-2\pi i \cdot \mathrm{id} \bullet x} \ .$$

En particulier $\mathcal{F}\delta = 1$.

En effet

$$\mathcal{F}\delta_x(\lambda) = \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet y} \, d\delta_x(y) = e^{-2\pi i \cdot \mathrm{id} \bullet x} \ .$$

□

REMARQUE 1 Si l'on interprète f (ou μ) comme la description d'un phénomène dépendant de la position x , la fonction

$$x \longmapsto e^{2\pi i \cdot \nu \bullet x} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

décrit un phénomène élémentaire (multi)périodique de (multi)fréquence ν (le physicien préfère cette lettre !). Dans la direction e_j il est périodique de *fréquence* ν_j et de *période* $T_j = \frac{1}{\nu_j}$. Dans la direction $\frac{\nu}{|\nu|}$ il est de fréquence $|\nu|$ et de période $\frac{1}{|\nu|}$.

Une onde plane monochromatique progressive se propageant dans $\mathbb{R}^n$ est décrite par la fonction

$$(t, x) \longmapsto e^{i \cdot (k \bullet x - \omega t)} \ ,$$

où k est le *vecteur d'onde* et $\omega \geqslant 0$ la *pulsation* . Cette onde restreinte à tout hyperplan orthogonal à k d'équation $k \bullet x = cst$ est un phénomène périodique de la variable t de fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$. Désignons par $\sigma = \frac{k}{2\pi}$ le *vecteur nombre d'onde* ; si v désigne la vitesse de déplacement de cette onde (dans l'espace de variable x) dans la direction $\frac{k}{|k|}$, i.e. $k \bullet \left(v \cdot t \cdot \frac{k}{|k|} \right) - \omega t = cst$, on a $v \cdot |k| = \omega$ et par suite $v \cdot |\sigma| = \nu$. Pour chaque temps t fixe, cette onde est dans la direction

$\frac{k}{|k|}$ de fréquence $|\sigma|$ et de *longueur d'onde* $\lambda = \frac{1}{|\sigma|}$. On a alors

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \quad \text{et} \quad e^{i\cdot(k\bullet x - \omega t)} = e^{2\pi i\cdot(\sigma\bullet x - \nu t)} = e^{2\pi i|\sigma|\cdot\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\bullet x - vt\right)} \ .$$

Rappelons (cf. exemple 4.2.3) que $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n)_\beta$ est une isométrie.

DEFINITION 2 Pour toute fonction f sur $\mathbb{R}^n$, on pose

$$f^* := \overline{\overset{\vee}{f}} = \overset{\vee}{\overline{f}} \ .$$

C'est une involution, i.e. $f^{**} = f$ et $(\alpha \cdot f)^* = \overline{\alpha} \cdot f^*$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

PROPOSITION *La transformation de Fourier définit une application linéaire*

$$\mathcal{F} : \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n)$$

continue de norme $\leqslant 1$ *, i.e.*

$$\|\mathcal{F}\mu\|_\infty \leqslant \|\mu\| \quad \textit{pour tout } \mu \in \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n) \ .$$

En outre

$$\mathcal{F}\mu^* = \overline{\mathcal{F}\mu}$$

et, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ *,* $\nu \in \mathbb{R}^n$ *et* $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *, on a*

$$\mathcal{F}T_y = M_{e_{-y}}\mathcal{F} \quad , \quad T_\nu\mathcal{F} = \mathcal{F}M_{e_\nu} \quad \textit{et} \quad \mathcal{F}D_h = D_{\frac{1}{h}}\mathcal{F} \ .$$

En particulier

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \quad \textit{pour tout } f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \ .$$

D'après le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (cf. cours d'Analyse [17].15.5), il est clair que $\mathcal{F}\mu$ est une fonction continue et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$, on a

$$|\mathcal{F}\mu(\lambda)| \leqslant \int \left|e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\right| d|\mu|(x) = |\mu|(\mathbb{R}^n) = \|\mu\|$$

et évidemment

$$|\mathcal{F}f(\lambda)| \leqslant \int |f(x)|\ dx = \|f\|_1 \ .$$

D'autre part

$$\mathcal{F}\mu^*(\lambda) = \int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\ d\overset{\vee}{\overline{\mu}}(x) = \overline{\int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\ d\mu(x)} = \overline{\mathcal{F}\mu(\lambda)} \ ,$$

$$\mathcal{F}T_y\mu(\lambda) = \int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\ d\mu(x-y) = \int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet(x+y)}\ d\mu(x) = e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet y}\cdot\mathcal{F}\mu(\lambda) \ ,$$

$$T_\nu\mathcal{F}\mu(\lambda) = \int e^{-2\pi i\cdot(\lambda-\nu)\bullet x}\ d\mu(x) = \int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}e^{2\pi i\cdot\nu\bullet x}\ d\mu(x) = \mathcal{F}\left(e^{2\pi i\cdot\nu\bullet\mathrm{id}}\cdot\mu\right)(\lambda)$$

et

$$\mathcal{F}D_h\mu(\lambda) = |h|^{-\frac{n}{2}}\cdot\int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\ d\mu\left(\frac{x}{h}\right) = |h|^{\frac{n}{2}}\cdot\int e^{-2\pi i\cdot h\lambda\bullet x}\ d\mu(x) =$$

$$= |h|^{\frac{n}{2}}\cdot\mathcal{F}\mu(h\lambda) = D_{\frac{1}{h}}\mathcal{F}\mu(\lambda) \ ,$$

ce qui prouve les formules. □

REMARQUE 2 Le *théorème de Bochner* consiste à caractériser l'image $\mathcal{F}\left(\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^n)\right)$ par la transformation de Fourier des intégrales de Radon positives comme l'ensemble des *fonctions de type positif* , i.e. des fonctions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que pour toutes suites finies $(x_j)_{j=1,\ldots,m} \subset \mathbb{R}^n$ et $(\alpha_j)_{j=1,\ldots,m} \subset \mathbb{C}$, on ait

$$\sum_{k,l=1}^{m} \overline{\alpha_k} \cdot f(x_k - x_l) \cdot \alpha_l \geqslant 0 \ .$$

EXEMPLE 2 Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$\mathcal{F}e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1} = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon\pi} \cdot \left\langle \frac{\mathrm{pr}_j}{\varepsilon} \right\rangle^{-1} \ .$$

En outre $\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\pi} \cdot \left\langle \mathrm{pr}_j \right\rangle^{-1} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et $\int \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\pi} \cdot \left\langle \mathrm{pr}_j \right\rangle^{-1} d\lambda = 1$. Elle définit donc une suite de Dirac au sens de l'exercice 4.3.3.

Par le théorème de Fubini, on a

$$\mathcal{F}e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1}(\lambda) = \int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x} \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot|x|_1}\, dx = \prod_{j=1}^{n} \int e^{-2\pi i\cdot\lambda_j x_j} \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot|x_j|}\, dx_j =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \int e^{-2\pi i\cdot\lambda_j x_j} \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot|x_j|}\, dx_j = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon\pi} \cdot \left\langle \frac{\lambda_j}{\varepsilon} \right\rangle^{-1} \ ,$$

car en intégrant deux fois par parties on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\cdot\lambda x} \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot|x|}\, dx = 2 \cdot \int_0^{\infty} \cos(2\pi\cdot\lambda x) \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi\varepsilon} - \frac{2\lambda^2}{\varepsilon^2} \cdot \int_0^{\infty} \cos(2\pi\cdot\lambda x) \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot x}\, dx \ ,$$

donc

$$\int e^{-2\pi i\cdot\lambda x} \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot|x|}\, dx = \frac{1}{\varepsilon\pi} \cdot \frac{1}{1+\frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}} = \frac{1}{\varepsilon\pi} \cdot \left\langle \frac{\lambda}{\varepsilon} \right\rangle^{-1} \ ,$$

d'où le résultat. □

DEFINITION 3 Nous utiliserons l'*opérateur de Laplace modifié* $\not\Delta$ défini par

$$\not\Delta := \sum_{j=1}^{n} \not\partial_j^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \cdot \Delta \ .$$

THEOREME *L'application $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dont l'application réciproque est donnée par*

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma = \int e^{2\pi i\cdot\lambda\bullet\diamond} \cdot \gamma(\lambda)\, d\lambda$$

et

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma = (\mathcal{F}\gamma)^{\vee} = \mathcal{F}\overset{\vee}{\gamma} = \overline{\mathcal{F}\overline{\gamma}}$$

pour tout $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *.*

En outre, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *, on a les formules*

$$\partial\!\!\!/^{\alpha}\mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}\left([-\mathrm{id}]^{\alpha}\cdot\varphi\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\left(\partial\!\!\!/^{\alpha}\varphi\right) = \mathrm{id}^{\alpha}\cdot\mathcal{F}\varphi\ .$$

En particulier

$$\mathcal{F}\left([1+\Delta\!\!\!/]^{k}\varphi\right) = \langle\mathrm{id}\rangle^{k}\cdot\mathcal{F}\varphi \quad \text{et} \quad [1+\Delta\!\!\!/]^{k}\mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}\left(\langle\mathrm{id}\rangle^{k}\cdot\varphi\right)\ .$$

L'involution $\varphi \longmapsto \varphi^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *est continue.*

En effet

$$\langle\varphi|\, f^*\rangle = \int \overline{\varphi(y)}\cdot\overline{f(-y)}\,dy = \overline{\int \varphi(-y)\cdot f(y)\ dy} = \overline{\langle\varphi^*|\, f\rangle}\ ,$$

Le théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (cf. cours d'Analyse [17] 15.5) montre immédiatement que $\mathcal{F}\varphi$ est indéfiniment dérivable et que l'on peut dériver sous le signe intégral :

$$\partial\!\!\!/^{\alpha}\mathcal{F}\varphi(\lambda) = \int \partial\!\!\!/^{\alpha}_{\lambda}e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\cdot\varphi(x)\ dx = \int [-x]^{\alpha}\cdot e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\cdot\varphi(x)\ dx = \mathcal{F}\left([-\mathrm{id}]^{\alpha}\cdot\varphi\right)(\lambda)\ .$$

D'autre part en utilisant le théorème de Fubini et en intégrant par partie, on obtient

$$\mathcal{F}\left(\partial\!\!\!/^{\alpha}\varphi\right)(\lambda) = \int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\cdot\partial\!\!\!/^{\alpha}_{x}\varphi(x)\ dx = (-1)^{\alpha}\cdot\int \partial\!\!\!/^{\alpha}_{x}e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\cdot\varphi(x)\ dx = \lambda^{\alpha}\cdot\mathcal{F}\varphi(\lambda)\ .$$

On en déduit successivement les formules

$$\mathcal{F}\left(\Delta\!\!\!/\varphi\right) = \sum_{j=1}^{n}\mathcal{F}\left(\partial\!\!\!/_{j}^{2}\varphi\right) = \left(\sum_{j=1}^{n}\mathrm{pr}_j^2\right)\cdot\mathcal{F}\varphi = |\mathrm{id}|^2\cdot\mathcal{F}\varphi$$

et

$$\mathcal{F}\left([1+\Delta\!\!\!/]^{k}\varphi\right) = \mathcal{F}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\cdot\Delta\!\!\!/^{l}\varphi\right) = \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\cdot|\mathrm{id}|^{2l}\cdot\mathcal{F}\varphi = \langle\mathrm{id}\rangle^{k}\cdot\mathcal{F}\varphi\ .$$

Il vient alors

$$\langle\mathrm{id}\rangle^{k}\cdot\partial\!\!\!/^{\alpha}\mathcal{F}\varphi = \langle\mathrm{id}\rangle^{k}\cdot\mathcal{F}\left([-\mathrm{id}]^{\alpha}\cdot\varphi\right) = \mathcal{F}\left([1+\Delta\!\!\!/]^{k}\left([-\mathrm{id}]^{\alpha}\cdot\varphi\right)\right)\ .$$

En outre

$$\|\varphi\|_1 \leqslant \left(\int \langle\mathrm{id}\rangle^{-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1}\ d\lambda\right)\cdot p_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}(\varphi)\ ,$$

donc

$$p\!\!\!/_k(\mathcal{F}\varphi) = \max_{|\alpha|_1\leqslant k}\left\|\langle\mathrm{id}\rangle^{k}\cdot\partial\!\!\!/^{\alpha}\mathcal{F}\varphi\right\|_{\infty} = \max_{|\alpha|_1\leqslant k}\left\|\mathcal{F}\left([1+\Delta\!\!\!/]^{k}\left([-\mathrm{id}]^{\alpha}\cdot\varphi\right)\right)\right\|_{\infty} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|\alpha|_1\leqslant k}\left\|[1+\Delta\!\!\!/]^{k}\left([-\mathrm{id}]^{\alpha}\cdot\varphi\right)\right\|_{1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int \langle\mathrm{id}\rangle^{-\left[\frac{n}{2}\right]-1}\ d\lambda\right)\cdot\max_{|\alpha|_1\leqslant k}p_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}\left([1+\Delta\!\!\!/]^{k}\left([-\mathrm{id}]^{\alpha}\cdot\varphi\right)\right)\ .$$

Ceci montre que $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et que $\mathcal{F}$ est continue, puisque les dérivations et la multiplication par un polynôme sont continues dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Pour la formule d'inversion, il nous suffit de prouver que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\int e^{2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\cdot\mathcal{F}\varphi(\lambda)\ d\lambda = \int e^{2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\cdot\left(\int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet y}\cdot\varphi(y)\ dy\right)d\lambda = \varphi(x)\ ,$$

car par symétrie on obtient évidemment

$$\int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\left(\int e^{2\pi i\cdot\nu\bullet x}\cdot\gamma(\nu)\ d\nu\right)dx = \gamma(\lambda) \quad \text{pour tout } \gamma\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ et } \lambda\in\mathbb{R}^n\ .$$

Remarquons que nous avons affaire à une intégration successive, mais que l'on ne peut pas utiliser directement le théorème de Fubini ! Pour pouvoir le faire nous allons introduire un facteur de convergence, en l'occurence la fonction $e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1}$ par rapport à la variable λ qui fait difficulté.

Comme $\mathcal{F}\varphi \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1} = 1 \quad \text{ponctuellement,}$$

le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, puis le théorème de Fubini et l'exemple 2 ci-dessus montrent que

$$\int e^{2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\cdot\left(\int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet y}\cdot\varphi(y)\ dy\right)d\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0}\int e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\lambda|_1}\cdot\left(\int e^{2\pi i\cdot\lambda\bullet(x-y)}\cdot\varphi(y)\ dy\right)d\lambda =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\left(\int e^{-2\pi i\cdot(y-x)\bullet\lambda}\cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\lambda|_1}\ d\lambda\right)\cdot\varphi(y)\ dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \mathcal{F}e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1}(y-x)\cdot\varphi(y)\ dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\prod_{j=1}^n\frac{1}{\varepsilon\pi}\cdot\left\langle\frac{y_j-x_j}{\varepsilon}\right\rangle^{-1}\cdot\varphi(y)\ dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\prod_{j=1}^n\frac{1}{\varepsilon\pi}\cdot\left\langle\frac{y_j}{\varepsilon}\right\rangle^{-1}\cdot\varphi(y+x)\ dy = \varphi(x)$$

en utilisant l'exercice 4.3.3 sur les suites de Dirac.

Les formules liant $\overset{-1}{\mathcal{F}}$ à $\mathcal{F}$ étant évidentes, il est alors clair que $\mathcal{F}$ et $\overset{-1}{\mathcal{F}}$ sont continues, donc que $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même. Finalement on a $p_k(\varphi^*) = p_k(\varphi)$, ce qui prouve la continuité de $\varphi \longmapsto \varphi^*$. □

EXERCICE 1 Pour tout $a > 0$, on a

$$\mathcal{F}e^{-\pi a\cdot\mathrm{id}^2} = \sqrt{\frac{1}{a}}\cdot e^{-\frac{\pi}{a}\cdot\mathrm{id}^2}\ .$$

La démonstration est laissée en exercice. Le théorème permet d'établir une équation différentielle ordinaire, qui est satisfaite par $\mathcal{F}e^{-\pi a\cdot\mathrm{id}^2}$ et que l'on peut résoudre.

La démonstration du théorème peut aussi se faire en utilisant le facteur de convergence $e^{-\pi\cdot|\mathrm{id}|^2}$, puisque $\mathcal{F}e^{-\pi\cdot|\mathrm{id}|^2} = e^{-\pi\cdot|\mathrm{id}|^2}$ conduit aussi à une suite de Dirac.

COROLLAIRE (Lemme de Riemann-Lebesgue) *On a*

$$\mathcal{F}\left(\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)\right)\subset\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)\ .$$

En effet $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$, donc

$$\mathcal{F}\left(\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)\right) = \mathcal{F}\left(\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}^{\mathbf{L}^1}\right) \subset \overline{\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))}^{\mathcal{C}^b} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \ ,$$

puisque $\mathcal{F} : \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n)$ est continue par la proposition et $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n)$. $\square$

4.10 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$

LEMME *Pour tout* $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *et* $\mu \in \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n)$ *, on a*

$$\int f(\lambda) \cdot \mathcal{F}\mu(\lambda)\, d\lambda = \int \mathcal{F}f(x)\, d\mu(x) \ .$$

En particulier, on a

$$\langle \gamma | \mathcal{F}\mu \rangle = \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma \middle| \mu \right\rangle \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ .$$

En outre pour tout $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *, on a*

$$\langle \varphi | f^* \rangle = \overline{\langle \varphi^* | f \rangle} \ .$$

Grâce au théorème de Fubini on obtient

$$\int f(\lambda) \cdot \mathcal{F}\mu(\lambda)\, d\lambda = \int f(\lambda) \cdot \left(\int e^{-2\pi i \lambda \cdot x}\, d\mu(x) \right) d\lambda =$$

$$= \int \left(\int e^{-2\pi i \lambda \cdot x} \cdot f(\lambda)\, d\lambda \right) d\mu(x) = \int \mathcal{F}f(x)\, d\mu(x) \ .$$

On a alors

$$\langle \gamma | \mathcal{F}\mu \rangle = \int \overline{\gamma} \cdot \mathcal{F}\mu\, d\lambda = \int \mathcal{F}\overline{\gamma}\, d\mu = \left\langle \overline{\mathcal{F}\overline{\gamma}} \middle| \mu \right\rangle = \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma \middle| \mu \right\rangle \ .$$

Finalement

$$\langle \varphi | f^* \rangle = \int \overline{\varphi(y)} \cdot \overline{f(-y)}\, dy = \overline{\int \varphi(-y) \cdot f(y)\, dy} = \overline{\langle \varphi^* | f \rangle} \ .$$

□

Puisque $\mathcal{F}$ et $\diamond^*$ sont des applications continues (théorème 4.9), ce lemme nous conduit à poser la

DEFINITION Si $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ est une distribution tempérée, on définit une distribution tempérée

$$|\mathcal{F}\mu\rangle := |\mu\rangle \circ \overset{-1}{\mathcal{F}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ ,$$

ce qui revient à poser

$$\langle \gamma | \mathcal{F}\mu \rangle := \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma \middle| \mu \right\rangle \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ .$$

On dit que c'est la *transformée de Fourier* de μ .

De même

$$\langle \varphi | \mu^* \rangle := \overline{\langle \varphi^* | \mu \rangle} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

définit une involution $\mu \longmapsto \mu^*$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.

Grâce à la remarque 3.4.5 et la définition 4.7.3 on a

$$\mu^* = \overline{\overset{\vee}{\mu}} = \overset{\overline{\vee}}{\mu} .$$

REMARQUE 1 Le calcul ci-dessus montre que la transformée de Fourier de μ au sens des distributions est la même que celle calculée ponctuellement. En particulier

$$\mathcal{F}(f \cdot \lambda) = \mathcal{F}f \cdot \lambda .$$

La définition signifie que

$$\mathcal{F} = \left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\right)^\dagger : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' .$$

Ceci prouve en particulier que $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ est continue.

THEOREME *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$, dont l'application réciproque est donnée par*

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}\mu = \mathcal{F}^\dagger\mu = \mathcal{F}\overset{\vee}{\mu} = (\mathcal{F}\mu)^\vee \quad \textit{pour tout } \mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' .$$

En outre, on a les formules

$$\mathcal{F}\not\partial^\alpha = M_{\mathrm{id}^\alpha}\mathcal{F} \quad \textit{et} \quad \not\partial^\alpha\mathcal{F} = \mathcal{F}M_{[-\mathrm{id}]^\alpha} ,$$

donc aussi

$$\mathcal{F}\left[1 + \not\Delta\right]^k = M_{\langle\mathrm{id}\rangle^k}\mathcal{F} \quad \textit{et} \quad \left[1 + \not\Delta\right]^k \mathcal{F} = \mathcal{F}M_{\langle\mathrm{id}\rangle^k} ,$$

ainsi que

$$\mathcal{F}T_y = M_{e_{-y}}\mathcal{F} \quad , \quad T_\lambda\mathcal{F} = \mathcal{F}M_{e_\lambda} \quad \textit{et} \quad \mathcal{F}D_h = D_{\frac{1}{h}}\mathcal{F} ,$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et

$$\mathcal{F}\mu^* = \overline{\mathcal{F}\mu} .$$

En utilisant le théorème 4.9, on a

$$\mathcal{F} \circ \overset{-1}{\mathcal{F}} = \overset{-1}{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} ,$$

donc

$$\left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\right)^\dagger \circ \mathcal{F}^\dagger = \mathcal{F}^\dagger \circ \left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\right)^\dagger = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'} ,$$

ce qui montre bien que $\mathcal{F}^\dagger$ est l'application réciproque de la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$. En outre, comme $\overset{-1}{\mathcal{F}} = \mathcal{F}D_{-1} = D_{-1}\mathcal{F}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, donc $\mathcal{F} = \overset{-1}{\mathcal{F}}D_{-1} = D_{-1}\mathcal{F}$, par adjonction on obtient les premières formules. Il en est de même des suivantes, puisque les mêmes formules sont valables dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (proposition 4.9). Quant à la dernière, on a

$$\langle\gamma|\,\mathcal{F}\mu^*\rangle = \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma \middle| \mu^* \right\rangle = \overline{\left\langle \overline{\left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma\right)}^\vee \middle| \mu \right\rangle} =$$

$$= \overline{\left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}}\overline{\gamma} \middle| \mu \right\rangle} = \overline{\langle\overline{\gamma}|\,\mathcal{F}\mu\rangle} = \left\langle \gamma \middle| \overline{\mathcal{F}\mu} \right\rangle$$

pour tout $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

EXEMPLE 1 Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\mathcal{F}(\not{\partial}^\alpha \delta_x) = \mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-2\pi i \cdot \mathrm{id} \bullet x} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\left(\mathrm{id}^\alpha \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \mathrm{id}}\right) = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \not{\partial}^\alpha \delta_\lambda \ .$$

En particulier sur $\mathbb{R}$ on a

$$\mathcal{F}\delta_x = e^{-2\pi i \cdot \mathrm{id} \cdot x} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\left(e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot \mathrm{id}}\right) = \delta_\lambda$$

et encore plus particulièrement

$$\mathcal{F}\delta = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{F}1 = \delta \ .$$

Utilisant l'exemple 4.9.1, on a

$$\mathcal{F}(\not{\partial}^\alpha \delta_x) = \mathrm{id}^\alpha \cdot \mathcal{F}\delta_x = \mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-2\pi i \cdot \mathrm{id} \bullet x} \ ,$$

puis

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{id}^\alpha \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \mathrm{id}}\right) = \mathcal{F}\mathcal{F}(\not{\partial}^\alpha \delta_{-\lambda}) = \mathcal{F}\overset{-1}{\mathcal{F}} D_{-1}(\not{\partial}^\alpha \delta_{-\lambda}) = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \not{\partial}^\alpha D_{-1}\delta_{-\lambda} = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \not{\partial}^\alpha \delta_\lambda$$

en ayant utilisé la proposition 4.8.i. □

PROPOSITION *Pour tout $\nu \in \mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$, l'application*

$$e_\diamond : \lambda \longmapsto e_\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$$

est continue, ν-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ et

$$\int e_\lambda \, d\nu(\lambda) = \overset{-1}{\mathcal{F}}\nu \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

Si $\nu \in \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n)$, alors $\int e_\lambda \, d\nu(\lambda) \in \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n)$ et on peut calculer ponctuellement et on retrouve la définition classique :

$$\left(\int e_\lambda \, d\nu(\lambda)\right)(x) = \int e_\lambda(x) \, d\nu(\lambda) = \mathcal{F}\nu(-x) \ .$$

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la fonction $\langle \varphi | e_\diamond \rangle = \overline{\mathcal{F}\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est continue et ν-intégrable. En outre

$$\int \langle \varphi | e_\lambda \rangle \, d\nu(\lambda) = \int \overline{\mathcal{F}\varphi(\lambda)} \, d\nu(\lambda) = \langle \mathcal{F}\varphi | \nu \rangle = \left\langle \varphi \middle| \overset{-1}{\mathcal{F}}\nu \right\rangle ,$$

d'où la formule. Pour tout $g \in \mathbf{L}^\infty(\nu)$, on a $g \cdot \nu \in \mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$, donc $e_\diamond$ est ν-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.

La seconde partie est immédiate par le théorème de Fubini. On a

$$\left\langle \varphi \middle| \int e_\lambda \, d\nu(\lambda) \right\rangle = \int \left(\int \overline{\varphi(x)} \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet x} \, dx\right) d\nu(\lambda) =$$

$$= \int \overline{\varphi(x)} \cdot \left(\int e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet x} \, d\nu(\lambda)\right) dx = \left\langle \varphi \middle| (\mathcal{F}\nu)^\vee \right\rangle \ .$$

□

REMARQUE 2 Le calcul dans le cas général $\nu \in \mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$ peut souvent être effectué en utilisant une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions sur $\mathbb{R}^n$ telle que $f_k \cdot \nu \in \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n)$ et $\nu = \lim_k f_k \cdot \nu$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$. On a alors

$$\int e_\lambda \, d\nu(\lambda) = \overset{-1}{\mathcal{F}}(\lim_k f_k \cdot \nu) = \lim_k [\mathcal{F}(f_k \cdot \nu)]^\vee \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

EXEMPLE 2 En particulier

$$\delta = \overset{-1}{\mathcal{F}}1 = \overset{-1}{\mathcal{F}}\lambda_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\cdot\lambda\bullet\diamond}\, d\lambda \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

Attention, cette formule semble avoir un sens dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, mais l'application $e_\diamond$ n'est pas scalairement λ-intégrable dans la semi-dualité $\langle \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)|\, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)\rangle$, car il existe des fonctions $\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ telles que $\mathcal{F}\varphi$ ne soit pas λ-intégrable.

EXERCICE 1 Montrer que les applications

$$\lambda \longmapsto (e_\lambda)_y \quad \text{et} \quad \lambda \longmapsto \sin(2\pi\cdot\lambda\bullet y)\cdot e_\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$$

sont $\lambda_{\mathbb{R}^n}$-intégrables dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ et que

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} e^{-2\pi\cdot\mathrm{id}\,\bullet y} = \int_{\mathbb{R}^n} (e_\lambda)_y\, d\lambda = \delta_y \ ,$$

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}\sin(2\pi\cdot\mathrm{id}\,\bullet y) = \int_{\mathbb{R}^n} \sin(2\pi\cdot\lambda\bullet y)\cdot e_\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2i}\left(\delta_{-y} - \delta_y\right) \ .$$

EXERCICE 2 Montrer que l'application

$$\lambda \longmapsto \lambda^\alpha\cdot e_\lambda : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$$

est $\lambda_{\mathbb{R}^n}$-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ et que

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}\,\mathrm{id}^\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^\alpha\cdot e_\lambda\, d\lambda = \not\partial^\alpha\delta \ .$$

EXERCICE 3 Montrer que

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}1_{\mathbb{R}_+} = \int_{\mathbb{R}_+} e_\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2}\cdot\delta - \frac{1}{2\pi i}\cdot PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)$$

et

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}1_{\mathbb{R}_-} = \int_{\mathbb{R}_-} e_\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2}\cdot\delta + \frac{1}{2\pi i}\cdot PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)$$

dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ (cf. 4.8, exercices 2 et 3).

En particulier

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}\,\mathrm{signum} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{signum}(\lambda)\cdot e_\lambda\, d\lambda = -\frac{1}{\pi i}\cdot PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) \ ,$$

ainsi que

$$\int_{\mathbb{R}} \cos(2\pi\cdot\lambda\cdot\mathrm{id})\ d\lambda = \frac{1}{2}\cdot\delta \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi\cdot\lambda\cdot\mathrm{id})\ d\lambda = \frac{1}{2\pi}\cdot PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)$$

dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$.

EXERCICE 4 Montrer que la condition $\nu \in \mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$ est nécessaire pour que l'application $e_\diamond$ soit ν-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.

4.11 Espaces de Sobolev

THEOREME (de Plancherel) *La transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ induit une application unitaire*

$$\mathcal{F} : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \ .$$

Pour tout $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, le théorème 4.9 et le lemme 4.10 montrent que

$$\left\| \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma \right\|_2^2 = \int \overline{\overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma} \cdot \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma \, d\lambda = \int \mathcal{F}\bar{\gamma} \cdot \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma \, d\lambda = \int \bar{\gamma} \cdot \gamma \, d\lambda = \|\gamma\|_2^2 \ ,$$

donc que $\overset{-1}{\mathcal{F}} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)$ est une isométrie surjective. Mais en identifiant $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)^\dagger_\beta = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)^\dagger_\beta$ avec $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, l'adjointe $\left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\right)^* : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ (cf. 3.17) est aussi une isométrie surjective, donc une application unitaire. Il suffit alors de considérer les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2) & \\ \overset{-1}{\mathcal{F}} & \uparrow & & \uparrow & \overset{-1}{\mathcal{F}} \\ & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2) & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' & \\ \left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\right)^* & \downarrow & & \downarrow & \left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\right)^\dagger = \mathcal{F} \\ & \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' & \end{array}$$

pour pouvoir conclure : on a

$$\left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\right)^* = \left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\right)^\dagger_{|\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{F}_{|\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)} \ .$$

□

REMARQUE La première partie de la démonstration montre que

$$\mathcal{F} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)$$

est une isométrie surjective, donc qu'elle se prolonge de manière unique en une application unitaire dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$. La seconde partie de la démonstration est nécessaire pour prouver que ce prolongement est induit par la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.

DEFINITION 1 Nous désignerons par $\mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\int \frac{|f|^2}{\langle \mathrm{id} \rangle^k} \, d\lambda < \infty$$

pour un certain $k \in \mathbb{N}$. On dit qu'elles sont à *croissance quadratique modérée* .

Rappelons que les fonctions à croissance modérées ont été définies dans l'exemple 4.3.3.

LEMME *On a*

$$\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \langle \mathrm{id} \rangle^{-k}\right)$$

et

$$f \cdot g \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{pour tout } f, g \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \ .$$

En particulier

$$\mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \ .$$

La première partie est évidente. Quant à la dernière assertion, on a

$$\int \frac{|f \cdot g|}{\langle \mathrm{id} \rangle^k} \, d\lambda \leqslant \left(\int \frac{|f|^2}{\langle \mathrm{id} \rangle^k} \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int \frac{|g|^2}{\langle \mathrm{id} \rangle^k} \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

si k est assez grand. $\square$

DEFINITION 2 Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on dit que l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n) := \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \langle \mathrm{id} \rangle^s\right)\right) \ ,$$

muni du produit scalaire transporté, est l'*espace de Sobolev d'ordre* s sur $\mathbb{R}^n$. La norme associée est donc

$$\|\xi\|_{2,(s)} := \|\mathcal{F}\xi\|_{s,\langle \mathrm{id} \rangle^s} \ .$$

On pose

$$\mathcal{H}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) := \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^{(-\infty)}(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n) \ .$$

La suite $\left(\mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n)\right)_{s \in \mathbb{R}}$ de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ est évidemment croissante, on a

$$\mathcal{H}^{(0)}(\mathbb{R}^n) = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

par le théorème de Plancherel, et

$$\mathcal{H}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) = \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(\bigcap_{s \in \mathbb{R}} \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \langle \mathrm{id} \rangle^s\right)\right) \ ,$$

ainsi que

$$\mathcal{H}^{(-\infty)}(\mathbb{R}^n) = \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(\mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)\right)$$

par le lemme. L'exemple 3.8.2 montre que $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \langle\mathrm{id}\rangle^{-s}\right)$ est le semi-dual fort de $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \langle\mathrm{id}\rangle^{s}\right)$, donc que

$$\mathcal{H}^{(s)}\left(\mathbb{R}^n\right)_\beta^\dagger = \mathcal{H}^{(-s)}\left(\mathbb{R}^n\right) .$$

PROPOSITION

(i) $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$ *est dense dans* $\mathcal{H}^{(s)}\left(\mathbb{R}^n\right)$ *pour tout* $s \in \mathbb{R}$ *.*

(ii) Si $m \in \mathbb{N}$ *, alors* $\mathcal{H}^{(m)}\left(\mathbb{R}^n\right)$ *est l'ensemble des* $\xi \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ *tels que, pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *satisfaisant à* $|\alpha|_1 \leqslant m$ *, la dérivée* $\partial^\alpha \xi$ *au sens des distributions appartienne à* $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ *, i.e.*

$$\mathcal{H}^{(m)}\left(\mathbb{R}^n\right) = \left\{\xi \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right) \;\middle|\; \partial^\alpha \xi \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right) \text{ si } |\alpha|_1 \leqslant m\right\} .$$

En outre

$$\|\xi\|_{2,(m)}^2 = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} c_\alpha \cdot \|\not{\partial}^\alpha\|_2^2$$

pour certaines constantes $c_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *.*

Dmonstration de (i) Comme $\langle\mathrm{id}\rangle^s \in \mathbf{L}_{\mathrm{loc}}^1\left(\mathbb{R}^n\right)$, on a $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \langle\mathrm{id}\rangle^s\right) = \mathbf{L}^2\left(\langle\mathrm{id}\rangle^s \cdot \lambda\right)$. On en déduit que $\mathcal{K}\left(\mathbb{R}^n\right)$ est dense dans $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \langle\mathrm{id}\rangle^s\right)$ par le lemme 4.2, donc aussi $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$ par le théorème 4.3.i, et par suite $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$. Ceci montre que $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ est dense dans $\mathcal{H}^{(s)}\left(\mathbb{R}^n\right)$, donc aussi $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$ par le théorème 4.3.ii.

Dmonstration de (ii) Remarquons tout d'abord que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\beta|_1 \leqslant m$, on a $\left|\mathrm{id}^\beta\right|^2 \leqslant |\mathrm{id}|^{2|\beta|_1} \leqslant \langle\mathrm{id}\rangle^m$ et que

$$\langle\mathrm{id}\rangle^m = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \mathrm{pr}_j^2\right)^l = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} c_\alpha \cdot \mathrm{id}^{2\alpha}$$

pour certaines constantes $c_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$; ainsi

$$\int^* \left|\mathrm{id}^\beta \cdot \mathcal{F}\xi\right|^2 d\lambda \leqslant \int^* |\mathcal{F}\xi|^2 \cdot \langle\mathrm{id}\rangle^m \, d\lambda = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} c_\alpha \cdot \int^* \left|\mathrm{id}^\alpha \cdot \mathcal{F}\xi\right|^2 d\lambda .$$

Ceci montre que $\xi \in \mathcal{H}^{(m)}\left(\mathbb{R}^n\right)$, i.e. $\mathcal{F}\xi \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \langle\mathrm{id}\rangle^m\right)$, est équivalent à

$$\not{\partial}^\beta \xi = \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(\mathrm{id}^\beta \cdot \mathcal{F}\xi\right) \in \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right)\right) = \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right)$$

pour tous ces β . Dans ce cas on obtient

$$\|\xi\|_{2,(m)}^2 = \int |\mathcal{F}\xi|^2 \cdot \langle\mathrm{id}\rangle^m \, d\lambda = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} c_\alpha \cdot \int \left|\mathrm{id}^\alpha \cdot \mathcal{F}\xi\right|^2 d\lambda = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} c_\alpha \cdot \|\not{\partial}^\alpha \xi\|_2^2 .$$

□

Cette proposition nous permet de poser la

DEFINITION 3 Soient X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $m \in \mathbb{N}$. On dit que

$$\mathcal{H}^{(m)}(X) = \left\{\xi \in \mathbf{L}^2(X) \;\middle|\; \partial^\alpha \xi \in \mathbf{L}^2(X) \text{ si } |\alpha|_1 \leqslant m\right\}$$

est l'*espace de Sobolev d'ordre* m sur X . Pour simplifier, on munit cet espace de la norme, et du produit scalaire correspondant, défini par

$$\|\xi\|_{2,(m)}^2 := \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} \|\partial\!\!\!/^\alpha \xi\|_2^2 \ .$$

On vérifie facilement que c'est un espace de Hilbert et que, dans le cas $X = \mathbb{R}^n$, cette nouvelle norme est équivalente à l'ancienne.

DEFINITION 4 On désigne par $\mathcal{H}^{(m),0}(X)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(X)$ dans $\mathcal{H}^{(m)}(X)$.

4.12 Convolution des fonctions et des distributions

THEOREME (de Young) *Soient* $p, q \in [1, \infty]$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqslant 1$. *Pour tout* $f \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^n)$, *la fonction* $f(x - \diamond) \cdot g$ *est intégrable pour presque tous les* $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f * g := \int f(\diamond - y) \cdot g(y)\, dy \in \mathbf{L}^r(\mathbb{R}^n)$$

s'appelle le produit de convolution de f *et* g *et, en posant* $\frac{1}{r} := 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, *on a*

$$\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n) * \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^r(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q \ .$$

On a

$$f * g = g * f \ .$$

Certains cas particuliers sont importants

(i) *Si* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *i.e.* $r = \infty$, *la fonction* $f(x - \cdot) \cdot g$ *est intégrable pour tous les* $x \in \mathbb{R}^n$, *donc* $f * g$ *est partout définie et*

$$\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n) * \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q \ .$$

Si en plus $p, q \in \,]1, \infty[$, *alors*

$$\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n) * \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \ .$$

En outre

$$\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) * \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1 \ ,$$

$$\mathcal{C}^{(k),b}(\mathbb{R}^n) * \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^{(k),b}(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}^{(k),b}(\mathbb{R}^n) \text{ et } g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \ .$$

(ii) *Si* $p = q = 1$, *i.e* $r = 1$, *la fonction* $f(x - \diamond) \cdot g$ *est intégrable pour presque tous les* $x \in \mathbb{R}^n$, *on a*

$$\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) * \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \ .$$

Muni du produit de convolution $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *est une algèbre commutative et, pour tout* $f, g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$, *on a*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g \ .$$

La démonstration se fait en plusieurs étapes. On démontre tout d'abord (i), qui correspond au cas $r = \infty$, puis (ii). Ces démonstrations sont laissées en exercice. Pour (ii) utiliser la formule du changement de variables et les théorèmes de Tonelli et Fubini. Par exemple on a

$$\mathcal{F}(f * g)(\lambda) = \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet x} \left(\int f(x - y)\, g(y)\, dy \right) dx =$$

$$= \iint e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet (z + y)} \cdot f(z) \cdot g(y)\, dz\, dy = \mathcal{F}f(\lambda) \cdot \mathcal{F}g(\lambda) \ .$$

Si $p = \infty$ ou $q = \infty$, on a nécessairement $r = \infty$. Nous pouvons donc supposer que $p, q, r \in [1, \infty[$. Grâce à l'inégalité de Hölder généralisée (exercice 1 ci-dessous) et (ii), pour presque tous les $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left\| |f|(x - \diamond) \cdot |g| \right\|_1 = \left\| \Big(|f|^p (x - \diamond) \cdot |g|^q \Big)^{\frac{1}{r}} \cdot \Big(|f|^p (x - \diamond) \Big)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \cdot \Big(|g|^q \Big)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \right\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \left\| |f|^p (x - \diamond) \cdot |g|^q \right\|_1^{\frac{1}{r}} \cdot \left\| |f|^p (x - \diamond) \right\|_1^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \cdot \left\| |g|^q \right\|_1^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} =$$

$$= \|f\|_p^{1 - \frac{p}{r}} \cdot \|g\|_q^{1 - \frac{q}{r}} \cdot \Big(|f|^p * |g|^q (x) \Big)^{\frac{1}{r}} < \infty \ ,$$

i.e.

$$|(f * g)(x)| \leqslant \Big(|f| * |g| \Big)(x) \leqslant \|f\|_p^{1 - \frac{p}{r}} \cdot \|g\|_q^{1 - \frac{q}{r}} \cdot \Big(|f|^p * |g|^q (x) \Big)^{\frac{1}{r}} \ ,$$

puis

$$\|f * g\|_r^r = \left\| (|f| * |g|)^r \right\|_1 \leqslant \|f\|_p^{r-p} \cdot \|g\|_q^{r-q} \cdot \left\| |f|^p * |g|^q \right\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_p^{r-p} \cdot \|g\|_q^{r-q} \cdot \left\| |f|^p \right\|_1 \cdot \left\| |g|^q \right\|_1 = \|f\|_p^r \cdot \|g\|_q^r \ .$$

□

EXERCICE 1 (Inégalité de Hölder généralisée) Soient μ une intégrale de Radon sur X et $(\alpha_j)_{j=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}_+$ tel que $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$. Pour toute suite $(f_j)_{j=1,\ldots,n}$ de fonctions $\geqslant 0$, on a

$$\left\| \prod_{j=1}^n f_j^{\alpha_j} \right\|_1 \leqslant \prod_{j=1}^n \|f_j\|_1^{\alpha_j} \ ,$$

en ayant posé $\infty^0 = 1$.

EXERCICE 2

(a) Montrer que pour toute intégrale de Radon μ et tout $p \in [1, \infty]$, on a

$$\mathbf{L}^p(\mu) \subset \mathbf{L}^1(\mu) + \mathbf{L}^\infty(\mu) \ .$$

(b) Soient $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqslant 1$ et $\frac{1}{r} := 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Par bilinéarité on définit des applications évidemment bilinéaires globalement continues

$$(f, g) \longmapsto f * g$$

entre les espaces suivants :

$$\left[\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)\right] \times \left[\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^n)\right] \longrightarrow \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^r(\mathbb{R}^n) \ ,$$

$$\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \times \left[\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n)\right] \longrightarrow \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \ ,$$

$$\left[\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)\right] \times \left[\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)\right] \longrightarrow \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) + \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\left[\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)\right] \times \left[\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)\right] \longrightarrow \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \ .$$

La norme des espaces en question est définie dans les exemples 2.1.7 et 2.10.6 pour la somme et la définition 2.4.2 pour l'intersection.

REMARQUE 1 Si f, g satisfont aux hypothèses du théorème de Young, la fonction

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) : y \longmapsto f(y) \cdot g_y \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}$$

est $\lambda_{\mathbb{R}^n}$-intégrable dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\int f(y) \cdot g_y \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}\, dy = (f * g) \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n} \ .$$

C'est immédiat par définition (cf. définition 3.12.3 et proposition 3.12) car si $s \in [1, \infty[$ est tel que $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$, on a

$$\int |f(y) \cdot \langle \varphi | g_y \rangle|\, dy \leqslant \int^* |\varphi|(x) \cdot \left(\int^* |f|(y) \cdot |g|(x-y)\, dy \right) dx \leqslant \|\varphi\|_s \cdot \|f * g\|_r \ ,$$

$\varphi \longmapsto \|\varphi\|_s$ est une semi-norme continue sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\int f(y) \cdot \langle \varphi | g_y \rangle\, dy = \int \varphi(x) \cdot \left(\int f(y) \cdot g(x-y)\, dy \right) dx = \langle \varphi | f * g \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n} \rangle \ .$$

□

REMARQUE 2 Si $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \varphi | \psi * f \rangle = \langle \psi^* * \varphi | f \rangle \ .$$

En effet les théorèmes de Tonelli et Fubini montrent que

$$\langle \varphi | \psi * f \rangle = \int \overline{\varphi(x)} \left(\int \psi(x-y) f(y)\, dy \right) dx = \int \left(\int \overline{\varphi(x)} \psi(x-y)\, dx \right) \cdot f(y)\, dy =$$

$$= \int \overline{\left(\int \overline{\psi(x-y)} \cdot \varphi(x)\, dx \right)} \cdot f(y)\, dy = \langle \psi^* * \varphi | f \rangle \ .$$

□

REMARQUE 3 Pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $(\varphi * \psi)^* = \varphi^* * \psi^*$.

En effet pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(\varphi * \psi)^*(x) = \overline{\int \varphi(-x-y) \cdot \psi(y)\, dy} = \int \overline{\varphi(-x+y)} \cdot \overline{\psi(-y)}\, dy = \varphi^* * \psi^*(x) \ .$$

□

DEFINITION 1 On désigne par $\mathcal{M}^{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace vectoriel des intégrales de Radon μ sur $\mathbb{R}^n$, dites *à décroissance rapide* , telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $\langle \mathrm{id} \rangle^k$ soit μ-intégrable. De même soit $\mathbf{L}^1_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ formé des fonctions f telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $\langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$\mathcal{C}^{(k),\mathrm{decl}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}^n) \mid \partial^\alpha f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^n) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha|_1 \leqslant k \right\} \ .$$

Ces remarques vont nous permettre de donner une première généralisation de la convolution en tenant compte du lemme 3.12.iii. Mais tout d'abord encore un peu de technique.

LEMME

(i) *Pour tout* $y \in \mathbb{R}^n$ *et* $k \in \mathbb{N}$ *, on a*

$$p_k\left(\psi_y\right) \leqslant 2^k \cdot \langle y\rangle^k \cdot p_k(\psi) \ .$$

(ii) *Si* $\mu \in \mathcal{M}^{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^n)$ *, il existe une fonction s.c.i.* $\rho \geqslant 1$ *telle que*

$$\left\|\frac{\langle \mathrm{id}\rangle^k}{\rho}\right\|_\infty < \infty \quad et \quad \int^* \rho\, d|\mu| < \infty \ .$$

(iii) *Les applications bilinéaires*

$$\mathcal{C}^{(\infty),b}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : (g,\varphi) \longmapsto g\cdot\varphi$$

et

$$\mathcal{C}^{(\infty),b}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' : (g,\nu) \longmapsto g\cdot\nu$$

sont séparément continues.

Dmonstration de (i) En effet grâce au lemme 2.1 il vient

$$p_k\left(\psi_y\right) = \max\nolimits_{|\alpha|_1\leqslant k}\left\|\langle \mathrm{id}\rangle^k \cdot \partial^\alpha \psi_y\right\|_\infty = \max\nolimits_{|\alpha|_1\leqslant k}\sup\nolimits_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\langle x\rangle^k \cdot \partial^\alpha\psi(x-y)\right| =$$

$$= \max\nolimits_{|\alpha|_1\leqslant k}\sup\nolimits_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\langle x+y\rangle^k \cdot \partial^\alpha\psi(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^k\cdot\langle y\rangle^k \cdot \max\nolimits_{|\alpha|_1\leqslant k}\sup\nolimits_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\langle x\rangle^k \cdot \partial^\alpha\psi(x)\right| = 2^k\cdot\langle y\rangle^k\cdot p_k(\psi) \ .$$

Dmonstration de (ii) Nous pouvons supposer que μ est positive et il suffit de définir

$$\rho := \sup\nolimits_k \frac{\|\mu\|\cdot\langle \mathrm{id}\rangle^k}{2^k\cdot\int\langle \mathrm{id}\rangle^k\, d\mu} \ .$$

On a évidemment $\rho \geqslant 1$ (prendre $k=0$) et

$$\left\|\frac{\langle \mathrm{id}\rangle^k}{\rho}\right\|_\infty \leqslant \frac{2^k\cdot\int\langle \mathrm{id}\rangle^k\, d\mu}{\|\mu\|} < \infty \ .$$

D'autre part

$$\int^*\rho\, d\mu = \sup\nolimits_k\int\left(\max\nolimits_{l=0,\ldots,k-1}\frac{\|\mu\|\cdot\langle \mathrm{id}\rangle^l}{2^l\cdot\int\langle \mathrm{id}\rangle^l\, d\mu}\right)d\mu \leqslant \sup\nolimits_k\int\left(\sum_{l=0}^{k-1}\frac{\|\mu\|\cdot\langle \mathrm{id}\rangle^l}{2^l\cdot\int\langle \mathrm{id}\rangle^l\, d\mu}\right)d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \sup\nolimits_k\sum_{l=0}^{k-1}\frac{\|\mu\|}{2^l} = 2\cdot\|\mu\| < \infty \ .$$

Ceci montre en particulier que ρ est presque partout finie. Est-ce que ρ est croissante ?

Dmonstration de (iii) Remarquons que $\mathcal{C}^{(\infty),b}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^{(\infty)}_{\mathrm{temp}}(\mathbb{R}^n)$. La démonstration est identique à celle du lemme 4.5. □

COROLLAIRE *Soient* $\mu \in \mathcal{M}^{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^n)$ *,* $\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ *et* $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *.*

(i) *La fonction*

$$\nu_\diamond : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' : y \longmapsto \nu_y$$

est ν-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$; on dit que

$$\mu * \nu := \int \nu_y \, d\mu(y)$$

est la convolution *de μ par ν .*

(ii) La fonction

$$\psi_\diamond : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : y \longmapsto \psi_y$$

est μ-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\left(\int \psi_y \, d\mu(y)\right) \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n} = \mu * (\psi \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}) \ .$$

On écrit

$$\mu * \psi := \int \psi_y \, d\mu(y)$$

et, si $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{rap}}(\mu)$,

$$(f \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}) * \psi = f * \psi \ .$$

(iii) On a

$$\langle \varphi | \, \mu * \nu \rangle = \langle \mu^* * \varphi | \, \nu \rangle \ ,$$

$$\partial^\alpha (\mu * \nu) = \mu * \partial^\alpha \nu \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \ ,$$

et, si $f \in \mathcal{C}^{(k),\mathrm{decl}}(\mathbb{R}^n)$,

$$\partial^\alpha \Big((f \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}) * \nu \Big) = (\partial^\alpha f \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}) * \nu \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha|_1 \leqslant k \ .$$

(iv) La fonction

$$e_{-\diamond} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{C}^{(\infty),b}(\mathbb{R}^n) : y \longmapsto e_{-y}$$

est μ-intégrable dans $\mathcal{C}^{(\infty),b}(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\mathcal{F}\mu = \int e_{-y} \, d\mu(y) \ ,$$

ainsi que

$$\mathcal{F}(\mu * \nu) = \mathcal{F}\mu \cdot \mathcal{F}\nu \ .$$

(v) La fonction

$$\langle (\psi^*)_\diamond | \, \nu \rangle : x \longmapsto \langle (\psi^*)_x | \, \nu \rangle = \left\langle \overline{\psi}(x - \diamond) \middle| \, \nu \right\rangle$$

est tempérée, elle est égale à la distribution $\psi * \nu$ et on a

$$\partial^\alpha (\psi * \nu) = \partial^\alpha \psi * \nu = \psi * (\partial^\alpha \nu) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \ .$$

En particulier si $\nu \in \mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\psi * \nu(x) = \int \psi(x - y) \, d\nu(y) \ .$$

Dmonstration de (i) En effet il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|\langle \varphi | \, \mu \rangle| \leqslant c \cdot p_k(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; grâce au lemme (i) il vient alors

$$\int |\langle \varphi | \nu_y \rangle| \, d\mu(y) = \int \left| \left\langle \varphi_{-y} \middle| \, \nu \right\rangle \right| \, d\mu(y) \leqslant c \cdot \int p_k(\varphi_{-y}) \, d\mu(y) \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \cdot c \cdot \left(\int \langle \mathrm{id}\rangle^k \, d\mu\right) \cdot p_k(\varphi) \ ,$$

ce qui prouve l'intégrabilté (cf. définition 3.12.3 et proposition 3.12).

Dmonstration de (ii) Avec les notation du lemme (ii), l'inégalité

$$p_k\left(\frac{\psi_y}{\rho(y)}\right) \leqslant 2^k \cdot p_k(\psi) \cdot \frac{\langle y\rangle^k}{\rho(y)} \leqslant 2^k \cdot p_k(\psi) \cdot \left\|\frac{\langle \mathrm{id}\rangle^{k+1}}{\rho}\right\|_\infty \cdot \langle y\rangle^{-1}$$

montre que $\frac{\psi_\diamond}{\rho}$ tend vers 0 à l'infini.

Pour tout $K \in \mathfrak{K}(\mathbb{R}^n)$, l'image $\psi_\diamond(K) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est une partie compacte de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, puisque $\psi_\diamond$ est continue (lemme 4.6 étendu à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$), donc $\overline{\mathrm{cs}}(\psi_\diamond(K))$ est compacte par l'exercice 3.9.2.b et elle contient $\frac{\psi_\diamond}{\rho}(K)$ puisque $\rho \geqslant 1$. L'exercice 3.9.3 montre alors que $\frac{\psi_\diamond}{\rho}$ est contenue dans une partie convexe compacte de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mais comme ρ est μ-intégrable et

$$\psi_\diamond = \rho \cdot \frac{\psi_\diamond}{\rho} \ ,$$

la remarque 3.12.5 fait à propos du théorème 3.12.i finit de prouver que $\psi_\diamond$ est μ-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Puisque l'injection canonique $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ est continue, le lemme 3.12.iii montre alors que

$$\left(\int \psi_y \, d\mu(y)\right) \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n} = \int \psi_y \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n} \, d\mu(y) = \int (\psi \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n})_y \, d\mu(y) = \mu * (\psi \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}) \ .$$

Etant donné $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\Big((f \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}) * \psi\Big)(x) = \left\langle \delta_x \middle| \int \psi_y \, d(f \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n})(y) \right\rangle =$$

$$= \int f(y) \cdot \psi(x-y) \, dy = f * \psi(x) \ ,$$

donc $(f \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}) * \psi = f * \psi$.

Dmonstration de (iii) Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \varphi | \mu * \nu\rangle = \int \langle \varphi | \nu_y\rangle \, d\mu(y) = \int \left\langle \varphi_{-y} \middle| \nu \right\rangle d\mu(y) = \int \left\langle \varphi_y \middle| \nu\right\rangle d\overset{\vee}{\mu}(y) =$$

$$= \overline{\int \left\langle \nu \middle| \varphi_y\right\rangle d\overline{\overset{\vee}{\mu}}(y)} = \overline{\left\langle \nu \middle| \int \varphi_y \, d\mu^*(y)\right\rangle} = \left\langle \int \varphi_y \, d\mu^*(y) \middle| \nu\right\rangle = \langle \mu^* * \varphi | \nu\rangle \ .$$

et (lemme 3.12.iii)

$$\partial^\alpha(\mu * \nu) = \partial^\alpha\left(\int \nu_y \, d\mu(y)\right) = \int \partial^\alpha(\nu_y) \, d\mu(y) =$$

$$= \int (\partial^\alpha \nu)_y \, d\mu(y) = \mu * \partial^\alpha \nu \ .$$

Si $f \in \mathcal{C}^{(k),\mathrm{decl}}(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ est tel que $|\alpha|_1 \leqslant k$, alors

$$\left\langle \varphi \middle| \partial^\alpha\Big((f \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}) * \nu\Big)\right\rangle = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \langle (f \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n})^* * (\partial^\alpha \varphi) | \nu\rangle = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \langle \partial^\alpha(f^*) * \varphi | \mu\rangle =$$

$$= \langle (\partial^\alpha f)^* * \varphi | \, \mu \rangle = \langle \varphi | \, (\partial^\alpha f) * \mu \rangle \ .$$

Dmonstration de (iv) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a $\not\partial^\alpha e_{-y} = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot y^\alpha \cdot e_{-y}$ et un raisonnement comme dans (ii) montre que $e_{-\diamond}$ est μ-intégrable dans $\mathcal{C}^{(\infty),b}(\mathbb{R}^n)$. Comme l'injection canonique $\mathcal{C}^{(\infty),b}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ est continue,

$$\int e_{-y} \, d\mu(y) = \mathcal{F}\mu$$

par la proposition 4.10. Utilisant le lemme 3.12.iii et le lemme (iii) ci-dessus, on en déduit que

$$\mathcal{F}(\mu * \nu) = \mathcal{F}\left(\int \nu_y \, d\mu(y)\right) = \int \mathcal{F}\nu_y \, d\mu(y) = \int e_{-y} \cdot \mathcal{F}\nu \, d\mu(y) =$$

$$= \left(\int e_{-y} \, d\mu(y)\right) \cdot \mathcal{F}\nu = \mathcal{F}\mu \cdot \mathcal{F}\nu \ .$$

Dmonstration de (v) Puisque $\psi^* * \varphi = \varphi * \psi^* = \int \varphi(y) \cdot (\psi^*)_y \, dy$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par (ii), on obtient

$$\langle \varphi | \, \psi * \nu \rangle = \langle \psi^* * \varphi | \, \nu \rangle = \int \overline{\varphi(y)} \cdot \left\langle (\psi^*)_y \middle| \, \nu \right\rangle dy = \left\langle \varphi(\diamond) \middle| \, \langle (\psi^*)_\diamond | \, \nu \rangle \right\rangle \ ,$$

ce qui montre que $\psi * \nu = \langle (\psi^*)_\diamond | \, \nu \rangle$. Il nous reste à prouver que $\langle (\psi^*)_\diamond | \, \nu \rangle \in \mathcal{C}^{(\infty)}_{\text{temp}}(\mathbb{R}^n)$. Mais la remarque 4.8.1 nous permet, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ et $j = 1, \ldots, n$, de calculer

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\left\langle (\psi^*)_{y+h \cdot e_j} \middle| \, \nu \right\rangle - \left\langle (\psi^*)_y \middle| \, \nu \right\rangle\right] = \left\langle \partial_j (\psi^*)_y \middle| \, \nu \right\rangle = -\left\langle (\psi^*)_y \middle| \, \partial_j \nu \right\rangle \ .$$

On a donc $\langle (\psi^*)_\diamond | \, \nu \rangle \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ par récurrence et

$$\partial^\alpha \langle (\psi^*)_\diamond | \, \nu \rangle = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \langle (\psi^*)_\diamond | \, \partial^\alpha \nu \rangle \ .$$

D'autre part, il existe par la continuité de $\partial^\alpha \nu$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ un $m \in \mathbb{N}$ tel que, en utilisant le lemme (i), on ait

$$\left|\left\langle (\psi^*)_y \middle| \, \partial^\alpha \nu \right\rangle\right| \leqslant p_m\left((\psi^*)_y\right) \leqslant 2^m \cdot \langle y \rangle^m \cdot p_m(\psi^*)$$

et par suite

$$\left\| \langle \diamond \rangle^{-m} \cdot \partial^\alpha \langle (\psi^*)_\diamond | \, \nu \rangle \right\|_\infty \leqslant 2^m \cdot p_m(\psi^*) < \infty \ .$$

La dernière formule est évidente, puisque

$$\psi * \nu(x) = \langle (\psi^*)_x | \, \nu \rangle = \int \overline{(\psi^*)_x(y)} \, d\nu(y) = \int \psi(x-y) \, d\nu(y) \ .$$

□

REMARQUE 4 Dans la démonstration ci-dessus (ii) nous avons utilisé la commutativité de la convolution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour montrer que $\psi^* * \varphi = \int (\psi^*)_y \cdot \varphi(y) \, dy$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ce résultat se généralise au cas d'un groupe localement compact non-commutatif non-nécessairement unimodulaire en introduisant l'intégrale de Haar à droite ! Il serait également nécessaire de définir $\nu * \mu$.

REMARQUE 5 Nous aurions pu définir $\mu * \nu$ par la première formule de (iii) en remarquant que l'on peut définir directement $\mu * \varphi$ par

$$\mu * \varphi(x) = \int \varphi(x-y)\, d\mu(y) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n ,$$

en vérifiant que $\mu * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, puis en montrant que

$$\mu * \diamond : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \varphi \longmapsto \mu * \varphi$$

est continue.

En effet pour tout $k \in \mathbb{N}$, grâce au lemme 2.1 il vient

$$p_k(\mu * \varphi) = \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^\alpha (\mu * \varphi) \right\|_\infty = \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \int \partial^\alpha \varphi(\mathrm{id} - y)\, d\mu(y) \right\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \cdot \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \int \langle \mathrm{id} - y \rangle^k \cdot \partial^\alpha \varphi(\mathrm{id} - y) \cdot \langle y \rangle^k \, d\mu(y) \right\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \cdot \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot f \right\|_\infty \cdot \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{k + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \cdot \partial^\alpha \varphi \right\|_\infty \cdot \left(\int \langle y \rangle^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \, dy \right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \cdot \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot f \right\|_\infty \cdot \left(\int \langle y \rangle^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \, dy \right) \cdot p_{k + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}(\varphi) .$$

□

Ces inégalités montrent également que le produit de convolution

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : (\varphi, \psi) \longmapsto \varphi * \psi$$

est une application bilinéaire (globalement) continue.

REMARQUE 6 La démonstration de (iv) peut aussi se faire sans utiliser (ii), mais en exprimant le produit de convolution $\psi^* * \varphi$ comme une limite de sommes de Riemann dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Il me semble toutefois plus naturel d'introduire l'intégration vectorielle.

Nous pouvons maintenant donner une seconde généralisation de la convolution :

DEFINITION 2 On dit qu'une distribution $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ est à *décroissance rapide* si, pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\psi * \rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On désigne par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{\mathrm{rap}}$ l'ensemble de ces distributions. Pour tout $\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$, on définit alors le produit de *convolution* de μ et ν par

$$\langle \psi | \rho * \nu \rangle := \langle (\psi^* * \rho)^* | \nu \rangle .$$

COROLLAIRE *Soient $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{\mathrm{rap}}$ et $\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.*

(i) On a $\rho^* \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{\mathrm{rap}}$, $\rho * \nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ et

$$\operatorname{supp} \rho * \nu \subset \overline{\operatorname{supp} \rho + \operatorname{supp} \nu} .$$

(ii) On a $\mathcal{M}^{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{\mathrm{rap}}$.

(iii) La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{\mathrm{rap}}$ sur $\mathcal{C}^{(\infty)}_{\mathrm{temp}}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\mathcal{F}(\rho * \nu) = \mathcal{F}\rho \cdot \mathcal{F}\nu .$$

Dmonstration de (i) Pour tout $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \gamma | \psi * \rho^* \rangle = \overline{\langle (\psi^* * \gamma)^* | \rho \rangle} = \overline{\langle \gamma^* * \psi | \rho \rangle} = \overline{\langle \psi * \gamma^* | \rho \rangle} = \langle \gamma | (\psi^* * \rho)^* \rangle \ ,$$

donc $\psi * \rho^* = (\psi^* * \rho)^* \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ce qui montre que $\rho^* \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{\mathrm{rap}}$.

L'application $\psi \longmapsto \psi * \rho : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est continue par le théorème du graphe fermé 3.14, car si $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_k * \rho)_{k\in\mathbb{N}}$ tendent respectivement vers ψ et $\widetilde{\psi}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\widetilde{\psi}(y) = \lim\nolimits_k \psi_k * \rho(y) = \lim\nolimits_k \left\langle (\psi_k^*)_y \middle| \rho \right\rangle = \left\langle (\psi^*)_y \middle| \rho \right\rangle = \psi * \rho(y) \ ,$$

donc $\widetilde{\psi} = \psi * \rho$. On en déduit évidemment que $\rho * \nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$. La formule sur les supports est laissée en exercice.

Dmonstration de (ii) Cette assertion est aussi laissée en exercice.

Dmonstration de (iii) Comme $\mathcal{F}$ est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et que, pour tout $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\gamma \cdot \mathcal{F}\rho = \mathcal{F}\left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma * \rho\right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ grâce au corollaire (iv), l'exercice 4.8.1 montre que $\mathcal{F}\rho \in \mathcal{C}^{(\infty)}_{\mathrm{temp}}(\mathbb{R}^n)$. Réciproquement, si $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}_{\mathrm{temp}}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\psi * \overset{-1}{\mathcal{F}} g = \overset{-1}{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\psi \cdot g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, donc $\overset{-1}{\mathcal{F}} g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{\mathrm{rap}}$. On a alors

$$\langle \gamma | \mathcal{F}(\mu * \nu) \rangle = \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma \middle| \mu * \nu \right\rangle = \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma * \mu^* \middle| \nu \right\rangle = \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}}(\gamma \cdot \mathcal{F}\mu^*) \middle| \nu \right\rangle =$$

$$= \langle \gamma \cdot \mathcal{F}\mu^* | \mathcal{F}\nu \rangle = \left\langle \gamma \middle| \overline{\mathcal{F}\mu^*} \cdot \mathcal{F}\nu \right\rangle = \langle \gamma | \mathcal{F}\mu \cdot \mathcal{F}\nu \rangle \ .$$

□

EXEMPLE On peut montrer que toute *distribution μ à support compact* , i.e. $\mu \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)'$, est à décroissance rapide. On a donc

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)' \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{\mathrm{rap}} \ ,$$

et la fonction tempérée $\mathcal{F}\mu$ est donnée par

$$\mathcal{F}\mu(\diamond) = \left\langle \chi \cdot e^{2\pi i \cdot \mathrm{id} \bullet \diamond} \middle| \mu \right\rangle$$

pour tout $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\chi \cdot \mu = \mu$.

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\delta_x * \nu = \nu_x \ .$$

EXERCICE 3 On dit que

$$H : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) : \xi \longmapsto -\pi i \cdot \overset{-1}{\mathcal{F}}(\mathrm{signum} \cdot \mathcal{F}\xi)$$

est la *transformation de Hilbert* .

(a) Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, l'application $y \longmapsto \xi(y) \cdot PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)_y$ est $\lambda_{\mathbb{R}}$-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ et que

$$H\xi = \int \xi(y) \cdot PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)_y dy =: \xi * PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) \ .$$

Calculer $H\varphi$ ponctuellement pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, puis $\left(H_{|\mathcal{S}(\mathbb{R})}\right)^\dagger : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ de deux manières différentes.

(b) Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, on a

$$H\xi = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\{|\mathrm{id}-y|\geqslant\varepsilon\}} \frac{\xi(y)}{\mathrm{id}-y}\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\{|y|\geqslant\varepsilon\}} \frac{\xi(\mathrm{id}-y)}{y}\,dy \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \ .$$

(c) Montrer que, pour tout $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, on a

$$Hf = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\{|\mathrm{id}-y|\geqslant\varepsilon\}} \frac{\xi(y)}{\mathrm{id}-y}\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\{|y|\geqslant\varepsilon\}} \frac{\xi(\mathrm{id}-y)}{y}\,dy \quad \text{ponctuellement} \ .$$

(d) Montrer que pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle \varphi | H\psi \rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} \iint_{|x-y|\geqslant\varepsilon} \frac{\overline{\varphi(x)}\cdot\psi(y)}{x-y}\,dxdy \ .$$

REMARQUE 7 La transformation de Hilbert est donc définie par le noyau

$$\varkappa \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})' \setminus \mathcal{M}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$$

tel que

$$H : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})' : \psi \longmapsto H\psi$$

soit donné par

$$\langle \varphi | H\psi \rangle = \langle \varphi\otimes\psi | \varkappa \rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} \iint_{|x-y|\geqslant\varepsilon} \frac{\overline{\varphi(x)}\cdot\psi(y)}{x-y}\,dxdy \ .$$

Chapitre 5

SOUS-ESPACES HILBERTIENS

Dans tout ce qui suit F est un espace localement convexe séparé.

Version du 30 mars 2005

5.1 Le noyau d'un sous-espace-hilbertien

DEFINITION 1 Nous dirons que $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$, ou plus simplement $\mathcal{H}$, est un *sous-espace hilbertien* de $F^\dagger$ si $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $F^\dagger$ muni d'une structure d'espace de Hilbert telle que l'injection canonique $j : \mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ soit continue. On désigne par $Hilb\left(F^\dagger\right)$ l'ensemble des sous-espaces hilbertiens de $F^\dagger$.

Il est équivalent d'après le scolie 3.7.i d'exiger que $j : \mathcal{H}_\sigma \hookrightarrow F^\dagger$ soit continue. En considérant la semi-dualité $(\mathcal{H}|\,\mathcal{H})$, l'application $j^\dagger : F_\sigma \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma$ est continue d'après la proposition 3.7.iii, donc aussi $j^\dagger : F \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma$.

DEFINITION 2 L'application linéaire continue

$$h := jj^\dagger : F \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma \hookrightarrow F^\dagger$$

s'appelle le *noyau* de $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$.

Par simplification, puisque j n'est que l'injection canonique du sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$ dans $F^\dagger$, on dénote aussi par h l'application linéaire continue

$$h := j^\dagger : F \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma \ .$$

On dit également que c'est le noyau de $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$. On a alors $j = h^\dagger$ et le noyau comme application de F dans $F^\dagger$ est $h^\dagger h$.

REMARQUE 1 Dans les applications, l'espace F sera tonnelé. Dans ce cas le noyau $h : F \longrightarrow \mathcal{H}$ est continu par le scolie 3.7.ii. Pour ne pas faire cette hypothèse, il suffit d'introduire la topologie de Mackey ; le noyau $h : F_\tau \longrightarrow \mathcal{H}$ est alors continu par le théorème 3.11.ii. Un espace tonnelé est muni de la topologie de Mackey comme nous l'avons vu dans le théorème 3.11.i.

REMARQUE 2 Attention, si $\mathcal{H}$ est en semi-dualité avec $\mathcal{H}^\dagger$ et cet espace n'est pas identifié avec $\mathcal{H}$, alors l'adjointe de $j : \mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ est une application linéaire continue $j^\dagger : F_\sigma \longrightarrow \mathcal{H}^\dagger$ et on a

$$\langle \varphi |\, j\xi \rangle_F = \left\langle j^\dagger\varphi \middle|\, \xi \right\rangle_{\mathcal{H}^\dagger} = \left(R^{-1} j^\dagger \varphi \middle|\, \xi \right)_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \xi \in \mathcal{H} \ .$$

Ceci montre que l'adjointe de j calculée en considérant la semi-dualité $(\mathcal{H}|\,\mathcal{H})$ est égale à $R^{-1}j^\dagger$, où R désigne l'application de Riesz de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}^\dagger$. Le noyau de $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ est donc $jR^{-1}j^\dagger$, ou $R^{-1}j^\dagger$.

REMARQUE 3 Rappelons les résultats suivants :

(a) D'après la remarque 3.4.4, le scolie 3.7.i et le théorème 3.11.ii, on a

$$F^{\dagger} = (F_{\sigma})^{\dagger} \ ,$$

et

$$\mathcal{L}\left(F, F^{\dagger}\right) = \mathcal{L}\left(F_{\sigma}, F^{\dagger}\right) = \mathcal{L}\left(F_{\tau}, F^{\dagger}\right) = \mathcal{L}\left(F_{\tau}, F_{\tau}^{\dagger}\right)$$

est l'ensemble des applications linéaires de F dans $F^{\dagger}$ admettant une adjointe.

(b) La proposition 3.13 montre qu'il y a une correspondance biunivoque entre les applications linéaires continues

$$T : F \longrightarrow F^{\dagger} \ ,$$

les formes sesquilinéaires séparément continues

$$\mathfrak{s} : F \times F \longrightarrow \mathbb{K}$$

et les formes semi-linéaires continues

$$\widetilde{\mathfrak{s}} : |F\rangle_{\,i} \langle F| \longrightarrow \mathbb{K}$$

donnée par

$$\left\langle |\varphi\rangle \langle\psi| \,\middle|\, \widetilde{\mathfrak{s}} \right\rangle = \mathfrak{s}(\varphi, \psi) = \langle \varphi | T\psi \rangle \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in F \ .$$

Soit maintenant $T : F \longrightarrow F^{\dagger}$ une application linéaire.

(c) Pour que T soit continue, ou faiblement continue, et que l'on ait $T = T^{\dagger}$, il faut et il suffit que $\mathfrak{s}$ soit hermitienne, i.e. que

$$\langle \varphi | T\psi \rangle = \overline{\langle \psi | T\varphi \rangle} \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in F \ .$$

Il suffit de constater que $\mathfrak{s}$ est hermitienne si, et seulement si, T est une adjointe de T .

(d) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $\mathfrak{s}$ est hermitienne, respectivement hermitienne positive si, et seulement si, on a $\langle \varphi | T\varphi \rangle \in \mathbb{R}$, respectivement $\langle \varphi | T\varphi \rangle \geqslant 0$ pour tout $\varphi \in F$.

Cela découle directement de la formule de polarisation, proposition 1.3.iii. ——— □

DEFINITION 3 Une application linéaire continue $T : F \longrightarrow F^{\dagger}$ est dite un *noyau* . Si $T = T^{\dagger}$ on dit que ce noyau est *hermitien* . Si en plus on a

$$\langle \varphi | T\varphi \rangle \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ ,$$

on dit qu'il est *hermitien positif* . On désigne par $\mathcal{L}_h\left(F, F^{\dagger}\right)$, respectivement $\mathcal{L}_+\left(F, F^{\dagger}\right)$, le sous-espace vectoriel réel des noyaux hermitiens, respectivement le cône convexe des noyaux hermitiens positifs.

REMARQUE 4 Soient $S, T \in \mathcal{L}_h\left(F, F^{\dagger}\right)$. Pour que $S = T$, il faut et il suffit que, pour tout $\varphi \in F$, on ait

$$\langle \varphi | S\varphi \rangle = \langle \varphi | T\varphi \rangle \ .$$

C'est immédiat par les formules de polarisation, proposition 1.3, (ii) et (iii). ——— □

PROPOSITION *Le noyau h de $\mathcal{H} \hookrightarrow F^{\dagger}$ est hermitien positif, i.e. $h \in \mathcal{L}_{+}\left(F, F^{\dagger}\right)$, et on a*

$$(h\varphi|\,\xi)_{\mathcal{H}} = \langle\varphi|\,\xi\rangle_F \quad \textit{pour tout } \varphi \in F \textit{ et } \xi \in \mathcal{H} \ .$$

En particulier on a

$$\langle\varphi|\,h\psi\rangle_F = (h\varphi|\,h\psi)_{\mathcal{H}} \quad \textit{et} \quad \langle\varphi|\,h\varphi\rangle_F = \|h\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \textit{pour tout } \varphi, \psi \in F \ .$$

En outre $h : F_\tau \longrightarrow \mathcal{H}$ est continue, i.e.

$$\varphi \longmapsto \langle\varphi|\,h\varphi\rangle_F^{\frac{1}{2}} = \|h\varphi\|_{\mathcal{H}}$$

est une semi-norme continue sur F_τ .

En effet

$$(h\varphi|\,\xi) = \left(j^{\dagger}\varphi\middle|\,\xi\right) = \langle\varphi|\,j\xi\rangle = \langle\varphi|\,\xi\rangle \ ,$$

et par suite

$$\langle\varphi|\,h\psi\rangle = (h\varphi|\,h\psi) = \overline{(h\psi|\,h\varphi)} = \overline{\langle\psi|\,h\varphi\rangle} = \langle h\varphi|\,\psi\rangle \ ,$$

ce qui montre que le noyau $h : F \longrightarrow F^{\dagger}$ est hermitien. On aurait aussi pu calculer

$$\left(jj^{\dagger}\right)^{\dagger} = j^{\dagger\dagger}j^{\dagger} = jj^{\dagger} \ .$$

Il est positif puisque

$$\langle\varphi|\,h\varphi\rangle = \|h\varphi\|^2 \geqslant 0 \ .$$

La continuité de $h : F_\tau \longrightarrow \mathcal{H}$ découle de la remarque 1. □

COROLLAIRE *Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace vectoriel de $F^{\dagger}$ muni d'une structure d'espace de Hilbert. Pour que $\mathcal{H} \hookrightarrow F^{\dagger}$ soit un sous-espace hilbertien, il faut et il suffit qu'il existe une application $h : F \longrightarrow \mathcal{H}$ telle que*

$$\langle\varphi|\,\xi\rangle_F = (h\varphi|\,\xi)_{\mathcal{H}} \quad \textit{pour tout } \varphi \in F \textit{ et } \xi \in \mathcal{H} \ .$$

Dans ce cas h est le noyau de $\mathcal{H} \hookrightarrow F^{\dagger}$.

La nécessité découle de la proposition. Réciproquement la formule montre que h est l'adjointe de $j : \mathcal{H} \hookrightarrow F^{\dagger}$, donc que j est continue par le scolie 3.7, puis par comparaison que h est bien le noyau. □

5.2 Exemples élémentaires de sous-espaces hilbertiens

EXEMPLE 1 Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert (en semi-dualité avec lui-même) et $\mathcal{G} \sqsubset \mathcal{H}$ un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$. Alors $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$, en ayant muni $\mathcal{G}$ du produit scalaire induit par $\mathcal{H}$, est un sous-espace hilbertien de $\mathcal{H}$, dont le noyau est l'orthoprojecteur

$$P_{\mathcal{G}} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G} .$$

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$ et $\eta \in \mathcal{G}$, on a

$$(\varphi| \eta)_{\mathcal{H}} = (P_{\mathcal{G}}\varphi| \eta)_{\mathcal{H}} = (P_{\mathcal{G}}\varphi| \eta)_{\mathcal{G}} .$$

□

REMARQUE 1 Ceci montre que la notion de noyau d'un sous-espace hilbertien généralise celle d'orthoprojecteur sur un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert.

EXEMPLE 2 Soit $\xi \in F^{\dagger}$ tel que $\xi \neq 0$. Alors $\mathbb{K} \cdot \xi$, muni du produit scalaire

$$(\alpha \cdot \xi, \beta \cdot \xi) \longmapsto \overline{\alpha} \cdot \beta$$

(ξ est donc de norme 1 dans $\mathbb{K} \cdot \xi$), est un sous-espace hilbertien $\mathbb{K} \cdot \xi \hookrightarrow F^{\dagger}$ dont le noyau est

$$|\xi\rangle \langle\xi| : \varphi \longmapsto |\xi\rangle \langle\xi| \varphi = \langle\xi| \varphi\rangle \cdot \xi .$$

En effet on a

$$\langle\varphi| \alpha \cdot \xi\rangle = \langle\varphi| \xi\rangle \cdot \alpha = \left(\langle\xi| \varphi\rangle \cdot \xi \middle| \alpha \cdot \xi\right) = \left(|\xi\rangle \langle\xi| \varphi \middle| \alpha \cdot \xi\right) .$$

□

EXEMPLE 3 Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Le noyau de tout sous-espace hilbertien $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur borné auto-adjoint positif dans $\mathcal{H}$. Celui de $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}$ est Id . Nous verrons réciproquement grâce au théorème de Schwartz (cf. exemple 5.11.2) qu'à tout opérateur borné auto-adjoint positif dans $\mathcal{H}$ correspond un unique sous-espace hilbertien de $\mathcal{H}$.

EXEMPLE 4 Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert en semi-dualité avec $\mathcal{H}^{\dagger}$. Les noyaux de

$$\mathcal{H}^{\dagger}_{\beta} \hookrightarrow \mathcal{H}^{\dagger} \quad \text{et} \quad \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\sigma} = \left(\mathcal{H}^{\dagger}\right)^{\dagger}$$

sont respectivement l'application de Riesz

$$R : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^{\dagger}_{\beta} \quad \text{et} \quad R^{-1} : \mathcal{H}^{\dagger} \longrightarrow \mathcal{H} .$$

En effet par définition du produit scalaire sur $\mathcal{H}^{\dagger}_{\beta}$, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ et $\mu \in \mathcal{H}^{\dagger}_{\beta}$, on a

$$\langle\xi| \mu\rangle_{\mathcal{H}} = (R\xi| \mu)_{\mathcal{H}^{\dagger}_{\beta}} \quad \text{et} \quad \langle\mu| \xi\rangle_{\mathcal{H}^{\dagger}} = \left(R^{-1}\mu| \xi\right)_{\mathcal{H}} .$$

□

EXEMPLE 5 Soient X un espace localement compact et μ une intégrale de Radon (positive) sur X . Alors

$$\mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow \mathcal{M}(X) : \xi \longmapsto \xi \cdot \mu$$

est un sous-espace hilbertien, dont le noyau est

$$\mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) : \varphi \longmapsto [\varphi] \ .$$

Il faut faire attention si l'on ne fait pas de distinction entre la fonction φ et sa classe $[\varphi]$. Par exemple si le support de μ n'est pas X (cf. remarque 1.2.1 et définition 1.2.2), ce noyau n'est pas injectif ! Par précaution, on peut écrire

$$\mathbf{L}^2(\mu) \cdot \mu \hookrightarrow \mathcal{M}(X) \ ,$$

dont le noyau est

$$\mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) \cdot \mu : \varphi \longmapsto \varphi \cdot \mu \ .$$

En effet $\langle \varphi | \xi \cdot \mu \rangle = \int \overline{\varphi} \cdot \xi \, d\mu = (\varphi | \xi)$. □

EXEMPLE 6 Pour tout $x \in X$, on a $\mathbb{K} \cdot \varepsilon_x \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$ et son noyau est $|\varepsilon_x\rangle \langle \varepsilon_x|$.

D'après l'exemple précédent, comme $\mathbb{K} \cdot \varepsilon_x = \mathbf{L}^2(\varepsilon_x) \cdot \varepsilon_x$, le noyau est

$$\varphi \longmapsto \varphi \cdot \varepsilon_x = \varphi(x) \cdot \varepsilon_x = |\varepsilon_x\rangle \langle \varepsilon_x| \varphi \ .$$

On aurait aussi pu appliquer l'exemple 2. □

EXERCICE Soient $\mathcal{H}, \mathcal{G}$ des espaces de Hilbert. On a $\Big(|\mathcal{G})_i(\mathcal{H}| \Big)^\dagger = \mathcal{L}_s(\mathcal{H}, \mathcal{G}_\sigma)$. Montrer que $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ est un sous-espace hilbertien de $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}, \mathcal{G}_\sigma)$ et calculer son noyau.

Dans ce formalisme (cf. Cohen-Tannoudji [5], p. 108 et ss) l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des vecteurs ket représentent les états physiques du système quantique considéré. Rappelons (cf. [5], p. 94 et ss) que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel d'un espace $\mathbf{L}^2$. Cohen-Tannoudji suppose pratiquement (cf. p. 95) que $\mathcal{E} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Plus généralement on peut supposer que $\mathcal{E}$ est un espace test par rapport à une intégrale de Radon pivot μ (cf. définition 1.16.2).

Après avoir introduit le dual $\mathcal{E}^*$ de $\mathcal{E}$ formé des vecteurs bra et le vecteur bra associé à un vecteur ket de $\mathcal{E}$, Cohen-Tannoudji constate que certains bra (les distributions de Dirac) n'ont pas de ket correspondant dans $\mathcal{E}$ (cf. [5], p. 110 et ss). Ces vecteurs bra jouent pourtant un rôle primordial comme vecteurs de base dans une décomposition continue et il leur associe des vecteurs ket généralisés ayant un "produit scalaire" avec tout vecteur ket de $\mathcal{E}$ (cf. [5], p. 113 et 114).

Il me semble plus naturel de considérer un espace localement convexe séparé F , ainsi qu'un sous-espace hilbertien $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ de noyau h , par exemple un espace test F par rapport à une intégrale de Radon pivot μ , donc $\mathcal{H} = \mathbf{L}^2(\mu)$, et d'interpréter $h(F)$ comme l'espace des états physiques et $F^\dagger$ comme l'espace des vecteurs ket généralisés. On a donc les inclusions

$$h(F) \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger \ .$$

5.3 Caractérisation d'un sous-espace hilbertien

Voici une caractérisation d'un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ à l'aide de son noyau h montrant comment certaines informations relatives à $\mathcal{H}$ sont contenues dans h .

PROPOSITION *Soit $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ un sous-espace hilbertien de noyau h .*

(i) Le sous-espace vectoriel $h(F)$ est dense dans $\mathcal{H}$, et $\mathcal{H}$ est le complété de $h(F)$ muni du produit scalaire

$$(h\varphi|\, h\psi)_{h(F)} := \langle \varphi|\, h\psi\rangle_F \ .$$

(ii) Soit $\xi \in F^\dagger$. Pour que $\xi \in \mathcal{H}$, il faut et il suffit qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$|\langle \varphi|\, \xi\rangle| \leqslant c \cdot \langle \varphi|\, h\varphi\rangle^{\frac{1}{2}} \quad \textit{pour tout } \varphi \in F \ .$$

Dans ce cas,

$$\|\xi\|_{\mathcal{H}} = \sup\nolimits_{\varphi\in F, \langle \varphi|h\varphi\rangle \leqslant 1} |\langle \varphi|\, \xi\rangle|$$

est la plus petite de ces constantes.

La densité de $h(F)$ dans $\mathcal{H}$ est clair puisque j est injective (cf. corollaire 3.10.iv). La première partie est alors évidente en utilisant la proposition 5.1. Quant à la seconde, si $\xi \in \mathcal{H}$, on a

$$|\langle \varphi|\, \xi\rangle| = |(h\varphi|\, \xi)| \leqslant \|\xi\| \cdot \|h\varphi\| = \|\xi\| \cdot \langle \varphi|\, h\varphi\rangle^{\frac{1}{2}} \ .$$

Ceci montre que $\|\xi\|$ est l'une de ces constantes. L'égalité en découle car la boule unité de $h(F)$ est dense dans celle de $\mathcal{H}$ par la remarque 3.8.2. Réciproquement si $\xi \in F^\dagger$ satisfait à l'inégalité, on vérifie immédiatement que ξ s'annule sur $\operatorname{Ker} h$, donc définit une forme semi-linéaire

$$h\varphi \longmapsto \langle \varphi|\, \xi\rangle$$

continue sur $h(F)$. Elle possède donc un prolongement continu à $\mathcal{H}$. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe $\eta \in \mathcal{H}$ tel que

$$\langle \varphi|\, \xi\rangle = (h\varphi|\, \eta) = \langle \varphi|\, \eta\rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

On a donc $\xi = \eta \in \mathcal{H}$. □

THEOREME (d'unicité) *Un sous-espace hilbertien est univoquement déterminé par son noyau.*

Plus précisément, si h et g sont les noyaux de $\mathcal{H}, \mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$, alors $\mathcal{H} = \mathcal{G}$ si, et seulement si, pour tout $\varphi \in F$, on a $\|h\varphi\|_{\mathcal{H}} = \|g\varphi\|_{\mathcal{G}}$.

En effet (ii) montre que le sous-espace vectoriel est univoquement déterminé par h , puis (i) qu'il en est de même de la structure hilbertienne. La seconde partie découle de la remarque 5.1.3. □

REMARQUE 1 Le noyau fournit une indexation uniforme, paramétrée par F , d'une partie dense de chaque sous-espace hilbertien.

REMARQUE 2 Nous verrons en démontrant le théorème de Schwartz (cf. remarque 5.11.2) une autre caractérisation d'un sous-espace hilbertien utilisant la notion d'image décrite dans le paragraphe suivant.

EXEMPLE La seconde partie de la proposition est une version abstraite d'un résultat classique en théorie de l'intégration (cf. exercice 1.16.3) :

Soient X un espace localement compact et μ une intégrale de Radon (positive) sur X . Pour qu'une intégrale de Radon ν sur X appartienne à $\mathbf{L}^2(\mu)$, i.e. que ν soit de base μ et de densité dans $\mathbf{L}^2(\mu)$, il faut et il suffit que

$$\sup_{\varphi\in\mathcal{K}(X),\|\varphi\|_2\leqslant 1} |\langle\varphi|\,\nu\rangle| < \infty \ ,$$

i.e. que ν soit continue sur $\mathcal{K}(X)$ pour la topologie induite par $\mathbf{L}^2(\mu)$.

5.4 Image d'un sous-espace hilbertien

Nous allons maintenant donner un procédé très général de construction de sous-espaces hilbertiens. Soient G un autre espace localement convexe séparé et $\Phi \in \mathcal{L}\left(F^{\dagger}, G^{\dagger}\right)$. Si $\mathcal{H} \hookrightarrow F^{\dagger}$ est un sous-espace hilbertien de $F^{\dagger}$ de noyau $h : F \longrightarrow F^{\dagger}$, alors

$$\Phi_{|\mathcal{H}} = \Phi h^{\dagger} : \mathcal{H} \longrightarrow G^{\dagger}$$

est une bijection de

$$\operatorname{Ker}\left(\Phi_{|\mathcal{H}}\right)^{\perp\mathcal{H}} = (\mathcal{H} \cap \operatorname{Ker}\Phi)^{\perp\mathcal{H}}$$

sur $\Phi(\mathcal{H})$. Munissons ce sous-espace vectoriel du produit scalaire transporté, i.e.

$$(\Phi\xi|\,\Phi\eta)_{\Phi(\mathcal{H})} := (\xi|\,\eta)_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \xi,\eta \in \operatorname{Ker}\left(\Phi_{|\mathcal{H}}\right)^{\perp\mathcal{H}} \; .$$

On dit que $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $\Phi\xi = \theta$ est un *représentant* de $\theta \in \Phi(\mathcal{H})$. L'unique représentant $\xi \in \operatorname{Ker}\left(\Phi_{|\mathcal{H}}\right)^{\perp\mathcal{H}}$ sera noté $\Phi_{|\mathcal{H}}^{-1}\theta$ et s'appelle le *représentant de Parseval* de θ ; nous dirons également que

$$\overset{-1}{\Phi}_{|\mathcal{H}} : \theta \longmapsto \overset{-1}{\Phi}_{|\mathcal{H}}\theta : \Phi(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{H}$$

est l'*application de Parseval* .

THEOREME *$\Phi(\mathcal{H}) \hookrightarrow G^{\dagger}$ est un sous-espace hilbertien dont le noyau $g : G \longrightarrow G^{\dagger}$ est*

$$\Phi h \Phi^{\dagger} \; .$$

Plus précisément, pour tout $\theta \in \Phi(\mathcal{H})$, on a

$$\|\theta\|_{\Phi(\mathcal{H})} = \min\nolimits_{\xi\in\mathcal{H},\Phi\xi=\theta} \|\xi\|_{\mathcal{H}} = \left\|\overset{-1}{\Phi}_{|\mathcal{H}}\theta\right\|_{\mathcal{H}} \;,$$

i.e. le représentant de Parseval $\overset{-1}{\Phi}_{|\mathcal{H}}\theta$ est l'unique solution du problème variationnel

$$\Phi\xi = \theta \quad \textit{et} \quad \|\xi\| \ \textit{est minimal.}$$

L'application de Parseval est une isométrie et $\overset{-1}{\Phi}_{|\mathcal{H}}\Phi_{|\mathcal{H}}$ est l'orthoprojecteur sur $\operatorname{Ker}\left(\Phi_{|\mathcal{H}}\right)^{\perp\mathcal{H}}$.

Pour tout $\gamma \in G$, l'élément $h\Phi^{\dagger}\gamma$ de $\mathcal{H}$ est le représentant de Parseval de $\Phi h \Phi^{\dagger}\gamma$. D'autre part, pour tout $\xi,\eta \in \mathcal{H}$, on a

$$(\Phi\xi|\,\Phi\eta)_{\Phi(\mathcal{H})} = (\xi|\,\eta)_{\mathcal{H}} \;,$$

pour autant que l'un des ξ,η soit le représentant de Parseval.

La deuxième partie découle du théorème de la projection, car le représentant de Parseval $\overset{-1}{\Phi}_{|\mathcal{H}}\theta$ de $\theta \in \Phi(\mathcal{H})$ est la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker}\left(\Phi_{|\mathcal{H}}\right)^{\perp\mathcal{H}}$ de tout représentant de θ .

Démontrons la troisième partie. Pour tout $\gamma \in G$ et $\xi \in \mathcal{H} \cap \operatorname{Ker}\Phi$, on a

$$\left(h\Phi^{\dagger}\gamma\middle|\,\xi\right)_{\mathcal{H}} = \left\langle \Phi^{\dagger}\gamma\middle|\,\xi\right\rangle = \langle\gamma|\,\Phi\xi\rangle = 0 \;,$$

donc $h\Phi^\dagger\gamma \in \operatorname{Ker}\left(\Phi_{|\mathcal{H}}\right)^{\perp\mathcal{H}}$. Quant à la dernière formule, on a

$$\left(\xi \left| \overset{-1}{\Phi}_{|\mathcal{H}}\theta \right.\right)_{\mathcal{H}} = \left(\overset{-1}{\Phi}_{|\mathcal{H}}[\Phi\xi] \left| \overset{-1}{\Phi}_{|\mathcal{H}}\theta \right.\right)_{\mathcal{H}} = (\Phi\xi|\,\theta)_{\Phi(\mathcal{H})} \ .$$

Finalement, pour tout $\gamma \in G$ et $\theta \in \Phi(\mathcal{H})$, il vient

$$\langle\gamma|\,\theta\rangle_G = \left\langle \gamma \left| \Phi\left(\overset{-1}{\Phi}_{|\mathcal{H}}\theta\right) \right.\right\rangle_G = \left\langle \Phi^\dagger\gamma \left| \overset{-1}{\Phi}_{|\mathcal{H}}\theta \right.\right\rangle_F = \left(h\Phi^\dagger\gamma \left| \overset{-1}{\Phi}_{|\mathcal{H}}\theta \right.\right)_{\mathcal{H}} = \left(\Phi h\Phi^\dagger\gamma\right|\theta\big)_{\Phi(\mathcal{H})} \ ,$$

d'où la première assertion. □

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{H}_\sigma \arrow[dr, "h^\dagger"] & \\
F \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "h"] & & F^\dagger \arrow[d, "\Phi"] \\
G \arrow[u, "\Phi^\dagger"] \arrow[rr, "\Phi h\Phi^\dagger"] \arrow[dr, "g"'] & & G^\dagger \\
 & \Phi(\mathcal{H})_\sigma \arrow[ur, "g^\dagger"'] &
\end{tikzcd}$$

DEFINITION Nous dirons que $\Phi(\mathcal{H}) \hookrightarrow G^\dagger$ est le *sous-espace hilbertien image de $\mathcal{H}$ par* Φ .

REMARQUE L'application de Parseval $\overset{-1}{\Phi}_{|\mathcal{H}}$ est un inverse à droite de $\Phi_{|\mathcal{H}}$. Pour que Φ soit une application unitaire de $\mathcal{H}$ sur $\Phi(\mathcal{H})$, il faut et il suffit que Φ soit injective sur $\mathcal{H}$.

COROLLAIRE *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\Psi : F \longrightarrow \mathcal{H}$ une application linéaire faiblement continue.*

(i) Si l'on considère la semi-dualité $(\mathcal{H}|\,\mathcal{H})$, i.e. en identifiant $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_\beta^\dagger$, alors $\Psi^\dagger(\mathcal{H}) \hookrightarrow F^\dagger$ est un sous-espace hilbertien de noyau $\Psi^\dagger\Psi$.

(ii) Si l'on considère la semi-dualité $\left\langle\mathcal{H}|\,\mathcal{H}_\beta^\dagger\right\rangle$, i.e on n'identifie pas $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_\beta^\dagger$, et $R : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_\beta^\dagger$ est l'application de Riesz, alors $\Psi^\dagger\left(\mathcal{H}_\beta^\dagger\right) \hookrightarrow F^\dagger$ est un sous-espace hilbertien de noyau $\Psi^\dagger R\Psi$.

En effet les noyaux de $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_\beta^\dagger \hookrightarrow \mathcal{H}^\dagger$ sont respectivement Id et R d'après les exemples 5.2.3 et 5.2.4. □

EXEMPLE 1 On peut évidemment appliquer le corollaire si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ muni d'une topologie localement convexe plus fine que celle induite par celle de $\mathcal{H}$, par exemple la topologie localement convexe la plus fine, et en prenant l'injection canonique pour Ψ .

EXEMPLE 2 L'exemple 5.2.5 s'obtient en considérant l'espace de Hilbert $\mathbf{L}^2(\mu)$, l'application canonique

$$\Psi : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) : \varphi \longmapsto \varphi$$

et en identifiant $\mathbf{L}^2(\mu)$ avec son semi-dual fort. L'application de Riesz est donc l'identité et, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ et $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$, on a

$$\left\langle \varphi \middle| \Psi^\dagger \xi \right\rangle = (\varphi|\, \xi)_{\mathbf{L}^2(\mu)} = \int \overline{\varphi} \cdot \xi \; d\mu = \langle \varphi|\, \xi \cdot \mu \rangle \ .$$

On en déduit que le noyau de $\Psi^\dagger(\mathbf{L}^2(\mu))$ est $\varphi \longmapsto \varphi \cdot \mu$, ce qu'il fallait démontrer.

EXEMPLE 3 Plus généralement, nous allons utiliser les notations de l'exemple 3.4.5, en particulier la semi-dualité

$$\left\langle \mathbf{L}^2(\mu, \rho) \middle| \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) \right\rangle$$

définie par $\langle \xi|\, \eta \rangle_{\mu,\rho} := \int \overline{\xi} \cdot \eta \, d\mu$. L'application de Riesz est dans ce cas

$$\mathbf{L}^2(\mu, \rho) \longrightarrow \left[\mathbf{L}^2(\mu, \rho)\right]^\dagger_\beta = \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) : \xi \longmapsto \rho \cdot \xi \ .$$

Soient $\rho \in \mathbf{L}^1_{\text{loc}}(\mu)$ et

$$\Psi : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu, \rho) : \varphi \longmapsto \varphi \ .$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ et $\eta \in \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right)$, on a

$$\left\langle \varphi \middle| \Psi^\dagger \eta \right\rangle = \langle \Psi\varphi|\, \eta \rangle_\rho = \int \overline{\varphi} \cdot \eta \, d\mu = \langle \varphi|\, \eta \cdot \mu \rangle \ ,$$

car $\mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) \subset \mathbf{L}^1_{\text{loc}}(\mu)$:

$$\|\varphi \cdot \eta\|_1 = \left\| \sqrt{\rho} \cdot \varphi \cdot \frac{\eta}{\sqrt{\rho}} \right\|_1 \leqslant \|\sqrt{\rho} \cdot \varphi\|_2 \cdot \left\| \frac{\eta}{\sqrt{\rho}} \right\|_2 = \|\varphi\|_{2,\rho} \cdot \|\eta\|_{2,\frac{1}{\rho}} < \infty \ .$$

On en déduit que le noyau de $\Psi^\dagger\left(\mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right)\right)$ est $\Psi^\dagger R \Psi : \varphi \longmapsto \rho \cdot \varphi \cdot \mu$. Mais c'est aussi le noyau de $\mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) \cdot \mu$, puisque

$$\langle \varphi|\, \eta \cdot \mu \rangle = \int \overline{\varphi} \cdot \eta \, d\mu = \langle \varphi|\, \eta \rangle_\rho = (\rho \cdot \varphi|\, \eta)_{\mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right)}$$

(cf. remarque 5.1.1). Ainsi

$$\Psi^\dagger\left(\mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right)\right) = \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) \cdot \mu \ .$$

Remarquons que

$$\mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) \cdot \mu = \mathbf{L}^2(\rho\mu) \cdot \rho\mu = \mathbf{L}^2(\mu, \rho) \cdot \rho\mu \ ,$$

ce qui peut paraître surprenant, mais dans le second cas $\rho\mu$ est l'intégrale pivot, tandis que dans le premier c'est μ qui joue ce rôle (cf. remarque 4.2).

On a $\mathbf{L}^2(\mu, \rho) \subset \mathbf{L}^1_{\text{loc}}(\mu)$ si, et seulement si, $\frac{1}{\rho} \in \mathbf{L}^1_{\text{loc}}(\mu)$. Dans ce cas $\mathbf{L}^2(\mu, \rho) \cdot \mu$ est le plongement naturel de $\mathbf{L}^2(\mu, \rho) = \mathbf{L}^2(\rho\mu)$ dans $\mathcal{M}(X)$!

La suffisance découle de ce qui précède. Réciproquement soit K un compact de X . L'injection $\mathbf{L}^2(\rho \cdot \mu, K) \hookrightarrow \mathbf{L}^1(\mu, K)$ étant évidemment de graphe fermé, elle est continue. Il existe donc une constante $M < \infty$ telle que

$$\|\psi\|_{1,K} \leqslant M \cdot \|\psi\|_{2,\rho,K} \quad \text{pour tout } \psi \in \mathbf{L}^2(\rho \cdot \mu, K) \ .$$

Pour tout $f \in \mathbf{L}^1_+(\mu, K)$, on a $\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\rho}} \in \mathbf{L}^2(\mu, \rho, K)$, donc

$$\left\| \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\rho}} \right\|_{1,K} \leqslant M \cdot \left\| \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\rho}} \right\|_{2,\rho,K} = M \cdot \|f\|_{1,K}^{\frac{1}{2}} \ .$$

Appliquant cette inégalité à 1_K on obtient

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right\|_{1,K} \leqslant M \cdot \|1\|_{1,K}^{\frac{1}{2}} \ ,$$

puis par récurrence

$$\left\| \rho^{-\frac{2^n-1}{2^n}} \right\|_{1,K} \leqslant M^{1+..+\frac{1}{2^{n-1}}} \cdot \|1\|_{1,K}^{\frac{1}{2^n}}$$

pour tout $n \geqslant 1$. Comme nous pouvons supposer que $\rho \leqslant 1$, nous obtenons finalement

$$\|\rho^{-1}\|_{1,K} = \limsup_{n \geqslant 1} \left\| \rho^{-\frac{2^n-1}{2^n}} \right\|_{1,K} \leqslant M^2 \ .$$

$\square$

EXEMPLE 4 Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors $\mathbf{L}^2(X)$ est un sous-espace hilbertien de $\mathcal{D}(X)'$ de noyau

$$\varphi \longmapsto \varphi : \mathcal{D}(X) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(X) \ .$$

De même $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace hilbertien de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ de noyau

$$\varphi \longmapsto \varphi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \ .$$

La théorie des sous-espaces hilbertiens permet de démontrer assez facilement certains résultats cités ou démontrés par P.A. Fillmore et J.P. Williams [9]. Nous en verrons quelques exemples dans la suite.

EXEMPLE 5 Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, T un opérateur borné dans $\mathcal{H}$ et $\xi \in \mathcal{H}$. Alors le noyau de $T(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{H}$ est TT^* et, pour que $\xi \in T(\mathcal{H})$, il faut et il suffit que

$$\sup_{\eta \in \mathcal{H}, \|T^*\eta\| \leqslant 1} |(\eta|\,\xi)| < \infty \ .$$

Le noyau de $T(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{H}$ est évidemment TT^* par le théorème et la seconde partie n'est qu'une reformulation de la proposition 5.3.ii. $\square$

La seconde partie est un résultat de Yu. L. Shmulyan (cf. [9], corollary 2, p. 259).

EXEMPLE 6 Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, T un opérateur borné dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de $\mathcal{H}$. Pour que $\mathcal{G} = T(\mathcal{H})$, il faut et il suffit que $g = TT^*$. En particulier si $g^{\frac{1}{2}}$ est l'unique racine carrée auto-adjointe positive de g (cf. exemple 6.8.3), on a $\mathcal{G} = g^{\frac{1}{2}}(\mathcal{H})$.

C'est immédiat par le théorème d'unicité 5.3, puisque le noyau de $T(\mathcal{H})$ est g par l'exemple précédent. $\square$

EXEMPLE 7 Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de noyau g . Alors le noyau de $g(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{H}$ est g^2 et celui de $g(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{G}$ est $g_{|\mathcal{G}}$.

La première partie découle de l'exemple 5 ci-dessus, puisque g est un opérateur borné positif dans $\mathcal{H}$, donc $g^* = g$. En considérant $g : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$, l'adjointe $g^\dagger$ est l'injection canonique de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{H}$ et le noyau de $g(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{G}$ est $gg^\dagger = g_{|\mathcal{G}}$ également par le théorème. □

EXEMPLE 8 Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et R l'application de Riesz, alors l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^\dagger$ est l'image de $\mathcal{H}$ par R , i.e. $\mathcal{H}^\dagger = R(\mathcal{H})$.

C'est immédiat puisque par définition, pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, on a

$$(R\xi | R\eta)_{\mathcal{H}^\dagger} = (\xi | \eta)_{\mathcal{H}} .$$

□

5.5 Transitivité

PROPOSITION *Soient $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ et $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ des sous-espaces hilbertiens de noyaux*

$$h : F \longrightarrow \mathcal{H}_\sigma \quad \text{et} \quad g : \mathcal{H}_\sigma \longrightarrow \mathcal{G}_\sigma$$

respectivement. Alors le noyau de $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$ est $gh : F \longrightarrow \mathcal{G}_\sigma$.

En effet $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$ est l'image de $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ par $h^\dagger$. Son noyau est donc

$$h^\dagger g^\dagger gh \ .$$

□

LEMME *On a des injections canoniques continues*

$$\mathcal{L}_s(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{L}_s(F, \mathcal{H}) : T \longmapsto Th \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_s(F, \mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{L}_s\left(F, F_\sigma^\dagger\right) : S \longmapsto h^\dagger S$$

et, pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, les formules

$$|\xi)(\eta| h = |\xi\rangle\langle\eta| \quad \text{et} \quad h^\dagger |\xi)(\eta| h = |\xi\rangle\langle\eta| \ .$$

La première assertion découle du fait que $h(F)$ est dense dans $\mathcal{H}$ d'après la proposition 5.3.i. La deuxième est évidente. Quant aux formules, pour tout $\varphi \in F$, il vient

$$|\xi)(\eta| h\varphi = (\eta| h\varphi)_{\mathcal{H}} \cdot \xi = \langle\eta|\varphi\rangle_F \cdot \xi = |\xi)\langle\eta|\varphi$$

et

$$\left\langle\varphi | h^\dagger |\xi)\right\rangle_F = (h\varphi|\xi)_{\mathcal{H}} = \langle\varphi|\xi\rangle \ .$$

□

COROLLAIRE *Soient $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ un sous-espace hilbertien et $(e_j)_{j\in J}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Alors $(|e_j)\langle e_j|)_{j\in J}$ et $(|e_j\rangle\langle e_j|)_{j\in J}$ sont respectivement sommables dans $\mathcal{L}_s(F, \mathcal{H})$ et $\mathcal{L}_s\left(F, F^\dagger\right)$, et le noyau de $\mathcal{H}$ est*

$$\sum_{j\in J} |e_j)\langle e_j| : F \longrightarrow \mathcal{H} \quad \text{ou} \quad \sum_{j\in J} |e_j\rangle\langle e_j| : F \longrightarrow F^\dagger \ .$$

En effet $(|e_j)(e_j|)_{j\in J}$ est sommable dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ et on a

$$\mathrm{Id} = \sum_{j\in J} |e_j)(e_j| \quad \text{dans } \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$$

(cf. 3.21), d'où le résultat. □

5.6 Dilatation d'un sous-espace hilbertien

Soient $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ un sous-espace hilbertien de noyau h et $\alpha \geqslant 0$. L'application

$$\Phi : F^\dagger \longrightarrow F^\dagger : \xi \longmapsto \sqrt{\alpha} \cdot \xi$$

est évidemment linéaire continue.

DEFINITION On désigne par $\alpha \cdot \mathcal{H}$ le sous-espace hilbertien $\Phi(\mathcal{H})$.

On a évidemment $0 \cdot \mathcal{H} = \{0\}$. Pour tout $\alpha > 0$, le sous-espace vectoriel sous-jacent de $\alpha \cdot \mathcal{H}$ est $\mathcal{H}$ et, pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$,

$$\left(\sqrt{\alpha} \cdot \xi \middle| \sqrt{\alpha} \cdot \eta\right)_{\alpha \cdot \mathcal{H}} = (\xi | \eta)_{\mathcal{H}} \ .$$

Le représentant de Parseval de $\xi \in \alpha \cdot \mathcal{H}$ est $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \xi$ et on a

$$(\xi | \eta)_{\alpha \cdot \mathcal{H}} = \frac{1}{\alpha} \cdot (\xi | \eta)_{\mathcal{H}} \ .$$

En d'autres termes si $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$ un sous-espace hilbertien et $\alpha > 0$, alors $\mathcal{G} = \alpha \cdot \mathcal{H}$ si, et seulement si, les sous-espaces vectoriels $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ coincident et si, pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{G}$, on a

$$(\xi | \eta)_{\mathcal{G}} = \frac{1}{\alpha} \cdot (\xi | \eta)_{\mathcal{H}} \ .$$

PROPOSITION *Le noyau de $\alpha \cdot \mathcal{H}$ est $\alpha \cdot h$ et, pour tout $\varphi \in F$, le représentant de Parseval de $(\alpha \cdot h)\,\varphi$ est $\sqrt{\alpha} \cdot h\varphi$.*

On a $\Phi^\dagger \varphi = \sqrt{\alpha} \cdot \varphi$ pour tout $\varphi \in F$, d'où le résultat. □

5.7 Somme de deux sous-espaces hilbertiens

Soient $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ et $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$ des sous-espaces hilbertiens de noyaux h et g respectivement. L'application linéaire

$$\Phi : \mathcal{H} \times \mathcal{G} \longrightarrow F^\dagger : (\xi, \eta) \longmapsto \xi + \eta$$

est continue.

En effet, pour tout $\varphi \in F$, $\xi \in \mathcal{H}$ et $\eta \in \mathcal{G}$, on a

$$\langle \varphi | \, \xi + \eta \rangle = (h\varphi | \, \xi)_{\mathcal{H}} + (g\varphi | \, \eta)_{\mathcal{G}} = ((h\varphi, g\varphi) | \, (\xi, \eta))_{\mathcal{H}\times\mathcal{G}} \ .$$

□

DEFINITION 1 On désigne par $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ le sous-espace hilbertien $\Phi(\mathcal{H} \times \mathcal{G})$ et on dit que c'est la *somme* de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$.

Le sous-espace vectoriel sous-jacent de $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ est évidemment la somme des sous-espaces vectoriels sous-jacents. Le produit scalaire de $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ est plus complexe et dépend de la position relative de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ puisque

$$\operatorname{Ker} \Phi = \{ (\xi, -\xi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G} \mid \xi \in \mathcal{H} \cap \mathcal{G} \} \ .$$

L'étude du cas où $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} = \{0\}$ sera faite en 5.10.

PROPOSITION *Le noyau de $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ est $h + g$ et, pour tout $\varphi \in F$, le représentant de Parseval de $(h + g)\varphi$ est $(h\varphi, g\varphi)$.*

Pour tout $\varphi \in F$, $\xi \in \mathcal{H}$ et $\eta \in \mathcal{G}$, il vient

$$\left(\Phi^\dagger \varphi \middle| \, (\xi, \eta) \right)_{\mathcal{H}\times\mathcal{G}} = \langle \varphi | \, \xi + \eta \rangle = ((h\varphi, g\varphi) | \, (\xi, \eta))_{\mathcal{H}\times\mathcal{G}} \ ,$$

et par suite $\Phi^\dagger \varphi = (h\varphi, g\varphi)$. Le noyau de $\mathcal{H} + \mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$ est donc

$$\Phi\Phi^\dagger = h + g$$

par le théorème 5.4. □

DEFINITION 2 Le représentant de Parseval de $\theta \in \mathcal{H} + \mathcal{G}$ sera noté $(p_{\mathcal{H}}\theta, p_{\mathcal{G}}\theta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G}$; on dit que $\theta = p_{\mathcal{H}}\theta + p_{\mathcal{G}}\theta$ est la *décomposition de Parseval* de θ et que les applications linéaires $p_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} + \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ et $p_{\mathcal{G}} : \mathcal{H} + \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ sont les *applications de Parseval* de la décomposition $\mathcal{H} + \mathcal{G}$.

Les autres assertions du théorème 5.4 peuvent être reformulées de la manière suivante :

SCOLIE *Pour $\theta \in \mathcal{H} + \mathcal{G}$ la décomposition de Parseval $\theta = p_{\mathcal{H}}\theta + p_{\mathcal{G}}\theta$ est l'unique décomposition $\theta = \xi + \eta$ telle que $\|\theta\|^2_{\mathcal{H}+\mathcal{G}} = \|\xi\|^2_{\mathcal{H}} + \|\eta\|^2_{\mathcal{G}}$. C'est aussi l'unique solution du problème variationnel*

$$\theta = \xi + \eta \quad \text{et} \quad \|\xi\|^2_{\mathcal{H}} + \|\eta\|^2_{\mathcal{G}} \quad \text{est minimal.}$$

THEOREME

(i) L'application de Parseval $p_{\mathcal{H}} : \mathcal{H}+\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ *est le noyau du sous-espace hilbertien* $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}+\mathcal{G}$ *. Elle est de norme* $\leqslant 1$ *et*

$$\operatorname{Ker} p_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^{\perp(\mathcal{H}+\mathcal{G})} \ .$$

(ii) Les opérateurs $p_{\mathcal{H}}$ *et* $p_{\mathcal{G}}$ *dans* $\mathcal{H}+\mathcal{G}$ *sont auto-adjoints positifs de norme* $\leqslant 1$ *, commutent l'un avec l'autre, satisfont à* $p_{\mathcal{H}} + p_{\mathcal{G}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}+\mathcal{G}}$ *et* $0 \leqslant p_{\mathcal{H}}, p_{\mathcal{G}} \leqslant \mathrm{Id}$ *.*

(iii) Le noyau du sous-espace hilbertien $p_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}+\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{H}$ *est* $p_{\mathcal{H}|\mathcal{H}}$ *. Il est injectif.*

Dmonstration de (i) Pour tout $\theta \in \mathcal{H}+\mathcal{G}$ et $\xi \in \mathcal{H}$, on a

$$(p_{\mathcal{H}}\theta |\, \xi)_{\mathcal{H}} = (p_{\mathcal{H}}\theta |\, \xi)_{\mathcal{H}} + (p_{\mathcal{G}}\theta |\, 0)_{\mathcal{G}} = ((p_{\mathcal{H}}\theta, p_{\mathcal{G}}\theta) |\, (\xi, 0))_{\mathcal{H}\times\mathcal{G}} = (\theta |\, \xi)_{\mathcal{H}+\mathcal{G}}$$

d'après la dernière formule du théorème 5.4. Ceci montre que $p_{\mathcal{H}} : \mathcal{H}+\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ est le noyau de $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}+\mathcal{G}$ par le corollaire 5.1. On a

$$\|p_{\mathcal{H}}\theta\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \|p_{\mathcal{H}}\theta\|_{\mathcal{H}}^2 + \|p_{\mathcal{G}}\theta\|_{\mathcal{G}}^2 = \|\theta\|_{\mathcal{H}+\mathcal{G}}^2 \ ,$$

donc $\|p_{\mathcal{H}}\| \leqslant 1$, et

$$\operatorname{Ker} p_{\mathcal{H}} = (\operatorname{Im} p_{\mathcal{H}}^*)^{\perp} = \mathcal{H}^{\perp(\mathcal{H}+\mathcal{G})} \ ,$$

puisque $p_{\mathcal{H}}^*$ est l'injection canonique de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}+\mathcal{G}$.

Dmonstration de (ii) On a $\|p_{\mathcal{H}}^*\| \leqslant 1$ par le corollaire 3.8 ou bien simplement, en utilisant le problème variationnel, que

$$\|\xi\|_{\mathcal{H}+\mathcal{G}}^2 \leqslant \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|0\|_{\mathcal{G}}^2 = \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 \ .$$

Considéré comme un opérateur dans $\mathcal{H}+\mathcal{G}$, on en déduit que $p_{\mathcal{H}}$ est de norme $\leqslant 1$. Par la proposition ci-dessus appliquée à $F = \mathcal{H}+\mathcal{G}$ et l'exemple 5.2.3, on obtient $p_{\mathcal{H}} + p_{\mathcal{G}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}+\mathcal{G}}$. Les autres assertions sont immédiates.

Dmonstration de (iii) Le théorème 5.4 montre que le noyau de $p_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}+\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{H}$ est

$$p_{\mathcal{H}} \,\mathrm{Id}\ p_{\mathcal{H}}^{\dagger} = p_{\mathcal{H}|\mathcal{H}} \ .$$

Ce noyau est injectif par (i). □

EXEMPLE Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et S, T des opérateurs bornés dans $\mathcal{H}$. Alors

$$S(\mathcal{H}) + T(\mathcal{H}) = (SS^* + TT^*)^{\frac{1}{2}}(\mathcal{H})$$

(cf. [9], theorem 2.2, p. 260).

Cela découle des exemples 5 et 6 de 5.4. En effet, les noyaux des sous-espaces hilbertiens $S(\mathcal{H})$ et $T(\mathcal{H})$ sont respectivement SS^* et TT^* , tandis que celui de $S(\mathcal{H})+T(\mathcal{H})$ est SS^*+TT^* par la proposition. □

5.8 Structure d'ordre sur les sous-espaces hilbertiens

DEFINITION 1 Soient $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ et $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$ des sous-espaces hilbertiens de noyaux h et g respectivement. Nous noterons $\mathcal{H} \leqslant \mathcal{G}$ si

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \quad \text{et} \quad \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G} \text{ est continue de norme } \leqslant 1 \ .$$

Ceci définit évidemment une structure d'ordre sur $Hilb\left(F^\dagger\right)$. Remarquons que $\mathcal{L}\left(F, F^\dagger\right)$ est aussi muni d'une structure d'ordre, notée $T \leqslant S$, définie par

$$S - T \in \mathcal{L}_+\left(F, F^\dagger\right) \ ,$$

i.e.

$$\langle \varphi | T\varphi \rangle \leqslant \langle \varphi | S\varphi \rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

PROPOSITION *Soient $\mathcal{H}, \mathcal{G} \in Hilb\left(F^\dagger\right)$.*

(i) Pour que $\mathcal{H} \leqslant \mathcal{G}$, il faut et il suffit que l'on ait $h \leqslant g$.

(ii) Pour que l'on ait $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, il faut et il suffit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathcal{H} \leqslant \alpha \cdot \mathcal{G}$.

Dmonstration de (i) La condition est nécessaire car, pour tout $\varphi \in F$, on a

$$\langle \varphi | h\varphi \rangle = \|h\varphi\|^2 = \sup_{\xi \in \mathcal{H}, |\xi| \leqslant 1} |\langle \varphi | \xi \rangle|^2 \leqslant \sup_{\eta \in \mathcal{G}, |\eta| \leqslant 1} |\langle \varphi | \eta \rangle| = \langle \varphi | g\varphi \rangle \ .$$

Réciproquement, soit $\xi \in \mathcal{H}$. Par la proposition 5.3.ii on obtient alors

$$\infty > \|\xi\|_{\mathcal{H}} = \sup_{\varphi \in F, \langle \varphi | h\varphi \rangle \leqslant 1} |\langle \varphi | \xi \rangle| \geqslant \sup_{\varphi \in F, \langle \varphi | g\varphi \rangle \leqslant 1} |\langle \varphi | \xi \rangle| \ ,$$

ce qui montre que $\xi \in \mathcal{G}$ et que $\|\xi\|_{\mathcal{G}} \leqslant \|\xi\|_{\mathcal{H}}$.

Dmonstration de (ii) La condition est évidemment suffisante. Réciproquement, d'après le théorème du graphe fermé 3.14, l'injection canonique $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$ est continue. En effet elle a un graphe fermé, les topologies de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ étant plus fines que celle induite par $F^\dagger$. Il existe donc un $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\|\cdot\|_{\mathcal{G}} \leqslant \sqrt{\alpha} \cdot \|\cdot\|_{\mathcal{H}} = \|\cdot\|_{\frac{1}{\alpha} \cdot \mathcal{H}} \ ,$$

ce qui montre que $\frac{1}{\alpha} \cdot \mathcal{H} \leqslant \mathcal{G}$. □

COROLLAIRE *Si $\mathcal{H} = \mathcal{G}$ comme ensembles, alors les normes de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sont équivalentes et il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que*

$$\alpha \cdot \mathcal{G} \leqslant \mathcal{H} \leqslant \beta \cdot \mathcal{G} \ .$$

En particulier, sur un sous-espace vectoriel de $F^\dagger$ il existe au plus une topologie d'espace de Hilbert telle que l'injection canonique soit continue.

DEFINITION 2 Dans le cas du corollaire, on dit que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sont *équivalents* et on écrit $\mathcal{H} \equiv \mathcal{G}$.

5.9 Intersection de deux sous-espaces hilbertiens

Soient $\mathcal{H} \hookrightarrow F^{\dagger}$ et $\mathcal{G} \hookrightarrow F^{\dagger}$ des sous-espaces hilbertiens de noyaux h et g respectivement. On vérifie immédiatement que $\mathcal{H} \cap \mathcal{G}$ muni du produit scalaire

$$(\theta | \vartheta)_{\mathcal{H} \cap \mathcal{G}} := (\theta | \vartheta)_{\mathcal{H}} + (\theta | \vartheta)_{\mathcal{G}}$$

est un sous-espace hilbertien. On a $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} \leqslant \mathcal{H}, \mathcal{G}$.

PROPOSITION *Les noyaux de $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ et $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G}$ sont respectivement $p_{\mathcal{G}|\mathcal{H}}$ et $p_{\mathcal{G}} p_{\mathcal{H}} = p_{\mathcal{H}} p_{\mathcal{G}}$. On a*

$$\operatorname{Ker} p_{\mathcal{G}} = (\mathcal{H} \cap \mathcal{G})^{\perp \mathcal{H}} \ .$$

En outre

$$\mathcal{H} = p_{\mathcal{H}} (\mathcal{H} + \mathcal{G}) + \mathcal{H} \cap \mathcal{G}$$

et les applications de Parseval de cette décomposition sont $p_{\mathcal{H}|\mathcal{H}}$ et $p_{\mathcal{G}|\mathcal{H}}$, donc

$$0 \leqslant p_{\mathcal{H}|\mathcal{H}}, p_{\mathcal{G}|\mathcal{H}} \leqslant \mathrm{Id} \ .$$

D'autre part $h(F)$ est dense dans $p_{\mathcal{H}} (\mathcal{H} + \mathcal{G})$ et

$$\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 = \|p_{\mathcal{H}} \xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|p_{\mathcal{G}} \xi\|_{\mathcal{H}}^2 + 2 \cdot \|p_{\mathcal{G}} \xi\|_{\mathcal{G}}^2 \quad \textit{pour tout } \xi \in \mathcal{H} \ .$$

Pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ et $\theta \in \mathcal{H} \cap \mathcal{G}$, on a

$$(\xi | \theta)_{\mathcal{H}} = (p_{\mathcal{H}} \xi + p_{\mathcal{G}} \xi | \theta)_{\mathcal{H}} = (p_{\mathcal{G}} \xi | \theta)_{\mathcal{G}} + (p_{\mathcal{G}} \xi | \theta)_{\mathcal{H}} = (p_{\mathcal{G}} \xi | \theta)_{\mathcal{H} \cap \mathcal{G}} \ ,$$

car $(p_{\mathcal{H}} \xi | \theta)_{\mathcal{H}} = (\xi | \theta)_{\mathcal{H}+\mathcal{G}} = (p_{\mathcal{G}} \xi | \theta)_{\mathcal{G}}$. Ceci prouve la première partie grâce au corollaire 5.1. Par la proposition 5.5 et le théorème 5.7, on en déduit que le noyau de $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G}$ est $p_{\mathcal{G}|\mathcal{H}} p_{\mathcal{H}} = p_{\mathcal{G}} p_{\mathcal{H}}$. Si $\theta \in \operatorname{Ker} p_{\mathcal{G}}$, on a $\theta = p_{\mathcal{H}} \theta \in \mathcal{H}$, donc

$$\operatorname{Ker} p_{\mathcal{G}} = \operatorname{Ker} p_{\mathcal{G}|\mathcal{H}} = \left(\operatorname{Im} p_{\mathcal{G}|\mathcal{H}}^{\dagger} \right)^{\perp \mathcal{H}} = (\mathcal{H} \cap \mathcal{G})^{\perp \mathcal{H}} \ ,$$

puisque $p_{\mathcal{G}|\mathcal{H}}^{\dagger}$ est l'injection canonique de $\mathcal{H} \cap \mathcal{G}$ dans $\mathcal{H}$.

En outre d'après 5.7, proposition et théorème, le noyau de

$$p_{\mathcal{H}} (\mathcal{H} + \mathcal{G}) + \mathcal{H} \cap \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$$

est $p_{\mathcal{H}|\mathcal{H}} + p_{\mathcal{G}|\mathcal{H}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$, ce qui permet de conclure à l'aide du théorème d'unicité 5.3. D'autre part

$$h(F) = p_{\mathcal{H}} (h + g)(F)$$

et $(h + g)(F)$ est dense dans $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ d'après la proposition 5.3.i. Quant à la formule, on a

$$\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 = \|p_{\mathcal{H}} \xi\|_{p_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}+\mathcal{G})}^2 + \|p_{\mathcal{G}} \xi\|_{\mathcal{H} \cap \mathcal{G}}^2 = \|\xi\|_{\mathcal{H}+\mathcal{G}}^2 + \|p_{\mathcal{G}} \xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|p_{\mathcal{G}} \xi\|_{\mathcal{G}}^2 =$$

$$= \|p_{\mathcal{H}} \xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|p_{\mathcal{G}} \xi\|_{\mathcal{H}}^2 + 2 \cdot \|p_{\mathcal{G}} \xi\|_{\mathcal{G}}^2 \ .$$

□

5.10 Somme directe de deux sous-espaces hilbertiens

Soient $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ et $\mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$ des sous-espaces hilbertiens de noyaux h et g respectivement.

DEFINITION On dit que $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ est la *somme directe* de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ si l'application

$$\Phi : \mathcal{H} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G} : (\xi, \eta) \longmapsto \xi + \eta$$

est bijective, i.e. si $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} = \{0\}$. Dans ce cas on écrit $\mathcal{H} \boxplus \mathcal{G}$.

REMARQUE Cette notation est justifiée, car Φ est une application unitaire de $\mathcal{H} \times \mathcal{G}$ sur $\mathcal{H} + \mathcal{G}$, donc $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sont orthogonaux dans $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ et les applications de Parseval $p_{\mathcal{H}}$ et $p_{\mathcal{G}}$ sont respectivement les orthoprojecteurs sur $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$.

Ainsi l'orthogonalité de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ est équivalente à $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} = \{0\}$.

PROPOSITION *Pour que la somme $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ soit directe, il faut et il suffit que que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ soient étrangers pour l'ordre, c'est-à-dire que, pour tout sous-espace hilbertien $\mathcal{K}$, on ait $\mathcal{K} = \{0\}$ si $\mathcal{K} \leqslant \mathcal{H}, \mathcal{G}$.*

La condition est évidemment nécessaire puisque

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{H} \cap \mathcal{G} = \{0\} \ .$$

Réciproquement, on a $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} \leqslant \mathcal{H}, \mathcal{G}$ (cf. 5.9), donc $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} = \{0\}$. $\square$

5.11 Théorème de Schwartz

LEMME *Pour tout noyau hermitien positif $h \in \mathcal{L}_+\left(F, F^\dagger\right)$, la fonction*

$$\varphi \longmapsto \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$$

est une semi-norme s.c.i. sur F .

Elle est continue si F est tonnelé.

La forme sesquilinéaire

$$F \times F \longrightarrow \mathbb{K} : (\varphi, \psi) \longmapsto \langle \varphi | h\psi \rangle = \langle h\varphi | \psi \rangle$$

est hermitienne positive puisque $h \in \mathcal{L}_+\left(F, F^\dagger\right)$. On a donc $|\langle \psi | h\varphi \rangle| \leqslant \langle \psi | h\psi \rangle^{\frac{1}{2}} \cdot \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (proposition 1.1), donc

$$\sup\nolimits_{\psi \in F, \langle \psi | h\psi \rangle \leqslant 1} |\langle \psi | h\varphi \rangle| \leqslant \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}} \ .$$

En prenant

$$\psi = \frac{\varphi}{\langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}}$$

si $\langle \varphi | h\varphi \rangle \neq 0$, on obtient l'égalité, le cas $\langle \varphi | h\varphi \rangle = 0$ étant trivial. On en déduit évidemment que $\varphi \longmapsto \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$ est s.c.i., puis la continuité à l'aide du scolie 2.13. □

THEOREME *Pour tout noyau hermitien positif $h \in \mathcal{L}_+\left(F, F^\dagger\right)$ tel que $\varphi \longmapsto \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$ soit continue, il existe un unique sous-espace hilbertien $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ de noyau h .*

L'application noy : $\mathcal{H} \longmapsto h$ est un morphisme injectif croissant de $Hilb\left(F^\dagger\right)$ dans le conoïde ordonné $\mathcal{L}_+\left(F, F^\dagger\right)$; c'est un isomorphisme si F est tonnelé.

En particulier $Hilb\left(F^\dagger\right)$ est un conoïde ordonné et on a associativité et commutativité de l'addition, distributivité de la multiplication par les scalaires positifs par rapport à l'addition et compatibilité avec l'ordre.

En outre si $\Phi \in \mathcal{L}\left(F_\sigma^\dagger, G_\sigma^\dagger\right)$, alors

$$\Phi : Hilb\left(F^\dagger\right) \longrightarrow Hilb\left(G^\dagger\right) : \mathcal{H} \longmapsto \Phi\left(\mathcal{H}\right)$$

est une application linéaire croissante.

L'unicité a déjà été démontrée en 5.3. La forme hermitienne positive $(\varphi, \psi) \longmapsto \langle \varphi | h\psi \rangle$ passe au quotient $F_h := F / \operatorname{Ker} h$ en définissant

$$(\varphi + \operatorname{Ker} h, \psi + \operatorname{Ker} h) \longmapsto \langle \varphi | h\psi \rangle \ ,$$

puisque pour $\varphi \in \operatorname{Ker} h$ ou $\psi \in \operatorname{Ker} h$, on a bien $\langle \varphi | h\psi \rangle = \langle h\varphi | \psi \rangle = 0$. C'est un produit scalaire sur F_h par le théorème 1.1, car si $0 = \|\psi + \operatorname{Ker} h\|^2 = \langle \psi | h\psi \rangle$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \varphi | h\psi \rangle| \leqslant \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \psi | h\psi \rangle^{\frac{1}{2}} \ ,$$

montre que $\langle \varphi | h\psi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in F$, donc que $h\psi = 0$, i.e. $\psi + \operatorname{Ker} h = 0$. Soit $\widehat{F_h}$ l'espace de Hilbert complété de F_h (cf. remarque 3.8.2).

L'application canonique quotient

$$\Psi : F \longrightarrow \widehat{F_h} : \varphi \longmapsto \varphi + \operatorname{Ker} h$$

est continue par hypothèse, car on a

$$\|\varphi + \operatorname{Ker} h\|_{\widehat{F_h}} = \langle \varphi | \, h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}} \ .$$

D'après le corollaire 5.4.ii, le sous-espace hilbertien image $\mathcal{H} := \Psi^{\dagger}\left(\left(\widehat{F_h}\right)^{\dagger}_{\beta}\right)$ est de noyau $\Psi^{\dagger}Q\Psi$, où $Q : \widehat{F_h} \longrightarrow \left(\widehat{F_h}\right)^{\dagger}_{\beta}$ désigne l'application de Riesz. Pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a

$$\left\langle \varphi \middle| \, \Psi^{\dagger}Q\Psi\psi \right\rangle = \langle \Psi\varphi | \, Q\Psi\psi \rangle_{\widehat{F_h}} = (\Psi\varphi | \, \Psi\psi)_{\widehat{F_h}} = \langle \varphi | \, h\psi \rangle \ ,$$

donc $\Psi^{\dagger}Q\Psi = h$.

La dernière partie découle des propositions 5.6, 5.7, 5.8 et du théorème 5.4. $\square$

REMARQUE 1 Il est pratiquement indispensable de faire l'hypothèse que F est tonnelé pour montrer que

$$\varphi \longmapsto \langle \varphi | \, h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$$

est une semi-norme continue. On peut quelque peu l'affaiblir, car il suffit que $F^{\dagger}$ soit séquentiellement complet pour une topologie compatible avec la dualité, mais cela ne semble pas très utile.

Plus généralement, *noy* est un isomorphisme de $Hilb\left(F^{\dagger}\right)$ sur le sous-conoïde héréditaire vers le bas de $\mathcal{L}_{+}\left(F, F^{\dagger}\right)$ formé des noyaux positifs h tels que la semi-norme

$$\varphi \longmapsto \langle \varphi | \, h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$$

soit continue pour la topologie de Mackey $\tau\left(F, F^{\dagger}\right)$ sur F .

Il suffit d'appliquer le théorème de Schwartz à F_{τ} . Nous avons vu que cette condition est nécessaire dans la proposition 5.1. Le sous-conoïde de ces semi-normes est héréditaire vers le bas puisque, pour tout $g \in \mathcal{L}_{+}\left(F, F^{\dagger}\right)$ tel que $g \leqslant h$, on a évidemment $\langle \varphi | \, g\varphi \rangle^{\frac{1}{2}} \leqslant \langle \varphi | \, h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$ pour tout $\varphi \in F$, ce qui montre que la semi-norme associée à g est aussi continue pour la topologie de Mackey. $\square$

REMARQUE 2 Dans la démonstration du théorème de Schwartz nous avonc obtenu une autre caractérisation du sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ à l'aide de son noyau h (cf. 5.3). On a

$$\mathcal{H} = \Psi^{\dagger}\left(\left(\widehat{F_h}\right)^{\dagger}_{\beta}\right) \ ,$$

où

$$\Psi : F \longrightarrow \widehat{F_h} : \varphi \longmapsto \varphi + \operatorname{Ker} h$$

est l'application canonique de F dans l'espace de Hilbert $\widehat{F_h}$ associé à la forme sesquilinéaire hermitienne positive $(\varphi, \psi) \longmapsto \langle \varphi | \, h\psi \rangle$définie par h .

La connexion entre ces deux caractérisations est donnée par la formule $h = \Psi^{\dagger}Q\Psi$. Si l'on identifie $\left(\widehat{F_h}\right)^{\dagger}_{\beta}$ avec son image $\mathcal{H}$ — $\Psi^{\dagger}$ s'identifie donc à l'injection canonique $\mathcal{H} \hookrightarrow F^{\dagger}$ — ce qui est souvent utile pour simplifier les notations, alors l'unique application linéaire continue $\widehat{h} : \widehat{F_h} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui factorise h par Ψ est l'application de Riesz $Q : \widehat{F_h} \longrightarrow \mathcal{H} = \left(\widehat{F_h}\right)^{\dagger}_{\beta}$.

EXEMPLE 1 Soient $\mathcal{H}, \mathcal{G} \in Hilb\left(F^{\dagger}\right)$. Si $\mathcal{H} \leqslant \mathcal{G}$, il existe un unique sous-espace hilbertien $\mathcal{K}$ de $F^{\dagger}$ tel que $\mathcal{G} = \mathcal{H} + \mathcal{K}$.

En effet $g - h \in \mathcal{L}_{+}\left(F, F^{\dagger}\right)$ est le noyau d'un sous-espace hilbertien $\mathcal{K} \hookrightarrow F^{\dagger}$ et

$$g = h + (g - h) \ ,$$

car la semi-norme

$$\varphi \longmapsto \langle \varphi | \, (g - h) \, \varphi \rangle^{\frac{1}{2}} \leqslant \langle \varphi | \, g\varphi \rangle^{\frac{1}{2}}$$

est évidemment continue pour la topologie de Mackey. □

EXEMPLE 2 Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Le théorème de Schwartz montre qu'il y a correspondance biunivoque entre les sous-espaces hilbertiens $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ et les opérateurs bornés auto-adjoints positifs g dans $\mathcal{H}$ (cf. exemple 5.2.3).

Ceci montre également que $Hilb\,(\mathcal{H})$ est l'ensemble des images d'opérateurs bornés dans $\mathcal{H}$ (cf. exemple 5.4.6). La théorie des sous-espaces hilbertiens est donc le cadre naturel dans lequel il faut placer le travail de Fillmore et Williams.

EXEMPLE 3 Soient $U : F \longrightarrow \mathcal{H}$, $V : F \longrightarrow \mathcal{G}$ des applications linéaires faiblement continues dans des espaces de Hilbert $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$, en semi-dualité avec eux-mêmes. La forme sesquilinéaire hermitienne positive

$$(\varphi, \psi) \longmapsto (U\varphi | \, U\psi)_{\mathcal{H}} + (V\varphi | \, V\psi)_{\mathcal{G}} : F \times F \longrightarrow \mathbb{K}$$

est associée au noyau hermitien positif

$$k := U^{\dagger}U + V^{\dagger}V \ .$$

La semi-norme

$$\varphi \longmapsto \langle \varphi | \, k\varphi \rangle^{\frac{1}{2}} = \left[(U\varphi | \, U\psi)_{\mathcal{H}} + (V\varphi | \, V\psi)_{\mathcal{G}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

est évidemment continue. On a

$$\operatorname{Ker} k = \operatorname{Ker} U \cap \operatorname{Ker} V \ ,$$

et si $\mathcal{K} \hookrightarrow F^{\dagger}$ désigne le sous-espace hilbertien associé à k , en utilisant la remarque 2 ci-dessus, on obtient

$$\Psi^{\dagger}\left(\left(\widehat{F_k}\right)^{\dagger}_{\beta}\right) = \mathcal{K} = U^{\dagger}\left(\mathcal{H}\right) + V^{\dagger}\left(\mathcal{G}\right) \ .$$

En outre, si $\widehat{k} : \widehat{F_k} \longrightarrow F^{\dagger}$, $\widehat{U} : \widehat{F_k} \longrightarrow \mathcal{H}$ et $\widehat{V} : \widehat{F_k} \longrightarrow \mathcal{G}$ désignent les factorisations de k , U et V par $\varphi \longmapsto \varphi + \operatorname{Ker} k$, alors

$$\widehat{k} = U^{\dagger}\widehat{U} + V^{\dagger}\widehat{V}$$

induit l'application de Riesz $\widehat{F_k} \longrightarrow \mathcal{K} = \left(\widehat{F_k}\right)^{\dagger}_{\beta}$.

5.12 Champs de carré intégrable

Dans tout ce qui suit, soient
Λ un espace topologique séparé, σ une intégrale de Radon sur Λ ,
$\widehat{\mathcal{H}} : \Lambda \longrightarrow Hilb\left(F^{\dagger}\right)$ une famille de sous-espaces hilbertiens dans $F^{\dagger}$
et
$\widehat{h} : \Lambda \longrightarrow \mathcal{L}_s\left(F, F^{\dagger}\right)$ la famille des noyaux correspondants.

DEFINITION 1 Pour tout $\lambda \in \Lambda$, la norme et le produit scalaire dans $\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)$ seront notés $\|\cdot\|_{\lambda} = \|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)}$ et $(\cdot|\cdot)_{\lambda} = (\cdot|\cdot)_{\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)}$. Pour toute application

$$\theta : \Lambda \longrightarrow F^{\dagger} ,$$

on définit

$$\|\theta\|_{\diamond} = \|\theta\|_{\widehat{\mathcal{H}}} : \lambda \longmapsto \|\theta(\lambda)\|_{\lambda} = \sup\nolimits_{\varphi \in F, \left\langle \varphi | \widehat{h}(\lambda)\varphi \right\rangle \leqslant 1} |\langle \varphi | \theta(\lambda) \rangle| : \Lambda \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ ,$$

et on pose

$$\|\theta\|_2 := \|\|\theta\|_{\diamond}\|_2 = \left(\int^* \|\theta(\lambda)\|_{\lambda}^2 \, d\sigma(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Il est clair que $\|\cdot\|_2$ est dénombrablement sous-additive. Comme toujours nous ne ferons aucune différence entre une classe, modulo l'égalité σ-p.p. , et l'un des représentant de cette classe. Il faut évidemment s'assurer, dans toute définition, que cela ne dépend pas du représentant choisi.

Si $\|\theta\|_2 < \infty$, on a $\|\theta\|_{\diamond} < \infty$ σ-p.p. (cf. cours d'Analyse [17], corollaire 15.1.ii). D'autre part la proposition 5.3.ii montre que

$$\theta(\lambda) \in \widehat{\mathcal{H}}(\lambda) \quad \Longleftrightarrow \quad \|\theta(\lambda)\|_{\lambda} < \infty .$$

Ceci nous conduit naturellement à la

DEFINITION 2 On dit que $\theta : \Lambda \longrightarrow F^{\dagger}$ est un *champ* (à valeurs dans $\widehat{\mathcal{H}}$) si θ est scalairement σ-mesurable et si l'on a

$$\theta(\lambda) \in \widehat{\mathcal{H}}(\lambda) \quad \text{pour } \sigma\text{-presque tous les } \lambda \in \Lambda ,$$

Si θ, ζ sont des champs, on définit

$$(\theta|\zeta)_{\diamond} : \lambda \longmapsto (\theta(\lambda)|\zeta(\lambda))_{\lambda} : \Lambda \longrightarrow \mathbb{K} ,$$

en σ-presque tous les λ où cela a un sens, et par 0 sinon.

Nous désignerons par $\mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ l'espace vectoriel des classes, modulo l'égalité σ-p.p. , des champs θ de carré intégrable, donc tels que $\|\theta\|_2 < \infty$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$.

REMARQUE 1 $\mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ n'est pas nécessairement un espace de Hilbert. Le point délicat est de définir le produit scalaire, ce qui nécessite la σ-mesurabilité de $(\theta|\zeta)_{\diamond}$, ou celle de $\|\theta\|_{\diamond}$

par les formules de polarisations 1.3, ii et iii. Mais ceci n'est en général pas satisfait, même si l'on suppose que $\widehat{h}$ est scalairement σ-mesurable.

On a tout d'abord la

PROPOSITION $\mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ *est un espace de Banach.*

Plus précisément soit $(\theta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy dans* $\mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ *. Alors il existe une sous-suite* $(\alpha(l))_{l\in\mathbb{N}}$ *telle que :*

(i) Pour σ*-presque tous les* $\lambda \in \Lambda$ *, la suite* $\left(\theta_{\alpha(l)}(\lambda)\right)_{l\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)$ *.*

(ii) La suite $\left(\theta_{\alpha(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ *converge ponctuellement* σ*-p.p. dans* $F^\dagger$ *vers un champ* $\theta \in \mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ *tel que*

$$\theta = \lim_k \theta_k \quad \textit{dans } \mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \ .$$

En outre il existe une fonction $g \in \mathcal{SK}(\Lambda) \cap \mathbf{L}^2(\sigma)$ *telle que*

$$\left\|\theta_{\alpha(l)}\right\|_\diamond \leqslant g \quad \textit{pour tout } l \in \mathbb{N} \ .$$

Soit $(\theta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$. Il existe alors une sous-suite $\left(\theta_{\alpha(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\left\|\theta_{\alpha(l+1)} - \theta_{\alpha(l)}\right\|_2 \leqslant \frac{1}{2^l} \ ,$$

et on a

$$\left\|\sum_{l=0}^\infty \left\|\theta_{\alpha(l+1)} - \theta_{\alpha(l)}\right\|_\diamond\right\|_2 \leqslant \sum_{l=0}^\infty \left\|\theta_{\alpha(l+1)} - \theta_{\alpha(l)}\right\|_2 = \sum_{l=0}^\infty \frac{1}{2^l} < \infty \ .$$

Ceci montre que

$$\lambda \longmapsto \sum_{l=0}^\infty \left\|\theta_{\alpha(l+1)}(\lambda) - \theta_{\alpha(l)}(\lambda)\right\|_\lambda$$

est finie σ-p.p. . Par suite $\left(\theta_{\alpha(l)}(\lambda)\right)_{l\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)$ pour σ-presque tous les $\lambda \in \Lambda$. Définissons $\theta : \Lambda \longrightarrow F^\dagger$ par

$$\theta(\lambda) = \lim_l \theta_{\gamma(l)}(\lambda) \quad \text{dans } \widehat{\mathcal{H}}(\lambda) \ ,$$

lorsque cette limite existe, et par 0 sinon. Ainsi θ est limite σ-p.p. dans $F^\dagger$ de la suite $\left(\theta_{\alpha(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$, donc est scalairement σ-mesurable. En outre, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\|\theta_{\alpha(k)} - \theta\right\|_\diamond = \left\|\sum_{l=k}^\infty \left[\theta_{\alpha(l+1)} - \theta_{\alpha(l)}\right]\right\|_\diamond \leqslant \sum_{l=k}^\infty \left\|\theta_{\alpha(l+1)} - \theta_{\alpha(l)}\right\|_\diamond \ ,$$

donc comme ci-dessus

$$\left\|\theta_{\alpha(k)} - \theta\right\|_2 \leqslant \left\|\sum_{l=k}^\infty \left\|\theta_{\alpha(l+1)} - \theta_{\alpha(l)}\right\|_\diamond\right\|_2 \leqslant \sum_{l=k}^\infty \frac{1}{2^l} \ .$$

Ceci montre que $\theta \in \mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$, et comme dans le cas classique, que $(\theta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers θ dans $\mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$. Finalement, il suffit de choisir $g \in \mathcal{SK}_+(\Lambda)$ tel que $\int^* g^2\, d\sigma < \infty$ et

$$g \geqslant \left\|\theta_{\alpha(0)}\right\|_\diamond + \sum_{l=0}^{\infty} \left\|\theta_{\alpha(l+1)} - \theta_{\alpha(l)}\right\|_\diamond \ ,$$

puisque

$$\int^* \left(\left\|\theta_{\alpha(0)}\right\|_\diamond + \sum_{l=0}^{\infty} \left\|\theta_{\alpha(l+1)} - \theta_{\alpha(l)}\right\|_\diamond\right)^2 d\sigma = \left\|\left\|\theta_{\alpha(0)}\right\|_\diamond + \sum_{l=0}^{\infty} \left\|\theta_{\alpha(l+1)} - \theta_{\alpha(l)}\right\|_\diamond\right\|_2^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\theta_{\alpha(0)}\right\|_2 + \sum_{l=0}^{\infty} \left\|\theta_{\alpha(l+1)} - \theta_{\alpha(l)}\right\|_2 < \infty \ .$$

$\square$

Rappelons que $\mathcal{L}_s\left(F, F^\dagger\right) = \left(|F\rangle_i \langle F|\right)^\dagger$ (cf. remarque 3.13.1).

LEMME

(i) Une application $\theta : \Lambda \longrightarrow F^\dagger$ est un champ si, et seulement si, on a $\|\theta\|_\diamond < \infty$ σ-presque partout, en particulier si l'on a $\|\theta\|_2 < \infty$.

(ii) Pour tout $\varphi \in F$, l'application

$$\widehat{h}\varphi : \lambda \longmapsto \widehat{h}(\lambda)\,\varphi : \Lambda \longrightarrow F^\dagger$$

est un champ et on a

$$\left\|\widehat{h}\varphi\right\|_\diamond^2 = \left(\widehat{h}\varphi\middle|\widehat{h}\varphi\right)_\diamond = \left\langle \varphi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle \ .$$

(iii) Pour que $\widehat{h}$ soit scalairement σ-mesurable, il faut et il suffit que $\left\|\widehat{h}\varphi\right\|_\diamond$ soit σ-mesurable pour tout $\varphi \in F$.

(iv) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $\widehat{h}$ est scalairement σ-intégrable.

(b) Pour tout $\varphi \in F$, $\widehat{h}\varphi$ est scalairement σ-intégrable.

(c) Pour tout $\varphi \in F$, on a $\left\|\widehat{h}\varphi\right\|_\diamond \in \mathbf{L}^2(\sigma)$.

Dmonstration de (i) Cela découle de la proposition 5.3.ii.

Dmonstration de (ii) C'est évident.

Dmonstration de (iii) Remarquons que $|F\rangle\langle F|$ est engendré par les tenseurs élémentaires $|\psi\rangle\langle\varphi|$, pour $\varphi, \psi \in F$, et que

$$\left\langle |\psi\rangle\langle\varphi| \middle| \widehat{h} \right\rangle = \left\langle \psi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle \ .$$

La suffisance est alors conséquence des formules de polarisation de la proposition 1.3, ii et iii, puisque chaque $\widehat{h}(\lambda)$ est hermitien. Il est clair que la condition est nécessaire.

Dmonstration de (iv) Les conditions (a) et (b) sont évidemment équivalentes. La formule de (ii) montre que (b) entraîne (c). Finalement, si (c) est satisfait, on a

$$\left|\left\langle \psi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle\right| = \left|\left(\widehat{h}\psi \middle| \widehat{h}\varphi\right)_\diamond\right| \leqslant \left\|\widehat{h}\psi\right\|_\diamond \cdot \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_\diamond \in \mathbf{L}^1(\sigma) \ ,$$

donc (a).

DEFINITION 3 Si $\widehat{h}$ est scalairement σ-intégrable, l'application sesquilinéaire à droite

$$(\varphi, f) \longmapsto \overline{f} \cdot \widehat{h}\varphi : F \times \mathbf{L}^\infty(\sigma) \longrightarrow \mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$$

induit une application linéaire $|F\rangle\langle\mathbf{L}^\infty(\sigma)| \longrightarrow \mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ dont le sous-espace vectoriel image sera noté $\left|\widehat{h}(F)\right\rangle\left\langle\mathbf{L}^\infty(\sigma)\right|$. On désigne par $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ la fermeture de $\left|\widehat{h}(F)\right\rangle\left\langle\mathbf{L}^\infty(\sigma)\right|$ dans $\mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$, i.e.

$$\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) := \overline{\left|\widehat{h}(F)\right\rangle\left\langle\mathbf{L}^\infty(\sigma)\right|}^{\mathbf{\Lambda}^2} \ .$$

COROLLAIRE *Si $\widehat{h}$ est scalairement σ-intégrable, alors l'espace de Banach $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ est un espace de Hilbert.*

Plus précisément, pour tout $\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ et $\theta \in \mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$, les fonctions

$$(\zeta|\,\theta)_\diamond : \lambda \longmapsto (\zeta(\lambda)|\,\theta(\lambda))_\lambda \quad \text{et} \quad \|\zeta\|_\diamond : \lambda \longmapsto \|\zeta(\lambda)\|_\lambda$$

sont σ-mesurables, $(\zeta|\,\theta)_\diamond \in \mathbf{L}^1(\sigma)$ et $\|\zeta\|_\diamond \in \mathbf{L}^2(\sigma)$. En outre, pour tout $\theta' \in \mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ tel que $\theta = \theta'$ scalairement σ-p.p. , on a $(\zeta|\,\theta)_\diamond = (\zeta|\,\theta')_\diamond$ σ-p.p. .

Le produit scalaire de $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ est donné par

$$(\zeta|\,\theta)_{\mathbf{L}^2} = \int (\zeta|\,\theta)_\diamond \, d\sigma \quad \text{pour tout } \zeta, \theta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \ .$$

En effet, il existe une suite $(\zeta_k) \subset \left|\widehat{h}(F)\right\rangle\left\langle\mathbf{L}^\infty(\sigma)\right|$ telle que $\zeta(\lambda) = \lim_k \zeta_k(\lambda)$ dans $\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)$ pour σ-presque tout les $\lambda \in \Lambda$. Mais pour tout $\varphi \in F$ et $f \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, la fonction $\left(\overline{f} \cdot \widehat{h}\varphi \middle| \theta\right)_\diamond = f \cdot \langle\varphi|\,\theta\rangle$ est σ-mesurable, et il en est donc de même de $(\zeta_k|\,\theta)_\diamond$ par combinaisons linéaires, puis de $(\zeta|\,\theta)_\diamond = \lim_k (\zeta_k|\,\theta)_\diamond$. On en déduit également que $(\zeta_k|\,\theta)_\diamond = (\zeta_k|\,\theta')_\diamond$ σ-p.p. , puis que $(\zeta|\,\theta)_\diamond = (\zeta|\,\theta')_\diamond$ σ-p.p. . Comme

$$\int^* |(\zeta|\,\theta)_\diamond| \, d\sigma \leqslant \int^* \|\zeta\|_\diamond \cdot \|\theta\|_\diamond \, d\sigma \leqslant \|\zeta\|_2 \cdot \|\theta\|_2 < \infty \ ,$$

les premières assertions sont démontrées.

Il est alors clair que

$$(\zeta, \theta) \longmapsto \int (\zeta|\,\theta)_\diamond \, d\sigma$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ induisant la norme $\|\cdot\|_2$. —— □

REMARQUE 2 Rappelons (cf. définition 3.12.1) qu'une application $\theta : \Lambda \longrightarrow F^{\dagger}$ est dite scalairement σ-négligeable si, pour tout $\varphi \in F$, on a $\langle \varphi | \theta \rangle = 0$ σ-presque partout ; l'ensemble de mesure nulle dépend évidemment de φ !

Si $\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ possède un représentant, pour l'égalité scalaire σ-p.p. , qui soit scalairement σ-négligeable, nous allons montrer dans le théorème qui suit que $\zeta = 0$, i.e. $\zeta = 0$ σ-p.p. . En d'autre termes l'égalité σ-p.p. et l'égalité scalaire σ-p.p. coïncident sur $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

THEOREME *Si $\widehat{h}$ est scalairement σ-intégrable, alors l'application canonique*

$$\zeta \longmapsto [\zeta] : \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \longrightarrow \mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \Big/ \{\theta = 0 \text{ scal. } \sigma\text{-p.p.}\}$$

est unitaire.

Montrons tout d'abord que c'est une isométrie. On a évidemment

$$\|[\zeta]\|_2 := \inf_{\theta=\zeta \text{ scal. } \sigma\text{-p.p.}} \|\theta\|_2 \leqslant \|\zeta\|_2 \ .$$

Pour l'autre inégalité, si $\theta = \zeta$ scalairement σ-p.p. , pour tout $\varphi \in F$ et $f \in \mathbf{L}^{\infty}(\sigma)$, on a

$$\left(\overline{f} \cdot \widehat{h}\varphi \middle| \zeta\right)_{\diamond} = f \cdot \langle \varphi | \zeta \rangle = f \cdot \langle \varphi | \theta \rangle = \left(\overline{f} \cdot \widehat{h}\varphi \middle| \theta\right)_{\diamond} \quad \sigma\text{-p.p. ,}$$

donc

$$\|\zeta\|_2 = \sup_{\vartheta \in \left|\widehat{h}(F)\right\rangle \left\langle \mathbf{L}^{\infty}(\sigma)\right|, \|\vartheta\|_2 \leqslant 1} \left| \int (\vartheta | \zeta)_{\diamond} \, d\sigma \right| =$$

$$= \sup_{\vartheta \in \left|\widehat{h}(F)\right\rangle \left\langle \mathbf{L}^{\infty}(\sigma)\right|, \|\vartheta\|_2 \leqslant 1} \left| \int (\vartheta | \theta)_{\diamond} \, d\sigma \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\vartheta \in \left|\widehat{h}(F)\right\rangle \left\langle \mathbf{L}^{\infty}(\sigma)\right|, \|\vartheta\|_2 \leqslant 1} \int^* \|\vartheta\|_{\diamond} \cdot \|\theta\|_{\diamond} \, d\sigma \leqslant \|\theta\|_2 \ .$$

Il nous reste à montrer la surjectivité. Soit donc $\theta \in \mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$. La fonction

$$\vartheta \longmapsto \int (\vartheta | \theta)_{\diamond} \, d\sigma : \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est une forme semi-linéaire continue, puisque

$$\left| \int (\vartheta | \theta)_{\diamond} \, d\sigma \right| \leqslant \int^* \|\vartheta\|_{\diamond} \cdot \|\theta\|_{\diamond} \, d\sigma \leqslant \|\vartheta\|_2 \cdot \|\theta\|_2 \ .$$

Utilisant le théorème de représentation de Riesz, il existe $\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ tel que

$$(\vartheta | \zeta)_{\mathbf{L}^2} = \int (\vartheta | \theta)_{\diamond} \, d\sigma \quad \text{pour tout } \vartheta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \ .$$

Pour tout $\varphi \in F$ et $f \in \mathbf{L}^{\infty}(\sigma)$, on a alors

$$\int f \cdot \langle \varphi | \theta \rangle \, d\sigma = \int \left(\overline{f} \cdot \widehat{h}\varphi \middle| \theta\right)_{\diamond} d\sigma = \left(\overline{f} \cdot \widehat{h}\varphi \middle| \zeta\right)_{\mathbf{L}^2} = \int f \cdot \langle \varphi | \zeta \rangle \, d\sigma \ .$$

Remarquons mainteneant que $\langle \varphi | \theta - \zeta \rangle \in \mathbf{L}^1(\sigma)$, puisque cette fonction est σ-mesurable et que

$$\|\langle \varphi | \theta - \zeta \rangle\|_1 = \left\| \left(\widehat{h}\varphi \middle| \theta - \zeta\right)_{\diamond} \right\|_1 \leqslant \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_2 \cdot \|\theta - \zeta\|_2 < \infty \ .$$

Elle est donc σ-modérée et grâce à l'exemple 1.16.1, qui montre que $\mathbf{L}^{\infty}(\sigma)$ est un espace test, on en tire $\theta = \zeta$ scalairement σ-presque partout (cf. lemme 1.16.iii).

Nous aurions aussi pu utiliser le fait que $\mathbf{L}^{\infty,\bullet}(\sigma)$ est le dual fort de $\mathbf{L}^{1}(\sigma)$, résultat que nous n'avons malheureusement pas démontré (cf. exemple 3.8.2 et remarque 3.8). $\square$

REMARQUE 3 Ce qui précède peut être généralisé de la manière suivante. Si G est un espace test de fonctions contenu dans $\mathbf{L}^2(\sigma)$, il suffit de supposer que $\widehat{h}$ est scalairement σ-intégrable sur G , i.e. pour tout $\gamma \in G$, le champ $\gamma \cdot \widehat{h}$ est scalairement σ-intégrable.

On peut par exemple prendre l'espace vectoriel $\mathcal{K}\mathbf{L}^{\infty}(\sigma)$ des fonctions essentiellement bornées à support compact, muni de la topologie finale par aux sous-espaces vectoriels $\mathcal{K}\mathbf{L}^{\infty}(\sigma, K)$ des fonctions essentiellement bornées à support dans $K \in \mathfrak{K}(X)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty,K}$, et supposer que $\widehat{h}$ est scalairement σ-intégrable sur chaque compact de Λ . L'espace $\mathcal{K}\mathbf{L}^{\infty}(\sigma)$, au contraire de $\mathbf{L}^{\infty}(\sigma)$, est contenu dans $\mathbf{L}^2(\sigma)$, mais son dual n'est pas des plus agréables. Ceci conduit à introduire d'autres espaces test, par exemple $\mathcal{K}(\Lambda)$ dans le cas localement compact.

DEFINITION 4 Si $\widehat{h}$ est scalairement σ-intégrable sur G , l'application sesquilinéaire à droite

$$(\varphi, \gamma) \longmapsto \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi : F \times G \longrightarrow \mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$$

induit une application linéaire $|F\rangle\langle G| \longrightarrow \mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ dont le sous-espace vectoriel image sera noté $\left|\widehat{h}(F)\right\rangle\left\langle G\right|$. On désigne alors par $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ la fermeture de $\left|\widehat{h}(F)\right\rangle\left\langle G\right|$ dans $\mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

Remarquons, si $\widehat{h}$ est en plus scalairement σ-intégrable, que pour tout $\varphi \in F$, on a $\left\|\widehat{h}\varphi\right\|_{\diamond} \in \mathbf{L}^2(\sigma)$; il existe donc une suite croissante $(A_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de parties σ-intégrables telle que $\left\|\widehat{h}\varphi\right\|_{\diamond}$ s'annule hors de $\bigcup_{l\in\mathbb{N}} A_l$. On en déduit que $\widehat{h}\varphi = \lim_l 1_{A_l} \cdot \widehat{h}\varphi$ dans $\mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$. Puisque G est dense dans $\mathbf{L}^2(\sigma)$ (cf. théorème 1.16.i) et que $1_{A_l} \in \mathbf{L}^2(\sigma)$, on en déduit que $\widehat{h}\varphi$ appartient à la fermeture de $\left|\widehat{h}(F)\right\rangle\left\langle G\right|$ dans $\mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$, i.e.

$$\overline{\left|\widehat{h}(F)\right\rangle\left\langle \mathbf{L}^{\infty}(\sigma)\right|}^{\mathbf{\Lambda}^2} \subset \overline{\left|\widehat{h}(F)\right\rangle\left\langle G\right|}^{\mathbf{\Lambda}^2} .$$

Réciproquement soit $\gamma \in G$ et posons $A_l := \{|\gamma| \leqslant l\}$ pour tout $l \in \mathbb{N}^*$. On a $1_{A_l} \cdot \gamma \in \mathbf{L}^{\infty}(\sigma)$ et comme $\overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi = \lim_l 1_{A_l} \cdot \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi$ dans $\mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$, on obtient l'autre inclusion.

REMARQUE 4 Le théorème est encore valable dans cette situation générale en utilisant l'intégration essentielle. Il faut alors considérer les relations d'équivalence "égalité localement σ-p.p. " et "égalité scalaire localement σ-p.p. " .

EXERCICE Soit A une partie de Λ .

(a) Montrer que $\mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, 1_A \cdot \widehat{\mathcal{H}}\right)$ est contenu et fermé dans $\mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

(b) Si A est σ-mesurable, montrer que

$$\mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, 1_A \cdot \widehat{\mathcal{H}}\right) = 1_A \cdot \mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) = \mathbf{\Lambda}^2\left(1_A \cdot \sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$$

en explicitant les applications permettant l'identification.

(c) Si A est σ-mesurable et $\widehat{h}$ scalairement σ-intégrable, alors

$$\mathbf{L}^2\left(\sigma, 1_A \cdot \widehat{\mathcal{H}}\right) = 1_A \cdot \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) = \mathbf{L}^2\left(1_A \cdot \sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) .$$

REMARQUE 5 Si dans la définition 1 on remplace l'intégrale supérieure par l'intégrale supérieure essentielle et dans la définition 2 on calcule modulo l'égalité locale σ-p.p., l'espace $\mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ ne change pas.

En effet une fonction essentiellement de carré σ-intégrable est égale localement σ-p.p. à une fonction de carré σ-intégrable.

5.13 Intégration d'une famille de sous-espaces hilbertiens

Rappelons que si F est tonnelé, il en est de même de $|F\rangle_{\,i}\langle F|$ (cf. corollaire 2.14). D'après l'exemple 2.10.4 on a $F^{\circledast} = (F_{fine})^{\dagger}$, donc

$$(|F\rangle\langle F|)^{\circledast} = L\left(F, F^{\circledast}\right) = \mathcal{L}\left(F_{fine}, (F_{fine})^{\dagger}\right) = \left(|F_{fine}\rangle_{\,i}\langle F_{fine}|\right)^{\dagger}$$

(cf. remarque 3.13.1). En fait on a $|F_{fine}\rangle_{\,i}\langle F_{fine}| = \left(|F\rangle_{\,i}\langle F|\right)_{fine}$.

LEMME *Si $\widehat{h}$ est scalairement σ-intégrable, alors $\int \widehat{h}\,d\sigma \in (|F\rangle\langle F|)^{\circledast}$ est le noyau d'un sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ de $F^{\circledast}$ et, pour tout $\varphi \in F$, on a*

$$\left(\int \widehat{h}\,d\sigma\right)\varphi = \int \widehat{h}\varphi\,d\sigma \ ,$$

ainsi que

$$\left\|\widehat{h}\varphi\right\|_2^2 = \left\|\left(\int \widehat{h}\,d\sigma\right)\varphi\right\|_{\mathcal{H}}^2 \ .$$

Pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a

$$\left\langle \psi \middle| \left(\int \widehat{h}\,d\sigma\right)\varphi \right\rangle = \left\langle |\psi\rangle\langle\varphi| \middle| \int \widehat{h}\,d\sigma \right\rangle = \int \left\langle |\psi\rangle\langle\varphi| \middle| \widehat{h} \right\rangle d\sigma = \int \left\langle \psi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle d\sigma =$$

$$= \int \left\langle \widehat{h}\psi \middle| \varphi \right\rangle d\sigma = \ldots = \left\langle \left(\int \widehat{h}\,d\sigma\right)\psi \middle| \varphi \right\rangle$$

et

$$\left\langle \varphi \middle| \left(\int \widehat{h}\,d\sigma\right)\varphi \right\rangle = \int \left\langle \varphi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle d\sigma \geqslant 0 \ ,$$

ce qui montre que $\int \widehat{h}\,d\sigma \in L_{+}\left(F, F^{\circledast}\right)$. Comme F_{fine} est un espace tonnelé (cf. exemple 2.13.4), le théorème de Schwartz 5.12 et le lemme 5.12 montrent que $\int \widehat{h}\,d\sigma$ est le noyau d'un sous-espace hilbertien de $F^{\circledast}$. Les deux formules sont immédiates :

$$\left\langle \psi \middle| \left(\int \widehat{h}\,d\sigma\right)\varphi \right\rangle = \int \left\langle \psi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle d\sigma = \left\langle \psi \middle| \int \widehat{h}\varphi\,d\sigma \right\rangle$$

et

$$\left\|\widehat{h}\varphi\right\|_2^2 = \int \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_{\diamond}^2 d\sigma = \int \left\langle \varphi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle d\sigma = \left\langle \varphi \middle| \left(\int \widehat{h}\,d\sigma\right)\varphi \right\rangle = \left\|\left(\int \widehat{h}\,d\sigma\right)\varphi\right\|_{\mathcal{H}}^2 \ .$$

□

DEFINITION Si $\widehat{h}$ est scalairement σ-intégrable, on désigne par $\int \widehat{\mathcal{H}}\,d\sigma$ le sous-espace hilbertien de $F^{\circledast}$ dont le noyau est $\int \widehat{h}\,d\sigma$.

Il nous faut maintenant répondre à la question : sous quelles conditions est-ce que $\int \widehat{\mathcal{H}}\, d\sigma$ est un sous-espace hilbertien de $F^\dagger$?

THEOREME *Considérons les propriétés suivantes :*

(i) $\left\|\widehat{h}\varphi\right\|_\diamond \in \mathbf{L}^2(\sigma)$ *pour tout* $\varphi \in F$ *et la fonction* $\varphi \longmapsto \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_2$ *est une semi-norme continue sur* F *.*

(ii) $\left\|\widehat{h}\varphi\right\|_\diamond \in \mathbf{L}^2(\sigma)$ *pour tout* $\varphi \in F$ *et la fonction* $\varphi \longmapsto \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_2$ *est une semi-norme de Mackey sur* F *.*

(iii) $\widehat{h}$ *est scalairement* σ*-intégrable et il existe un sous-espace hilbertien* $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ *de noyau* h *tel que*

$$\mathcal{H} = \int \widehat{\mathcal{H}}\, d\sigma \quad \textit{i.e.} \quad \|h\varphi\|_{\mathcal{H}} = \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_2 \ \textit{pour tout } \varphi \in F \ .$$

(iv) $\widehat{h}$ *est* σ*-intégrable dans* $\mathcal{L}_s\left(F, F^\dagger\right)$ *.*

(v) $\widehat{h}$ *est scalairement* σ*-intégrable dans* $\mathcal{L}_s\left(F, F^\dagger\right)$ *.*

(vi) Pour tout $\varphi \in F$ *, on a* $\left\|\widehat{h}\varphi\right\|_\diamond \in \mathbf{L}^2(\sigma)$ *.*

Alors

$$(i) \Longrightarrow (ii) \Longleftrightarrow (iii) \Longrightarrow (iv) \Longrightarrow (v) \Longrightarrow (vi) \ .$$

Si F *est tonnelé, alors* $(v) \Rightarrow (i)$ *. Si* F *est un espace localement convexe final par rapport à une famille d'applications linéaires* $T_j : F_j \longrightarrow F$ *, chaque* F_j *étant un espace de Fréchet, alors* $(vi) \Rightarrow (i)$ *.*

(i) ⇒ (ii) C'est évident, puisque la topologie de Mackey est la plus fine des topologies localement convexes compatibles avec la semi-dualité $\left\langle F \middle| F^\dagger \right\rangle$ (cf. proposition 3.11.iii).

(ii) ⇒ (iii) Il suffit de poser $\mathcal{H} := \int \widehat{\mathcal{H}}\, d\sigma \hookrightarrow F^{\circledast}$. L'équivalence des deux égalités découle du théorème d'unicité 5.3 et du lemme ci-dessus et $\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de $F^\dagger$ par le théorème de Schwartz (cf. remarque 5.11.1).

(iii) ⇒ (ii) Puisque $\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de $F^\dagger$, la proposition 5.1 montre que

$$\varphi \longmapsto \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_2 = \|h\varphi\|_{\mathcal{H}}$$

est une semi-norme de Mackey.

(iii) ⇒ (iv) Par définition (cf. proposition et définition 3 de 3.12), il nous suffit de prouver que

$$t \longmapsto \left\|\left\langle t \middle| \widehat{h} \right\rangle\right\|_1$$

est une semi-norme continue sur $|F_\tau\rangle_i \langle F_\tau|$, c'est-à-dire que

$$(\psi, \varphi) \longmapsto \left\|\left\langle |\psi\rangle\langle\varphi| \middle| \widehat{h} \right\rangle\right\|_1 = \left\|\left\langle \psi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle\right\|_1$$

est séparément une semi-norme de Mackey. Or

$$\left\|\left\langle \psi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle\right\|_1 = \int \left|\left\langle \psi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle\right| d\sigma \leqslant \left\|\widehat{h}\psi\right\|_2 \cdot \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_2 \ ,$$

d'où notre assertion par la proposition 5.1.

(iv) $\Rightarrow$ (v) C'est évident.

(v) $\Rightarrow$ (vi) C'est évident par le lemme 5.12.iv.

(v) $\Rightarrow$ (i) Pour cette implication nous supposons que F est tonnelé. Par hypothèse $\int \widehat{h}\, d\sigma \in \mathcal{L}_+\left(F, F^\dagger\right)$, donc

$$\varphi \longmapsto \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_2 = \left\langle \varphi \middle| \left(\int \widehat{h}\, d\sigma\right) \varphi \right\rangle^{\frac{1}{2}}$$

est une semi-norme continue sur F par le lemme 5.11, ce qu'il fallait démontrer.

(vi) $\Rightarrow$ (i) Nous supposons maintenant que F est un espace localement convexe final par rapport à une famille d'applications linéaires $T_j : F_j \longrightarrow F$, chaque F_j étant un espace de Fréchet. Il nous suffit de prouver que

$$\varphi \longmapsto \widehat{h}\varphi : F \longrightarrow \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$$

est continue. L'hypothèse nous ramène au cas où F est un espace de Fréchet et, par le théorème du graphe fermé 3.14, il nous reste à montrer que, pour toute suite $(\varphi_k) \subset F$ telle que $\varphi := \lim_k \varphi_k$ existe dans F et $\theta := \lim_k \widehat{h}\varphi_k$ existe dans $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$, on a $\theta = \widehat{h}\varphi$. Mais d'après le théorème 5.12 nous pouvons extraire une sous-suite $\left(\varphi_{\alpha(l)}\right)$ telle que $\theta = \lim_l \widehat{h}\varphi_{\alpha(l)}$ ponctuellement σ-presque partout dans $F^\dagger$. La continuité des $\widehat{h}(\lambda) : F \longrightarrow F^\dagger$ prouve alors notre assertion, puisque $\theta = \lim_l \widehat{h}\varphi_{\alpha(l)} = \widehat{h}\left(\lim_l \varphi_{\alpha(l)}\right) = \widehat{h}\varphi$ tout d'abord σ-p.p. , puis dans $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$. □

REMARQUE D'après le théorème de Gelfand-Dunford 3.12, il suffit que F satisfasse à la propriété (GDF) pour que (vi)$\Rightarrow$(i) (cf. lemme 5.12.iv).

5.14 Décomposition d'un sous-espace hilbertien

L'assertion (iv) du théorème 5.13 est la plus simple et correspond aux besoins pratiques.

DEFINITION Soit $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ un sous-espace hilbertien. Si $\widehat{\mathcal{H}}$ est une famille de sous-espaces hilbertiens de $F^\dagger$ qui soit scalairement σ-intégrable, i.e. $\widehat{h}$ est scalairement σ-intégrable, et telle que $\mathcal{H} = \int \widehat{\mathcal{H}} d\sigma$, i.e.

$$\|h\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 = \int \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_\diamond^2 d\sigma \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ ,$$

nous dirons que $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ est une *décomposition* du sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ dans $F^\dagger$, ou bien simplement que l'on a la décomposition

$$\mathcal{H} = \int \widehat{\mathcal{H}}\, d\sigma \quad \text{dans } F^\dagger \ .$$

THEOREME *Si $\mathcal{H} = \int \widehat{\mathcal{H}}\, d\sigma$ dans $F^\dagger$, alors tout champ $\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ est σ-intégrable dans $F^\dagger$, l'application linéaire*

$$\int \diamond\, d\sigma : \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \longrightarrow F^\dagger : \zeta \longmapsto \int \zeta\, d\sigma$$

est continue et l'image de $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ par cette application est $\mathcal{H}$, i.e.

$$\int \left(\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)\right) d\sigma = \mathcal{H} \ .$$

Par définition, pour montrer que ζ est σ-intégrable dans $F^\dagger$, il suffit de constater que, pour tout $\varphi \in F$, on a

$$\int^* |\langle \varphi | \zeta \rangle|\, d\sigma = \int^* \left|\left(\widehat{h}\varphi \middle| \zeta\right)_\diamond\right| \leqslant \int^* \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_\diamond \cdot \|\zeta\|_\diamond\, d\sigma \leqslant \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_2 \cdot \|\zeta\|_2 < \infty \ ,$$

et que $\varphi \longmapsto \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_2$ est une semi-norme continue sur F_τ par le théorème 5.13, (iv)$\Rightarrow$(ii). L'application $\int \diamond\, d\sigma$ est évidemment continue, puisque

$$\left|\left\langle \varphi \middle| \int \zeta\, d\sigma \right\rangle\right| = \left|\int \langle \varphi | \zeta \rangle\, d\sigma\right| \leqslant \int |\langle \varphi | \zeta \rangle|\, d\sigma \leqslant \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_2 \cdot \|\zeta\|_2 \ .$$

Finalement

$$\left(\left[\int \diamond\, d\sigma\right]^\dagger \varphi \middle| \zeta\right)_{\mathbf{L}^2} = \left\langle \varphi \middle| \int \zeta\, d\sigma \right\rangle = \int \left(\widehat{h}\varphi \middle| \zeta\right) d\sigma = \left(\widehat{h}\varphi \middle| \zeta\right)_{\mathbf{L}^2} \ ,$$

ce qui montre que le noyau de $\int \left(\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)\right) d\sigma \hookrightarrow F^\dagger$ est

$$\int \left[\int \diamond\, d\sigma\right]^\dagger : \varphi \longmapsto \int \widehat{h}\varphi\, d\sigma = \left(\int \widehat{h}\, d\sigma\right) \varphi \ ,$$

i.e. $\int \widehat{h} d\sigma = h$, d'où le résultat. □

REMARQUE 1 Nous pouvons maintenant interpréter le théorème à l'aide du théorème 5.4. La formule

$$\mathcal{H} = \int \left(\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)\right)$$

signifie que $\int \diamond\, d\sigma$ est une isométrie de $\operatorname{Ker}\left(\int \diamond\, d\sigma\right)^{\perp \mathbf{L}^2}$ sur $\mathcal{H}$, en particulier que tout élément $\xi \in \mathcal{H}$ est de la forme $\int \zeta\, d\sigma$ pour un $\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$. On dit que ζ est une *décomposition* de ξ . D'autre part $\operatorname{Ker}\left(\int \diamond\, d\sigma\right)$ est l'ensemble des $\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ tels que

$$0 = \left\langle \varphi \middle| \int \zeta\, d\sigma \right\rangle = \int \langle \varphi | \zeta \rangle\, d\sigma = \left(\widehat{h}\varphi \middle| \zeta\right)_{\mathbf{L}^2} \quad \text{pour tout } \varphi \in F ,$$

donc

$$\left(\operatorname{Ker}\left(\int \diamond\, d\sigma\right)\right)^{\perp \mathbf{L}^2} = \overline{\widehat{h}(F)}^{\mathbf{L}^2} .$$

Il est important de bien distinguer

$$\overline{\widehat{h}(F)}^{\mathbf{L}^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) = \overline{\left|\widehat{h}(F)\right\rangle \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma)\right|}^{\mathbf{\Lambda}^2} .$$

La *décomposition de Parseval* $\widehat{\xi}$ de $\xi \in \mathcal{H}$ est l'unique décomposition ζ de ξ adhérente à $\widehat{h}(F)$. C'est aussi l'unique décomposition telle que $\|\zeta\|_2$ soit minimale ou que $\|\xi\|_{\mathcal{H}} = \|\zeta\|_2$.

Par exemple, la décomposition de Parseval $\widehat{h\varphi}$ de $h\varphi$ est $\widehat{h}\varphi$, car on a $h\varphi = \left(\int \widehat{h}\, d\sigma\right)\varphi = \int \widehat{h}\varphi\, d\sigma$ et $\widehat{h}\varphi \in \widehat{h}(F)$!

L'application $\xi \longmapsto \widehat{\xi}$ est une isométrie de $\mathcal{H}$ sur $\overline{\widehat{h}(F)}^{\mathbf{L}^2}$ prolongeant $h\varphi \longmapsto \widehat{h}\varphi$. Comme tout $\xi \in \mathcal{H}$ est limite d'une suite $(h\varphi_k)$, $h(F)$ étant dense dans $\mathcal{H}$, on a $\widehat{\xi} = \lim \widehat{h}\varphi_k$, ce qui permet en principe de calculer $\widehat{\xi}$!

Pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, on a

$$(\xi | \eta)_{\mathcal{H}} = \int (\zeta | \widehat{\eta})_\diamond\, d\sigma ,$$

quel que soit la décomposition ζ de ξ . En particulier l'adjointe de $\xi \longmapsto \widehat{\xi} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ est $\int \diamond\, d\sigma$, puisque

$$\left(\zeta \middle| \left(\int \diamond\, d\sigma\right)^* \eta\right)_{\mathbf{L}^2} = \left(\int \zeta\, d\sigma \middle| \eta\right)_{\mathcal{H}} = \int (\zeta | \widehat{\eta})_\diamond\, d\sigma = (\zeta | \widehat{\eta})_{\mathbf{L}^2} .$$

REMARQUE 2 Avec la notation du théorème 5.12, tout $\theta \in \mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ est σ-intégrable dans $F^\dagger$ et

$$\int \theta\, d\sigma = \int [\theta]\, d\sigma \in \mathcal{H} ,$$

mais on peut avoir $\|\theta\|_2 > \|[\theta]\|_2$.

REMARQUE 3 Considérons la généralisation décrite dans la remarque 5.12.4. Soit G un espace test de fonctions contenu dans $\mathbf{L}^2(\sigma)$. D'après la remarque 3.13.1, le semi-dual faible de $|F\rangle_i \langle G|$ est $\mathcal{L}_s\left(G, F^\dagger\right)$, celui de $\left| |F\rangle_i \langle G| \right\rangle_i \left\langle |F\rangle_i \langle G| \right|$ étant $\mathcal{L}_s\left(|F\rangle_i \langle G| , \mathcal{L}_s\left(G, F^\dagger\right)\right) = \mathcal{L}_s\left(|F\rangle_i \langle G| , \left(|F\rangle_i \langle G|\right)^\dagger\right)$. Etant donné $\zeta : \Lambda \longrightarrow F^\dagger$, nous utiliserons les notations

$$\diamond(\lambda)\cdot\zeta(\lambda) : G \longrightarrow F^\dagger : \gamma \longmapsto \gamma(\lambda)\cdot\zeta(\lambda)$$

et

$$\diamond\cdot\zeta : \Lambda \longrightarrow \mathcal{L}_s\left(G, F^\dagger\right) : \lambda \longmapsto \diamond(\lambda)\cdot\zeta(\lambda)$$

PROPOSITION *L'application*

$$|\diamond|^2 \cdot \widehat{h} : \Lambda \longrightarrow \mathcal{L}_s\left(G, \mathcal{L}_s\left(F, F^\dagger\right)\right) : \lambda \longmapsto |\diamond(\lambda)|^2 \cdot \widehat{h}(\lambda) \ ,$$

est σ-intégrable dans $\mathcal{L}_s\left(G, \mathcal{L}_s\left(F, F^\dagger\right)\right)$ si, et seulement si, les fonctions

$$\varphi \longmapsto \left\| \overline{\gamma}\cdot\widehat{h}\varphi \right\|_2 \quad et \quad \gamma \longmapsto \left\| \overline{\gamma}\cdot\widehat{h}\varphi \right\|_2$$

sont des semi-normes de Mackey sur F et G respectivement.

Dans ce cas, pour tout $\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ et $\gamma \in G$, le champ $\gamma\cdot\zeta$ est σ-intégrable dans $F^\dagger$, les applications

$$\int \diamond\cdot\zeta \, d\sigma : G \longrightarrow F^\dagger : \gamma \longmapsto \int \gamma\cdot\zeta\, d\sigma$$

et

$$\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \longrightarrow \mathcal{L}_s\left(G, F^\dagger\right) : \zeta \longmapsto \int \diamond\cdot\zeta\, d\sigma$$

sont respectivement faiblement continue et continue. La seconde est injective, et le noyau du sous-espace hilbertien

$$\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \hookrightarrow \mathcal{L}_s\left(G, F^\dagger\right)$$

est donné par

$$|F\rangle_i \langle G| \longrightarrow \mathcal{L}_s\left(G, F^\dagger\right) : |\varphi\rangle\langle\gamma| \longmapsto \int \diamond\cdot\overline{\gamma}\cdot\widehat{h}\varphi\, d\sigma \ .$$

Par définition l'intégrabilité de $|\diamond|^2\cdot\widehat{h}$ signifie que la fonction

$$F\times F\times G \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (\varphi,\psi,\gamma) \longmapsto \int |\gamma|^2 \cdot \left| \left\langle \varphi \middle| \widehat{h}\psi \right\rangle \right| \, d\sigma$$

est séparément une semi-norme de Mackey. En particulier, pour tout $\gamma \in G$, le champ $|\gamma|^2\cdot\widehat{h}$ est σ-intégrable dans $\mathcal{L}_s\left(F, F^\dagger\right)$. Par le théorème 5.13, (iii)$\Rightarrow$(ii), appliqué à $|\gamma|^2\cdot\widehat{h}$, la fonction $\varphi \longmapsto \left\|\overline{\gamma}\cdot\widehat{h}\varphi\right\|_2$ est une semi-norme de Mackey sur F , car

$$\int \left\| |\gamma|^2\cdot\widehat{h}\diamond \right\|^2_{|\gamma|^2\cdot\widehat{\mathcal{H}}} d\sigma = \int \frac{1}{|\gamma|}\cdot \left\| |\gamma|^2\cdot\widehat{h}\diamond \right\|^2_{\widehat{\mathcal{H}}} d\sigma = \int \left\| \overline{\gamma}\cdot\widehat{h}\diamond \right\|^2_{\widehat{\mathcal{H}}} d\sigma = \left\| \overline{\gamma}\cdot\widehat{h}\diamond \right\|^2_2 \ .$$

D'autre part

$$\int |\gamma|^2 \cdot \left| \left\langle \varphi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle \right| \, d\sigma = \int \left\| \overline{\gamma}\cdot\widehat{h}\varphi \right\|^2_{\diamond} d\sigma = \left\| \overline{\gamma}\cdot\widehat{h}\varphi \right\|^2_2 \ ,$$

donc $\gamma \longmapsto \left\|\overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi\right\|_2$ est aussi une semi-norme de Mackey.

Etant donné $\varphi \in F$ et $\gamma \in G$, l'intégrabilité de $\diamond \cdot \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi$ signifie que la fonction

$$F \times G \longrightarrow \mathbb{R}_+ : (\psi, \theta) \longmapsto \int \left|\left\langle \psi \middle| \theta \cdot \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi \right\rangle\right| \, d\sigma$$

est séparément une semi-norme de Mackey. En particulier en prenant $\theta = \gamma$ le champ $|\gamma|^2 \cdot \widehat{h}\varphi$ est σ-intégrable dans $F^\dagger$.

Par le théorème 5.13, (iii)$\Rightarrow$(ii), appliqué à $|\gamma|^2 \cdot \widehat{h}$, la fonction $\varphi \longmapsto \left\|\overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi\right\|_2$ est une semi-norme de Mackey sur F , car

$$\int \left\||\gamma|^2 \cdot \widehat{h}\diamond\right\|_{|\gamma|^2 \cdot \widehat{\mathcal{H}}}^2 d\sigma = \int \frac{1}{|\gamma|^2} \cdot \left\||\gamma|^2 \cdot \widehat{h}\diamond\right\|_{\widehat{\mathcal{H}}}^2 d\sigma = \int \left\|\overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\diamond\right\|_{\widehat{\mathcal{H}}}^2 d\sigma = \left\|\overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\diamond\right\|_2^2 .$$

D'autre part

$$\int \left|\left\langle \psi \middle| \theta \cdot \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi \right\rangle\right| \, d\sigma = \int \left\||\gamma| \cdot \widehat{h}\diamond\right\|_{|\gamma| \cdot \widehat{\mathcal{H}}}^2 d\sigma = \left\|\sqrt{|\gamma|} \cdot \widehat{h}\diamond\right\|_2^2 ,$$

donc $\gamma \longmapsto \left\|\sqrt{|\gamma|} \cdot \widehat{h}\varphi\right\|_2$ est aussi une semi-norme de Mackey.

Dans ce cas, pour tout $\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ et $\gamma \in G$, on a

$$\left|\left\langle \varphi \middle| \int \gamma \cdot \zeta \, d\sigma \right\rangle\right| \leqslant \int^* |\langle \varphi | \gamma \cdot \zeta \rangle| \, d\sigma \leqslant \int^* \left|\left(\overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi \middle| \zeta\right)_\diamond\right| \, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \int^* \left\|\overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi\right\|_\diamond \cdot \|\zeta\|_\diamond \, d\sigma \leqslant \left\|\overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi\right\|_2 \cdot \|\zeta\|_2 < \infty ,$$

ce qui montre que le champ $\gamma \cdot \zeta$ est σ-intégrable dans $F^\dagger$. La continuité des applications découle de l'inégalité

$$\left|\left\langle \varphi \middle| \int \gamma \cdot \zeta \, d\sigma \right\rangle\right| \leqslant \int^* |\langle \varphi | \gamma \cdot \zeta \rangle| \, d\sigma \leqslant \left\|\overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi\right\|_2 \cdot \|\zeta\|_2 .$$

Montrons l'injectivité. Si $\int \diamond \cdot \zeta \, d\sigma = 0$, pour tout $\gamma \in G$ et $\varphi \in F$, on a

$$0 = \left\langle \varphi \middle| \int \gamma \cdot \zeta \, d\sigma \right\rangle = \int \gamma \cdot \langle \varphi | \zeta \rangle \, d\sigma ,$$

donc $\langle \varphi | \zeta \rangle = 0$ localement σ-p.p. puisque G est un espace test, et par suite $\zeta = 0$ σ-p.p. par le théorème 5.12 (cf. remarque 5.12.3).

On peut donc considérer $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ comme un sous-espace hilbertien de $\mathcal{L}_s\left(G, F^\dagger\right)$. Calculons son noyau. Pour tout $\varphi \in F$ et $\gamma \in G$, on a

$$\langle |\varphi\rangle \langle\gamma| \, | \, \zeta \rangle = \left\langle \varphi \middle| \int \gamma \cdot \zeta \, d\sigma \right\rangle = \int \gamma \cdot \langle \varphi | \, \zeta \rangle \, d\sigma = \left(\overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi \middle| \zeta\right)_{\mathbf{L}^2} .$$

Ce noyau comme application linéaire de $|F\rangle_i \langle G|$ dans $\mathcal{L}_s\left(G, F^\dagger\right)$ est donc donné par

$$|\varphi\rangle \langle\gamma| \longmapsto \int \diamond \cdot \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi \, d\sigma .$$

Il provient évidemment de l'application sesquilinéaire à droite

$$F \times G \longrightarrow \mathcal{L}_s\left(G, F^\dagger\right) : (\varphi, \gamma) \longmapsto \int \diamond \cdot \overline{\gamma} \cdot \widehat{h}\varphi \, d\sigma .$$

Son image s'identifie au sous-espace vectoriel de $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ que nous avons noté $\left|\widehat{h}\left(F\right)\right\rangle\left\langle G\right|$.

$\square$

5.15 Espaces de Hilbert à noyaux reproduisants

C'est le cas très particulier de l'exemple 5.2.5, où X est un espace discret. On a alors

$$\mathcal{K}(X) = \mathbb{K}^{(X)} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(X) = \mathbb{K}^X \ .$$

DEFINITION On dit qu'un espace vectoriel de fonctions $\mathcal{H}$ sur un ensemble X , muni d'une structure d'espace de Hilbert, est un *espace de Hilbert à noyau reproduisant* sur X si $\mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de $\mathbb{K}^X$, i.e. si l'injection canonique

$$j : \mathcal{H} \hookrightarrow \mathbb{K}^X : \xi \longmapsto (\xi(x))_{x \in X}$$

est continue.

Cela signifie que, pour tout $x \in X$, l'évaluation

$$\delta_x : \xi \longmapsto \overline{\xi}(x) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$$

est continue, ou encore que la convergence dans $\mathcal{H}$ implique la convergence simple sur X .

L'adjointe de l'injection canonique est alors

$$j^\dagger : \mathbb{K}^{(X)} \longrightarrow \mathcal{H}^\dagger : \varphi \longmapsto \sum_{x \in X} \varphi(x) \cdot |\delta_x\rangle \quad ,$$

i.e.

$$j^\dagger 1_{\{x\}} = |\delta_x\rangle \quad \text{pour tout } x \in X \ ,$$

où $\left(1_{\{x\}}\right)_{x \in X}$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^{(X)}$. En effet

$$\left\langle \xi \left| j^\dagger 1_{\{x\}} \right.\right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \xi \left| 1_{\{x\}} \right.\right\rangle_{\mathbb{K}^X} = \overline{\xi(x)} = \langle \xi | \delta_x \rangle_{\mathcal{H}} \ .$$

Le noyau du sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ est ainsi donné, d'après la remarque 5.1.2, par

$$h = jR^{-1}j^\dagger : \varphi \longmapsto \sum_{x \in X} \varphi(x) \cdot R^{-1} |\delta_x\rangle : \mathbb{K}^{(X)} \longrightarrow \mathbb{K}^X \ .$$

D'après l'exemple 3.13.1, ce noyau hermitien positif est défini par une unique *fonction-noyau*

$$h : X \times X \longrightarrow \mathbb{K} : (x, y) \longmapsto \left\langle 1_{\{x\}} \right| h 1_{\{y\}} \rangle = \left\langle 1_{\{x\}} \left| R^{-1} \delta_y \right.\right\rangle$$

tel que

$$h\varphi(x) = \sum_{y \in X} h(x, y) \cdot \varphi(y) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathbb{K}^{(X)} \text{ et tout } x \in X \ .$$

Pour tout $x, y \in X$, on a

$$h(x, y) = \overline{h(y, x)} \ ,$$

et la positivité signifie que, pour tout $\varphi \in \mathbb{K}^{(X)}$, on a

$$\sum_{x, y \in X} \overline{\varphi(x)} \cdot h(x, y) \cdot \varphi(y) = \langle \varphi | h\varphi \rangle \geqslant 0 \ ,$$

i.e. que pour toutes suites finies $(c_j)_{j=1,\ldots,n} \subset \mathbb{K}$ et $(x_j)_{j=1,\ldots,n} \subset X$, on a

$$\sum_{k,l=1}^{n} \overline{c_k} \cdot c_l \cdot h(x_k, y_l) \geqslant 0\,;$$

on dit que cette fonction-noyau est de *type positif* .

Remarquons encore, pour tout $x, y \in X$, que

$$h(\cdot, y) = R^{-1}\delta_y = h1_{\{y\}} \in \mathcal{H}$$

et que la propriété caractéristique du noyau (cf. corollaire 5.1) s'écrit

$$\left\langle 1_{\{x\}} \middle| \xi \right\rangle_{\mathbb{K}^{(X)}} = \left(R^{-1}\delta_x \middle| \xi \right)_{\mathcal{H}}$$

c'est-à-dire

$$\xi(x) = (h(\cdot, x)|\, \xi)_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H}\ .$$

On dit que c'est la *propriété de reproduction* et que $h(\cdot,\cdot)$ est le *noyau reproduisant* de $\mathcal{H}$.

En outre

PROPOSITION *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert à noyau reproduisant h sur X .*

(i) La famille de fonctions $(h(\cdot, x))_{x\in X}$ est totale dans $\mathcal{H}$ et

$$h(x, y) = (h(\cdot, x)|\, h(\cdot, y))_{\mathcal{H}} \quad \textit{pour tout } x, y \in X\ .$$

(ii) Soit $x \in X$. On a

$$\|\delta_x\| = \|h(\cdot, x)\|_{\mathcal{H}}$$

et

$$\|h(\cdot, x)\|_{\mathcal{H}}^2 = h(x, x)\ .$$

Si la fonction $h(\cdot, x) \neq 0$, alors $h(x, x) \neq 0$ et

$$\inf_{\xi\in\mathcal{H},\xi(x)=1} \|\xi\|_{\mathcal{H}} = \frac{1}{h(x,x)^{\frac{1}{2}}} = \left\| \frac{h(\cdot, x)}{h(x, x)} \right\|_{\mathcal{H}}\ .$$

(iii) Pour toute partie $A \subset X$, on a

$$\|\xi\|_{\infty,A} \leqslant \sup_{x\in A} h(x, x)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\xi\|_{\mathcal{H}}\ ,$$

i.e. la convergence dans $\mathcal{H}$ entraîne la convergence uniforme sur toute partie A de X où la fonction

$$x \longmapsto h(x, x) : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

est bornée.

En particulier, pour tout $x \in X$ et tout $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $\|\xi\|_{\mathcal{H}} \leqslant 1$, on a

$$|\xi(x)| \leqslant h(x, x)^{\frac{1}{2}} = \frac{h(\diamond, x)}{\|h(\cdot, x)\|}(x)\ .$$

(iv) Si $(\epsilon_j)_{j\in J}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}$, alors $(\epsilon_j(x))_{j\in J} \in \ell^2(J)$ pour tout $x \in X$, $(|\epsilon_j\rangle\langle\epsilon_j|)_{j\in J}$ est sommable dans $\mathbb{K}^{X\times X}$ et

$$h = \sum_{j\in J} |\epsilon_j\rangle\langle\epsilon_j| : (x, y) \longmapsto \sum_{j\in J} \epsilon_j(x) \cdot \overline{\epsilon_j(y)}\ .$$

La convergence est uniforme séparément en chaque variable sur toute partie de X où la fonction $x \longmapsto h(x,x) : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est bornée.

(v) Si X est un espace topologique et $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(X)$, alors la fonction $x \longmapsto h(x,x) : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est s.c.i..

(vi) Réciproquement toute fonction-noyau $h : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ hermitienne de type positif définit un sous-espace hilbertien à noyau reproduisant $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathbb{K}^X$.

En particulier si $\Xi = (\Xi_x)_{x\in X}$ est une famille dans un espace de Hilbert $\mathcal{X}$ ou bien $(f_j)_{j\in J}$ est une famille de $\mathbb{K}^X$ telle que $(f_j(x))_{j\in J} \in \ell^2(J)$ pour tout $x \in X$, alors

$$h(x,y) := (\Xi_x | \Xi_y)_{\mathcal{X}} \ ,$$

ou plus particulièrement

$$h(x,y) := \sum_{j\in J} f_j(x) \cdot \overline{f_j(y)} \ ,$$

est une fonction-noyau hermitienne de type positif et toute fonction-noyau hermitienne de type positif est de ce type.

Dmonstration de (i) C'est immédiat par le corollaire 1.4 et la propriété de reproduction.

Dmonstration de (ii) La première partie est immédiate, puisque R est une isométrie de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}^\dagger$, et on a

$$\|h(\cdot,x)\|_{\mathcal{H}}^2 = (h(\cdot,x) | h(\cdot,x))_{\mathcal{H}} = h(x,x)$$

par la propriété de reproduction. La seconde partie découle de la formule démontrée dans l'exercice 3.8.2 :

$$\inf_{\xi\in\mathcal{H},\xi(x)=1} \|\xi\|_{\mathcal{H}} = d(0, \{\langle\cdot|\delta_x\rangle = 1\}) = \frac{1}{\|\delta_x\|} = \frac{1}{h(x,x)^{\frac{1}{2}}} = \left\|\frac{h(\cdot,x)}{h(x,x)}\right\|_{\mathcal{H}} \ .$$

Dmonstration de (iii) C'est immédiat puisque par la propriété de reproduction et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$|\xi(x)| \leqslant \|h(\cdot,x)\|_{\mathcal{H}} \cdot \|\xi\|_{\mathcal{H}} \ .$$

Dmonstration de (iv) En effet le j-ième coefficient de Fourier de $h(\cdot,x)$ est

$$(\epsilon_j | h(\cdot,x))_{\mathcal{H}} = \overline{\epsilon_j(x)}$$

et

$$h(x,y) = (h(\cdot,x) | h(\cdot,y))_{\mathcal{H}} = \left(\sum_{k\in J} (\epsilon_k | h(\cdot,x))_{\mathcal{H}} \cdot \epsilon_k \middle| \sum_{l\in J} (\epsilon_l | h(\cdot,y))_{\mathcal{H}} \cdot \epsilon_l\right) =$$

$$= \sum_{k,l\in J} \overline{(\epsilon_k | h(\cdot,x))_{\mathcal{H}}} \cdot (\epsilon_l | h(\cdot,y))_{\mathcal{H}} \cdot (\epsilon_k | \epsilon_l) = \sum_{j\in J} \epsilon_j(x) \cdot \overline{\epsilon_j(y)} \ .$$

Si $A \subset X$ est telle que $\sup_{x\in A} h(x,x) < \infty$, pour tout $y \in X$ et toute partie finie $I \subset J$, il vient

$$\left\|\sum_{j\in I} \epsilon_j(\diamond) \cdot \overline{\epsilon_j(y)}\right\|_{\infty,A} = \sup_{x\in A} \left|\sum_{j\in I} (\epsilon_j | h(\cdot,y))_{\mathcal{H}} \cdot \epsilon_j\right|(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in A} h(x,x)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\| \sum_{j\in I} (\epsilon_j | \, h(\cdot,y))_{\mathcal{H}} \cdot \epsilon_j \right\|_{\mathcal{H}} .$$

La convergence uniforme en découle puisque le mebre de droite converge vers 0 suivant l'ensemble filtré croissant $\mathfrak{P}^f(J)$.

Dmonstration de (v) En effet

$$h(x,x) = \sup_{K\in\mathfrak{K}(J)} \sum_{j\in K} |\epsilon_j(x)|^2 .$$

Dmonstration de (vi) C'est immédiat par le théorème de Schwartz 5.11 puisque $\varphi \longmapsto h(\varphi,\varphi)^{\frac{1}{2}} : \mathbb{K}^{(X)} \longrightarrow \mathbb{R}$ est évidemment une semi-norme continue, $\mathbb{K}^{(X)}$ étant muni de la topologie localement convexe la plus fine.

Si $h(x,y) := (\Xi_x | \, \Xi_y)_{\mathcal{X}}$, on a

$$h(x,y) = (\Xi_x | \, \Xi_y)_{\mathcal{X}} = \overline{(\Xi_y | \, \Xi_y)_{\mathcal{X}}} = \overline{h(y,x)} ,$$

et pour tout $\varphi \in \mathbb{K}^{(X)}$, il vient

$$\sum_{x,y\in X} \overline{\varphi(x)} \cdot h(x,y) \cdot \varphi(y) = \sum_{x,y\in X} \overline{\varphi(x)} \cdot (\Xi_x | \, \Xi_y)_{\mathcal{X}} \cdot \varphi(y) =$$

$$= \left(\sum_{x\in X} \varphi(x) \cdot \Xi_x \middle| \sum_{y\in X} \varphi(y) \cdot \Xi_y \right)_{\mathcal{X}} = \left\| \sum_{x\in X} \varphi(x) \cdot \Xi_x \right\|_{\mathcal{X}}^2 \geqslant 0 ,$$

ce qui finit de prouver que c'est une fonction-noyau hermitienne de type positif.

Finalement il suffit alors de prendre $\mathcal{X} := \mathcal{H}$ et de poser $\Xi_x := h(\cdot,x)$ et $f_j(x) := \epsilon_j(x)$ à l'aide de (i) et (iv). □

EXERCICE 1 Montrer que le produit (ponctuel sur $X \times X$) de deux fonctions hermitiennes de type positif est hermitien de type positif.

Remarquer que le produit de deux opérateurs positifs bornés dans un espace de Hilbert est positif si ces opérateurs commutent.

EXERCICE 2 Soit $h : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction-noyau hermitienne. Montrer que h est de type positif si, et seulement si, pour toute partie finie $K \subset X$, on a

$$\det (h(x,y))_{x,y\in K} \geqslant 0 .$$

EXERCICE 3 Soit $h : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction-noyau hermitienne de type positif. Montrer que, pour tout $x, y, z \in X$, on a

$$|h(x,y)|^2 \leqslant h(x,x) \cdot h(y,y)$$

et

$$|h(x,y) - h(x,z)|^2 \leqslant h(x,x) \cdot |h(y,y) - 2 \cdot \operatorname{Re} h(y,z) + h(z,z)| .$$

5.16 Sous-espaces fermés de $\mathbf{L}^2(\sigma)$ à noyaux reproduisants

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert à noyau reproduisant sur X . Supposons que X est muni d'une topologie séparée et que le produit scalaire de $\mathcal{H}$ est donné par une intégrale de Radon σ , i.e. $\mathcal{H} \sqsubset \mathbf{L}^2(\sigma)$, ou encore $\mathcal{H} \subset \mathbf{L}^2(\sigma)$ et

$$(\xi|\,\eta)_{\mathcal{H}} = \int \overline{\xi}(y) \cdot \eta(y)\ d\sigma(y) \quad \text{pour tout } \xi, \eta \in \mathcal{H} .$$

Pour tout $x \in X$, on a $h(\cdot, x) \in \mathcal{H}$ et comme $\overline{h(y,x)} = h(x,y)$, il vient

$$\xi(x) = (h(\cdot,x)|\,\xi)_{\mathcal{H}} = \int h(x,y) \cdot \xi(y)\ d\sigma(y) \ ;$$

les $\xi \in \mathcal{H}$ satisfont donc à une *propriété de moyenne* par rapport aux intégrales $h(x,\cdot) \cdot \sigma$.

THEOREME

(i) On a

$$h(x,y) = \int h(x,z) \cdot h(z,y)\ d\sigma(z) \quad \textit{pour tout } x,y \in X \ .$$

(ii) Tout opérateur T de $\mathbf{L}^2(\sigma)$ dans $\mathcal{H}$ est un opérateur intégral de noyau

$$x \longmapsto \overline{T^*h(\cdot,x)} : X \longrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma) \ .$$

En particulier l'orthoprojecteur $P_{\mathcal{H}}$ de $\mathbf{L}^2(\sigma)$ sur $\mathcal{H}$, i.e. le noyau de $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma)$, est un opérateur intégral de noyau h :

$$P_{\mathcal{H}}\theta(x) = (h(\cdot,x)|\,\theta)_{\mathcal{H}} = \int h(x,\cdot) \cdot \theta\, d\sigma \quad \textit{pour tout } x \in X \textit{ et } \theta \in \mathbf{L}^2(\sigma) \ .$$

(iii) On a

$$\mathcal{H} = \int \mathbb{K} \cdot h(\cdot,y)\ d\sigma(y) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma) \ ,$$

i.e.

$$\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} = \int |h(\cdot,x))\,(h(\cdot,x)|\ d\sigma(x) \quad \textit{dans } \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ .$$

Dmonstration de (i) C'est immédiat par la propriété de reproduction.

Dmonstration de (ii) Pour tout $\theta \in \mathbf{L}^2(\sigma)$ et $\xi \in \mathcal{H}$, la propriété de reproduction appliquée à $T\theta$ montre que

$$T\theta(x) = (h(\cdot,x)|\,T\theta)_{\mathcal{H}} = (T^*h(\cdot,x)|\,\theta)_{\mathbf{L}^2(\sigma)} = \int \overline{T^*h(\cdot,x)} \cdot \theta\, d\sigma \ .$$

Le cas particulier de l'orthoprojecteur $P_{\mathcal{H}}$ s'obtient immédiatement en remarquant que $P_{\mathcal{H}}^*$ est l'injection canonique $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma)$.

Dmonstration de (iii) Le noyau de $\mathbb{K}\cdot h(\cdot,x) \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma)$ est $|h(\cdot,x))(h(\cdot,x)|$ et, pour tout $\theta,\vartheta \in \mathbf{L}^2(\sigma)$, grâce à (ii), on obtient

$$\int (\theta|\, h(\cdot,x))\cdot(h(\cdot,x)|\,\vartheta)\ d\sigma(x) = \int \overline{P_{\mathcal{H}}\theta}(x)\cdot P_{\mathcal{H}}\vartheta(x)\ d\sigma(x) =$$

$$= (P_{\mathcal{H}}\theta|\, P_{\mathcal{H}}\vartheta)_{\mathbf{L}^2(\sigma)} = (\theta|\, P_{\mathcal{H}}\vartheta)_{\mathbf{L}^2(\sigma)}\ ,$$

d'où le résultat.

REMARQUE 1 Si X est localement compact, le noyau de $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$ est

$$\varphi \longmapsto \int h(\cdot,y)\cdot\varphi(y)\ d\sigma(y) : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{H}\ .$$

Par la proposition 5.5 et l'exemple 5.2.5, ce noyau est égal à

$$\varphi \longmapsto P_{\mathcal{H}}[\varphi]\ ,$$

d'où le résultat par (ii). □

REMARQUE 2 Attention, en voulant une démonstration simple du résultat de la remarque précédente, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ et $\xi \in \mathcal{H}$, on pourrait écrire

$$\langle\varphi|\,\xi\rangle = \int \overline{\varphi}\cdot\xi\, d\sigma = \int \overline{\varphi(x)}\left(\int h(x,y)\cdot\xi(y)\ d\sigma(y)\right) d\sigma(x) =$$

$$= \int \overline{\left(\int h(y,x)\cdot\varphi(x)\ d\sigma(x)\right)}\cdot\xi(y)\ d\sigma(y)$$

en ayant utilisé la propriété de reproduction et le théorème de Fubini. Mais ceci n'est possible, grâce au théorème de Tonelli, que si par exemple $x \longmapsto h(x,x)^{\frac{1}{2}}$ est localement σ-intégrable : en effet dans ce cas on obtient

$$\int^* |\varphi(x)|\left(\int^* |h(x,y)|\cdot|\xi(y)|\ d\sigma(y)\right) d\sigma(x) \leqslant$$

$$\leqslant \int^* |\varphi(x)|\left(\int^* |h(x,y)|^2\ d\sigma(y)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int^* |\xi(y)|^2\ d\sigma(y)\right)^{\frac{1}{2}} d\sigma(x) =$$

$$= \|\xi\|\cdot\int^* |\varphi(x)|\cdot h(x,x)^{\frac{1}{2}}\ d\sigma(x) < \infty$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème (i) ci-dessus :

$$\int |h(x,y)|^2\ d\sigma(y) = \int h(x,y)\cdot h(y,x)\ d\sigma(y) = h(x,x)\ .$$

EXEMPLE 1 La fonction-noyau de $\ell^2(X)$ est 1_Δ , la fonction caractéristique de la diagonale de $X\times X$. Le produit scalaire est défini par l'intégrale de comptage $\# = \sum_{y\in X}\epsilon_y$ sur l'espace topologique discret X et la propriété de moyenne est triviale, puisque $1_\Delta(x,\cdot)\cdot\# = \epsilon_x$.

EXEMPLE 2 O. Lehto [13] a construit un exemple d'espace de Hilbert à noyau reproduisant h formé de fonctions continues, mais tel que la fonction $x \longmapsto h(x,x)$ ne soit pas continue. Cet exemple est décrit dans le livre de Meschkowski [14], p. 46-47.

EXEMPLE 3 (Noyau de Bergman) Cet exemple est en fait à l'origine de la théorie des noyaux reproduisants de Aronszajn.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Nous désignerons par $\mathcal{O}^2(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes ξ sur Ω qui sont de carré intégrables par rapport à l'intégrale de Lebesgue λ_Ω sur Ω , i.e. telles que

$$\|\xi\|_2^2 = \int^* |\xi(z)|^2 \, d\lambda_\Omega(z) < \infty \ .$$

Pour tout $\xi \in \mathcal{O}^2(\Omega)$, $z \in \Omega$ et $0 < \rho < d(z, \operatorname{Fr}\Omega)$, la formule de Cauchy nous permet d'écrire

$$\xi(z) = \frac{2}{\rho^2} \cdot \int_0^\rho \xi(z) \cdot r\, dr = \frac{1}{\pi\rho^2} \cdot \int_0^\rho \left(\int_0^{2\pi} \xi\left(z + r \cdot e^{i\alpha}\right) d\alpha \right) \cdot r\, dr =$$

$$= \frac{1}{\pi\rho^2} \cdot \int_{|w-z|\leqslant\rho} \xi(w)\, d\lambda_\Omega(w) \ .$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|\xi(z)| \leqslant \frac{1}{\pi\rho^2} \cdot \|\xi\|_2 \cdot \left(\int_{|w-z|\leqslant\rho} d\lambda_\Omega(w) \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \rho} \cdot \|\xi\|_2 \ ,$$

donc

$$\sup_{z\in K} |\xi(z)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \rho} \cdot \|\xi\|_2$$

pour tout compact $K \subset \Omega$ tel que $d(K, \operatorname{Fr}\Omega) > \rho > 0$. Par le théorème de Montel, on en déduit que $\mathcal{O}^2(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbf{L}^2(\Omega)$, donc un espace de Hilbert, et en outre qu'il est à noyau reproduisant. Sa fonction-noyau s'appelle le *noyau de Bergman* de Ω .

Nous allons maintenant calculer le noyau de $\mathcal{O}^2(\mathbb{D}) \hookrightarrow \mathbb{C}^\mathbb{D}$, où $\mathbb{D}$ est le disque unité de $\mathbb{C}$. Remarquons tout d'abord que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les fonctions

$$e_k := \sqrt{\frac{k+1}{\pi}} \cdot \mathrm{id}^k$$

forment une base hilbertienne de $\mathcal{O}^2(\mathbb{D})$.

En effet, pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, on a

$$(e_k | e_l) = \frac{\sqrt{(k+1)(l+1)}}{\pi} \cdot \int \overline{z}^k \cdot z^l \, d\lambda_\mathbb{D}(z) =$$

$$= \frac{\sqrt{(k+1)(l+1)}}{\pi} \cdot \int_0^1 r^{k+l+1} \left(\int_0^{2\pi} e^{i(l-k)\cdot\sigma} \, d\sigma \right) dr =$$

$$= \frac{\sqrt{(k+1)(l+1)}}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{k+l+2} \cdot \delta_{k,l} = \delta_{k,l} \ .$$

D'autre part, pour tout $\xi \in \mathcal{O}^2(\mathbb{D})$ et $0 < \rho < 1$, la série de Taylor $\xi(z) = \sum_{l=0}^\infty a_l \cdot z^l$ converge uniformément sur $|z| \leqslant \rho$, donc

$$\int_{|z|\leqslant\rho} \overline{z}^k \cdot \xi(z) \, d\lambda_\mathbb{D}(z) = \sum_{l=0}^\infty a_l \cdot \int_{|z|\leqslant\rho} \overline{z}^k \cdot z^l \, d\lambda_\mathbb{D}(z) = \frac{\pi \cdot \rho^{2(k+1)}}{k+1} \cdot a_k \ .$$

Puisque $|\mathrm{id}|^k \cdot |\xi|$ est intégrable sur $\mathbb{D}$, le théorème de Lebesgue montre alors que

$$(e_k|\,\xi) = \sqrt{\frac{k+1}{\pi}} \cdot \lim_{\rho \to 1-} \int_{|z| \leqslant \rho} \overline{z}^k \cdot \xi(z)\, d\lambda_{\mathbb{D}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{k+1}} \cdot a_k \ .$$

Ainsi $(e_k|\,\xi) = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, entraîne $\xi = 0$, ce qui prouve que $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est total dans $\mathcal{O}^2(\mathbb{D})$.

Nous pouvons maintenant utiliser la proposition 5.15.4. Le noyau de $\mathcal{O}^2(\mathbb{D})$ est donc

$$h = \sum_{k \geqslant 0} |e_k\rangle\, \langle e_k| \in \mathbb{C}^{\mathbb{D}\times\mathbb{D}} \ .$$

On dit quer cette fonction-noyau est le noyau de Bergman de D et on a

$$h(z,w) = \sum_{k\geqslant 0} |e_k\rangle\, \langle e_k|\,(z,w) = \sum_{k\geqslant 0} e_k(z) \cdot \overline{e_k(w)} = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k\geqslant 0} (k+1) \cdot z^k \cdot \overline{w}^k =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left(- \sum_{k\geqslant 0} \mathrm{id}^{k+1} \right)' (z\overline{w}) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(1 - z\overline{w})^2}$$

pour tout $|z|\,, |w| < 1$.

La propriété de reproduction, ou de moyenne, s'écrit alors

$$\xi(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \int \frac{\xi(w)}{(1 - z\overline{w})^2}\, d\lambda_{\mathbb{D}}(w) \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{O}^2(\mathbb{D}) \text{ et } z \in \mathbb{D} \ .$$

5.17 Les semi-dualités bien plongées

Soient F un espace localement convexe séparé
et
$\mathcal{H} \hookrightarrow F^{\dagger}$ un sous-espace hilbertien.

Nous avons déjà rencontré des semi-dualités que nous dirons bien plongées. La plus simple est $(\mathcal{H}|\,\mathcal{H})$, associée au sous-espace hilbertien $\mathcal{H} \hookrightarrow F^{\dagger}$, donc au diagramme

$$F \xrightarrow{h} \mathcal{H}_{\sigma} \overset{h^{\dagger}}{\hookrightarrow} F^{\dagger}$$

et à la formule

$$\langle \varphi |\, \xi \rangle_F = (h\varphi |\, \xi)_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \xi \in \mathcal{H} \ .$$

Mais on a aussi

$$\mathcal{D}(X) \hookrightarrow \mathcal{K}(X) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(X) \hookrightarrow \mathcal{M}(X) \hookrightarrow \mathcal{D}(X)'$$

et

$$\langle \varphi |\, \mu \rangle_{\mathcal{D}(X)} = \langle \varphi |\, \mu \rangle_{\mathcal{K}(X)} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(X) \text{ et } \mu \in \mathcal{M}(X) \ ,$$

lorsque X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, ou

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$$

(cf. 4.3), ainsi que

$$\mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu,\rho) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow \mathbf{L}^2\left(\mu,\frac{1}{\rho}\right) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$$

et

$$\langle \varphi |\, \xi \rangle_{\mathcal{K}(X)} = \langle \varphi |\, \xi \rangle_{\rho} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}(X) \text{ et } \xi \in \mathbf{L}^2\left(\mu,\frac{1}{\rho}\right) \ ,$$

si μ est un intégrale de Radon sur X et si ρ est μ-mesurable et telle que $0 < m \leqslant \rho \leqslant M < \infty$ (cf. exemple 5.4.3). Remarquons qu'un sous-espace hilbertien, $\mathbf{L}^2(\mu)$ ci-dessus, est au centre du diagramme, i.e. μ est l'intégrale pivot.

Mais que peut-on dire de la semi-dualité $\left\langle \mathbf{L}^2(\mu,\rho) \middle| \mathbf{L}^2\left(\mu,\frac{1}{\rho}\right) \right\rangle$, où $\rho, \frac{1}{\rho} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$, ou encore $\langle \mathbf{L}^1(\mu) |\, \mathbf{L}^{\infty}(\mu) \rangle$? On a seulement

$$\mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu,\rho) \hookrightarrow \mathcal{M}(X) \quad \text{et} \quad \mathcal{K}(X) \hookrightarrow \mathbf{L}^2\left(\mu,\frac{1}{\rho}\right) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$$

ou

$$\mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^1(\mu) \hookrightarrow \mathcal{M}(X) \quad \text{et} \quad \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^{\infty}(\mu) \hookrightarrow \mathcal{M}(X) \ ,$$

ainsi que

$$\langle \varphi |\, \nu \rangle_{\mathcal{K}(X)} = \langle \varphi |\, \nu \rangle_{\mu,\rho} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}(X) \text{ et } \nu \in \mathbf{L}^2\left(\mu,\frac{1}{\rho}\right) \ ,$$

$$\langle \varphi |\, \gamma \rangle_{\mathcal{K}(X)} = \langle \varphi |\, \gamma \rangle_{\mu,\frac{1}{\rho}} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}(X) \text{ et } \gamma \in \mathbf{L}^2(\mu,\rho) \ ,$$

ou

$$\langle \varphi | \nu \rangle_{\mathcal{K}(X)} = \langle \varphi | \nu \rangle_{\mathbf{L}^1(\mu)} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}(X) \text{ et } \nu \in \mathbf{L}^\infty(\mu) \ ,$$

$$\langle \varphi | \gamma \rangle_{\mathcal{K}(X)} = \langle \varphi | \gamma \rangle_{\mathbf{L}^\infty(\mu)} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}(X) \text{ et } \gamma \in \mathbf{L}^1(\mu) \ ,$$

et encore

$$(\theta | \nu)_{\mathbf{L}^2(\mu)} = \langle \theta | \nu \rangle_{\mu,\rho} \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^2(\mu,\rho) \text{ et } \nu \in \mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right)$$

ou

$$(\theta | \nu)_{\mathbf{L}^2(\mu)} = \langle \theta | \nu \rangle_{\mathbf{L}^1(\mu)} \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^1(\mu) \text{ et } \nu \in \mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^\infty(\mu)$$

Les formules

$$\langle \theta | \xi + \nu \rangle_{\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^2(\mu,\rho)} := \int \overline{\theta} \cdot (\xi + \nu) \, d\mu = (\theta | \xi)_{\mathbf{L}^2(\mu)} + \langle \theta | \nu \rangle_{\mu,\rho}$$

et

$$\langle \theta | \xi + \nu \rangle_{\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^1(\mu)} := \int \overline{\theta} \cdot (\xi + \nu) \, d\mu = (\theta | \xi)_{\mathbf{L}^2(\mu)} + \langle \theta | \nu \rangle_{\mathbf{L}^1(\mu)}$$

définissent des semi-dualités entre $\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^2(\mu,\rho)$ et $\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right)$ et respectivement $\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^1(\mu)$ et $\mathbf{L}^2(\mu) + \mathbf{L}^\infty(\mu)$.

Nous allons formuler un concept général englobant toutes ces situations. Soient G_+ et G_- des espaces localement convexes en semi-dualité (cf. définition 3.7.2), notée

$$G_+ \times G_- \longrightarrow \mathbb{K} : (\gamma, \nu) \longmapsto \langle \gamma | \nu \rangle_+ \ .$$

Rappelons que la semi-dualité $\langle G_- | G_+ \rangle$ est définie par

$$\langle \nu | \gamma \rangle_- := \overline{\langle \gamma | \nu \rangle_+} \quad \text{pour tout } \nu \in G_- \text{ et } \gamma \in G_+ \ .$$

DEFINITION 1 Nous dirons que la semi-dualité $\langle G_+ | G_- \rangle$ est *bien plongeable* par rapport à $\mathcal{H}$, s'il existe des applications linéaires $j_\pm : G_\pm \hookrightarrow F^\dagger$ injectives telles que

$$h(F) \subset j_+(G_+) \cap j_-(G_-)$$

et

$$\langle \varphi | j_\mp \theta \rangle_F = \left\langle \overset{-1}{j_\pm}(h\varphi) \middle| \theta \right\rangle_\pm \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \theta \in G_\mp \ . \qquad (*)$$

THEOREME *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) La semi-dualité $\langle G_+ | G_- \rangle$ *est bien plongeable par rapport à* $\mathcal{H}$ *.*

(ii) Il existe une application linéaire $\Phi : F \longrightarrow G_+$ *faiblement continue et d'image dense telle que* $h(F)$ *soit dense dans* $\Phi^\dagger(G_-)$ *et que*

$$\Xi : \varphi \longmapsto h\varphi : F \longrightarrow \Phi^\dagger(G_-)$$

soit faiblement continue.

(iii) Il existe une application linéaire $\Phi : F \longrightarrow G_+$ *faiblement continue d'image dense et une application linéaire* $j_+ : G_+ \longrightarrow F^\dagger$ *faiblement continue injective telles que*

$$h^\dagger h = j_+ \Phi \ .$$

Dans ce cas les applications $j_\pm$ sont (faiblement) continues et $j_- = \Phi^\dagger$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Les formules $(*)$ montrent que les applications $j_\mp$ sont continues et que leur adjointe sont

$$j_\mp^\dagger : F \longrightarrow G_\pm : \varphi \longmapsto \overset{-1}{j_\pm}(h\varphi) \ .$$

Il suffit donc de poser $\Phi := j_-^\dagger$, car $\overset{-1}{j_-}\Xi = j_+^\dagger$ et $\overset{-1}{j_-}$ est un isomorphisme de $j_-(G_-)$ sur G_- .

(ii) $\Rightarrow$ (iii) En vertu de l'hypothèse on a $h^\dagger h = \Phi^\dagger \overset{-1}{\Phi^\dagger}\Xi$ et $\overset{-1}{\Phi^\dagger}$ est un isomorphisme de $\Phi^\dagger(G_-)$ sur G_- . On a donc

$$h^\dagger h = \left(h^\dagger h\right)^\dagger = \Xi^\dagger \left(\overset{-1}{\Phi^\dagger}\right)^\dagger \Phi = j_+\Phi \ ,$$

en posant $j_+ := \Xi^\dagger \left(\overset{-1}{\Phi^\dagger}\right)^\dagger : G_+ \longrightarrow \Phi^\dagger(G_-)^\dagger \longrightarrow F^\dagger$; cette application linéaire est évidemment (faiblement) continue injective.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Posons $j_- := \Phi^\dagger$. La formule $h^\dagger h = j_+\Phi$ montre que

$$h(F) = h^\dagger h(F) = j_+\Phi(F) \subset j_+(G_+)$$

et, pour tout $\varphi \in F$ et $\nu \in G_-$, que

$$\langle \varphi | j_-\nu\rangle_F = \left\langle \varphi | \Phi^\dagger\nu\right\rangle_F = \langle \Phi\varphi | \nu\rangle_+ = \left\langle \overset{-1}{j_+}(j_+\Phi\varphi) \middle| \nu \right\rangle_+ = \left\langle \overset{-1}{j_+}(h\varphi) \middle| \nu \right\rangle_+ \ ,$$

c'est-à-dire la formule $(*,+)$.

On a également

$$h^\dagger h = \left(h^\dagger h\right)^\dagger = (j_+\Phi)^\dagger = j_- j_+^\dagger \ ,$$

ce qui montre que $h(F) \subset j_-(G_-)$, puis pour tout $\varphi \in F$ et $\gamma \in G_+$, que

$$\langle \varphi | j_+\gamma\rangle_F = \langle \varphi | j_+\gamma\rangle_F = \left\langle j_+^\dagger\varphi \middle| \gamma\right\rangle_- = \left\langle \overset{-1}{j_-} j_- j_+^\dagger\varphi \middle| \gamma\right\rangle_- = \left\langle \overset{-1}{j_-}(h\varphi) \middle| \gamma\right\rangle_- \ ,$$

ce qui prouve la formule $(*,-)$. □

Si la semi-dualité $\langle G_+ | G_-\rangle$ est bien plongeable, nous identifierons les espaces $G_\pm$ avec leur image $j_\pm(G_\pm)$, donc les applications $j_\pm$ avec les injections canoniques. On a alors

$$j_\mp^\dagger : F \longrightarrow G_\pm : \varphi \longmapsto h\varphi \ .$$

Nous n'écrirons pas les applications $j_\pm$ lorsque cela n'est pas nécessaire !

Ceci nous conduit naturellement à poser la

DEFINITION 2 Si G_+ et G_- sont des sous-espaces vectoriels de $F^\dagger$, nous dirons que la semi-dualité $\langle G_+ | G_-\rangle$ est *bien plongée* par rapport à $\mathcal{H}$ si l'on a

$$h(F) \subset G_+ \cap G_- \ ,$$

ainsi que les *formules de dualité*

$$\langle \varphi | \nu\rangle_F = \langle h\varphi | \nu\rangle_+ \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \nu \in G_- \qquad (*,+)$$

et

$$\langle \varphi | \, \gamma \rangle_F = \langle h\varphi | \, \gamma \rangle_- \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \gamma \in G_+ \ . \tag{$*,-$}$$

Nous dirons que $\mathcal{H}$ est le *sous-espace hilbertien pivot* .

Attention, dans la formule $(*, +)$ on considère $h\varphi$ comme un élément de G_+ , tandis que dans la formule $(*, -)$ c'est un élément de G_- .

Voici le diagramme résumant la situation :

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr] \arrow[dd, "j_-^\dagger"', "\Phi"] \arrow[ddrr, "h"] & & \mathcal{H} \arrow[rr, hook, "h^\dagger"] & & F^\dagger \\
& & & & \\
G_+ \arrow[dd, hook, "j_+"'] & & h(F) \arrow[uu, hook] \arrow[dd, hook] \arrow[ddll, hook] & \Xi \arrow[uur, hook] & G_- \arrow[uu, hook, "\Phi^\dagger"', "j_-"] \\
& & & & \\
F^\dagger & & \mathcal{H} \arrow[ll, hook', "h^\dagger"'] & & F \arrow[ll] \arrow[uul, "h"] \arrow[uu, "j_+^\dagger"']
\end{tikzcd}$$

REMARQUE 1 La construction d'une semi-dualité bien-plongée se fait en général de manière asymétrique comme le suggère le théorème.

Il est souvent naturel de considéré G_- comme une partie de $F^\dagger$, par exemple s'il existe une application linéaire naturelle $\Phi : F \longrightarrow G_+$ faiblement continue et d'image dense qui permet d'identifier G_- , le semi-dual de G_+ , avec des formes semi-linéaires continues sur F grâce à l'adjointe $\Phi^\dagger : G_- \hookrightarrow F^\dagger$. Il suffit alors de vérifier que l'application linéaire $\Xi : \varphi \longmapsto h\varphi$ est à valeurs dans G_- , faiblement continue et d'image dense, ou bien qu'il existe une application $j_+ : G_+ \longrightarrow F^\dagger$ faiblement continue injective telles que

$$j_+ \Phi \varphi = h\varphi \ .$$

REMARQUE 2 L'application linéaire

$$\Xi : \varphi \longmapsto h\varphi : F \longrightarrow G_-$$

est continue dans les cas suivants :

On considère une topologie localement convexe $\mathfrak{T}$ sur G_- compatible avec la semi-dualité $\langle G_+ | \, G_- \rangle$. On peut alors appliqué le théorème du graphe fermé si F est tonnelé et $G_{-,\mathfrak{T}}$ est respectivement un espace de Hilbert (théorème de Ptak 3.14.i et l'exemple 3.14.1), ou un espace de Fréchet (théorème de Ptak 3.14.ii).

En effet le graphe de Ξ est celui de $h^\dagger h$; mais ce dernier est fermé dans $F \times F^\dagger$, donc aussi dans $F \times G_-$, puisque $G_- \hookrightarrow F^\dagger$ est continue. $\square$

REMARQUE 3 Supposons que G_+ est un espace préhilbertien. Si nous voulons appliquer la remarque 2 précédente à la topologie forte sur G_- , nous sommes obligés de supposer que

G_+ est un espace de Hilbert, puisque

$$(G_{-,\beta})^{\dagger}_{\beta} \approx \left((G_+)^{\dagger}_{\beta}\right)^{\dagger}_{\beta} = \widehat{G_+}$$

(cf. exemple 3.8.1).

EXEMPLE 1 En revenant à l'exemple 5.4.3, si $\rho, \frac{1}{\rho} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$, alors la semi-dualité

$$\left\langle \mathbf{L}^2(\mu,\rho) \middle| \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) \right\rangle$$

est bien plongée par rapport à $\mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$. Par contre si $\frac{1}{\rho} \notin \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$, alors cette semi-dualité $\left\langle \mathbf{L}^2(\mu,\rho) \middle| \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right) \right\rangle$ n'est pas plongeable par rapport à $\mathbf{L}^2(\mu)$, puisque $\mathcal{K}(X)$ n'est pas contenu dans $\mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right)$.

En effet il existe $\varphi \in \mathcal{K}_+(X)$ tel que $\int^* \varphi \cdot \frac{1}{\rho}\, d\mu = \infty$, donc $\varphi^{\frac{1}{2}} \notin \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{\rho}\right)$. □

La semi-dualité $\langle \mathcal{H}_+ | \mathcal{H}_- \rangle$

Soit $\mathcal{H}_- \hookrightarrow F^{\dagger}$ un sous-espace hilbertien de noyau $h_- \in \mathcal{L}_+\left(F, F^{\dagger}\right)$. La remarque 5.11.2 montre que $\mathcal{H}_-$ peut être considérer comme le semi-dual fort de l'espace de Hilbert $\widehat{F_{h_-}}$ associé à h_- , l'injection canonique $j_- : \mathcal{H}_- \hookrightarrow F^{\dagger}$ étant l'adjointe de

$$\Phi : F \longrightarrow \widehat{F_{h_-}} : \varphi \longmapsto \varphi + \operatorname{Ker} h_- \ .$$

Remarquons que $h(F)$ est un sous-espace vectoriel dense dans $\mathcal{H}_{-,\sigma}$ si, et seulement si, $h(F)$ est dense dans $\mathcal{H}_-$, qui est muni de sa norme ; en outre l'application linéaire

$$\Xi : \varphi \longmapsto h\varphi : F \longrightarrow \mathcal{H}_{-,\sigma}$$

est continue si, et seulement si, il en est de même de $\Xi : F_{\tau} \longrightarrow \mathcal{H}_-$.

Cela découle du corollaire 3.10.i et du fait que la topologie de $\mathcal{H}_-$ est égale à la topologie de Mackey puisque $\mathcal{H}_-$ est tonnelé. □

COROLLAIRE *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) La semi-dualité $\left\langle \widehat{F_{h_-}} \middle| \mathcal{H}_- \right\rangle$ *est bien plongeable par rapport à* $\mathcal{H}$.

(ii) $h(F)$ *est un sous-espace vectoriel dense de* $\mathcal{H}_-$ *et* $\varphi \longmapsto h\varphi : F \longrightarrow \mathcal{H}_{-,\sigma}$ *est (faiblement) continue.*

(iii) Le noyau $h^{\dagger}h$ *de* $\mathcal{H}$ *se factorise par* Φ *en une application linéaire continue de* F_{h_-} *dans* $F^{\dagger}$ *, i.e. pour tout* $\psi \in F$ *, il existe* $c_{\psi} \in \mathbb{R}_+$ *tel que*

$$|\langle \psi | h\varphi \rangle|^2 \leqslant c_{\psi} \cdot \langle \varphi | h_-\varphi \rangle \quad \textit{pour tout } \varphi \in F \ ,$$

dont le prolongement canonique continu $\widehat{h} : \widehat{F_{h_-}} \longrightarrow F^{\dagger}$ *est injectif.*

Dans ce cas, soit $\mathcal{H}_+ := \widehat{h}\left(\widehat{F_{h_-}}\right)$ *. Si* $Q : \mathcal{H}_+ \longrightarrow \mathcal{H}_-$ *désigne l'application de Riesz, alors les noyaux* h_+ *et* h_- *des sous-espaces hilbertiens*

$$\mathcal{H}_+ \hookrightarrow F^{\dagger} \quad \textit{et} \quad \mathcal{H}_- \hookrightarrow F^{\dagger}$$

sont respectivement

$$\overset{-1}{Q} j_+^\dagger : F \longrightarrow \mathcal{H}_+ : \varphi \longmapsto \overset{-1}{Q}(h\varphi) \quad \textit{et} \quad Qj_-^\dagger : F \longrightarrow \mathcal{H}_- : \varphi \longmapsto Q(h\varphi) \ .$$

Les équivalences ne sont qu'une reformulation de celles du théorème. Le calcul des noyaux se fait à l'aide de la proposition et de la remarque 5.1.1, ce qui revient à écrire les formules de semi-dualité $(*, \pm)$ à l'aide des produits scalaires de $\mathcal{H}_\pm$ et de l'application de Riesz correspondante, puis à utiliser le corollaire 5.1 : pour tout $\varphi \in F$, $\theta \in \mathcal{H}_+$ et $\mu \in \mathcal{H}_-$, on a

$$\langle \varphi | \theta \rangle_F = \langle h\varphi | \theta \rangle_- = \left(\overset{-1}{Q}(h\varphi) \middle| \theta \right)_{\mathcal{H}_+}$$

et

$$\langle \varphi | \mu \rangle_F = \langle h\varphi | \mu \rangle_+ = (Q(h\varphi) | \mu)_{\mathcal{H}_-} \ .$$

$\square$

REMARQUE 4 Pour conclure cet exemple, la définition montre que $\mathcal{H}_+$ est le complété de $h(F)$ pour le produit scalaire

$$(h\varphi | h\psi)_{\mathcal{H}_+} = \langle \varphi | h_-\psi \rangle_F \ ,$$

tandis que $\mathcal{H}_-$ est le complété de $h_-(F)$ pour le produit scalaire

$$(h_-\varphi | h_-\psi)_{\mathcal{H}_-} = \langle \varphi | h_-\psi \rangle_F$$

par la proposition 5.3.(i). C'est aussi le complété de $h(F)$, mais pour un produit scalaire plus compliqué :

$$(h\varphi | h\psi)_{\mathcal{H}_-} = \left\langle h\varphi \middle| \overset{-1}{Q}(h\psi) \right\rangle_- = \left\langle \varphi \middle| \overset{-1}{Q}(h\psi) \right\rangle_F = \left(h\varphi \middle| \overset{-1}{Q}(h\psi) \right)_{\mathcal{H}} \ .$$

EXEMPLE 2 Nous verrons lorsque nous étudierons les opérateurs non-bornés (cf. théorème 7.3) qu'une semi-dualité $\langle G_+ | G_- \rangle$, où G_+ est un espace préhilbertien, peut être bien plongée, sans que $\left\langle \widehat{G_+} \middle| G_- \right\rangle$ le soit. Ce sera le cas lorsque $h^\dagger h$ se factorise par G_+ en une application linéaire continue injective, mais dont le prolongement continu à $\widehat{G_+}$ n'est plus injectif.

La semi-dualité $\langle \mathcal{H} \cap G_+ | \mathcal{H} + G_- \rangle$

Soit $\langle G_+ | G_- \rangle$ une semi-dualité bien plongée par rapport à $\mathcal{H}$ et considérons l'espace localement convexe intersection $\mathcal{H} \cap G_+ \hookrightarrow F^\dagger$ (cf. définition 2.4.2). D'après l'exercice 3.7 nous savons que $(\mathcal{H} \cap G_+)^\dagger = \mathcal{H} + G_-$, car $h(F) \subset \mathcal{H} \cap G_+$ est dense dans $\mathcal{H}$ comme dans G_+ . Cette semi-dualité

$$\left\langle \mathcal{H} \cap G_+ \middle| (\mathcal{H} \cap G_+)^\dagger \right\rangle = \langle \mathcal{H} \cap G_+ | \mathcal{H} + G_- \rangle$$

est donnée par

$$\langle \theta | \xi + \nu \rangle_{\mathcal{H} \cap G_+} = (\theta | \xi)_{\mathcal{H}} + \langle \theta | \nu \rangle_+ \quad \text{pour tout } \theta \in \mathcal{H} \cap G_+ \ , \ \xi \in \mathcal{H} \text{ et } \nu \in G_- \ .$$

Mais attention, la somme $\mathcal{H} + G_-$ est prise dans $(\mathcal{H} \cap G_+)^\dagger$! Nous aimerions en fait que cette somme coïncide avec celle prise dans $F^\dagger$. Ceci revient, en considérant le diagramme commutatif suivant et son dual

$$
\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{H} & \\
h \nearrow & \uparrow & \\
F & \longrightarrow \mathcal{H} \cap G_+ & \\
j_-^\dagger \searrow & \downarrow & \\
 & G_+ &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{H} & \\
 & \downarrow & \searrow h^\dagger \\
 & (\mathcal{H} \cap G_+)^\dagger \longrightarrow & F^\dagger \\
 & \uparrow & \nearrow j_- \\
 & G_- &
\end{array}
$$

à ce que l'application $(\mathcal{H} \cap G_+)^\dagger \longrightarrow F^\dagger$ soit injective, donc que $h(F)$ soit dense dans $\mathcal{H} \cap G_+$. Plus précisément on a le

COROLLAIRE *Soit $\langle G_+ | G_- \rangle$ une semi-dualité bien plongée. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) La semi-dualité $\left\langle \mathcal{H} \cap G_+ | (\mathcal{H} \cap G_+)^\dagger \right\rangle$ est bien plongée.

(ii) $\mathcal{H} \cap G_+$ et $\mathcal{H} + G_-$, comme sous-espaces vectoriels de $F^\dagger$ sont en semi-dualité grâce à

$$\langle \theta | \xi + \nu \rangle_{\mathcal{H} \cap G_+} := (\theta | \xi)_{\mathcal{H}} + \langle \theta | \nu \rangle_+ \quad \textit{pour tout } \theta \in \mathcal{H} \cap G_+ \text{ , } \xi \in \mathcal{H} \textit{ et } \nu \in G_- \text{ .}$$

(iii) Pour tout $\theta \in \mathcal{H} \cap G_+$ et $\nu \in \mathcal{H} \cap G_- \hookrightarrow F^\dagger$, on a

$$(\theta | \nu)_{\mathcal{H}} = \langle \theta | \nu \rangle_+ \ .$$

(iv) $h(F)$ est dense dans $\mathcal{H} \cap G_+$.

Il nous reste à montrer que

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Il vient

$$(\theta | \nu)_{\mathcal{H}} = (\theta | \nu)_{\mathcal{H}} + \langle \theta | 0 \rangle_+ = \langle \theta | \nu \rangle_{\mathcal{H} \cap G_+} = (\theta | 0)_{\mathcal{H}} + \langle \theta | \nu \rangle_+ = \langle \theta | \nu \rangle_+ \ .$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Si $\xi + \nu \in (\mathcal{H} \cap G_+)^\dagger$ s'annule sur $h(F)$, on a $\xi = -\nu \in \mathcal{H} \cap G_- \hookrightarrow F^\dagger$, donc

$$(\theta | \xi)_{\mathcal{H}} = \langle \theta | \xi \rangle_+ = \langle \theta | -\nu \rangle_+ \ ,$$

et par suite $\xi + \nu = 0$ dans $(\mathcal{H} \cap G_+)^\dagger$. □

EXEMPLE 3 Un élément $\xi + \eta \neq 0$ dans $(\mathcal{H} \cap G_+)^\dagger$ peut être 0 dans $F^\dagger$.

Considérons une intégrale de Radon μ telle qu'il existe

$$\xi \in \mathbf{L}^2(\mu) \smallsetminus \mathbf{L}^\infty(\mu) \quad \text{et} \quad \eta \in \mathbf{L}^\infty(\mu) \smallsetminus \mathbf{L}^2(\mu) \ .$$

Il est clair que $\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^1(\mu)$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ et $\mathbf{L}^1(\mu)$, donc

$$\left(\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^1(\mu)\right)^\dagger = \mathbf{L}^2(\mu) + \mathbf{L}^\infty(\mu)$$

(cf. exercice 3.7). Comme $\xi + \eta \notin \mathbf{L}^2(\mu)$, la forme semi-linéaire que cet élément définit sur $\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^1(\mu)$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ n'est pas continue, donc $F := \{\xi + \eta = 0\}$ y est dense, et par suite aussi dans $\mathbf{L}^2(\mu)$. Pour la même raison, puisque $\xi + \eta \notin \mathbf{L}^\infty(\mu)$, F est dense dans $\mathbf{L}^1(\mu)$. Munissons F par exemple de la topologie induite par $\mathbf{L}^2(\mu) \cap \mathbf{L}^1(\mu)$. Les injections canoniques $F \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$ et $F \hookrightarrow \mathbf{L}^1(\mu)$ sont donc continues et d'image dense et par suite

$$\xi \in \mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow F^\dagger \quad \text{et} \quad \eta \in \mathbf{L}^\infty(\mu) \hookrightarrow F^\dagger \ ,$$

mais $\xi + \eta = 0$ dans $F^\dagger$ par construction.

Par exemple, on peut prendre pour μ l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, $\xi := 1_{[-1,1]} \cdot \mathrm{id}^{-\frac{1}{4}}$ et $\eta := 1$.

5.18 Les semi-dualités plongées

Ce paragaphe est inspiré de l'article de Xavier Mary, Denis De Brucq et Stéphane Canu [15].

Soient G_+ et G_- des espaces localement convexes en semi-dualité $\langle G_+ | G_- \rangle$ séparante, notée

$$G_+ \times G_- \longrightarrow \mathbb{K} : (\gamma, \nu) \longmapsto \langle \gamma | \nu \rangle_+ \ .$$

Rappelons que la semi-dualité $\langle G_- | G_+ \rangle$ est définie par

$$\langle \nu | \gamma \rangle_- := \overline{\langle \gamma | \nu \rangle_+} \quad \text{pour tout } \nu \in G_- \text{ et } \gamma \in G_+ \ .$$

DEFINITION 1 On dit que $\langle G_+ | G_- \rangle$ est *plongée* dans $\left\langle F \middle| F^\dagger \right\rangle$ s'il existe des applications linéaires $j_\pm : G_\pm \hookrightarrow F^\dagger$ injectives et faiblement continues.

On dit que $w := j_-^\dagger : F \longrightarrow G_+$, ou $w := j_+ j_-^\dagger : F \longrightarrow F^\dagger$ est le noyau de cette semi-dualité.

LEMME *Si l'on identifie $G_\pm$ à des sous-espaces vectoriels de $F^\dagger$, on a*

$$\langle \varphi | \nu \rangle_F = \langle w\varphi | \nu \rangle_+ \quad \textit{pour tout } \varphi \in F \textit{ et } \nu \in G_- \ .$$

Le noyau de $\langle G_- | G_+ \rangle$ est $w^\dagger$.

C'est évident, puisque

$$\langle \varphi | \nu \rangle_F = \langle \varphi | j_- \nu \rangle_F = \left\langle j_-^\dagger \varphi \middle| \nu \right\rangle_+ = \langle w\varphi | \nu \rangle_+$$

et

$$w^\dagger = \left(j_+ j_-^\dagger \right)^\dagger = j_- j_+^\dagger \ .$$

□

EXEMPLE 1 La semi-dualité $\langle \mathcal{AC}_0([0,1]) | \mathcal{AC}_1([0,1]) \rangle$ définie par

$$\mathcal{AC}_0([0,1]) := \{ f \in \mathcal{AC}([0,1]) \mid f(0) = 0 \} \quad , \quad \mathcal{AC}_1([0,1]) := \{ g \in \mathcal{AC}([0,1]) \mid g(1) = 0 \}$$

et

$$\langle f | g \rangle_+ := -\int_0^1 \overline{f} \cdot \partial g = \int_0^1 \overline{\partial f} \cdot g$$

est séparante et plongée dans $\left\langle \mathcal{D}([0,1]) \middle| \mathcal{D}([0,1])' \right\rangle$. Son noyau est

$$\varphi \longmapsto P_0 \varphi := \int_0^\diamond \varphi : \mathcal{D}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{AC}_0([0,1]) \ .$$

En effet soit $j_1 : \mathcal{AC}_1([0,1]) \hookrightarrow \mathcal{D}([0,1])' : g \longmapsto g \cdot \lambda_{[0,1]}$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}([0,1])$ et $g \in \mathcal{AC}_1([0,1])$, on a alors

$$\left\langle j_1^\dagger \varphi \middle| g \right\rangle_+ = \langle \varphi | j_1 g \rangle = \int_0^1 \overline{\varphi} \cdot g = \int_0^1 \overline{\partial (P_0 \varphi)} \cdot g = \langle P_0 \varphi | g \rangle_+ \ .$$

□

EXEMPLE 2 Soit $\rho \in \mathbf{L}^{\infty}([0,1])$ tel que $\lambda_{[0,1]}$-presque partout on ait $\rho \neq 0$. La semi-dualité $\langle G_+ | G_- \rangle$ définie par

$$G_+ := \left\{ f = \overline{\rho} \cdot \int_0^{\diamond} d\mu \;\middle|\; \mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}([0,1]) \right\} \quad , \quad G_- = \left\{ g = \int_{\diamond}^1 \rho \, d\nu \;\middle|\; \nu \in \mathcal{M}([0,1]) \right\}$$

et

$$\langle f | g \rangle_+ := -\int_0^1 \overline{f} \, d\nu = \int_0^1 g \, d\overline{\mu}$$

est séparante et plongée dans $\left\langle \mathcal{D}([0,1]) \middle| \mathcal{D}([0,1])' \right\rangle$. Son noyau est

$$\varphi \longmapsto \overline{\rho} \cdot P_0 \varphi : \mathcal{D}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{AC}_0([0,1]) \ .$$

En effet

$$-\int_0^1 \overline{f} \, d\nu = -\int_0^1 \frac{\overline{f}}{\rho} \, d(\rho \cdot \nu) = -\int_0^1 \frac{\overline{f}}{\rho} \, d\lambda_g = \int_0^1 g \, d\lambda_{\frac{\overline{f}}{\rho}} = \int_0^1 g \, d\overline{\mu}$$

et, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}([0,1])$ et $g \in G_-$, on a

$$\left\langle j_-^{\dagger} \varphi \middle| g \right\rangle_+ = \langle \varphi | j_- g \rangle = \int_0^1 \overline{\varphi} \cdot g = \int_0^1 \overline{\partial (P_0 \varphi)} \cdot g = \int_0^1 g \, d\overline{\lambda_{P_0 \varphi}} = \langle \overline{\rho} \cdot P_0 \varphi | g \rangle_+ \ ,$$

puisque $f = \overline{\rho} \cdot \int_0^{\diamond} d\mu = \overline{\rho} \cdot P_0 \varphi$. □

DEFINITION 2 On dit que des semi-normes p_+ sur G_+ et p_- sur G_- sont en dualité si

$$p_- = \mathrm{sn}_{\{p_+ \leqslant 1\}} \quad \text{ou bien} \quad p_+ = \mathrm{sn}_{\{p_- \leqslant 1\}} \ .$$

L'équivalence des deux conditions découle du théorème des bipolaires 3.10. En effet

$$p_+ = j_{\{p_+ \leqslant 1\}} = \mathrm{sn}_{\{p_+ \leqslant 1\}^{\circ}} = \mathrm{sn}_{\left\{\mathrm{sn}_{\{p_+ \leqslant 1\}} \leqslant 1\right\}} = \mathrm{sn}_{\{p_- \leqslant 1\}} \ .$$

Chapitre 6

ALGÈBRES DE BANACH

ET

SPECTRES

Version du 5 juillet 2004

6.1 Algèbres normées

DEFINITION 1 Si F est un espace vectoriel, respectivement un espace localement convexe, on pose

$$L(F) := L(F, F) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(F) := \mathcal{L}(F, F) \ .$$

Si F est un espace normé, soit $\mathcal{L}(F)$ l'espace (normé) des opérateurs bornés dans F .

Rappelons que, pour $T \in L(F)$, on a $\|T\| := \sup_{\varphi \in F, \|\varphi\| \leqslant 1} \|T\varphi\|$ et que $T \in \mathcal{L}(F)$ si, et seulement si, $\|T\| < \infty$ (cf. définition 3.2.1)..

PROPOSITION *Soit F un espace normé. Pour tout $S, T \in \mathcal{L}(F)$, on a*

$$\|ST\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\| \ .$$

C'est immédiat (cf. 3.2). □

DEFINITION 2 On dit qu'une $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{A}$ munie d'une norme $\|\cdot\|$ telle que

$$\|ab\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\| \quad \text{pour tout } a, b \in \mathcal{A} \ ,$$

est une *algèbre normée* . On dit que c'est une *algèbre de Banach* si elle est complète et *unifère* si elle possède une unité e telle que $\|e\| = 1$.

EXEMPLE 1 Si F est un espace normé, alors $\mathcal{L}(F)$ est une algèbre normée unifère. C'est une algèbre de Banach si F est un espace de Banach.

Cela découle de la proposition ci-dessus et de la proposition 3.2. □

EXEMPLE 2 Soit X un ensemble. Muni de la multiplication ponctuelle l'espace $\ell^\infty(X)$ est une algèbre de Banach unifère. Si X est un espace topologique, alors $\mathcal{C}^b(X)$ et $\mathcal{C}^0(X)$ sont aussi des (sous-) algèbre de Banach. $\mathcal{C}^b(X)$ est unifère ; il en est de même de $\mathcal{C}^0(X)$ si, et seulement si, X est compact.

EXEMPLE 3 Nous avons vu en 4.12, exercice 2, que $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre de Banach pour le produit de convolution. Elle n'est pas unifère.

EXERCICE On peut montrer que $\ell^1(\mathbb{Z})$, muni du produit de convolution défini pour tout $f, g \in \ell^1(\mathbb{Z})$ par

$$f * g(k) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(k-l) \cdot g(l) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z} ,$$

est une algèbre de Banach unifère.

6.2 Inversibilité dans une algèbre de Banach

Etant donné un opérateur borné T dans un espace de Banach F , nous allons essayer de résoudre une équation du type

$$(\mathrm{Id} - T)\,\varphi = \psi \ ,$$

$\psi \in F$ étant donné. On peut la mettre sous la forme

$$T\varphi + \psi = \varphi \ ,$$

ce qui montre que $\varphi \in F$ est solution de cette équation si, et seulement si, φ est un point fixe de l'application

$$\Phi : \varphi \longmapsto T\varphi + \psi \ .$$

Si l'on essaye d'utiliser la méthode des approximations successives définie par $\varphi_0 := \psi$ et $\varphi_{k+1} := \Phi\varphi_k = T\varphi_k + \psi$, on voit immédiatement par récurrence que

$$\varphi_k = \sum_{l=0}^{k} T^l \psi \ .$$

Cela revient à considérer la série géométrique

$$\sum_{l=0}^{\infty} T^l$$

dans $\mathcal{L}(F)$, dite *série de Neumann* .

LEMME *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre normée et $a \in \mathcal{A}$. La suite $\left(\left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\inf_{k\in\mathbb{N}^*}\left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}}$.*

Si a est *nilpotent* , i.e. $a^n = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, le lemme est évident. Nous pouvons donc supposer que $\left\|a^k\right\| > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. L'entier $m \in \mathbb{N}^*$ étant fixé, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $p(k), q(k) \in \mathbb{N}$ univoquement déterminés tels que

$$k = p(k) \cdot m + q(k) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant q(k) < m \ .$$

Il vient alors

$$\left\|a^k\right\| \leqslant \|a^m\|^{p(k)} \cdot \|a\|^{q(k)} \ ,$$

donc

$$\left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leqslant \|a^m\|^{\frac{p(k)}{k}} \cdot \|a\|^{\frac{q(k)}{k}} \ .$$

Ainsi

$$\limsup_k \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leqslant \|a^m\|^{\frac{1}{m}} \ ,$$

puisque

$$\lim_k \frac{q(k)}{k} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_k \frac{p(k)}{k} = \lim_k \left(\frac{1}{m} - \frac{q(k)}{m \cdot k}\right) = \frac{1}{m} \ .$$

On en déduit

$$\limsup_k \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leqslant \inf_m \left\|a^m\right\|^{\frac{1}{m}} \leqslant \liminf_k \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leqslant \limsup_k \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}} \ ,$$

d'où le résultat. □

DEFINITION Pour tout $a \in \mathcal{A}$, on dit que $\rho(a) := \inf_{k\in\mathbb{N}^*} \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}}$ est le *rayon spectral de* a . On dit que a est *quasi-nilpotent* si $\rho(a) = 0$.

On a toujours

$$\rho(a) \leqslant \|a\| \ .$$

THEOREME *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $a \in \mathcal{A}$. Si $\rho(a) < 1$, alors la série de Neumann $\sum_{l=1}^{\infty} a^l$ est absolument convergente, donc convergente.*

Si $\mathcal{A}$ est unifère, alors $\sum_{l=0}^{\infty} a^l$ est l'inverse de $e - a$ dans $\mathcal{A}$ et on a

$$\left\|(e-a)^{-1}\right\| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \left\|a^l\right\| \ .$$

Si $\|a\| < 1$, alors

$$\left\|(e-a)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{1-\|a\|} \ .$$

La première partie découle immédiatement du critère de la racine et du critère de Weierstraß (théorème 2.5.ii).

Quant à la seconde, on a

$$(e-a)\cdot\sum_{l=0}^{k} a^l = \left(\sum_{l=0}^{k} a^l\right)\cdot(e-a) = e - a^{k+1}$$

et $\lim_k \left\|a^k\right\| = 0$, puisque la série $\sum_{l=0}^{\infty} a^l$ est absolument convergente, donc $\lim_k a^k = 0$. Finalement on a

$$\left\|(e-a)^{-1}\right\| = \left\|\sum_{l=0}^{\infty} a^l\right\| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \left\|a^l\right\| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \|a\|^l = \frac{1}{1-\|a\|} \ ,$$

si $\|a\| < 1$. □

REMARQUE Nous avons remarqué que la condition $\rho(a) < 1$ entraîne $\lim_k \left\|a^k\right\| = 0$. Dire que a est quasi-nilpotent est une condition évidemment plus forte, puisqu'on a

$$\rho(a) = \lim_k \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}} = 0 \ .$$

Voici un exemple d'un tel opérateur.

EXEMPLE (Opérateur intégral de Volterra) Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varkappa$ une fonction continue définie sur le triangle fermé inférieur

$$D := \left\{ (x,y) \in [a,b]^2 \ \middle|\ y \leqslant x \right\} \ .$$

En prolongeant $\varkappa$ par 0 sur $[a,b]^2$, nous savons que ce noyau satisfait aux conditions (a)-(d) de 3.3, cas général (cf. exercice 3.3.2), donc défini un opérateur borné K dans $\mathcal{C}([a,b])$. Il est quasi-nilpotent.

Montrons par récurrence que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}([a,b])$, $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [a,b]$, on a

$$\left|K^k\varphi(x)\right| \leqslant \|\varkappa\|_\infty^k \cdot \|\varphi\|_\infty \cdot \frac{(x-a)^k}{k!} \ .$$

Cette inégalité est évidente pour $k=0$ et on a

$$\left|K^{k+1}\varphi(x)\right| = \left|\int_a^x \varkappa(x,y) \cdot K^k\varphi(y)\ dy\right| \leqslant \|\varkappa\|_\infty^{k+1} \cdot \|\varphi\|_\infty \cdot \int_a^x \frac{(y-a)^k}{k!}\ dy =$$

$$= \|\varkappa\|_\infty^{k+1} \cdot \|\varphi\|_\infty \cdot \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. Ainsi

$$\left\|K^k\right\| \leqslant \frac{1}{k!} \cdot \|\varkappa\|_\infty^k \cdot (b-a)^k \ ,$$

et par suite

$$\rho(K) = \inf_k \left\|K^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \inf_k \frac{\|\varkappa\|_\infty \cdot (b-a)}{(k!)^{\frac{1}{k}}} = 0 \ .$$

Ceci montre que K est quasi-nilpotent. □

Pour tout $\psi \in \mathcal{C}([a,b])$, l'équation

$$\varphi(x) = \int_a^x \varkappa(x,y) \cdot \varphi(y)\ dy + \psi(x) \quad \text{pour } x \in [a,b]$$

s'appelle l'*équation intégrale de Volterra* .

Le théorème montre donc que cette équation possède une unique solution φ donnée par la formule

$$\varphi = (\mathrm{Id} - K)^{-1}\psi = \left(\sum_{l=0}^\infty K^l\right)\psi = \sum_{l=0}^\infty K^l\psi \,;$$

la dernière série converge dans $\mathcal{C}([a,b])$, c'est-à-dire uniformément sur $[a,b]$.

Comme $(\mathrm{Id} - K)^{-1}$ est un opérateur borné, la solution φ dépend continûment de ψ .

6.3 Le spectre dans une algèbre de Banach unifère

PROPOSITION *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unifère. Le groupe $\mathbb{G}(\mathcal{A})$ des éléments inversibles de $\mathcal{A}$ est ouvert et l'application*

$$a \longmapsto a^{-1} : \mathbb{G}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$$

est continue.

Soit $b \in \mathbb{G}(\mathcal{A})$. Pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a alors

$$a = b - (b-a) = b\left[e - b^{-1}(b-a)\right] .$$

Si $\|a-b\| < \frac{1}{\|b^{-1}\|}$, alors $e - b^{-1}(b-a) \in \mathbb{G}(\mathcal{A})$ par le théorème 6.2, donc $a \in \mathbb{G}(\mathcal{A})$ et on a

$$a^{-1} = \left(\sum_{l=0}^{\infty}\left[b^{-1}(b-a)\right]^l\right) b^{-1} = b^{-1} + \sum_{l=1}^{\infty}\left[b^{-1}(b-a)\right]^l b^{-1} .$$

Ceci montre que la boule ouverte de centre b et de rayon $\frac{1}{\|b^{-1}\|}$ est contenue dans $\mathbb{G}(\mathcal{A})$. Cet ensemble est donc ouvert et on a

$$\left\|a^{-1} - b^{-1}\right\| \leqslant \left\|\sum_{l=1}^{\infty}\left[b^{-1}(b-a)\right]^l b^{-1}\right\| \leqslant \sum_{l=1}^{\infty}\left\|b^{-1}\right\|^{l+1} \cdot \|b-a\|^l = \frac{\left\|b^{-1}\right\|^2 \cdot \|b-a\|}{1 - \left\|b^{-1}\right\| \cdot \|b-a\|} ,$$

ce qui prouve la continuité de $a \longmapsto a^{-1}$ en b . □

REMARQUE 1 Ce théorème est utilisé en pratique de la manière suivante :

Soit $a \in \mathcal{A}$. Si l'on sait que a est inversible, mais si le calcul de son inverse n'est pas possible directement, on essaye de trouver une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ d'éléments bien connus qui converge vers a . Alors, pour tout k assez grand, l'élément a_k est inversible et

$$a^{-1} = \lim_k a_k^{-1} .$$

DEFINITION 1 Soient F un espace de Banach et $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset F$. On dit que

$$\sum_{l=0}^{\infty} w^l \cdot c_l = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot w^l$$

est une *série (formelle) entière* dans F . Si Z est un ouvert de $\mathbb{K}$, on dit qu'une fonction $f : Z \longrightarrow F$ est *analytique* dans Z si f est développable en une série entière convergente au voisinage de chaque point $z \in Z$, i.e. s'il existe $r > 0$ et $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset F$ tels que

$$f(z+w) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot w^l \quad \text{si } |w| < r .$$

On trouvera dans le livre de J. Dieudonné [6], chapitre IX, toutes les informations nécessaires sur la théorie des fonctions analytiques à valeurs dans un espace de Banach.

DEFINITION 2 Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unifère et $a \in \mathcal{A}$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur spectrale* de a (par rapport à $\mathcal{A}$) si $a - \lambda \cdot e$ n'est pas inversible dans $\mathcal{A}$. On désigne par $\mathrm{Sp}\, a$ (ou $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\, a$) l'ensemble des valeurs spectrales de a et on dit que c'est le *spectre* de a (dans $\mathcal{A}$).

REMARQUE 2 Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a

$$\mathrm{Sp}\,(a + \alpha \cdot e) = \mathrm{Sp}\, a + \alpha \ .$$

En effet $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(a + \alpha \cdot e)$ est équivalent à ce que $a + \alpha \cdot e - \lambda \cdot e = a - (\lambda - \alpha) \cdot e$ ne soit pas inversible, donc à $\lambda - \alpha \in \mathrm{Sp}\, a$, i.e. $\lambda \in \mathrm{Sp}\, a + \alpha$. □

THEOREME *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unifère et $a \in \mathcal{A}$. Alors $\mathrm{Sp}\, a$ est fermé, l'application*

$$R : \mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}\, a \longrightarrow \mathcal{A} : z \longmapsto (a - z \cdot e)^{-1} \ ,$$

dite résolvente *de a , est analytique et $\mathrm{Sp}\, a$ est contenu dans le disque de centre 0 et de rayon $\rho(a)$. En particulier $\mathrm{Sp}\, a$ est compact.*

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $\mathrm{Sp}\, a \neq \emptyset$ et

$$\rho(a) = \max\nolimits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, a} |\lambda| \ .$$

Soit $z \notin \mathrm{Sp}\, a$. Pour tout $w \in \mathbb{K}$ tel que $|w| < \frac{1}{\|R(z)\|}$, l'élément

$$a - (z + w) \cdot e = (a - z \cdot e)\,[e - w \cdot R(z)]$$

est inversible par le théorème 6.2 et on a

$$R(z + w) = [e - w \cdot R(z)]^{-1} (a - z \cdot e)^{-1} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} [w \cdot R(z)]^l \right) R(z) = \sum_{l=0}^{\infty} R(z)^{l+1} \cdot w^l \ ,$$

ce qui montre que $\mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}\, a$ est ouvert et prouve l'analyticité de R . Si $|z| > \rho(a)$, i.e. $\rho\left(\frac{1}{z} \cdot a\right) < 1$, le théorème 6.2 montre que $a - z \cdot e = -z \cdot \left(e - \frac{1}{z} \cdot a\right)$ est inversible.

Si maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $|z| > \|a\|$, on a

$$R(z) = -\frac{1}{z} \cdot \left(e - \frac{1}{z} \cdot a\right)^{-1} = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} a^l \cdot \frac{1}{z^l} \ , \qquad (*)$$

donc

$$\|R(z)\| \leqslant \frac{1}{|z|} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\|a\|}{|z|} \right)^l = \frac{1}{|z|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\|a\|}{|z|}} \ .$$

Ceci montre que R tend vers 0 à l'infini. Si $\mathrm{Sp}\, a = \emptyset$, la fonction R est analytique et bornée sur $\mathbb{C}$, donc constante par le théorème de Liouville (Dieudonné [6], théorème 9.11.1). La fonction R est donc identiquement nulle, ce qui est absurde, puisqu'on a

$$e = aR(0) = 0 \ .$$

D'autre part la fonction

$$Q : z \longmapsto R\left(\frac{1}{z}\right) : \mathbb{C} \setminus \frac{1}{\mathrm{Sp}\, a} \longrightarrow \mathcal{A} \ ,$$

en ayant posé $Q(0) = R(\infty) = 0$, est analytique et son développement en 0 est

$$Q(z) = -\sum_{l=0}^{\infty} a^l \cdot z^{l+1}$$

par la formule $(*)$. D'après la formule d'Hadamard, le rayon de convergence de cette série est

$$\frac{1}{\limsup_k \|a^k\|^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{\rho(a)} .$$

Mais en appliquant le théorème 9.9.4 de Dieudonné [6], on obtient

$$\frac{1}{\rho(a)} \geqslant d\left(0, \frac{1}{\operatorname{Sp} a}\right) = \inf_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} \left|0 - \frac{1}{\lambda}\right| = \frac{1}{\sup_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} |\lambda|} \geqslant \frac{1}{\rho(a)} ,$$

donc

$$\rho(a) = \sup_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} |\lambda| = \max_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} |\lambda| ,$$

puisque $\operatorname{Sp} a$ est compact. □

COROLLAIRE (Gelfand-Mazur) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathcal{A}$ est un corps, alors $\mathcal{A} = \mathbb{C} \cdot e \simeq \mathbb{C}$.*

Soit $a \in \mathcal{A}$. Il existe donc $\lambda \in \operatorname{Sp} a$, i.e. $a - \lambda \cdot e$ n'est pas inversible. Comme $\mathcal{A}$ est un corps, on doit avoir $a - \lambda \cdot e = 0$, donc $a = \lambda \cdot e \in \mathbb{C} \cdot e$. L'application $\lambda \longmapsto \lambda \cdot e : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ est donc bijective et c'est évidemment une isométrie. □

EXEMPLE 1 Soit X un espace compact. Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$, on a $\operatorname{Sp} f = f(X)$.

Il suffit de remarquer que, pour $z \in \mathbb{K}$, la fonction $f - z \cdot 1$ est inversible, si, et seulement si, $f - z \cdot 1 \neq 0$ partout, i.e. $z \notin f(X)$. □

EXEMPLE 2 Soit $\mathcal{A}$ une algèbre unifère. Pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, on a

$$\operatorname{Sp}(ab) \setminus \{0\} = \operatorname{Sp}(ba) \setminus \{0\} .$$

Par symétrie, il suffit de prouver l'inclusion $\operatorname{Sp}(ab) \setminus \{0\} \subset \operatorname{Sp}(ba) \setminus \{0\}$, c'est-à-dire que si pour $z \in \mathbb{C}^*$, l'élément $ba - z \cdot e$ est inversible, il en est de même de $ab - z \cdot e$. Posons $c := (ba - z \cdot e)^{-1}$. On a alors

$$(ab - z \cdot e)(acb - e) = a(bac)b - ab - z \cdot acb + z \cdot e = a([ba - z \cdot e]c)b - ab + z \cdot e = z \cdot e$$

et de même

$$(acb - e)(ab - z \cdot e) = z \cdot e ,$$

ce qui prouve notre assertion. □

6.4 Transformation de Gelfand

DEFINITION 1 Soit $\mathcal{A}$ une algèbre commutative. On dit qu'une forme linéaire

$$\chi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$$

est un *caractère* (de $\mathcal{A}$) si

$$\langle \chi | ab \rangle = \langle \chi | a \rangle \cdot \langle \chi | b \rangle \quad \text{pour tout } a, b \in \mathcal{A} \ .$$

L'ensemble $\operatorname{Sp} \mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$ des caractères $\neq 0$ de $\mathcal{A}$ s'appelle le *spectre de* $\mathcal{A}$.

Un caractère est donc un vecteur bra $\langle \chi |$. Puisque nous considérons essentiellement la semi-dualité $\langle \mathcal{A} | \mathcal{A}^{\circledast} \rangle$, nous utiliserons aussi les vecteurs ket $| \chi \rangle$, qui sont des caractères semi-linéaires. Ainsi suivant les cas nous aurons $\operatorname{Sp} \mathcal{A} = \langle \operatorname{Sp} \mathcal{A} | \subset \mathcal{A}'$ ou bien $\operatorname{Sp} \mathcal{A} = | \operatorname{Sp} \mathcal{A} \rangle \subset \mathcal{A}^{\dagger}$ (cf. exemple 3.4.2).

REMARQUE 1 Si $\mathcal{A}$ est unifère et si $\langle \chi | e \rangle = 0$, on a

$$\langle \chi | a \rangle = \langle \chi | ae \rangle = \langle \chi | a \rangle \cdot \langle \chi | e \rangle = 0 \ ,$$

donc $\chi = 0$. Par suite si $\chi \in \operatorname{Sp} \mathcal{A}$, on a

$$\langle \chi | e \rangle = \langle \chi | ee \rangle = \langle \chi | e \rangle \cdot \langle \chi | e \rangle \ ,$$

donc

$$\langle \chi | e \rangle = 1 \ .$$

DEFINITION 2 Soit $\mathcal{A}$ une algèbre commutative unifère. On dit qu'un sous-espace vectoriel $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{A}$ est un *idéal* si $\mathcal{A}\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}$. Il est dit *maximal* si $e \notin \mathfrak{I}$, i.e. $\mathfrak{I} \neq \mathcal{A}$, et si pour tout idéal $\mathfrak{J}$ tel que $e \notin \mathfrak{J} \supset \mathfrak{I}$, on a $\mathfrak{I} = \mathfrak{J}$.

REMARQUE 2 Si χ est un caractère, alors $\operatorname{Ker} \chi$ est un idéal maximal.

En effet $\operatorname{Ker} \chi$ est un idéal, puisque

$$\langle \chi | ab \rangle = \langle \chi | a \rangle \cdot \langle \chi | b \rangle = 0 \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A} \text{ et } b \in \operatorname{Ker} \chi \ .$$

On a évidemment $e \notin \operatorname{Ker} \chi$. Ce noyau étant de codimension 1 , c'est un idéal maximal. □

REMARQUE 3 Si $\mathfrak{I}$ est un idéal, alors $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ est une algèbre. Si $\mathfrak{I}$ est maximal, alors $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ est un corps.

Rappelons que la multiplication dans $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ est définie par $[a]\,[b] := [ab]$, ceci ne dépendant évidemment pas du choix des représentants. Montrons la seconde assertion. Si $[c] \in \mathcal{A}/\mathfrak{I} \setminus \{0\}$, on a $c \notin \mathfrak{I}$, donc $\mathcal{A}c + \mathfrak{I}$ est un idéal contenant et différent de $\mathfrak{I}$; cet idéal est donc égal à $\mathcal{A}$, d'où l'on tire $e = ac + b$ pour certains $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathfrak{I}$. Ainsi $[e] = [a]\,[c]$, ce qui montre que $[c]$ est inversible. □

THEOREME (de Gelfand) *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach complexe commutative unifère et $a \in \mathcal{A}$. Pour que a soit inversible, il faut et il suffit que, pour tout caractère χ de $\mathcal{A}$ on ait $\langle \chi | a \rangle \neq 0$.*

Si a est inversible, on a

$$\langle \chi | a \rangle \cdot \langle \chi | a^{-1} \rangle = \langle \chi | aa^{-1} \rangle = \langle \chi | e \rangle = 1 \ ,$$

donc $\langle \chi | a \rangle \neq 0$.

Réciproquement si a n'est pas inversible, alors $\mathcal{A}a$ est un idéal et $e \notin \mathcal{A}a$. D'après le théorème de Krull il existe un idéal maximal $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{A}a$. Remarquons que ce théorème est une application simple du principe de maximalité de Hausdorff. Par la continuité du produit dans $\mathcal{A}$ (cf. proposition 2.4), l'adhérence $\overline{\mathfrak{I}}$ de $\mathfrak{I}$ est un idéal de $\mathcal{A}$. Mais comme $\mathfrak{I}$ est disjoint de l'ouvert $\mathbb{G}(\mathcal{A})$ (cf. proposition 6.3), il en est de même de $\overline{\mathfrak{I}}$, donc $\mathfrak{I} = \overline{\mathfrak{I}}$ par maximalité. Montrons maintenant que $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ est une algèbre de Banach. Pour tout $u, v \in \mathcal{A}$, on a

$$\|[u]\,[v]\| = \inf_{c\in\mathfrak{I}} \|uv + c\| \leqslant \inf_{c,d\in\mathfrak{I}} \|(u + c)\,(v + d)\| \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{c\in\mathfrak{I}} \|u + c\| \cdot \inf_{d\in\mathfrak{I}} \|v + d\| = \|[u]\| \cdot \|[v]\| \ .$$

C'est aussi un corps par la remarque 2, donc $\mathcal{A}/\mathfrak{I} \approx \mathbb{C}$ par le théorème de Gelfand-Mazur. Il est alors clair que l'application canonique

$$\langle \chi | : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{I} \xrightarrow{\approx} \mathbb{C}$$

est un homomorphisme d'algèbre, donc un caractère (linéaire) de $\mathcal{A}$, tel que $\langle \chi | a \rangle = 0$, puisque $a \in \mathfrak{I}$. □

EXERCICE Une des plus belles applications de ce résultat, en fait banal, est le **théorème de Wiener** :

Soit $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue dont la série de Fourier est absolument convergente. Si $f \neq 0$ partout sur $\mathbb{U}$, alors la série de Fourier de $\frac{1}{f}$ est aussi absolument convergente.

COROLLAIRE *On a*

$$\operatorname{Sp} a = \{ \langle \chi | a \rangle \mid \chi \in \operatorname{Sp} \mathcal{A} \} = \langle \operatorname{Sp} \mathcal{A} | a \rangle \ .$$

En particulier chaque caractère est de norme 1 *et* $\operatorname{Sp} \mathcal{A}$ *comme sous-espace topologique de* $\mathcal{A}^\dagger$ *est compact.*

En effet on a $\lambda \in \operatorname{Sp} a$ si, et seulement si, il existe un caractère χ tel que $\langle \chi | a - \lambda \cdot e \rangle = 0$, i.e $\lambda = \langle \chi | a \rangle$.

Comme $\operatorname{Sp} a \subset B(0, \rho(a))$, on a

$$|\langle \chi | a \rangle| \leqslant \rho(a) \leqslant \|a\| \ , \qquad (*)$$

donc $\|\chi\| = 1$, puisque $\langle \chi | e \rangle = 1$. Ainsi $\operatorname{Sp} \mathcal{A}$ est contenu dans la boule unité $\mathbb{B}_{\mathcal{A}^\dagger}$ de $\mathcal{A}^\dagger$, qui est faiblement compacte par le corollaire 3.11. Directement pour tout $\chi \in \operatorname{Sp} \mathcal{A}$, on a

$$|\langle \chi | a \rangle| \leqslant \|\chi\| \cdot \|a\| \leqslant \|a\| \ ,$$

donc

$$\operatorname{Sp} \mathcal{A} \subset \prod_{a\in\mathcal{A}} B(0, \|a\|) \subset \mathbb{C}^{\mathcal{A}} : \chi \longmapsto \langle \chi |_{|\mathcal{A}} \ ,$$

et $\prod_{a\in\mathcal{A}} B(0, \|a\|)$ est compact par le théorème de Tychonoff.

Il nous reste à voir que $\langle \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}|$ est fermé pour la topologie de la convergence ponctuelle dans $\mathbb{C}^{\mathcal{A}}$, ce qui est évident puisque

$$\mathrm{Sp}\,\mathcal{A} = \bigcap_{a,b\in\mathcal{A}} \{\langle\chi| \in \mathcal{A}^* \mid \langle\chi|\,ab\rangle - \langle\chi|\,a\rangle \cdot \langle\chi|\,b\rangle = 0\} \cap \{\langle\chi| \in \mathcal{A}' \mid \langle\chi|\,e\rangle - 1 = 0\}$$

et

$$\mathcal{A}^* = \bigcap_{a,b\in\mathcal{A},\alpha\in\mathbb{C}} \left\{ f \in \mathbb{C}^{\mathcal{A}} \mid f(\mu\alpha \cdot a + b) - \alpha \cdot f(a) - f(b) = 0 \right\}$$

est fermé dans $\mathbb{C}^{\mathcal{A}}$. □

DEFINITION 3 Si $\mathcal{A}$ est une algèbre commutative et $a \in \mathcal{A}$, on dit que la fonction

$$\mathcal{G}a := |a\rangle_{|\,\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}} : \mathrm{Sp}\,\mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C} : \chi \longmapsto \langle\chi|\,a\rangle$$

est la *transformée de Gelfand* de a .

Les résultats ci-dessus peuvent alors s'exprimer sous la forme suivante :

SCOLIE *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach complexe commutative unifère. La transformation de Gelfand*

$$\mathcal{G} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}) : a \longmapsto \mathcal{G}a = |a\rangle_{|\,\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}}$$

est un homomorphisme d'algèbre unifère et $\|\mathcal{G}\| = 1$. Plus précisément, pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a

$$\mathrm{Sp}\,a = \mathcal{G}a(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}) \quad \textit{et} \quad \|\mathcal{G}a\|_\infty = \rho(a) \ ;$$

a est inversible dans $\mathcal{A}$ si, et seulement si, il en est de même de $\mathcal{G}a$ dans $\mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A})$.

Il est clair que $\mathcal{G}$ est un morphisme, car pour tout $a, b \in \mathcal{A}$ et $\chi \in \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$, on a

$$\mathcal{G}(ab)(\chi) = \langle\chi|\,ab\rangle = \langle\chi|\,a\rangle \cdot \langle\chi|\,b\rangle = \mathcal{G}a(\chi) \cdot \mathcal{G}b(\chi) = (\mathcal{G}a \cdot \mathcal{G}b)(\chi) \ .$$

Les formules découlent du corollaire ci-dessus et du théorème 6.3, car

$$\mathcal{G}a(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}) = \langle \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}|\,a\rangle = \mathrm{Sp}\,a$$

et

$$\|\mathcal{G}a\|_\infty = \max|\langle \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}|\,a\rangle| = \max|\mathrm{Sp}\,a| = \rho(a) \ .$$

Finalement on a

$$\|\mathcal{G}\| = \sup_{a\in\mathcal{A},\|a\|\leqslant 1} \|\mathcal{G}a\|_\infty \leqslant 1 \ ,$$

puisque $\rho(a) \leqslant \|a\|$ et $\mathcal{G}e = 1$. □

Pour les deux remarques qui suivent nous supposons que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach complexe commutative unifère.

REMARQUE 4 Pour que la transformation de Gelfand soit injective, il faut et il suffit que, que $\mathcal{A}$ ne possède pas d'éléments quasi-nilpotents non-nuls.

En effet l'injectivité est équivalente à ce que $\rho(a) = \|\mathcal{G}a\|_\infty = 0$ entraîne $a = 0$. □

REMARQUE 5 La transformation de Gelfand est une isométrie si, et seulement si, pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a $\|a^2\| = \|a\|^2$.

Si $a \in \mathcal{A}$ satisfait à $\|a^2\| = \|a\|^2$, alors

$$\rho(a) = \lim_k \left\| a^{2^k} \right\|^{\frac{1}{2^k}} = \|a\| \ .$$

Ceci montre en outre que la condition est suffisante, car

$$\|\mathcal{G}a\|_\infty = \rho(a) = \|a\| \ .$$

La condition est nécessaire, puisque

$$\left\|a^2\right\| = \left\|\mathcal{G}\left(a^2\right)\right\|_\infty = \left\|(\mathcal{G}a)^2\right\|_\infty = \|\mathcal{G}a\|_\infty^2 = \rho(a)^2 = \|a\|^2 \ .$$

6.5 Théorème de Gelfand-Neumark

DEFINITION 1 Soit $\mathcal{A}$ une algèbre. Une application

$$a \longmapsto a^* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

telle que, pour tout $a, b \in \mathcal{A}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on ait

$$(a^*)^* = a \quad , \quad (a + \alpha \cdot b)^* = a^* + \bar{\alpha} \cdot b^* \quad \text{et} \quad (ab)^* = b^* a^* \ ,$$

s'appelle une *involution* et on dit que $\mathcal{A}$ est *involutive* . Si $\mathcal{A}$ est normée, on exige en plus que

$$\|a^*\| = \|a\| \ .$$

On dit que $a \in \mathcal{A}$ est *auto-adjoint* si $a^* = a$ et *normal* si $a^* a = a a^*$. Nous désignerons par $\mathcal{A}_{aa}$ l'ensemble des éléments auto-adjoints de $\mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ est unifère, on a $e^* = e$. $\mathcal{A}_{aa}$ est un sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{A}$ et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ on a la décomposition

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{aa} + i \cdot \mathcal{A}_{aa}$$

puisque, pour tout $a \in \mathcal{A}$, $\frac{a+a^*}{2}$ et $\frac{a-a^*}{2i}$ sont auto-adjoints et

$$a = \frac{a + a^*}{2} + i \cdot \frac{a - a^*}{2i} \ .$$

EXEMPLE 1 Soit X un espace compact. Alors $\mathcal{C}(X)$, muni de l'involution $f \longmapsto \overline{f}$, est une algèbre de Banach involutive unifère telle que

$$\left\|\overline{f} f\right\|_\infty = \|f\|_\infty^2 \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}(X) \ .$$

EXEMPLE 2 Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Alors $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, muni de l'involution $T \longmapsto T^*$, est une algèbre de Banach involutive unifère telle que

$$\|T^* T\| = \|T\|^2 \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ .$$

Puisque $T^* T$ est auto-adjoint, par la proposition 3.17.i on a en effet

$$\|T^* T\| = \sup_{\xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leqslant 1} |(\xi| T^* T \xi)| = \sup_{\xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leqslant 1} \|T\xi\|^2 = \|T\|^2 \ .$$

□

Ceci nous conduit à poser la

DEFINITION 2 Une algèbre de Banach complexe involutive (unifère) telle que l'on ait

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A}$$

est dite *stellaire* . On dit aussi que c'est une *C^*-algèbre* .

PROPOSITION *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre stellaire unifère et a un élément auto-adjoint. Alors*

$$\rho(a) = \|a\| \quad \text{et} \quad \operatorname{Sp} a \subset \mathbb{R} \ .$$

On a

$$\left\|a^2\right\| = \|a^* a\| = \|a\|^2 \ ,$$

donc $\rho(a) = \|a\|$ par la remarque 6.4.5.

Soit maintenant $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha + i \cdot \beta \in \operatorname{Sp} a$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a évidemment $\alpha + i \cdot (\beta + \lambda) \in \operatorname{Sp}(a + i \cdot \lambda \cdot e)$ par la remarque 6.3.2, donc

$$\alpha^2 + (\beta+\lambda)^2 = |\alpha + i \cdot (\beta+\lambda)|^2 \leqslant \|a + i \cdot \lambda \cdot e\|^2 = \|(a + i \cdot \lambda \cdot e)^* (a + i \cdot \lambda \cdot e)\| =$$

$$= \left\|a^* a + \lambda^2 \cdot e\right\| \leqslant \|a\|^2 + \lambda^2 \ ,$$

d'où l'on tire

$$2\beta\lambda \leqslant \|a\|^2 - \alpha^2 - \beta^2 \ ,$$

ce qui n'est possible que si $\beta = 0$. □

DEFINITION 3 Si $\mathcal{A}$ est une algèbre involutive commutative, on dit qu'un caractère $\chi \in \operatorname{Sp} \mathcal{A}$ est *hermitien* si

$$\langle \chi | a^* \rangle = \overline{\langle \chi | a \rangle} \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A} \ .$$

THEOREME (de Gelfand-Neumark) *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre stellaire unifère et commutative. Alors tout caractère de $\mathcal{A}$ est hermitien et la transformation de Gelfand $\mathcal{G} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A})$ est un isomorphisme d'algèbre stellaire.*

Si $a \in \mathcal{A}$ est auto-adjoint et $\chi \in \operatorname{Sp} \mathcal{A}$, alors

$$\langle \chi | a \rangle \in \operatorname{Sp} a \subset \mathbb{R}$$

par le scolie 6.4. Si maintenant a est quelconque, on a

$$\left\langle \chi \left| \frac{a + a^*}{2} \right.\right\rangle , \left\langle \chi \left| \frac{a - a^*}{2i} \right.\right\rangle \in \mathbb{R} \ ,$$

puisque $\frac{a+a^*}{2}$ et $\frac{a-a^*}{2i}$ sont auto-adjoints. Il vient alors

$$\langle \chi | a^* \rangle = \left\langle \chi \left| \frac{a + a^*}{2} \right.\right\rangle - i \cdot \left\langle \chi \left| \frac{a - a^*}{2i} \right.\right\rangle = \overline{\left\langle \chi \left| \frac{a + a^*}{2} \right.\right\rangle + i \cdot \left\langle \chi \left| \frac{a - a^*}{2i} \right.\right\rangle} = \overline{\langle \chi | a \rangle} \ ,$$

ce qui montre que χ est hermitien. On en déduit que $\mathcal{G}$ est involutive, puisque

$$\mathcal{G}a^*(\chi) = \langle \chi | a^* \rangle = \overline{\langle \chi | a \rangle} = \overline{\mathcal{G}a(\chi)} = \overline{\mathcal{G}a}(\chi) \ ,$$

donc

$$\|a\|^2 = \|a^* a\| = \rho(a^* a) = \|\mathcal{G}(a^* a)\|_\infty = \left\|\overline{\mathcal{G}a} \cdot \mathcal{G}a\right\|_\infty = \|\mathcal{G}a\|_\infty^2 \ ,$$

par la proposition ci-dessus et le scolie 6.4. Ceci prouve que $\mathcal{G}$ est une isométrie de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A})$. Ainsi $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ est une sous-algèbre involutive complète, donc fermée de $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A})$. Elle contient les constantes, puisque $\mathcal{G}e = 1$; elle sépare les points de $\operatorname{Sp} \mathcal{A}$, car si $\chi_1 \neq \chi_2$, par définition de l'égalité de deux formes linéaires, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $\langle \chi_1 | a \rangle \neq \langle \chi_2 | a \rangle$, i.e. $\mathcal{G}a(\chi_1) \neq \mathcal{G}a(\chi_2)$. Le théorème de Stone-Weierstraß montre alors que $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ est dense, donc égale à $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A})$. □

6.6 Le spectre dans une sous-algèbre stellaire

DEFINITION Si $\mathcal{B}$ est une algèbre de Banach complexe involutive unifère, nous dirons que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ est une *sous-algèbre stellaire unifère* de $\mathcal{B}$ si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre stellaire pour la structure induite et si elle contient l'élément unité de $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B}$ est une algèbre stellaire unifère, alors $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre stellaire de $\mathcal{B}$ si, et seulement si, $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre involutive fermée contenant l'unité de $\mathcal{B}$.

PROPOSITION *Si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre stellaire unifère de $\mathcal{B}$, alors tout $a \in \mathcal{A}$ qui est inversible dans $\mathcal{B}$ est inversible dans $\mathcal{A}$. En d'autres termes on a*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\, a = \mathrm{Sp}_{\mathcal{B}}\, a \ .$$

Soit $a \in \mathcal{A}$ un élément auto-adjoint inversible dans $\mathcal{B}$. On a $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\, a \subset \mathbb{R}$ par la proposition 6.6, donc

$$0 \notin \mathrm{Sp}\, a + i \cdot \lambda = \mathrm{Sp}\,(a + i \cdot \lambda \cdot e) \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}^*$$

par la remarque 6.3.2. Ainsi $a + i \cdot \lambda \cdot e$ est inversible dans $\mathcal{A}$. Son inverse $(a + i \cdot \lambda \cdot e)^{-1} \in \mathcal{A}$ est aussi son inverse dans $\mathcal{B}$ et la proposition 6.3 appliquée à $\mathcal{B}$ montre, puisque $a = \lim_{\lambda \to 0}(a + i \cdot \lambda \cdot e)$, que

$$a^{-1} = \lim_{\lambda \to 0}(a + i \cdot \lambda \cdot e)^{-1} \quad \text{dans } \mathcal{B} \ .$$

Mais $\mathcal{A}$ est fermée dans $\mathcal{B}$, donc

$$a^{-1} = \lim_{\lambda \to 0}(a + i \cdot \lambda \cdot e)^{-1} \in \mathcal{A} \ .$$

Si maintenant $a \in \mathcal{A}$ est un élément quelconque inversible dans $\mathcal{B}$, alors a^* est aussi inversible dans $\mathcal{B}$ et son inverse est $(a^{-1})^*$. L'élément auto-adjoint a^*a , dont l'inverse est $a^{-1}(a^{-1})^*$ dans $\mathcal{B}$, est inversible dans $\mathcal{A}$ par ce qui précède, i.e. $(a^*a)^{-1} \in \mathcal{A}$. On en déduit que

$$a^{-1} = \left[aa^{-1}\left(a^{-1}\right)^*\right]^* = \left[a\,(a^*a)^{-1}\right]^* \in \mathcal{A} \ .$$

□

COROLLAIRE *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\mathcal{A}$ une sous-algèbre stellaire unifère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $T \in \mathcal{A}$. Alors le spectre $\mathrm{Sp}\, T$ de T (dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$) est égal au spectre $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\, a$ de T dans $\mathcal{A}$.*

THEOREME *Soient $\mathcal{B}$ une algèbre de Banach complexe involutive unifère, $\mathcal{A}$ une algèbre stellaire unifère et $\Theta : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ un morphisme d'algèbre involutive unifère. Alors*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\, \Theta b \subset \mathrm{Sp}_{\mathcal{B}}\, b$$

et Θ est continu de norme 1 .

Pour tout $b \in \mathcal{B}$, si $b - \lambda \cdot e$ est inversible dans $\mathcal{B}$, alors $\Theta b - \lambda \cdot e$ est inversible dans $\mathcal{A}$, donc $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\, \Theta b \subset \mathrm{Sp}_{\mathcal{B}}\, b$. Le théorème 6.3 montre alors que

$$\rho\,(\Theta b) \leqslant \rho\,(b) \leqslant \|b\| \ ,$$

donc

$$\|\Theta b\|^2 = \|(\Theta b)^* \Theta b\| = \rho\left(\Theta\left(b^* b\right)\right) \leqslant \|b^* b\| \leqslant \|b\|^2$$

par la proposition 6.6. Ainsi $\|\Theta\| \leqslant 1$ et comme $\Theta e = e$, on obtient $\|\Theta\| = 1$. □

6.7 Calcul fonctionnel continu

Dans les derniers paragraphes de ce chapitre,
$\mathcal{B}$ est une algèbre stellaire unifère,
$\mathcal{A}$ une sous-algèbre stellaire unifère commutative de $\mathcal{B}$
et $\mathcal{G} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A})$ désigne l'isomorphisme de Gelfand-Neumark.

DEFINITION 1 Nous désignerons par $\mathcal{B}_+$ l'ensemble des éléments dits *positifs* , i.e. qui sont auto-adjoints et dont le spectre est contenu dans $\mathbb{R}_+$.

Nous étudierons cet ensemble plus en détail en 6.9. La proposition 6.7 montre que $\mathcal{A}_+ = \mathcal{B}_+ \cap \mathcal{A}$ et que $a \in \mathcal{A}$ est positif si, et seulement si, $\mathcal{G}a \subset \mathbb{R}_+$.

DEFINITION 2 L'homomorphisme injectif d'algèbre stellaire

$$\Phi : \mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B} : f \longmapsto \overset{-1}{\mathcal{G}} f$$

est dit l'*intégrale spectrale* ou le *calcul fonctionnel (continu)* associée à l'algèbre $\mathcal{A}$.

Toute opération liée à la structure d'algèbre stellaire unifère de $\mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A})$ peut donc être interprétée dans $\mathcal{A}$ comme dans $\mathcal{B}$ grâce à Φ .

LEMME *Pour tout $f \in \mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A})$, on a*

$$\operatorname{Sp}_{\mathcal{B}} \Phi f = \operatorname{Sp}_{\mathcal{A}} \Phi f = f(\operatorname{Sp}\mathcal{A}) \ .$$

En effet la première égalité découle de la proposition 6.7, tandis que grâce à l'exemple 6.3.1, on obtient

$$\operatorname{Sp}_{\mathcal{A}} \Phi f = \operatorname{Sp}_{\mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A})} f = f(\operatorname{Sp}\mathcal{A}) \ .$$

□

DEFINITION 3 Nous désignerons par $\mathcal{A}(t)$ la sous-algèbre stellaire unifère engendrée par un élément $t \in \mathcal{B}$, i.e. la plus petite sous-algèbre involutive fermé unifère contenant t .

REMARQUE 1 Pour que $\mathcal{A}(t)$ soit commutative, il faut et il suffit que t soit normal ; dans ce cas, elle ne contient que des éléments normaux. Tout $t \in \mathcal{A}$ est normal et $\mathcal{A}(t) \subset \mathcal{A}$.

En effet $\mathcal{A}(t)$ est la fermeture de la sous-algèbre $\mathcal{P}(t, t^*)$ des polynômes (non-commutatifs) en t et t^* . Le résultat est alors immédiat. Tout $t \in \mathcal{A}$ est normal , puisque $\mathcal{A}$ est commutative.

□

THEOREME *Soient $t \in \mathcal{B}$ un élément normal et $\mathcal{G} : \mathcal{A}(t) \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp}(\mathcal{A}(t)))$ l'isomorphisme de Gelfand-Neumark associé.*

L'application

$$\mathcal{G}t : \operatorname{Sp}\mathcal{A}(t) \longrightarrow \operatorname{Sp}t : \chi \longmapsto \langle \chi | t \rangle$$

est alors un homéomorphisme et

$$a \longmapsto \mathcal{G}a \circ (\mathcal{G}t)^{-1} : \mathcal{A}(t) \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp}t)$$

est un isomorphisme d'algèbres stellaires unifères.

L'isomorphisme réciproque

$$\mathcal{C}(\operatorname{Sp}t) \longrightarrow \mathcal{A}(t) \hookrightarrow \mathcal{B} : f \longmapsto f(t) := \overset{-1}{\mathcal{G}}(f \circ \mathcal{G}t)$$

est l'unique morphisme d'algèbre involutive unifère $\Psi : \mathcal{C}(\operatorname{Sp}t) \longrightarrow \mathcal{B}$ *tel que*

$$\Psi(\mathrm{id}) = t \ ,$$

où id *désigne la fonction* $\operatorname{Sp}t \longrightarrow \mathbb{C} : \lambda \longmapsto \lambda$ *. C'est une isométrie et son image est* $\mathcal{A}(t)$ *.*

Montrons tout d'abord que $\mathcal{G}t$ est injective. Etant donné des caractères $\chi_1, \chi_2 \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}(t)$ tels que $\langle \chi_1 | t \rangle = \langle \chi_2 | t \rangle$, alors

$$\langle \chi_1 | t^* \rangle = \overline{\langle \chi_1 | t \rangle} = \overline{\langle \chi_2 | t \rangle} = \langle \chi_2 | t^* \rangle \ ,$$

donc χ_1 et χ_2 coïncident sur $\mathcal{P}(t, t^*)$ et par suite sur $\mathcal{A}(t)$ par continuité. Puisque $\mathcal{G}t$ est surjective par le scolie 6.4, et que $\operatorname{Sp}\mathcal{A}(t)$ est compact, c'est un homéomorphisme. On en déduit que l'application

$$g \longmapsto g \circ (\mathcal{G}t)^{-1} : \mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A}(t)) \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp}t)$$

est un isomorphisme d'algèbres stellaires, donc aussi

$$a \longmapsto \mathcal{G}a \longmapsto \mathcal{G}a \circ (\mathcal{G}t)^{-1} : \mathcal{A}(t) \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A}(t)) \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp}t) \ .$$

L'isomorphisme réciproque satisfait à la condition puisque

$$\mathrm{id}(t) = \overset{-1}{\mathcal{G}}(\mathrm{id} \circ \mathcal{G}t) = \overset{-1}{\mathcal{G}}(\mathcal{G}t) = t \ .$$

Quant à l'unicité, Ψ est univoquement déterminé par hypothèse sur la sous-algèbre unifère involutive des fonctions continues sur $\operatorname{Sp}t$ engendrée par id . Mais id sépare les points de $\operatorname{Sp}t$; cette sous-algèbre est donc dense dans $\mathcal{C}(\operatorname{Sp}t)$ par le théorème de Stone-Weierstraß. Le théorème 6.7 montrant que Ψ est continu, on en déduit que Ψ est aussi univoquement déterminé sur $\mathcal{C}(\operatorname{Sp}t)$. □

DEFINITION 4 On dit que le morphisme d'algèbre involutive unifère

$$f \longmapsto f(t) : \mathcal{C}(\operatorname{Sp}t) \longrightarrow \mathcal{B}$$

est l'*intégrale spectrale* ou le *calcul fonctionnel (continu)* associée à l'élément normal t .

Il est donc univoquement déterminé par

$$1(t) = e \quad \text{et} \quad \mathrm{id}(t) = t \ .$$

EXEMPLE 1 Si $a, b \in \mathcal{B}$ sont des éléments positifs qui commutent, alors ab est positif.

En effet l'algèbre stellaire unifère $\mathcal{A} := \mathcal{A}(a, b)$ engendrée par a et b , qui est la fermeture de la sous-algèbre des polynômes (commutatifs) en a et b est commutative. Puisque $\mathcal{G}a$ et $\mathcal{G}b$ sont des fonctions positives continues sur $\operatorname{Sp}\mathcal{A}(a, b)$, il en est de même de $\mathcal{G}(ab) = \mathcal{G}a \cdot \mathcal{G}b$.

□

Pour une application non-triviale voir l'exemple 6.9.

EXEMPLE 2 Soit $t \in \mathcal{B}$ un élément auto-adjoint. Les éléments positifs $|t|$, t^+ et $t^- \in \mathcal{A}(t)$ sont les seuls tels que

$$t = t^+ - t^- \quad , \quad t^+t^- = t^-t^+ = 0 \quad \text{et} \quad |t| = t^+ + t^- \ .$$

En outre

$$\left\|t^+\right\|, \left\|t^-\right\| \leqslant \left\| |t| \right\| = \|t\| \ .$$

En effet les fonctions continues positives $|\mathrm{id}|$, id^+ et id^- sur $\mathrm{Sp}\, t$ sont univoquement déterminées par les conditions

$$\mathrm{id} = \mathrm{id}^+ - \mathrm{id}^- \quad , \quad \mathrm{id}^+ \cdot \mathrm{id}^- = 0 \quad \text{et} \quad |\mathrm{id}| = \mathrm{id}^+ + \mathrm{id}^-$$

et on a

$$\left\|\mathrm{id}^+\right\|_\infty , \left\|\mathrm{id}^-\right\|_\infty \leqslant \left\| |\mathrm{id}| \right\|_\infty = \|\mathrm{id}\|_\infty \ .$$

□

EXEMPLE 3 Si $t \in \mathcal{B}$ est positif, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, on peut définir $t^\alpha \in \mathcal{A}_+(t)$ et on a

$$t^\alpha t^\beta = t^{\alpha+\beta} \quad , \quad (t^\alpha)^\beta = t^{\alpha \cdot \beta} \ .$$

En particulier $\sqrt{t} := t^{\frac{1}{2}}$ est l'unique $r \in \mathcal{B}_+$ tel que $t = r^2$.

En outre si $t \in \mathcal{B}$ est auto-adjoint, il existe des éléments uniques $u, v \in \mathcal{B}_+$ tels que

$$t = u^2 - v^2 \quad \text{et} \quad uv = vu = 0 \ .$$

En effet la fonctions id^α est continue positives sur $\mathrm{Sp}\, t \subset \mathbb{R}_+$. Les formules sont évidentes puisque $\mathrm{id}^\alpha \cdot \mathrm{id}^\beta = \mathrm{id}^{\alpha+\beta}$ et $(\mathrm{id}^\alpha)^\beta = \mathrm{id}^{\cdot\beta}$. En particulier $\left(\sqrt{t}\right)^2 = t$. D'autre part si $r \in \mathcal{B}_+$ est tel que $t = r^2$, on a $\mathcal{A}(t) \subset \mathcal{A} := \mathcal{A}(r)$ et

$$(\mathcal{G}r)^2 = \mathcal{G}t = \left(\mathcal{G}\sqrt{t}\right)^2 \ ,$$

donc $\mathcal{G}r = \mathcal{G}\sqrt{t}$, puisque ce sont des fonctions positives, et par suite $r = \sqrt{t}$.

Finalement on a évidemment

$$t = \left(\sqrt{t^+}\right)^2 - \left(\sqrt{t^-}\right)^2 \quad \text{et} \quad \sqrt{t^+}\sqrt{t^-} = 0 \ .$$

Quant à l'unicité on considère l'algèbre stellaire unifère commutative $\mathcal{A}$ engendrée par u et v . On a alors

$$(\mathcal{G}u)^2 - (\mathcal{G}v)^2 = \mathcal{G}t = \left(\mathcal{G}\sqrt{t^+}\right)^2 - \left(\mathcal{G}\sqrt{t^-}\right)^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{G}\sqrt{t^+} \cdot \mathcal{G}\sqrt{t^-} = 0 \ ,$$

donc $\mathcal{G}u = \mathcal{G}\sqrt{t^+}$ et $\mathcal{G}v = \mathcal{G}\sqrt{t^-}$ et par suite $u = \sqrt{t^+}$ et $v = \sqrt{t^-}$. □

EXEMPLE 4 Si $t \in \mathcal{B}$ est normal, on a

$$|t| = \sqrt{t^*t} \in \mathcal{A}(t) \ .$$

En effet

$$|\mathrm{id}| = \sqrt{\overline{\mathrm{id}} \cdot \mathrm{id}} \ .$$

□

EXEMPLE 5 On a évidemment

$$e^t = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\mathrm{id}^k}{k!}\right)(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k}{k!} \ .$$

EXEMPLE 6 Si Ω est une partie simplement connexe de $\mathbb{C}^*$ et $\mathrm{Sp}\, t \subset \Omega$, on peut définir une branche du logarithme $\ln : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On a donc $\ln t \in \mathcal{A}(t)$ et

$$e^{\ln t} = t \ .$$

En posant

$$t^\alpha := e^{\alpha \cdot \ln t} \ ,$$

on a les formules

$$t^\alpha t^\beta = t^{\alpha+\beta} \quad , \quad (t^\alpha)^\beta = t^{\alpha\cdot\beta}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

C'est immédiat. $\square$

PROPOSITION *Soient $t \in \mathcal{A}$, $\mathcal{G}_t : \mathcal{A}(t) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\, t)$ et $\mathcal{G} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\, \mathcal{A})$ les isomorphismes de Gelfand-Neumark associés.*

(i) Soient $\mathcal{C}$ une algèbre stellaire unifère et $\Theta : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ un morphisme d'algèbre stellaire unifère. Alors Θt est normal dans $\mathcal{C}$, $\mathrm{Sp}_{\mathcal{C}}\, \Theta t \subset \mathrm{Sp}_{\mathcal{B}}\, t$ et si $f \in \mathcal{C}(\mathrm{Sp}_{\mathcal{B}}\, t)$, on a

$$\Theta(f(t)) = f_{|\mathrm{Sp}_{\mathcal{C}}\, \Theta t}(\Theta t) \ .$$

(ii) Pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\, t)$, on a

$$\mathcal{G}(f(t)) = f \circ \mathcal{G}t \ .$$

(iii) Si $f \in \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\, t)$, alors

$$f(\mathrm{Sp}\, t) = \mathrm{Sp}\, f(t)$$

et, pour tout $g \in \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\, f(t))$, on a

$$(g \circ f)(t) = g(f(t)) \ .$$

(iv) L'application de restriction

$$r : \mathrm{Sp}\, \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Sp}\, \mathcal{A}(t) : \chi \longmapsto \chi_{|\mathcal{A}(t)}$$

est surjective et, pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\, t)$, on a

$$\mathcal{G}(f(t)) = f \circ \mathcal{G}_t t \circ r \ ,$$

i.e.

$$\Phi(f \circ \mathcal{G}_t t \circ r) = f(t) \ .$$

Dmonstration de (i) Puisque $t \in \mathcal{A}$ et que $\mathcal{A}$ est commutuative, t est normal. On a alors

$$(\Theta t)^* \Theta t = \Theta(t^* t) = \Theta(t t^*) = \theta t (\Theta t)^* \ ,$$

ce qui montre que Θt est normal. L'inclusion des spectre a été démontrée dans le théorème 6.7. Puisque

$$\Theta(1(t)) = \Theta e = e = 1_{|\mathrm{Sp}_{\mathcal{C}}\, \Theta t}(\Theta t) \quad \text{et} \quad \Theta(\mathrm{id}(t)) = \Theta t = \mathrm{id}_{|\mathrm{Sp}_{\mathcal{C}}\, \Theta t}(\Theta t) \ ,$$

les deux morphismes d'algèbre stellaire

$$f \longmapsto \Theta\left(f\left(t\right)\right) \quad \text{et} \quad f \longmapsto f_{|\operatorname{Sp}_{\mathcal{C}} \Theta t}\left(\Theta t\right)$$

sont donc égaux sur l'algèbre stellaire unifère engendrée par id , qui par Stone-Weierstraß est égale à $\mathcal{C}\left(\operatorname{Sp}_{\mathcal{B}} t\right)$.

Dmonstration de (ii) Considérons le morphisme d'algèbre stellaire unifère

$$\mathcal{G} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}\left(\operatorname{Sp} \mathcal{A}\right) : t \longmapsto \mathcal{G}t \ .$$

Pour tout $f \in \mathcal{C}\left(\operatorname{Sp} t\right)$, il vient $\operatorname{Sp}_{\mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A})} \mathcal{G}t = \mathcal{G}t\left(\operatorname{Sp}\mathcal{A}\right) = \operatorname{Sp} t$, donc

$$\mathcal{G}\left(f\left(t\right)\right) = f_{|\operatorname{Sp}_{\mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A})} \mathcal{G}t}\left(\mathcal{G}t\right) = f\left(\mathcal{G}t\right) = f \circ \mathcal{G}t$$

par (i) et l'unicité du calcul fonctionnel associé à $\mathcal{G}t \in \mathcal{C}\left(\operatorname{Sp}\mathcal{A}\right)$, puisque

$$1 \circ \mathcal{G}t = e \quad \text{et} \quad \operatorname{id} \circ \mathcal{G}t = \mathcal{G}t \ .$$

Dmonstration de (iii) La première partie découle du lemme. Quant à la seconde on a

$$\left(1 \circ f\right)\left(t\right) = 1\left(t\right) = e \quad \text{et} \quad \left(\operatorname{id} \circ f\right)\left(t\right) = f\left(t\right) \ ,$$

d'où le résultat par l'unicité du calcul fonctionnel associé à $f\left(t\right)$.

Dmonstration de (iv) Pour tout $a \in \mathcal{A}\left(t\right) \subset \mathcal{A}$, on a

$$\mathcal{G}_t a\left(r\left(\chi\right)\right) = \left\langle r\left(\chi\right) \middle| a\right\rangle_{\mathcal{A}(t)^\dagger} = \left\langle \chi \middle| a\right\rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{G}a\left(\chi\right) \ ,$$

donc $\mathcal{G}_t a \circ r = \mathcal{G}a$. Mais $\mathcal{G}_t t\left(\operatorname{Sp}\mathcal{A}\left(t\right)\right) = \operatorname{Sp} t = \mathcal{G}t\left(\operatorname{Sp}\mathcal{A}\right)$, donc r est surjective. Considérons le morphisme d'algèbre involutive unifère

$$\Psi : \mathcal{C}\left(\operatorname{Sp} t\right) \longrightarrow \mathcal{B} : f \longmapsto \Phi\left(f \circ \mathcal{G}_t t \circ r\right) \ .$$

On a

$$\Psi 1 = \Phi 1 = e \quad \text{et} \quad \Psi \operatorname{id} = \Phi\left(\operatorname{id} \circ \mathcal{G}_t t \circ r\right) = \Phi\left(\mathcal{G}t\right) = t \ ,$$

donc

$$\Phi\left(f \circ \mathcal{G}_t t \circ r\right) = f\left(t\right) \ ,$$

à nouveau par l'unicité du calcul fonctionnel associé à t . □

6.8 Eléments positifs dans une algèbre stellaire

LEMME *Soit t un élément auto-adjoint de $\mathcal{B}$.*

(i) *Si $t \in \mathcal{B}_+$ et $\|t\| \leqslant 1$, alors $\|e - t\| \leqslant 1$.*

(ii) *Si $\|e - t\| \leqslant 1$, alors $t \in \mathcal{B}_+$.*

(iii) *Pour que $t \in \mathcal{B}_+$, il faut et il suffit que l'on ait $\big\| \|t\| \cdot e - t \big\| \leqslant \|t\|$.*

Il suffit de se placer dans $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} t)$ où ces assertions sont immédiates (exercice). —— □

COROLLAIRE

(i) *L'ensemble $\mathcal{B}_+$ des éléments positifs de $\mathcal{B}$ est un cône convexe fermé saillant.*

(ii) *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Pour que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ soit positif dans cette algèbre stellaire unifère, il faut et il suffit que T soit un opérateur auto-adjoint positif borné.*

Dmonstration de (i) C'est un cône puisque, pour tout $b \in \mathcal{B}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on a $\operatorname{Sp}(\alpha \cdot b) = \alpha \cdot \operatorname{Sp} b$. Pour montrer que $\mathcal{B}_+$ est convexe, il nous suffit, pour tout $s, t \in \mathcal{B}_+ \smallsetminus \{0\}$, de prouver que $\frac{1}{2} \cdot (s + t) \in \mathcal{B}_+$. Nous pouvons supposer, en divisant par $\max(\|s\|, \|t\|)$, que $\|s\|, \|t\| \leqslant 1$. On a alors $\|s - e\|, \|t - e\| \leqslant 1$ par (i) , donc

$$\left\| \frac{1}{2} \cdot (s + t) - e \right\| = \frac{1}{2} \cdot \|s - e + t - e\| \leqslant \frac{1}{2} \cdot (\|s - e\| + \|t - e\|) \leqslant 1 ,$$

et par suite le résultat par (ii). La partie (iii) du lemme montre que $\mathcal{B}_+$ est fermé. Finalement si $t \in \mathcal{B}_+ \cap (-\mathcal{B}_+)$, on a $\operatorname{Sp} t = \{0\}$, donc

$$\|t\| = \rho(t) = 0$$

par la proposition 6.6.

Dmonstration de (ii) Rappelons que la notion d'opérateur auto-adjoint positif a été définie en 3.17. Puisque $\|T\| \cdot \mathrm{Id} - T$ est auto-adjoint, grâce à la proposition 3.17.i on obtient

$$\| \|T\| \cdot \mathrm{Id} - T\| = \sup_{\xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leqslant 1} |(\xi \,|\, \|T\| \cdot \xi - T\xi)| =$$

$$= \sup_{\xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leqslant 1} [\, \|T\| \cdot (\xi | \,\xi) - (\xi | \, T\xi)] \leqslant \|T\| \ ,$$

puisque $0 \leqslant (\xi | \, T\xi) \leqslant \|T\| \cdot (\xi | \,\xi)$. —— □

EXEMPLE Si S, T sont des opérateurs auto-adjoints positifs bornés qui commutent, alors ST est auto-adjoint positif borné.

C'est immédiat par l'exemple 6.8.1. —— □

Même en dimension finie ce résultat n'est pas trivial. On le prouve en général après avoir démontré le théorème de diagonalisation des matrices hermitiennes (auto-adjointes). Le résultat est évidemment faux si les matrices ne commutent pas comme le montre l'exemple suivant :

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sont hermitiennes positives, mais

$$ST = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

n'est même pas hermitienne.

THEOREME *Soit $t \in \mathcal{B}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $t \in \mathcal{B}_+$.

(ii) Il existe $r \in \mathcal{A}_+(t)$ tel que $t = r^2$.

(iii) Il existe $b \in \mathcal{B}$ tel que $t = b^*b$.

(iv) Il existe $a \in \mathcal{B}_{aa}$ tel que $t = a^2$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Utilisant le lemme 6.7.1, on a $\operatorname{Sp} t = (\operatorname{Sp} a)^2 \subset \mathbb{R}_+$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Cela découle de l'exemple 6.7.3 en posant $r := \sqrt{t}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) C'est trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Puisque $t = b^*b$ est auto-adjoint, grâce à l'exemple 6.7.3, on peut écrire $t = a^2 - c^2$ pour certains $a, c \in \mathcal{B}_+$ tels que $ac = ca = 0$. Il vient alors

$$(bc)^*(bc) = cb^*bc = ca^2c - c^4 = -c^4 \in -\mathcal{B}_+$$

car (iv)$\Rightarrow$(i). En décomposant $bc = u + i \cdot v$ pour certains $u, v \in \mathcal{B}_{aa}$, on obtient

$$(bc)(bc)^* = (u + i \cdot v)(u - i \cdot v) + (u - i \cdot v)(u + i \cdot v) - (bc)^*(bc) =$$

$$= 2u^2 + 2v^2 - (bc)^*(bc) \in \mathcal{B}_+ \ ,$$

puisque $\mathcal{B}_+$ est un cône convexe par le corollaire. Mais comme

$$\operatorname{Sp}[(bc)(bc)^*] \smallsetminus \{0\} = \operatorname{Sp}[(bc)^*(bc)] \smallsetminus \{0\}$$

par l'exemple 6.3.2, on a aussi $(bc)^*(bc) \in \mathcal{B}_+$, donc

$$(bc)^*(bc) \in \mathcal{B}_+ \cap (-\mathcal{B}_+) = \{0\}$$

et par suite $c^4 = 0$. On en déduit que $c = 0$, en raisonnant dans $\mathcal{A} := \mathcal{A}(c)$ puisque $\mathcal{G}c \geqslant 0$, et par suite que $t = a^2$. □

6.9 Cas d'un élément normal non-borné

Soit $t \in \mathcal{B}$ un élément normal. Puisque

$$e + t^*t = \left(1 + |\mathrm{id}|^2\right)(t) = \langle \mathrm{id} \rangle (t) \ ,$$

on voit que c'est un élément inversible dans $\mathcal{A}(t)$, donc dans $\mathcal{B}$. On pose

$$a := (e + t^*t)^{-1} = \langle t \rangle^{-1} \quad \text{et} \quad b := ta = t \langle t \rangle^{-1} \ .$$

On a

$$t = ba^{-1} \ ,$$

ainsi que

$$a^* = a \quad \text{et} \quad a = a^2 + b^*b \ , \tag{$*$}$$

et l'algèbre stellaire unifère $\mathcal{A}(t)$ est engendrée par a et b .

Les deux premières formules sont évidentes et

$$a^2 + b^*b = aa + at^*ta = a(e + t^*t) a = a \ .$$

□

DEFINITION Soient $a, b \in \mathcal{B}$. On désigne par $\mathcal{A}(a, b)$ la sous-algèbre stellaire unifère engendrée par a et b .

LEMME *Pour que $\mathcal{A}(a, b)$ soit commutative, il faut et il suffit que a , a^* , b et b^* commutent entre eux.*

C'est immédiat, puisque $\mathcal{A}(a, b)$ est la fermeture de la sous-algèbre des polynômes non-commutatifs en a , a^* , b et b^* . □

REMARQUE On peut montrer qu'il suffit que a et b soient normaux et que a commute avec b (théorème de Fuglede).

Supposons maintenant que $\mathcal{A}$ est une algèbre stellaire unifère commutative engendrée par deux éléments a, b satisfaisant à $(*)$. Nous allons montrer comme en 6.8 que $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$ est homéomorphe à une partie compact de la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Si $\langle \chi | a \rangle \neq 0$ pour tout $\chi \in \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$, l'élément a est inversible par le théorème de Gelfand 6.4, et en posant $t := ba^{-1} \in \mathcal{A}$, on a évidemment $b = ta$ et il vient

$$e + t^*t = e + a^{-1}b^*ba^{-1} = a^{-2}\left(a^2 + b^*b\right) = a^{-2}a = a^{-1} \ ,$$

donc $a = (e + t^*t)^{-1}$. On a évidemment $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$. Ceci correspond au cas borné.

S'il existe maintenant un $\chi \in \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$ tel que $\langle \chi | a \rangle = 0$, alors $(*)$ montre que

$$0 = \langle \chi | a \rangle = \left\langle \chi \middle| a^2 \right\rangle + \langle \chi | b^*b \rangle = |\langle \chi | b \rangle|^2 \ ,$$

donc $\langle \chi | b \rangle = 0$. Comme en outre $\langle \chi | e \rangle = 1$, un tel caractère est unique. Ceci correspond au cas non-borné.

Nous verrons plus tard (cf. théorème 7.8) que l'algèbre stellaire associée à un opérateur normal non-borné est de ce type.

Nous avons donc prouvé que $\{\mathcal{G}a = 0\}$ contient au plus un caractère noté χ_∞ . Posons

$$\theta := \frac{\mathcal{G}b}{\mathcal{G}a} : \{\mathcal{G}a \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{C} .$$

On a

$$\overline{\mathcal{G}a} = \mathcal{G}a = (\mathcal{G}a)^2 + |\mathcal{G}b|^2$$

par $(*)$, donc

$$\frac{1}{\mathcal{G}a} = 1 + \left|\frac{\mathcal{G}b}{\mathcal{G}a}\right|^2 = 1 + |\theta|^2 = \langle\theta\rangle \ , \tag{$**$}$$

puisque $\mathcal{G}a$ est réelle, puis

$$\mathcal{G}a = \frac{1}{1+|\theta|^2} = \langle\theta\rangle^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}b = \theta\cdot\mathcal{G}a = \frac{\theta}{1+|\theta|^2} = \theta\cdot\langle\theta\rangle^{-1} \tag{$***$}$$

sur $\{\mathcal{G}a \neq 0\}$.

L'application θ est évidemment continue et elle se prolonge par continuité à $\operatorname{Sp}\mathcal{A}$ et à valeurs dans $\overline{\mathbb{C}}$ en posant $\theta(\chi_\infty) = \infty$. En effet la formule $(**)$ montre que θ tend vers ∞ , lorsque χ tend vers χ_∞ , puisque $\mathcal{G}a$ tend vers 0 .

L'application θ est injective, car pour tous $\chi_1, \chi_2 \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}$ tels que $\theta(\chi_1) = \theta(\chi_2)$, les formules $(***)$ montrent que les caractères χ_1 et χ_2 coïncident sur a et b , donc sont égaux. Puisque $\operatorname{Sp}\mathcal{A}$ est compact, θ est un homéomorphisme de $\operatorname{Sp}\mathcal{A}$ sur son image $\Lambda := \theta(\operatorname{Sp}\mathcal{A})$ dans $\overline{\mathbb{C}}$. Utilisant le théorème de Gelfand-Neumark, nous avons donc prouvé la première partie du

THEOREME *Soient $a, b \in \mathcal{B}$ satisfaisant à $(*)$ et tels a , b et b^* commutent entre eux. On considère l'algèbre stellaire unifère commutative $\mathcal{A}(a,b)$ engendrée par a et b et l'isomorphisme de Gelfand-Neumark $\mathcal{G} : \mathcal{A}(a,b) \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A}(a,b))$ associé.*

La fonction $\frac{\mathcal{G}b}{\mathcal{G}a}$ définie sur $\{\mathcal{G}a \neq 0\}$ se prolonge en un homéomorphisme θ de $\operatorname{Sp}\mathcal{A}(a,b)$ sur une partie compacte Λ de $\overline{\mathbb{C}}$ et

$$c \longmapsto \mathcal{G}c \circ \overset{-1}{\theta} : \mathcal{A}(a,b) \longrightarrow \mathcal{C}(\Lambda)$$

est un isomorphisme d'algèbres stellaires.

L'isomorphisme réciproque

$$\mathcal{C}(\Lambda) \longrightarrow \mathcal{A}(a,b) \hookrightarrow \mathcal{B} : f \longmapsto \overset{-1}{\mathcal{G}}(f\circ\theta)$$

est l'unique morphisme d'algèbre involutive unifère $\Psi : \mathcal{C}(\Lambda) \longrightarrow \mathcal{B}$ tel que

$$\Psi\langle\mathrm{id}\rangle^{-1} = \Psi\frac{1}{1+|\mathrm{id}|^2} = a \quad et \quad \Psi\left(\mathrm{id}\cdot\langle\mathrm{id}\rangle^{-1}\right) = \Psi\frac{\mathrm{id}}{1+|\mathrm{id}|^2} = b \ .$$

Cette application est une isométrie et son image est $\mathcal{A}(a,b)$.

L'isomorphisme réciproque satisfait à la condition puisque les images de a et b dans $\mathcal{C}(\Lambda)$ sont respectivement

$$\mathcal{G}a\circ\theta^{-1} = \frac{1}{1+|\mathrm{id}|^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}b\circ\theta^{-1} = \frac{\mathrm{id}}{1+|\mathrm{id}|^2}$$

par les formules $(***)$. Finalement Ψ est univoquement déterminé sur la sous-algèbre unifère involutive de $\mathcal{C}(\Lambda)$ engendrée par $\frac{1}{1+|\mathrm{id}|^2}$ et $\frac{\mathrm{id}}{1+|\mathrm{id}|^2}$. Comme ces fonctions séparent les points de Λ , cette sous-algèbre est dense par le théorème de Stone-Weierstraß ; puisque Ψ est continu par le théorème 6.7, Ψ est aussi univoquement déterminé sur $\mathcal{C}(\Lambda)$. $\square$

Chapitre 7

OPÉRATEURS NON-BORNÉS

Dans ce qui suit $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ désignent des espaces de Hilbert.

Version du 30 mars 2005

7.1 Opérateurs fermés

DEFINITION 1 Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des espaces de Hilbert. Nous dirons qu'une application linéaire $T : D(T) \longrightarrow \mathcal{G}$ définie sur un sous-espace vectoriel $D(T)$ de $\mathcal{H}$ est un *opérateur* , dans $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{G}$ s'il faut préciser. Nous dirons simplement que c'est un opérateur dans $\mathcal{H}$ s'il prend ses valeurs dans $\mathcal{H}$. Le sous-espace vectoriel $D(T)$ s'appelle le *domaine* de T . Nous désignerons par $\mathcal{D}(T)$ le sous-espace vectoriel $D(T)$ muni du produit scalaire

$$(\xi|\,\eta)_{\mathcal{D}(T)} = (\xi|\,\eta)_{\mathcal{H}} + (T\xi|\,T\eta)_{\mathcal{G}} \ .$$

Ce produit scalaire est parfois noté $(\xi|\,\eta)_T$. La norme déduite s'appelle *norme en graphe* .

Nous dirons qu'un opérateur T est *fermé* si le graphe

$$\operatorname{Gr} T = \{(\xi, T\xi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G} \mid \xi \in D(T)\}$$

est fermé dans $\mathcal{H} \times \mathcal{G}$.

THEOREME *Soit T un opérateur dans $\mathcal{H}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) T est fermé.

(ii) Pour toute suite $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ telle que

$$\xi := \lim_k \xi_k \quad et \quad \gamma := \lim_k T\xi_k$$

existent dans $\mathcal{H}$ respectivement $\mathcal{G}$, on a $\xi \in D(T)$ et $\gamma = T\xi$.

(iii) $\mathcal{D}(T)$ est un espace de Hilbert.

Dans ce cas $\mathcal{D}(T)$ est l'image de $\operatorname{Gr} T$ par pr_1 et $\mathcal{D}(T) \hookrightarrow \mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de noyau $D_T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ tel que

$$\mathcal{D}(T) = D_T(\mathcal{H}) + T^\dagger(\mathcal{G}) \ ,$$

i.e. $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}(T)} = D_T D_T^\dagger + T^\dagger T$ *, en considérant les semi-dualités $\langle \mathcal{D}(T)|\,\mathcal{D}(T)\rangle$ et $\langle \mathcal{H}|\,\mathcal{H}\rangle$.*

L'équivalence de (i) et (ii) est immédiate. Pour celle de (i) et (iii), il suffit de remarquer que $\mathcal{D}(T)$ est isométrique au sous-espace vectoriel $\operatorname{Gr} T \sqsubset \mathcal{H} \times \mathcal{G}$, $\mathcal{H} \times \mathcal{G}$ étant muni du produit scalaire produit (cf. exemple 1.2.4). Finalement en notant $j : \mathcal{D}(T) \hookrightarrow \mathcal{H}$ l'injection canonique, pour tout $\theta, \theta' \in \mathcal{D}(T)$, on a

$$(\theta|\,\theta')_{\mathcal{D}(T)} = (j\theta|\,j\theta')_{\mathcal{H}} + (T\theta|\,T\theta')_{\mathcal{G}} = \left(\theta|\,\left(D_T D_T^\dagger + T^\dagger T\right)\theta'\right)_{\mathcal{D}(T)} \ ,$$

d'où le résultat par le théorème 5.4 et la proposition 5.7. Nous aurions aussi pu appliquer l'exemple 5.11.3. □

REMARQUE En d'autres termes, on peut permuter limite et opérateur fermé, pour autant que les limites existent. Le calcul explicite du noyau D_T de $\mathcal{D}(T) \hookrightarrow \mathcal{H}$ se fera dans le théorème 7.3.iii. Voir aussi le théorème 7.8.i.

PROPOSITION *Pour qu'un opérateur fermé T dans $\mathcal{H}$ soit continu sur $D(T)$, muni de la norme induite par $\mathcal{H}$, il faut et il suffit que $D(T)$ soit fermé dans $\mathcal{H}$.*

En effet si $D(T)$ est fermé, c'est un espace de Hilbert et le théorème du graphe fermé montre que T est continu. Réciproquement si T est continu, il existe un unique prolongement continu $\widehat{T} : \overline{D(T)} \longrightarrow \mathcal{G}$. On a alors

$$\operatorname{Gr} \widehat{T} = \overline{\operatorname{Gr} T}^{\overline{D(T)}\times\mathcal{G}} = \overline{\operatorname{Gr} T}^{\mathcal{H}\times\mathcal{G}} = \operatorname{Gr} T \ ,$$

puisque T est fermé, donc

$$\overline{D(T)} = \operatorname{pr}_1\left(\operatorname{Gr} \widehat{T}\right) = \operatorname{pr}_1(\operatorname{Gr} T) = D(T) \ .$$

□

Ceci montre que la notion d'opérateur fermé est une bonne généralisation de la notion d'opérateur continu à des opérateurs qui ne sont pas partout définis.

SCOLIE *Si T est un opérateur fermé de domaine dense, on a ou bien*

T est continu et partout défini,

ou bien

T n'est pas continu et n'est pas partout défini.

DEFINITION 2 Dans le premier cas on a $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ et nous dirons que T est *borné* , dans le second cas on dit que T est *non-borné* .

7.2 Opérateurs fermables

Bien souvent un problème se traduit par la donnée d'un opérateur qui n'est pas fermé. Le but de la théorie des opérateurs non-bornés est essentiellement de construire des prolongements fermés de l'opérateur donné, puis d'étudier leurs propriétés.

DEFINITION 1 Si S et T sont des opérateurs dans $\mathcal{H}$, nous dirons que S est un *prolongement* de T , noté $T \subset S$, si $D(T) \subset D(S)$ et $T = S_{|D(T)}$.

Nous dirons qu'un opérateur dans $\mathcal{H}$ est *fermable* si la fermeture $\overline{\operatorname{Gr} T}^{\mathcal{H}\times\mathcal{G}}$ de $\operatorname{Gr} T$ dans $\mathcal{H} \times \mathcal{G}$ est le graphe d'un opérateur, évidemment fermé et prolongeant T , appelé la *fermeture* de T et noté $\overline{T}$.

PROPOSITION *Soit T un opérateur dans $\mathcal{H}$. Si T possède un prolongement fermé S , alors T est fermable, $\overline{T} \subset S$ et les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $S = \overline{T}$.

(ii) *S est le plus petit prolongement fermé de T .*

(iii) *$D(T)$ est dense dans $\mathcal{D}(S)$.*

On a évidemment $\overline{\operatorname{Gr} T}^{\mathcal{H}\times\mathcal{G}} \subset \operatorname{Gr} S$, donc $\overline{\operatorname{Gr} T}^{\mathcal{H}\times\mathcal{G}}$ est un graphe et $\overline{T} \subset S$. L'équivalence des trois assertions est immédiate en se rappelant que $\mathcal{D}(S)$ est isométrique au sous-espace vectoriel $\operatorname{Gr} S \sqsubset \mathcal{H} \times \mathcal{G}$. □

Ce lemme nous conduit à poser la

DEFINITION 2 Un sous-espace vectoriel dense de $\mathcal{D}(T)$ s'appelle un *domaine essentiel* de T .

Le domaine d'un opérateur fermable est évidemment un domaine essentiel de sa fermeture. D'autre part tout domaine essentiel d'un opérateur de domaine dense est dense dans $\mathcal{H}$, mais la réciproque est fausse (cf. exemple 7.9.8).

REMARQUE 1 L'injection canonique $j : \mathcal{D}(T) \hookrightarrow \mathcal{H}$ et l'opérateur $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{G}$ sont continus de norme $\leqslant 1$.

En effet, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, on a

$$\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 \ , \ \|T\xi\|_{\mathcal{G}}^2 \leqslant \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|T\xi\|_{\mathcal{G}}^2 = \|\xi\|_{\mathcal{D}(T)}^2 \ .$$

□

Nous désignerons par $\widehat{\mathcal{D}(T)}$ le complété de $\mathcal{D}(T)$. Soient encore $\widehat{j} : \widehat{\mathcal{D}(T)} \longrightarrow \mathcal{H}$ l'unique prolongement linéaire continu de j et $\widehat{T} : \widehat{\mathcal{D}(T)} \longrightarrow \mathcal{G}$ celui de T . Le produit scalaire de $\widehat{\mathcal{D}(T)}$ est donné par

$$(\xi|\,\eta)_{\widehat{\mathcal{D}(T)}} = \left(\widehat{j}\xi \middle| \widehat{j}\eta\right)_{\mathcal{H}} + \left(\widehat{T}\xi \middle| \widehat{T}\eta\right)_{\mathcal{G}} \quad \text{pour tout } \xi, \eta \in \widehat{\mathcal{D}(T)}$$

(cf. remarque 1.3).

THEOREME *Soit T un opérateur dans $\mathcal{H}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est fermable.*

(ii) $\mathrm{pr}_1 : \overline{\mathrm{Gr}\, T}^{\mathcal{H}\times\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{H}$ *est injective.*

(iii) *Pour toute suite $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ telle que $\lim_k \xi_k = 0$ dans $\mathcal{H}$ et telle que $\lim_k T\xi_k$ existe dans $\mathcal{G}$, on a $\lim_k T\xi_k = 0$.*

(iv) *L'application canonique $\widehat{j} : \widehat{\mathcal{D}(T)} \longrightarrow \mathcal{H}$ est injective.*

Dans ce cas

$$\widehat{j}\left(\widehat{\mathcal{D}(T)}\right) = \mathcal{D}\left(\overline{T}\right) \quad \text{et} \quad \widehat{T} = \overline{T}\widehat{j} \ .$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) C'est immédiat.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Posons $\gamma := \lim_k T\xi_k$. L'hypothèse dans (iii) signifie que $(\xi_k, T\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $(0,\gamma)$ dans $\overline{\mathrm{Gr}\, T}^{\mathcal{H}\times\mathcal{G}}$. Mais comme $\mathrm{pr}_1(0,\gamma) = 0 = \mathrm{pr}_1(0,0)$, on obtient $\gamma = 0$ par (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Si $\xi \in \widehat{\mathcal{D}(T)}$ est tel que $\widehat{j}(\xi) = 0$, il existe une suite $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ telle que $\xi = \lim_k \xi_k$ dans $\widehat{\mathcal{D}(T)}$. On a

$$\lim_k \xi_k = \lim_k \widehat{j}(\xi_k) = \widehat{j}(\lim_k \xi_k) = \widehat{j}(\xi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{H} \ ,$$

et $(T\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{G}$, donc convergente. On en déduit par (iii) que $\lim_k T\xi_k = 0$ dans $\mathcal{G}$, donc que

$$\lim_k \|\xi_k\|_T^2 = \lim_k \left(\|\xi_k\|_{\mathcal{H}}^2 + \|T\xi_k\|_{\mathcal{G}}^2\right) = 0 \ ,$$

ce qui montre que $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\widehat{\mathcal{D}(T)}$, donc que $\xi = 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Soit S l'opérateur défini sur $\widehat{j}\left(\widehat{\mathcal{D}(T)}\right)$ par $\widehat{T} = S\widehat{j}$. La remarque 1 montre que $\mathcal{D}(S) = \widehat{j}\left(\widehat{\mathcal{D}(T)}\right)$, donc que S est un opérateur fermé par le théorème 7.1. Il suffit donc par la proposition de remarquer que S prolonge T et que $\mathcal{D}(T)$ est dense dans $\mathcal{D}(S)$. —— □

REMARQUE 2 Il existe évidemment des opérateurs non-fermables (exercice). Mais nous allons voir (cf. 7.9) que beaucoup d'opérateurs différentiels sont fermables. Il n'est pas souvent possible de déterminer explicitement le domaine $\mathcal{D}\left(\overline{T}\right)$ de la fermeture. C'est une des raisons qui nous oblige à introduire un appareil théorique assez élaboré.

REMARQUE 3 Les notions d'opérateur fermé, à part ce qui concerne la structure de sous-espace hilbertien de son domaine, et d'opérateur fermable peuvent s'étendre aux espaces de Banach en utilisant les mêmes démonstrations. Si F et G sont des espaces de Banach, par compatibilité on considère la norme $\|\cdot\|_2$ sur $F \times G$ définie par

$$\|\cdot\|_2^2 := \|\cdot\|_F^2 + \|\cdot\|_G^2$$

pour pouvoir définir la norme en graphe de $\mathcal{D}(T)$.

7.3 Opérateurs et sous-espaces hilbertiens

Dans tout ce qui suit nous considérerons
un espace localement convexe séparé F ,
un sous-espace hilbertien $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ de noyau $h : F \longrightarrow \mathcal{H}$
et
une application linéaire continue $t : F \longrightarrow \mathcal{G}$.

EXEMPLE (classique) Si T est un opérateur de domaine dense dans $\mathcal{H}$ et à valeurs dans $\mathcal{G}$, on peut prendre pour F un domaine essentiel de T , muni de la topologie induite par $\mathcal{D}(T)$ ou d'une topologie localement convexe séparée telle que l'injection canonique $h_T : F \hookrightarrow \mathcal{D}(T)$ soit continue. Si $j : \mathcal{D}(T) \hookrightarrow \mathcal{H}$ désigne aussi l'injection canonique, on obtient le diagramme suivant

$$F \overset{h_T}{\hookrightarrow} \mathcal{D}(T) \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{H} \overset{j^\dagger}{\hookrightarrow} \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta \overset{h_T^\dagger}{\hookrightarrow} F^\dagger \ ,$$

puisque h_T et j sont d'image dense ; ceci nous permet d'identifier $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}(T)^\dagger_\beta$ à des sous-espaces hilbertiens de $F^\dagger$. Le noyau h de $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ est égal à jh_T , donc injectif.

On dit parfois lorsque F possède des propriétés supplémentaires (nucléarité) que $F \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ est un *triple de Gelfand* .

Cadre général C'est le cas si le noyau h de $\mathcal{H}$ n'est pas nécessairement injectif, donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$, et on considère une application linéaire continue $t : F \longrightarrow \mathcal{G}$. Ce cadre nous sera utile lorsque nous rencontrerons des situations où $\mathcal{H}$ n'est pas dense dans $F^\dagger$; cela se présente par exemple pour définir la notion d'opérateur décomposable ou en théorie des représentations. Il nous impose également, ce qui est avantageux dans beaucoup de formulations faisant intervenir plusieurs opérateurs, de ne considérer que des opérateurs définis sur le même domaine, en l'occurence $h(F)$, qui est dense dans $\mathcal{H}$.

Rappelons les construction déjà faites dans les exemples 5.11.3 et 5.16.2. On considère la forme sesquilinéaire hermitienne positive

$$(\varphi, \psi) \longmapsto (h\varphi|\, h\psi)_{\mathcal{H}} + (t\varphi|\, t\psi)_{\mathcal{G}} : F \times F \longrightarrow \mathbb{K}$$

associée au noyau hermitien positif $h^\dagger h + t^\dagger t$, l'espace de Hilbert $\widehat{\mathcal{D}(t)}$ complété de l'espace préhilbertien

$$\mathcal{D}(t) := F_{h^\dagger h + t^\dagger t} \ ,$$

l'application canonique

$$h_t : F \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}(t)} : \varphi \longmapsto \varphi + \operatorname{Ker}\left(h^\dagger h + t^\dagger t\right) \ ,$$

l'espace de Hilbert $\mathcal{D}(t)^\dagger_\beta = \widehat{\mathcal{D}(t)}^\dagger_\beta$ **plongé** dans $F^\dagger$ à l'aide de $h_t^\dagger$, ainsi que les prolongements linéaires continus canoniques

$$\widehat{h} : \widehat{\mathcal{D}(t)} \longrightarrow \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \widehat{t} : \widehat{\mathcal{D}(t)} \longrightarrow \mathcal{G}$$

de h et t . On a $h = \widehat{h} h_t$ et $t = \widehat{t} h_t$, donc $h^\dagger = h_t^\dagger \widehat{h}^\dagger$ et $t^\dagger = h_t^\dagger \widehat{t}^\dagger$; puisque $h^\dagger$ et $h_t^\dagger$ sont les injections canoniques de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}(t)_\beta^\dagger$ dans $F^\dagger$, $\widehat{h}^\dagger$ est l'injection canonique de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{D}(t)_\beta^\dagger$. Les diagrammes suivants sont donc commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "h_t"'] & & \mathcal{H} \arrow[rr, hook, "h^\dagger"] \arrow[dr, hook, "\widehat{h}^\dagger"'] & & F^\dagger \\
& \widehat{\mathcal{D}(t)} \arrow[ur, "\widehat{h}"'] & & \mathcal{D}(t)_\beta^\dagger \arrow[ur, hook, "h_t^\dagger"'] &
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "h_t"'] & & \mathcal{G} \arrow[rr, "t^\dagger"] \arrow[dr, "\widehat{t}^\dagger"'] & & F^\dagger \\
& \widehat{\mathcal{D}(t)} \arrow[ur, "\widehat{t}"'] & & \mathcal{D}(t)_\beta^\dagger \arrow[ur, "h_t^\dagger"'] &
\end{tikzcd}$$

Remarquons que les adjointes de t et $\widehat{t}$ prennent les mêmes valeurs sur les mêmes éléments de $\mathcal{G}$. En outre le produit scalaire sur $\widehat{\mathcal{D}(t)}$ est donné par

$$(\xi|\,\eta)_{\widehat{\mathcal{D}(t)}} = \left(\widehat{h}\xi\middle|\,\widehat{h}\eta\right)_{\mathcal{H}} + \left(\widehat{t}\xi\middle|\,\widehat{t}\eta\right)_{\mathcal{G}} \quad \text{pour tout } \xi,\eta \in \widehat{\mathcal{D}(t)} \ .$$

Le noyau de $\widehat{h}^\dagger(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{D}(t)^\dagger$ est évidemment $\widehat{h\widehat{h}^\dagger} : \widehat{\mathcal{D}(t)} \longrightarrow \mathcal{D}(t)^\dagger$ (cf. corollaire 5.4.i).

Il nous faut maintenant clarifier les conditions sous lesquelles t induit un opérateur dans $\mathcal{H}$. Le résultat suivant est immédiat.

LEMME *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) t *se factorise par* h *en un opérateur* $\widetilde{t}$ *de domaine* $h(F)$.

(ii) *La restriction de* $\widehat{h}$ *à* $\mathcal{D}(t)$ *est injective.*

(iii) *On a* $\operatorname{Ker} h \subset \operatorname{Ker} t$.

Un tel opérateur est toujours de domaine dense. Il est alors clair que les espaces préhilbertiens $\mathcal{D}(t)$ et $\mathcal{D}\left(\widetilde{t}\right)$ sont isomorphes, et le théorème 7.2 montre que $\widetilde{t}$ est fermable si, et seulement si, $\widehat{h}$ est injective. Nous insistons sur le fait qu'il n'est pas judicieux de remplaçer t par $\widetilde{t}$, car il est plus intéressant d'utiliser la semi-dualité $\left\langle F\middle|\, F^\dagger\right\rangle$ donnée à priori et intimement liée dans les applications au problème considéré.

Ceci nous conduit à poser la

DEFINITION Nous dirons que t est *fermable* dans $\mathcal{H}$ si $\widehat{h}$ est injective et nous désignerons par T l'opérateur fermé dans $\mathcal{H}$ et à valeurs dans $\mathcal{G}$ tel que $\widehat{t} = T\widehat{h}$, appelé la *fermeture de* t .

Dans ce cas, on a évidemment $\mathcal{D}(T) = \widehat{h}\left(\widehat{\mathcal{D}(t)}\right)$, et nous identifierons $\widehat{\mathcal{D}(t)}$ avec $\mathcal{D}(T)$, donc $\widehat{h}$ avec l'injection canonique $j : \mathcal{D}(T) \hookrightarrow \mathcal{H}$. On a donc les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "h_t"'] & & \mathcal{H} \arrow[rr, hook, "h^\dagger"] \arrow[dr, hook, "j^\dagger"'] & & F^\dagger \\
& \mathcal{D}(T) \arrow[ur, hook, "j"'] & & \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta \arrow[ur, hook, "h_t^\dagger"'] &
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "h_t"'] & & \mathcal{G} \arrow[rr, "t^\dagger"] \arrow[dr, "T^\dagger"'] & & F^\dagger \\
& \mathcal{D}(T) \arrow[ur, "T"'] & & \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta \arrow[ur, hook, "h_t^\dagger"'] &
\end{tikzcd}$$

Puisque $h_t^\dagger$, $j^\dagger$ et j sont des injections canoniques, nous les écrirons parfois sous la forme générale Id , ou bien pas du tout, si aucune confusion n'en résulte.

Le noyau de $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{D}(t)^\dagger$ est évidemment $j : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{H}$.

REMARQUE 1 Si t est fermable, alors t se factorise par h en un opérateur $\widetilde{t}$ de domaine $h(F)$ et la fermeture de t est la même que celle de $\widetilde{t}$.

D'autre part si t se factorise par h en un opérateur $\widetilde{t}$ de domaine $h(F)$, alors t est fermable si, et seulement si, $\widetilde{t}$ est fermable.

REMARQUE 2 Nous allons jouer sur deux tableaux : certaines formulations ne ferons intervenir que $\mathcal{H}$ et T (ou $\widetilde{t}$), tandis que d'autres introduirons F et t . L'avantage tient au fait que T étant mal connu, surtout son domaine de définition $\mathcal{D}(T)$, la considération de F , donc en particulier la considération d'une topologie adéquate sur le domaine de T , permet de calculer dans $F^\dagger$. C'est ce qui donne tant d'importance aux espaces de distributions.

Historiquement l'opérateur T (ou $\widetilde{t}$) a tout d'abord été étudié en restant dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$; pratiquement les formulations ne faisant intervenir que cet espace (et l'opérateur) semblent plus immédiates et mieux interprétables (par exemple en mécanique quantique, mais cela peut aussi dépendre des écoles !). L'une des objections, à vouloir donner une interprétation de F , a trait à son caractère non-canonique (à voir, puisque l'on peut prendre $F = \mathcal{D}(\widetilde{t})$, mais c'est peut-être cette dépendance qui gêne).

Nous allons maintenant étudier les différents sous-espaces hilbertiens qui interviennent dans ces considérations. Nous donnerons différentes caractérisations de la fermabilité de t dans le théorème du paragraphe suivant.

PROPOSITION

(i) *Le noyau de* $\mathcal{D}(t)^\dagger_\beta \hookrightarrow F^\dagger$ *est* $h^\dagger h + t^\dagger t$, *i.e.*

$$\mathcal{D}(t)^\dagger_\beta = \mathcal{H} + t^\dagger(\mathcal{G}) \ ;$$

en particulier tout élément de $\mathcal{D}(T)^{\dagger}$ *est de la forme* $\xi + t^{\dagger}\gamma$ *pour certains* $\xi \in \mathcal{H}$ *et* $\gamma \in \mathcal{G}$ *. L'application*

$$Q := \widehat{h}^{\dagger}\widehat{h} + \widehat{t}^{\dagger}\widehat{t} : \widehat{\mathcal{D}(t)} \longrightarrow \mathcal{D}(t)^{\dagger}_{\beta}$$

est celle de Riesz. Remarquons que $\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}$ *est le noyau de* $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{D}(t)^{\dagger}$ *et* $\widehat{t}^{\dagger}\widehat{t}$ *celui de* $t^{\dagger}(\mathcal{G}) = \widehat{t}^{\dagger}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{D}(t)^{\dagger}$ *.*

(ii) Si $\mu \in \mathcal{D}(t)^{\dagger}$ *, alors l'équation*

$$h^{\dagger}\widehat{h}\theta + t^{\dagger}\widehat{t}\theta = \mu$$

possède une unique solution $\theta \in \widehat{\mathcal{D}(t)}$ *. D'autre part le problème variationnel*

$$\xi + t^{\dagger}\gamma = \mu \quad \text{et} \quad \|\xi\|^2_{\mathcal{H}} + \|\gamma\|^2_{\mathcal{G}} \ \text{est minimal}$$

possède une unique solution $(\xi, \gamma) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G}$ *. On a*

$$\|\mu\|^2_{\mathcal{D}(t)^{\dagger}_{\beta}} = \|\xi\|^2_{\mathcal{H}} + \|\gamma\|^2_{\mathcal{G}} \quad , \quad \xi = \widehat{h}\theta \quad \text{et} \quad \gamma = \widehat{T}\theta \ .$$

Dmonstration de (i) C'est la reformulation de l'exemple 5.11.3.

Dmonstration de (ii) La première partie est évidente puisque Q est une bijection de $\widehat{\mathcal{D}(t)}$ sur $\mathcal{D}(t)^{\dagger}_{\beta}$. Quant à la seconde, on applique tout d'abord l'assertion de minimalité à la somme $\mathcal{D}(t)^{\dagger}_{\beta} = \mathcal{H} + t^{\dagger}(\mathcal{G})$ (cf. 5.7), puis à l'image $t^{\dagger}(\mathcal{G})$ (cf. 5.4) : on a

$$p_{\mathcal{H}}\mu \in \mathcal{H} \quad , \quad p_{t^{\dagger}(\mathcal{G})}\mu \in t^{\dagger}(\mathcal{G}) \quad \text{et} \quad \left(t^{\dagger}\right)^{-1}_{\mathcal{G}}\left(p_{t^{\dagger}(\mathcal{G})}\mu\right) \in \mathcal{G}$$

ainsi que

$$\mu = p_{\mathcal{H}}\mu + p_{t^{\dagger}(\mathcal{G})}\mu \quad , \quad p_{t^{\dagger}(\mathcal{G})}\mu = t^{\dagger}\left(t^{\dagger}\right)^{-1}_{\mathcal{G}}\left(p_{t^{\dagger}(\mathcal{G})}\mu\right) \quad ,$$

$$\|\mu\|^2_{\mathcal{D}(t)^{\dagger}_{\beta}} = \|p_{\mathcal{H}}\mu\|^2_{\mathcal{H}} + \left\|p_{t^{\dagger}(\mathcal{G})}\mu\right\|_{t^{\dagger}(\mathcal{G})} \quad ,$$

$$\left\|p_{t^{\dagger}(\mathcal{G})}\mu\right\|_{t^{\dagger}(\mathcal{G})} = \left\|\left(t^{\dagger}\right)^{-1}_{\mathcal{G}}\left(p_{t^{\dagger}(\mathcal{G})}\mu\right)\right\|_{\mathcal{G}} \quad ,$$

donc

$$\|\mu\|^2_{\mathcal{D}(t)^{\dagger}_{\beta}} = \|p_{\mathcal{H}}\mu\|^2_{\mathcal{H}} + \left\|\left(t^{\dagger}\right)^{-1}_{\mathcal{G}}\left(p_{t^{\dagger}(\mathcal{G})}\mu\right)\right\|^2_{\mathcal{G}} \ .$$

Réciproquement si

$$\mu = \xi + t^{\dagger}\gamma \text{ pour certains } \xi \in \mathcal{H} \text{ , } \gamma \in \mathcal{G} \quad \text{et} \quad \|\xi\|^2_{\mathcal{H}} + \|\gamma\|^2_{\mathcal{G}} \text{ est minimal,}$$

on a

$$\|\gamma\|_{\mathcal{G}} \geqslant \left\|t^{\dagger}\gamma\right\|_{t^{\dagger}(\mathcal{G})} \ ,$$

donc

$$\|\xi\|^2_{\mathcal{H}} + \|\gamma\|^2_{\mathcal{G}} \geqslant \|\xi\|^2_{\mathcal{H}} + \left\|t^{\dagger}\gamma\right\|^2_{t^{\dagger}(\mathcal{G})} \geqslant$$

$$\geqslant \|p_{\mathcal{H}}\mu\|^2_{\mathcal{H}} + \left\|p_{t^{\dagger}(\mathcal{G})}\mu\right\|^2_{t^{\dagger}(\mathcal{G})} = \|p_{\mathcal{H}}\mu\|^2_{\mathcal{H}} + \left\|\left(t^{\dagger}\right)^{-1}_{\mathcal{G}}\left(p_{t^{\dagger}(\mathcal{G})}\mu\right)\right\|^2_{\mathcal{G}} \ ;$$

la minimalité entraîne alors l'égalité, puis l'unicité pour la somme que

$$\xi = p_{\mathcal{H}}\mu \quad \text{et} \quad t^{\dagger}\gamma = p_{t^{\dagger}(\mathcal{G})}\mu \ ,$$

et finalement celle pour l'image que

$$\gamma = \left(t^\dagger\right)_{\mathcal{G}}^{-1} \left(p_{t^\dagger(\mathcal{G})}\mu\right) \ .$$

En outre

$$\|\mu\|_{\mathcal{D}(t)_\beta^\dagger}^2 = \|p_{\mathcal{H}}\mu\|_{\mathcal{H}}^2 + \left\|\left(t^\dagger\right)_{\mathcal{G}}^{-1} \left(p_{t^\dagger(\mathcal{G})}\mu\right)\right\|_{\mathcal{G}} = \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\gamma\|_{\mathcal{G}}^2 \ .$$

Pour terminer, soit $\theta \in \widehat{\mathcal{D}(t)}$ tel que $\left(h^\dagger \widehat{h} + t^\dagger \widehat{t}\right) \theta = \mu$; on a alors

$$\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\gamma\|_{\mathcal{G}}^2 = \|\mu\|_{\mathcal{D}(t)_\beta^\dagger}^2 = (\mu|\,\mu)_{\mathcal{D}(t)_\beta^\dagger} = \left\langle \overset{-1}{Q} \left(\widehat{h}^\dagger \widehat{h} + \widehat{t}^\dagger \widehat{t}\right) \theta \middle| \widehat{h}^\dagger \widehat{h}\theta + \widehat{t}^\dagger \widehat{t}\theta \right\rangle_{\widehat{\mathcal{D}(t)}} =$$

$$= \left\langle \theta \middle| \widehat{h}^\dagger \widehat{h}\theta \right\rangle_{\widehat{\mathcal{D}(t)}} + \left\langle \theta \middle| \widehat{t}^\dagger \widehat{t}\theta \right\rangle_{\widehat{\mathcal{D}(t)}} = \left\|\widehat{h}\theta\right\|_{\mathcal{H}}^2 + \left\|\widehat{t}\theta\right\|_{\mathcal{G}}^2 \ ;$$

par l'unicité on obtient $\xi = \widehat{h}\theta$ et $\gamma = \widehat{t}\theta$. □

7.4 L'adjoint d'un opérateur

PROPOSITION *Soit $\gamma \in \mathcal{G}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe $\xi \in \mathcal{H}$ tel que l'on ait

$$\left(\widehat{t}\theta\middle|\,\gamma\right)_{\mathcal{G}} = \left(\widehat{h}\theta\middle|\,\xi\right)_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \theta \in \widehat{\mathcal{D}(t)} \ .$$

(ii) Il existe $\xi \in \mathcal{H}$ tel que l'on ait

$$(t\varphi|\,\gamma)_{\mathcal{G}} = (h\varphi|\,\xi)_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

(iii) La forme semi-linéaire

$$\varphi \longmapsto (t\varphi|\,\gamma)_{\mathcal{G}} : F \longrightarrow \mathbb{K}$$

est continue pour la topologie semi-normée définie par $\varphi \longmapsto \langle\varphi|\,h\varphi\rangle^{\frac{1}{2}} = \|h\varphi\|_{\mathcal{H}}$ sur F .

(iv) $t^{\dagger}\gamma \in \mathcal{H}$.

Dans ce cas on a $\xi = t^{\dagger}\gamma$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) En posant $\theta := h_t\varphi$ dans (i), il vient

$$(t\varphi|\,\gamma)_{\mathcal{G}} = \left(\widehat{t}h_t\varphi\middle|\,\gamma\right)_{\mathcal{G}} = \left(\widehat{h}h_t\varphi\middle|\,\xi\right)_{\mathcal{H}} = (h\varphi|\,\xi)_{\mathcal{H}} \ .$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Remarquons qu'il existe par (iii) une constante $c \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\left|\left\langle\varphi|\,t^{\dagger}\gamma\right\rangle_F\right| = \left|(t\varphi|\,\gamma)_{\mathcal{G}}\right| \leqslant c \cdot \langle\varphi|\,h\varphi\rangle^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour tout } \varphi \in F\,;$$

la proposition 5.3.ii montre alors que $t^{\dagger}\gamma \in \mathcal{H}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Pour tout $\varphi \in F$, on a

$$\left(\widehat{t}h_t\varphi\middle|\,\gamma\right)_{\mathcal{G}} = \left\langle\varphi|\,t^{\dagger}\gamma\right\rangle = \left(h\varphi|\,t^{\dagger}\gamma\right)_{\mathcal{H}} \ ,$$

d'où le résultat et la formule, puisque $h_t(F)$ est dense dans $\widehat{\mathcal{D}(t)}$. □

DEFINITION On désigne par t^* l'opérateur dans $\mathcal{G}$ à valeurs dans $\mathcal{H}$ défini sur

$$D(t^*) = \left(t^{\dagger}\right)^{-1}(\mathcal{H}) = \left\{\gamma \in \mathcal{G} \mid t^{\dagger}\gamma \in \mathcal{H}\right\}$$

par

$$t^*\gamma := t^{\dagger}\gamma \ .$$

On dit que t^* est l' *opérateur adjoint* de t . Pour éviter les confusions on dit que l'application adjointe

$$t^{\dagger} : \mathcal{G} \xrightarrow{\widehat{t}^{\dagger}} \mathcal{D}(t)^{\dagger} \hookrightarrow F^{\dagger}$$

est l' *adjoint formel* de t .

L'opérateur adjoint n'est pas nécessairement de domaine dense.

REMARQUE 1 Si $t \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$, la notion d'adjoint ainsi définie coïncide évidemment avec celle de 3.17.2 et on a $t^* = t^\dagger$, puisque nous identifions les semi-duals forts de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$.

REMARQUE 2 Mais attention ! Si T est un opérateur fermé non-borné dans $\mathcal{H}$, on a $T \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(T), \mathcal{G})$ et, en identifiant le semi-dual fort de $\mathcal{D}(T)$ avec $\mathcal{D}(T)$, l'opérateur adjointe $T^* : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ est évidemment différente de l'opérateur adjoint formel $T^\dagger : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{D}(T)^\dagger$, puisque dans ce cas nous n'avons pas identifié $\mathcal{D}(T)$ avec $\mathcal{D}(T)^\dagger_\beta$ et à la place considéré les injections canoniques

$$\mathcal{D}(T) \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{H} \overset{j^\dagger}{\hookrightarrow} \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta \ .$$

Ces deux applications adjointes sont liées par l'application de Riesz $Q : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta$:

$$T^\dagger = QT^* \ .$$

REMARQUE 3 Si T est un opérateur non-borné de domaine dense dans $\mathcal{H}$ on peut évidemment lui appliqué ce qui précède : l'adjoint formel est $T^\dagger : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta$ et on obtient un opérateur T^* dans $\mathcal{G}$ à valeurs dans $\mathcal{H}$ dont le domaine de définition est défini classiquement par

$$D(T^*) := \left\{ \gamma \in \mathcal{G} \;\middle|\; \exists\, \xi \in \mathcal{H} \text{ tel que } (T\theta|\,\gamma)_{\mathcal{G}} = (\theta|\,\xi)_{\mathcal{H}} \ \forall\, \theta \in D(T) \right\}$$

et

$$T^*\gamma := \xi \ .$$

L'élément ξ est univoquement déterminé puisque $D(T)$ est dense dans $\mathcal{H}$.

THEOREME

(i) t^* *est un opérateur fermé.*

(ii) *Le noyau de* $\mathcal{D}(t^*) \hookrightarrow \mathcal{G}$ *est* $\mathrm{Id}_{\mathcal{G}} - \widehat{t}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^\dagger$ *et on a*

$$\mathcal{G} = \mathcal{D}(t^*) + \widehat{t}\left(\widehat{\mathcal{D}(t)}\right) \quad , \quad \mathcal{H} = \widehat{h}\left(\widehat{\mathcal{D}(t)}\right) + t^*(\mathcal{D}(t^*))$$

et

$$t^*(\mathcal{D}(t^*)) = \mathcal{H} \cap t^\dagger(\mathcal{G}) \ .$$

(iii) *On a*

$$D(t^*)^{\perp \mathcal{G}} = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}} - \widehat{t}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^\dagger\right) = \widehat{t}\left(\mathrm{Ker}\,\widehat{h}\right) \ .$$

(iv) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) t *est fermable dans* $\mathcal{H}$ *de fermeture* T .

(b) *La semi-dualité* $\left\langle \widehat{\mathcal{D}(t)} \middle| \mathcal{D}(t)^\dagger \right\rangle$ *est bien plongeable.*

(c) $\mathcal{H}$ *ou* $h(F)$ *sont denses dans* $\mathcal{H} + t^\dagger(\mathcal{G})$.

(d) $\mathcal{H} \cap t^\dagger(\mathcal{G})$ *est dense dans* $t^\dagger(\mathcal{G})$.

(e) $D(t^*)$ *est dense dans* $\mathcal{G}$ *.*

Dans ce cas $\mathcal{D}(T)^\dagger_\beta = \mathcal{H} + t^\dagger(\mathcal{G})$ *et la semi-dualité* $\left\langle \mathcal{D}(T)\middle| \mathcal{H} + t^\dagger(\mathcal{G})\right\rangle$ *est bien plongée, en particulier, pour tout* $\varphi \in F$ *,* $\theta \in \mathcal{D}(T)$ *,* $\xi \in \mathcal{H}$ *et* $\mu \in \mathcal{H} + t^\dagger(\mathcal{G})$ *, on a*

$$\langle \varphi | \mu\rangle_F = \langle h\varphi | \mu\rangle_{\mathcal{D}(T)} \quad , \quad \langle \varphi | \theta\rangle_F = \langle h\varphi | \theta\rangle_{\mathcal{H}+t^\dagger(\mathcal{G})}$$

et

$$(\theta | \xi)_{\mathcal{H}} = \langle \theta | \xi\rangle_{\mathcal{D}(T)} \ .$$

En outre

$$Q := j^\dagger j + T^\dagger T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{H} + t^\dagger(\mathcal{G})$$

est l'application de Riesz.

Les noyaux de

$$\mathcal{D}(T) \hookrightarrow \mathcal{H} \quad , \quad \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta \hookrightarrow \mathcal{D}(T)^\dagger$$

et

$$\mathcal{D}(T^*) \hookrightarrow \mathcal{G}$$

sont respectivement

$$\overset{-1}{Q} j^\dagger : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{D}(T) \quad , \quad Q : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta$$

et

$$\mathrm{Id}_{\mathcal{G}} - T\overset{-1}{Q}T^\dagger : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \ .$$

Dmonstration de (i) Considérons une suite de Cauchy $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}(t^*)$, donc telle que $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(t^*\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soient des suites de Cauchy dans $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ respectivement. Si $\gamma := \lim_k \gamma_k \in \mathcal{G}$ et $\xi := \lim_k t^*\gamma_k \in \mathcal{H}$ et comme les applications

$$t^\dagger : \mathcal{G} \longrightarrow F^\dagger \quad \text{et} \quad \mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$$

sont continues, on a $t^\dagger\gamma = \lim_k t^\dagger\gamma_k$ et $\xi = \lim_k t^\dagger\gamma_k$ dans $F^\dagger$, donc $t^\dagger\gamma = \xi \in \mathcal{H}$. Ceci montre que $\gamma \in \mathcal{D}(t^*)$ et que $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}(t^*)$ vers γ .

Dmonstration de (ii) Le noyau de $\widehat{t}\left(\widehat{\mathcal{D}(t)}\right) \hookrightarrow \mathcal{G}$ est $\widehat{t}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^\dagger$ par le théorème 5.4 et l'exemple 5.2.4, où $Q : \widehat{\mathcal{D}(t)} \longrightarrow \mathcal{D}(t)^\dagger_\beta$ désigne l'application de Riesz. Il nous suffit donc de montrer que celui de $\mathcal{D}(t^*) \hookrightarrow \mathcal{G}$ est $\mathrm{Id}_{\mathcal{G}} - \widehat{t}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^\dagger$, donc que pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$ et $\vartheta \in D(t^*)$, on a

$$\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}} - \widehat{t}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^\dagger\right)\gamma \in \mathcal{D}(t^*)$$

et

$$(\gamma | \vartheta)_{\mathcal{G}} = \left(\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}} - \widehat{t}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^\dagger\right)\gamma \middle| \vartheta\right)_{\mathcal{D}(t^*)} \ .$$

Mais

$$\widehat{t}^\dagger\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}} - \widehat{t}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^\dagger\right) = Q\overset{-1}{Q}\widehat{t}^\dagger - \widehat{t}^\dagger\widehat{t}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^\dagger = \left(Q - \widehat{t}^\dagger\widehat{t}\right)\overset{-1}{Q}\widehat{t}^\dagger = \widehat{h}^\dagger\widehat{h}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^\dagger \qquad (*)$$

par la proposition 7.3.i ; on a donc

$$t^{\dagger}\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}}-\widehat{t}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}\right)\gamma=h_t^{\dagger}\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}=h^{\dagger}\widehat{h}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}\gamma\in\mathcal{H}\ ,$$

ce qui prouve l'appartenance. En outre

$$t^{*}\left(\gamma-\widehat{t}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}\gamma\right)=\widehat{h}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}\gamma\,;$$

on a alors

$$\left(\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}}-\widehat{t}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}\right)\gamma\middle|\,\vartheta\right)_{\mathcal{D}(t^*)}=\left(\gamma-\widehat{t}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}\gamma\middle|\,\vartheta\right)_{\mathcal{G}}+\left(\widehat{h}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}\gamma\middle|\,t^{*}\vartheta\right)_{\mathcal{H}}=$$

$$=\left(\gamma|\,\vartheta\right)_{\mathcal{G}}-\left\langle\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}\gamma\middle|\,\widehat{t}^{\dagger}\vartheta\right\rangle_{\widehat{\mathcal{D}(t)}}+\left\langle\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}\gamma\middle|\,\widehat{h}^{\dagger}t^{*}\vartheta\right\rangle_{\widehat{\mathcal{D}(t)}}=\left(\gamma|\,\vartheta\right)_{\mathcal{G}}\ .$$

Le noyau de $\widehat{h}\left(\widehat{\mathcal{D}(t)}\right)=\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}\left(\widehat{\mathcal{D}(t)}\right)\hookrightarrow\mathcal{D}(t)^{\dagger}$ est

$$\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}\overset{-1}{Q}\left(\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}\right)^{\dagger}=\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}\overset{-1}{Q}\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}$$

par le théorème 5.4 et l'exemple 5.2.4. Celui de $t^{*}\left(\mathcal{D}(t^{*})\right)=\widehat{t}^{\dagger}\left(\mathcal{D}(t^{*})\right)\hookrightarrow\mathcal{D}(t)^{\dagger}$ est

$$\widehat{t}^{\dagger}\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}}-\widehat{t}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}\right)\widehat{t}=\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}\widehat{t}$$

par la formule $(*)$. Les propositions 5.7 et 7.3 montrent donc que le noyau de

$$\widehat{h}\left(\widehat{\mathcal{D}(t)}\right)+t^{*}\left(\mathcal{D}(t^{*})\right)\hookrightarrow\mathcal{D}(t)^{\dagger}$$

est égal à celui de $\mathcal{H}\hookrightarrow\mathcal{D}(t)^{\dagger}$:

$$\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}\overset{-1}{Q}\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}+\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}\widehat{t}=\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}\overset{-1}{Q}\left(\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}+\widehat{t}^{\dagger}\widehat{t}\right)=\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}\overset{-1}{Q}Q=\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}\ .$$

Pour calculer le noyau de

$$\mathcal{H}\cap\widehat{t}^{\dagger}\left(\mathcal{G}\right)=\mathcal{H}\cap t^{\dagger}\left(\mathcal{G}\right)\hookrightarrow\mathcal{H}+t^{\dagger}\left(\mathcal{G}\right)=\mathcal{D}(t)^{\dagger}_{\beta}$$

(cf. proposition 7.3.i) nous allons utiliser la proposition 5.9, mais attention en considérant la semi-dualité $\left\langle\mathcal{D}(t)^{\dagger}_{\beta}\middle|\,\mathcal{D}(t)^{\dagger}_{\beta}\right\rangle$. Les noyaux de $\mathcal{H}$, $\widehat{t}^{\dagger}\left(\mathcal{G}\right)$ et $\mathcal{H}\cap\widehat{t}^{\dagger}\left(\mathcal{G}\right)$ sont alors respectivement $\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}\overset{-1}{Q}$, $\widehat{t}^{\dagger}\widehat{t}\overset{-1}{Q}$ et $\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}\widehat{t}\overset{-1}{Q}$, d'où le résultat.

Dmonstration de (iii) Le théorème 5.7.i montre que le noyau $\mathrm{Id}_{\mathcal{G}}-\widehat{t}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}$ de $\mathcal{D}(t^{*})\hookrightarrow\mathcal{G}$ est l'applications de Parseval $p_{\mathcal{D}(t^{*})}$ associée à la décomposition $\mathcal{G}=\mathcal{D}(t^{*})+\widehat{t}\left(\widehat{\mathcal{D}(t)}\right)$ et on a

$$D(t^{*})^{\perp\mathcal{G}}=\operatorname{Ker}p_{\mathcal{D}(t^{*})}=\operatorname{Ker}\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}}-\widehat{t}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}\right)\ .$$

Si $\gamma\in D(t^{*})^{\perp\mathcal{G}}$, on a $\gamma=\widehat{t}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}\gamma$, donc $(*)$ entraîne $\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}\gamma=0$, ce qui montre que $\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}\gamma\in\operatorname{Ker}\widehat{h}$ et par suite que

$$\gamma=\widehat{t}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}\gamma\in\widehat{t}\left(\operatorname{Ker}\widehat{h}\right)\ ,$$

i.e. $D(t^*)^{\perp\mathcal{G}} \subset \widehat{t}\left(\operatorname{Ker}\widehat{h}\right)$. Par adjonction de $(*)$ on obtient

$$\left(\operatorname{Id}_{\mathcal{G}} - \widehat{t}\overset{-1}{Q}\widehat{t}^{\dagger}\right)\widehat{t}\left(\operatorname{Ker}\widehat{h}\right) = \{0\} \ ,$$

ce qui prouve l'autre inclusion.

Dmonstration de (iv) L'équivalence de (a), (b) et (c) est une relecture du théorème 5.17 et de la remarque 5.17.1. Le théorème 5.7.i et la proposition 5.9 montrent en outre que l'on a les égalités

$$\left(\mathcal{H}\cap t^{\dagger}(\mathcal{G})\right)^{\perp t^{\dagger}(\mathcal{G})} = \operatorname{Ker} p_{\mathcal{D}(t^*)} = \mathcal{H}^{\perp\left(\mathcal{H}+t^{\dagger}(\mathcal{G})\right)} \ .$$

Plus précisément :

(a) ⇒ (b) L'application $h_t : F \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}(t)}$ continue d'image dense et, puisque $\widehat{h}$ est continue injective, il en est de même de $h^{\dagger}\widehat{h}$ et on a

$$h^{\dagger}h = h^{\dagger}\widehat{h}h_t \ ,$$

il suffit de conclure à l'aide du théorème 5.17, (iii) ⇒ (i).

(b) ⇒ (c) Le théorème 5.17, (i) ⇒ (ii) montre que $h(F)$ est dense dans $\mathcal{D}(t)^{\dagger}_{\beta} = \mathcal{H}+t^{\dagger}(\mathcal{G})$ (cf. proposition 7.3.i). Il en est donc de même de $\mathcal{H}$.

(c) ⇒ (d) Si $\mathcal{H}$ est dense dans $\mathcal{H}+t^{\dagger}(\mathcal{G})$, alors $\left(\mathcal{H}\cap t^{\dagger}(\mathcal{G})\right)^{\perp t^{\dagger}(\mathcal{G})} = \mathcal{H}^{\perp\left(\mathcal{H}+t^{\dagger}(\mathcal{G})\right)} = \{0\}$, donc $\mathcal{H}\cap t^{\dagger}(\mathcal{G})$ est dense dans $t^{\dagger}(\mathcal{G})$ (corollaire 1.4).

(d) ⇒ (e) Utilisant (ii) il vient

$$D(t^*)^{\perp\mathcal{G}} = \operatorname{Ker} p_{\mathcal{D}(t^*)} = \left(\mathcal{H}\cap t^{\dagger}(\mathcal{G})\right)^{\perp t^{\dagger}(\mathcal{G})} = \{0\} \ ,$$

ce qui montre que $D(t^*)$ est dense dans $\mathcal{G}$.

(e) ⇒ (a) Par définition du produit scalaire de $\mathcal{D}\left(\widehat{t}\right)$, on a $\operatorname{Ker}\widehat{h}\cap\operatorname{Ker}\widehat{t} = \{0\}$, donc $\widehat{t}$ est injective sur $\operatorname{Ker}\widehat{h}$, et par suite une bijection de $\operatorname{Ker}\widehat{h}$ sur $D(t^*)^{\perp\mathcal{G}}$. Si $D(t^*)^{\perp\mathcal{G}} = \{0\}$, on obtient évidemment $\operatorname{Ker}\widehat{h} = \{0\}$ et t est fermable.

Puisque nous identifions $\widehat{\mathcal{D}(t)}$ avec $\mathcal{D}(T)$, l'application de Riesz a été calculée dans la proposition précédente. Les formules de dualité ne sont qu'une réécriture de celles de la définition 5.17.2 et finalement, on obtient les noyaux des deux premiers sous-espaces hilbertiens en les utilisant :

Pour tout $\xi\in\mathcal{H}$, $\theta\in\mathcal{D}(T)$ et $\mu\in\mathcal{D}(T)^{\dagger}$, on a

$$(\xi|\,\theta)_{\mathcal{H}} = \left\langle j^{\dagger}\xi\middle|\,\theta\right\rangle_{\mathcal{D}(T)^{\dagger}} = \left(\overset{-1}{Q}j^{\dagger}\xi\middle|\,\theta\right)_{\mathcal{D}(T)} \ ,$$

et

$$\langle\theta|\,\mu\rangle_{\mathcal{D}(T)} = (Q\theta|\,\mu)_{\mathcal{D}(T)^{\dagger}_{\beta}} \ .$$

Celui de $\mathcal{D}(T^*) \hookrightarrow \mathcal{G}$ a été calculé en (ii). □

REMARQUE 4 Le résultat classique est généralement formulé de la manière suivante :

Si T est un opérateur dans $\mathcal{H}$ de domaine dense à valeurs dans $\mathcal{G}$, alors T est fermable dans $\mathcal{H}$ si, et seulement si, T^* est de domaine dense dans $\mathcal{G}$.

COROLLAIRE *Si t est fermable dans $\mathcal{H}$ de fermeture T , alors*

$$t^* = T^* \quad et \quad t^{**} = T \ ,$$

ainsi que

$$T^{***} = t^{***} = T^* = t^* \ .$$

En particulier

$$\mathcal{G} = \mathcal{D}(T^*) + T(\mathcal{D}(T)) \quad , \quad \mathcal{H} = \mathcal{D}(T) + T^*(\mathcal{D}(T^*))$$

et

$$T^*(\mathcal{D}(T^*)) = \mathcal{H} \cap T^\dagger(\mathcal{G}) \ .$$

et, pour tout $\theta \in D(T)$ et $\gamma \in D(T^*)$, on a

$$(T\theta|\,\gamma)_{\mathcal{G}} = (\theta|\,T^*\gamma)_{\mathcal{H}} \ .$$

On a évidemment $T^* = t^*$, car $T^\dagger = \widehat{t^\dagger}$ et $t^\dagger$ prennent les mêmes valeurs sur les mêmes éléments de $\mathcal{G}$. Comme $\mathcal{D}(t^*)$ est dense dans $\mathcal{G}$, on peut considérer t^{**} . On a alors

$$\mathcal{D}(T) + T^*(\mathcal{D}(T^*)) = \mathcal{H} = \mathcal{D}(t^{**}) + t^*(\mathcal{D}(t^*))$$

par (iii), ainsi que (i) appliqué à t^* . On en déduit $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(t^{**})$ par comparaison des noyaux. Pour tout $\theta \in \mathcal{D}(T)$ et $\gamma \in \mathcal{D}(T^*)$, il vient alors

$$(T\theta|\,\gamma)_{\mathcal{G}} = (\theta|\,t^*\theta)_{\mathcal{H}} = (t^{**}\theta|\,\gamma)_{\mathcal{G}} \ ,$$

donc $t^{**} = T$. On en déduit

$$T^{***} = (T^*)^{**} = (t^*)^{**} = t^{***} = (t^{**})^* = T^* = t^* \ .$$

Les dernières assertions découlent du théorème et de la proposition. □

La semi-dualité $\langle \mathcal{D}(G)|\,\mathcal{H} + \mathcal{G}\rangle$

Si $\mathcal{G}$ est un sous-espace hilbertien de $F^\dagger$ est-ce que $\mathcal{H} + \mathcal{G}$ est le semi-dual fort d'un sous-espace hilbertien ? Le sous-paragraphe "La semi-dualité $\langle \mathcal{H} \cap G_+|\,\mathcal{H} + G_-\rangle$ " semble donner un exemple dans cette direction !

COROLLAIRE *On suppose que $\mathcal{G}$ est un sous-espace hilbertien de $F^\dagger$ de noyau $g : F \longrightarrow \mathcal{G}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *g est fermable dans $\mathcal{H}$ de fermeture G .*

(ii) *La semi-dualité $\left\langle \widehat{\mathcal{D}(g)} \middle| \mathcal{D}(g)^\dagger_\beta \right\rangle$ est bien plongeable.*

(iii) *$\mathcal{H}$ est dense dans $\mathcal{H} + \mathcal{G}$.*

(iv) *$\mathcal{H} \cap \mathcal{G}$ est dense dans $\mathcal{G}$.*

Dans ce cas $\mathcal{D}(g)^\dagger_\beta = \mathcal{H} + \mathcal{G}$ et la semi-dualité $\langle \mathcal{D}(G)|\,\mathcal{H} + \mathcal{G}\rangle$ est bien plongée, en particulier, pour tout $\varphi \in F$, $\theta \in \mathcal{D}(G)$, $\xi \in \mathcal{H}$ et $\mu \in \mathcal{H} + \mathcal{G}$, on a

$$\langle \varphi|\,\mu\rangle_F = \langle h\varphi|\,\mu\rangle_{\mathcal{D}(G)} \quad , \quad \langle \varphi|\,\theta\rangle_F = \langle h\varphi|\,\theta\rangle_{\mathcal{H}+\mathcal{G}}$$

et

$$(\theta|\,\xi)_{\mathcal{H}} = \langle \theta|\,\xi\rangle_{\mathcal{D}(G)} \ .$$

En outre $\mathcal{D}(G^*) = \mathcal{H} \cap \mathcal{G}$, G^* est l'injection canonique de $\mathcal{H} \cap \mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$,

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} \cap \mathcal{G} + G(\mathcal{D}(G)) \quad , \quad \mathcal{H} = \mathcal{D}(G) + \mathcal{H} \cap \mathcal{G}$$

et

$$\mathrm{Id} + G^{\dagger}G : \mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathcal{H} + \mathcal{G}$$

est l'application de Riesz.

C'est immédiat en remarquant que $g^{\dagger}$ est l'injection canonique $\mathcal{G} \hookrightarrow F^{\dagger}$. $\square$

7.5 Opérations sur les opérateurs non-bornés

Dans cette section nous ne considérons que des opérateurs, mais dont le domaine de définition n'est pas nécessairement dense.

DEFINITION Si S et T sont des opérateurs dans $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{G}$, on définit l'opérateur *somme* $S+T$ par

$$S+T : D(S+T) := D(S) \cap D(T) \longrightarrow \mathcal{G} : \xi \longmapsto S\xi + T\xi \ .$$

Si S est un opérateur dans $\mathcal{G}$ à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathcal{K}$, l'opérateur *produit* ST est définit par

$$ST : D(ST) := \overset{-1}{T}(D(S)) \longrightarrow \mathcal{K} : \xi \longmapsto S(T\xi) \ .$$

Si T est injectif, on définit l'opérateur *inverse* $\overset{-1}{T}$ dans $\mathcal{G}$ à valeurs dans $\mathcal{H}$ par

$$\overset{-1}{T} : D\left(\overset{-1}{T}\right) := T(D(T)) \longrightarrow \mathcal{H} : T\xi \longmapsto \xi \ .$$

Mais attention, on dit que T est *inversible* , si T est une bijection de $D(T)$ sur $\mathcal{G}$ et $\overset{-1}{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{G},\mathcal{H})$.

THEOREME *Soient T un opérateur dans $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{G}$ et S,U des opérateurs entre espaces de Hilbert tels que les formules qui suivent aient un sens.*

(i) *On a*

$$S+T = T+S \quad , \quad (S+T)+U = S+(T+U)$$

et

$$(ST)U = S(TU) \quad , \quad (S+T)U = SU+TU \ ,$$

mais seulement

$$S(T+U) \supset ST+SU \ .$$

(ii) *Si S est borné, alors*

$$S(T+U) = ST+SU \ .$$

(iii) *Si S est borné et T fermé, alors $S+T$ et TS sont fermés.*

(iv) *Si T est injectif et fermé, alors $\overset{-1}{T}$ est injectif et fermé et*

$$\mathcal{D}\left(\overset{-1}{T}\right) = T(\mathcal{D}(T)) \ .$$

Nous supposons maintenant que S et T sont de domaine dense.

(v) *Si $S \subset T$, alors $T^* \subset S^*$.*

(vi) *Si* $S+T$ *est de domaine dense, alors* $(S+T)^* \supset S^*+T^*$. *Si* S *est borné, alors* $(S+T)^* = S^*+T^*$.

(vii) *Si* ST *est de domaine dense, alors* $(ST)^* \supset T^*S^*$. *Si* S *est borné, alors* $(ST)^* = T^*S^*$.

(viii) *On a*

$$\operatorname{Im} T^{\perp} = \operatorname{Ker} T^* \ .$$

(ix) *Si* T *est fermé, injectif et d'image dense, alors il en est de même de* $\overset{-1}{T}$ *et* T^* *et on a*

$$\mathcal{D}\left(\left[\overset{-1}{T}\right]^*\right) = T^*\left(\mathcal{D}\left(T^*\right)\right) \quad \text{et} \quad \left[T^*\right]^{-1} = \left[\overset{-1}{T}\right]^* \ .$$

Dmonstration de (i) Les formules ponctuelles sont triviales du moment qu'elles ont un sens. Le seul problème est celui des domaines de définition, ce qu'il n'est pas difficile de vérifier.

Dmonstration de (ii) Idem.

Dmonstration de (iii) Il suffit d'utiliser le théorème 7.1.ii. Soit $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(S+T) = D(T)$ telle que $\xi := \lim_k \xi_k$ et $\gamma := \lim_k (S+T)\xi_k$ existent. On en déduit $S\xi = \lim_k S\xi_k$, puisque S est continu, puis que la suite $(T\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et que

$$\gamma - S\xi = \lim_k (S+T)\xi_k - \lim_k S\xi_k = \lim_k T\xi_k \ .$$

Ceci montre que $\xi \in D(T)$ et $T\xi = \gamma - S\xi$, puisque T est fermé, donc

$$\xi \in D(S+T) \quad \text{et} \quad \psi = (S+T)\xi \ ,$$

i.e. $S+T$ est fermé.

Si maintenant $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(TS)$ est telle que $\xi := \lim_k \xi_k$ et $\gamma := \lim_k TS\xi_k$ existent, on a $S\xi = \lim_k S\xi_k$, puisque S est continu. Mais comme $(S\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ et que T est fermé, on obtient $S\xi \in D(T)$ et

$$TS\xi = \lim_k TS\xi_k = \gamma \ ,$$

ce qui prouve que TS est fermé.

Dmonstration de (iv) C'est immédiat, puisque

$$\operatorname{Gr} \overset{-1}{T} = \%(\operatorname{Gr} T)$$

et

$$\% : \mathcal{H} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \times \mathcal{H} : (\xi,\gamma) \longmapsto (\gamma,\xi)$$

est unitaire.

Dmonstration de (v) Cela découle de la proposition 7.4.

Dmonstration de (vi) Pour la première partie, il suffit d'utiliser la proposition 7.4. Si $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{G})$, on a $T+S = T+S_{|\mathcal{D}(T)}$, donc $(T+S)^\dagger = T^\dagger + \left(S_{|\mathcal{D}(T)}\right)^\dagger$, d'où le résultat, puisque $\overline{S_{|\mathcal{D}(T)}} = S$, $\left(S_{|\mathcal{D}(T)}\right)^* = \left(\overline{S_{|\mathcal{D}(T)}}\right)^* = S^*$ et $D(S^*) = \mathcal{G}$.

Dmonstration de (vii) Pour la première partie, il suffit d'utiliser la proposition 7.4. Si $S \in \mathcal{L}(\mathcal{G},\mathcal{K})$, on a $(ST)^\dagger = T^\dagger S^*$, donc pour tout $\varkappa \in \mathcal{K}$, on a $\varkappa \in D([ST]^*)$ si, et seulement si, $T^\dagger S^*\varkappa \in \mathcal{H}$, i.e. si $S^*\varkappa \in D(T^*)$; mais ceci signifie que $\varkappa \in D(T^*S^*)$.

Dmonstration de (viii) C'est immédiat, puisque $\gamma \in (\operatorname{Im} T)^{\perp}$ si, et seulement si, pour tout $\varphi \in F$, on a

$$0 = (T\varphi|\,\gamma)_{\mathcal{G}} = \left\langle \varphi|\, T^{\dagger}\gamma \right\rangle \ ,$$

i.e. $T^{\dagger}\gamma = 0$, ce qui signifie que $\gamma \in D(T^*)$ et $T^*\gamma = 0$.

Dmonstration de (ix) Rappelons que T est de domaine dense, et d'image dense, donc aussi $\overset{-1}{T}$ et cet opérateur est fermé par (iv). Pour tout $\gamma \in T(\mathcal{D}(T))$, on a

$$\|\gamma\|^2_{T(\mathcal{D}(T))} = \left\|\overset{-1}{T}\gamma\right\|^2_{\mathcal{D}(T)} = \left\|\overset{-1}{T}\gamma\right\|^2_{\mathcal{H}} + \|\gamma\|^2_{\mathcal{G}} = \|\gamma\|^2_{\mathcal{D}\left(\overset{-1}{T}\right)} \ ,$$

d'où la première formule. L'adjoint T^* est injectif et d'image dense par (viii) appliqué à T et T^* . Puisque le théorème 7.6.iii appliqué à $T = \overline{T}$ et $\left(\overset{-1}{T}\right)^*$ entraîne

$$\mathcal{D}(T) + T^*(\mathcal{D}(T^*)) = \mathcal{H} = \mathcal{D}\left(\left[\overset{-1}{T}\right]^*\right) + \overset{-1}{T}\left(\mathcal{D}\left(\overset{-1}{T}\right)\right) =$$

$$= \mathcal{D}\left(\left[\overset{-1}{T}\right]^*\right) + \overset{-1}{T}(T(\mathcal{D}(T))) = \mathcal{D}\left(\left[\overset{-1}{T}\right]^*\right) + \mathcal{D}(T) \ ,$$

par comparaison des noyaux on obtient

$$\mathcal{D}\left(\left[\overset{-1}{T}\right]^*\right) = T^*(\mathcal{D}(T^*)) = \mathcal{D}\left([T^*]^{-1}\right) \ .$$

Pour tout $\gamma \in \mathcal{D}\left(\overset{-1}{T}\right)$ et $\vartheta \in \mathcal{D}(T^*)$, on a $T^*\vartheta \in \mathcal{D}\left(\left[\overset{-1}{T}\right]^*\right)$, donc

$$(\gamma|\,\vartheta)_{\mathcal{G}} = \left(T\overset{-1}{T}\gamma\middle|\,\vartheta\right)_{\mathcal{G}} = \left(\overset{-1}{T}\gamma\middle|\,T^*\vartheta\right)_{\mathcal{H}} = \left(\gamma\middle|\,\left[\overset{-1}{T}\right]^* T^*\vartheta\right)_{\mathcal{G}} \ ;$$

ainsi $\left[\overset{-1}{T}\right]^* T^* = \mathrm{Id}$ sur $\mathcal{D}(T^*)$, ce qui finit de prouver la seconde formule. □

REMARQUE 1 Même si S et T sont des opérateurs fermés de domaine dense, il se peut que $S+T$ et ST ne le soient pas. On peut par exemple avoir $D(T^2) = \{0\}$, où T est un opérateur fermé symétrique (cf. remarque 7.6.2) de domaine dense. Dans ce cas on a

$$D(T(T-T)) = D(T) \quad \text{et} \quad D\left(T^2 - T^2\right) = D\left(T^2\right) = \{0\} \ ,$$

ce qui montre quer l'inclusion $S(T+U) \supset ST + SU$ peut être stricte. De même

$$D((T-T)^*) = \mathcal{H} \quad \text{et} \quad D(T^* - T^*) = D(T^*)$$

et si T est un opérateur borné tel que $\operatorname{Im} T \subset D(S)$, alors

$$D((ST)^*) = \mathcal{H} \quad \text{et} \quad D(T^*S^*) = D(S^*) \ .$$

PROPOSITION *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est inversible.*

(ii) *Il existe $S \in \mathcal{L}(\mathcal{G},\mathcal{H})$ tel que $ST \subset \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ et $TS = \mathrm{Id}_{\mathcal{G}}$.*

(iii) *T est fermé et T est une bijection de $D(T)$ sur $\mathcal{G}$.*

Dans ce cas $\overset{-1}{T} = S$.

Il est immédiat que (i) entraîne (ii). Si (ii) est satisfait, la bijectivité de T est immédiate et on a $\overset{-1}{T} = S \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, donc T est fermé par la remarque 3.14.1 et (iv) de la proposition ci-dessus. La dernière implication découle du scolie 7.1, puisque $\overset{-1}{T}$ est fermé à nouveau par (iv) et partout défini. $\square$

7.6 Opérateurs formellement normaux

Nous considérerons à nouveau
une application linéaire continue $T : F \longrightarrow \mathcal{G}$,
en plus
un espace localement convexe séparé E
et
un sous-espace hilbertien $\mathcal{G} \hookrightarrow E^{\dagger}$ de noyau $g : E \longrightarrow \mathcal{G}$.

DEFINITION 1 Nous dirons que T est *adjoignable* (par rapport à $G \hookrightarrow E^{\dagger}$ *)* s'il existe une application linéaire continue $T^{\bullet} : E \longrightarrow \mathcal{H}$ telle que l'on ait

$$h^{\dagger}T^{\bullet} = T^{\dagger}g \ . \tag{$*$}$$

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{G} & \xrightarrow{T^{\dagger}} & F^{\dagger} & \\ g & \uparrow & & \uparrow & h^{\dagger} \\ & E & \xrightarrow{T^{\bullet}} & \mathcal{H} & \end{array}$$

Il est clair, puisque $h^{\dagger}$ est injective, que $T^{\bullet}$ est univoquement déterminée.

REMARQUE 1 L'existence de l'application linéaire $T^{\bullet}$ est équivalente à l'inclusion

$$T^{\dagger}g\,(E) \subset \mathcal{H} \ .$$

Il reste à vérifier la continuité de $T^{\bullet}$. Mais comme $h^{\dagger}T^{\bullet} = T^{\dagger}g : E \longrightarrow F^{\dagger}$ est continue, le graphe de $T^{\bullet}$ est fermé dans $E \times \mathcal{H}$. L'application linéaire $T^{\bullet}$ est donc automatiquement continue par le théorème de Ptak 3.14.i si E est tonnelé.

THEOREME *Si T est adjoignable, alors $T^{\bullet}$ l'est aussi et $(T^{\bullet})^{\bullet} = T$. Les applications linéaires T et $T^{\bullet}$ sont fermables et on a*

$$\overline{T} \subset (T^{\bullet})^{*} \quad \textit{et} \quad \overline{T^{\bullet}} \subset T^{*} \ .$$

La première partie est évidente puisque $(*)$ entraîne

$$(T^{\bullet})^{\dagger}\, h = g^{\dagger}T \ . \tag{$**$}$$

D'autre part $T^{\dagger}g\,(E) = h^{\dagger}T^{\bullet}\,(E) \subset \mathcal{H}$, donc $g\,(E) \subset \mathcal{D}\,(T^{*})$, ce qui montre que $\mathcal{D}\,(T^{*})$ est dense dans $\mathcal{G}$, et par suite que T est fermable par le théoreme 7.4.ii. La formule $(**)$ montre alors que $\overline{T} \subset (T^{\bullet})^{*}$. □

DEFINITION 2 Si T est à valeurs dans $\mathcal{H}$, on dit que T est *formellement auto-adjointe* si

$$h^{\dagger}T = T^{\dagger}h \ ,$$

i.e. T est adjoignable (par rapport à $\mathcal{H} \hookrightarrow F^{\dagger}$) et $T = T^{\bullet}$.

REMARQUE 2 Pour qu'un opérateur T dans $\mathcal{H}$ soit formellement auto-adjoint, il faut et il suffit que l'on ait $T \subset T^*$, ou bien

$$(T\xi|\,\eta) = (\xi|\,T\eta) \quad \text{pour tout } \xi, \eta \in D(T) \ .$$

C'est la définition classique et on dit que T est *symétrique* .

COROLLAIRE *Si T est formellement auto-adjointe et S est un prolongement symétrique fermé de $\overline{T}$, alors*

$$\overline{T} = T^{**} \subset S \subset S^* \subset T^* = T^{***} = \overline{T}^* \ .$$

D'autre part $\mathcal{D}\left(\overline{T}\right) \sqsubset \mathcal{D}(T^*)$ et

$$\mathcal{H} = \mathcal{D}\left(\overline{T}\right) + T^*\left(\mathcal{D}(T^*)\right) = \mathcal{D}(T^*) + \overline{T}\left(\mathcal{D}\left(\overline{T}\right)\right) \ .$$

C'est immédiat par le théorème 7.4. D'autre part $\overline{T} \subset T^*$ entraîne l'égalité des produits scalaires sur $\mathcal{D}\left(\overline{T}\right)$. □

L'un des problèmes fondamentaux de la théorie des opérateurs symétriques est de déterminer tous les prolongements S de T , qui sont auto-adjoints, i.e. tels que $S = S^*$, s'il en existe !

Plus généralement nous poserons la

DEFINITION 3 Si T est à valeurs dans $\mathcal{H}$, nous dirons que T est *formellement normale* si T est adjoignable par rapport à $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ et

$$T^\dagger T = T^{\bullet\dagger} T^\bullet \ .$$

PROPOSITION *Supposons que T soit adjoignable par rapport à $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$. Pour que T soit formellement normale, il faut et il suffit que*

$$\mathcal{D}\left(\overline{T}\right) \sqsubset \mathcal{D}(T^*) \ .$$

Pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a

$$\left\langle \varphi \middle|\, T^\dagger T \psi \right\rangle = (T\varphi|\,T\psi) = \left(\overline{T}h\varphi \middle|\, \overline{T}h\psi\right)$$

et

$$\left\langle \varphi \middle|\, T^{\bullet\dagger} T^\bullet \psi \right\rangle = (T^\bullet\varphi|\,T^\bullet\psi) = (T^*h\varphi|\,T^*h\psi) \ ,$$

puisque $T^\bullet\varphi = T^\dagger h\varphi = T^* h\varphi$. Ainsi T est formellement normale si, et seulement si,

$$(h\varphi|\,h\psi)_{\mathcal{D}\left(\overline{T}\right)} = (h\varphi|\,h\psi)_{\mathcal{D}(T^*)} \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in F \ ,$$

d'où notre assertion. □

7.7 Opérateurs normaux

DEFINITION Si T est à valeurs dans $\mathcal{H}$, nous dirons que T est *essentiellement normale* , respectivement *essentiellement auto-adjointe* , si $\mathcal{D}\left(\overline{T}\right) = \mathcal{D}\left(T^*\right)$, respectivement $\overline{T} = T^*$. Lorsque T est un opérateur fermé dans $\mathcal{H}$, on dit que T est *normal* , respectivement *auto-adjoint* .

Un opérateur auto-adjoint T est dit *(autoadjoint) positif* , si $(\xi|\, T\xi) \geqslant 0$ pour tout $\xi \in \mathcal{D}(T)$.

Il est clair que T est essentiellement auto-adjointe si, et seulement si, T est essentiellement normale et formellement auto-adjointe.

LEMME *Soit T un opérateur fermé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) T *est normal, i.e.* $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$.

(ii) $D(T) = D(T^*)$ *et* $\|T\varphi\| = \|T^*\varphi\|$ *pour tout* $\varphi \in D(T)$.

(iii) $T(\mathcal{D}(T)) = T^*(\mathcal{D}(T^*))$.

(iv) $\mathcal{H} = \mathcal{D}(T) + T(\mathcal{D}(T))$.

L'assertion (ii) n'est qu'une reformulation de (i). Le reste découle immédiatement du théorème 7.4, puisqu'on a la formule

$$\mathcal{D}(T) + T^*(\mathcal{D}(T^*)) = \mathcal{H} = \mathcal{D}(T^*) + T(\mathcal{D}(T)) \ .$$

□

PROPOSITION

(i) Un opérateur normal ne possède pas d'extension normale stricte.

(ii) Si T est injectif, d'image dense et normal, respectivement auto-adjoint, alors $\overset{-1}{T}$ est normal, respectivement auto-adjoint.

(iii) Si T est auto-adjoint et S est un opérateur borné auto-adjoint, alors $T+S$ est auto-adjoint.

Dmonstration de (i) Si S et T sont des opérateurs normaux tels que $S \subset T$, alors $T^* \subset S^*$ par la théorème 7.5.v. On a alors

$$D(S) \subset D(T) = D(T^*) \subset D(S^*) = D(S) \ ,$$

donc $S = T$.

Dmonstration de (ii) A l'aide du théorème 7.5, (iv) et (ix), et de la proposition ci-dessus, on a

$$\mathcal{D}\left(\overset{-1}{T}\right) = T(\mathcal{D}(T)) = T^*(\mathcal{D}(T^*)) = \mathcal{D}\left([T^*]^{-1}\right) = \mathcal{D}([\overset{-1}{T}]^*))$$

si T est normal. Si T est auto-adjoint, alors T est symétrique, donc aussi $\overset{-1}{T}$ (cf. remarque 7.3.2), ce qui montre que $\overset{-1}{T}$ est auto-adjoint.

Dmonstration de (iii) C'est immédiate à l'aide de la théorème 7.5.vi. □

THEOREME *On suppose que T est formellement normale.*

(i) On a

$$\operatorname{Ker}\left(\operatorname{Id} + T^{\bullet\dagger}T^*\right) = D\left(\overline{T}\right)^{\perp\mathcal{D}(T^*)} .$$

(ii) Pour que T soit essentiellement normale, il faut et il suffit que

$$\operatorname{Id} + T^{\bullet\dagger}T^* : \mathcal{D}(T^*) \longrightarrow F^\dagger$$

soit injective.

Dmonstration de (i) Il suffit de constater que $\vartheta \in D\left(\overline{T}\right)^{\perp\mathcal{D}(T^*)}$ est caractérisé par

$$0 = (h\varphi|\,\vartheta)_{T^*} = (h\varphi|\,\vartheta) + (T^*h\varphi|\,T^*\vartheta) = (h\varphi|\,\vartheta) + (T^\bullet h\varphi|\,T^*\vartheta) =$$

$$= \left\langle \varphi\right|\left(\operatorname{Id} + T^{\bullet\dagger}T^*\right)\vartheta\rangle$$

pour tout $\varphi \in F$, i.e. $\vartheta \in \operatorname{Ker}\left(\operatorname{Id} + T^{\bullet\dagger}T^*\right)$.

Dmonstration de (ii) C'est immédiat par la proposition 7.6 et (i). □

COROLLAIRE *On suppose que T est formellement auto-adjointe. Pour que T soit essentiellement auto-adjointe, il faut et il suffit que*

$$T^* \pm i\cdot\operatorname{Id} : \mathcal{D}(T^*) \longrightarrow \mathcal{H}$$

soient injectives, i.e. $\operatorname{Im}(T \pm i\cdot\operatorname{Id})$ *dense dans* $\mathcal{H}$.

On a toujours

$$\operatorname{Ker} T^* = \operatorname{Ker} T^\dagger ,$$

car si $\xi \in \mathcal{H}$ et $T^\dagger\xi = 0$, on a évidemment $\xi \in D(T^*)$. Il vient alors

$$\operatorname{Ker}\left(T^\dagger \pm i\cdot\operatorname{Id}\right) = \operatorname{Ker}(T \mp i\cdot\operatorname{Id})^\dagger = \operatorname{Ker}(T \mp i\cdot\operatorname{Id})^* = \operatorname{Ker}(T^* \pm i\cdot\operatorname{Id}) .$$

Puisque T est formellement auto-adjoint, i.e. $T^\bullet = T$, on a

$$T^{\bullet\dagger} = T^\dagger = T^* \quad \text{sur } \mathcal{D}(^*) ,$$

donc

$$\left(T^\dagger \mp i\cdot\operatorname{Id}\right)(T^* \pm i\cdot\operatorname{Id}) = T^\dagger T^* \pm i\cdot T^\dagger \mp i\cdot T^* + \operatorname{Id} = T^{\bullet\dagger}T^* + \operatorname{Id} \quad \text{sur } \mathcal{D}(T^*) .$$

On en déduit immédiatement le corollaire. □

EXEMPLE (Les opérateurs de multiplication)

Si μ est une intégrale de Radon sur un espace topologique séparé et α est une fonction μ-mesurable, on définit l'opérateur de multiplication M_α par α dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ sur

$$D(\alpha) := \left\{\xi \in \mathbf{L}^2(\mu) \;\middle|\; \alpha\cdot\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)\right\}$$

par

$$\xi \longmapsto \alpha\cdot\xi .$$

Nous étudirons ces opérateurs sous une forme encore plus générale dans le chapitre 8. Nous verrons en particulier que ce sont des opérateurs normaux.

EXERCICE Trouver un exemple montrant que l'assertion (iii) de la proposition est fausse pour les opérateurs normaux sans hypothèses supplémentaires.

7.8 L'algèbre stellaire associée à un opérateur fermé

Soient T un opérateur fermé de domaine dense dans $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{G}$ et Q l'application de Riesz de $\mathcal{D}(T)$ sur $\mathcal{D}(T)^{\dagger}_{\beta}$. On considère les opérateurs

$$A := \overset{-1}{Q}_{|\mathcal{H}} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{D}(T) \hookrightarrow \mathcal{H}$$

et

$$B := T\overset{-1}{Q}_{|\mathcal{H}} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{G} \ .$$

THEOREME

(i) A est le noyau de $\mathcal{D}(T) \hookrightarrow \mathcal{H}$ et c'est un opérateur auto-adjoint positif de norme $\leqslant 1$. L'opérateur B est aussi de norme $\leqslant 1$.

(ii) On a

$$Q = \mathrm{Id} + T^{\dagger}T \quad , \quad A = (\mathrm{Id} + T^{*}T)^{-1} \quad , \quad B = T(\mathrm{Id} + T^{*}T)^{-1} \ ,$$

et

$$\mathcal{D}(T) = A(\mathcal{H}) + B(\mathcal{H}) \quad , \textit{ i.e. } \quad A^2 + B^{*}B = A \ .$$

(iii) Les sous-espaces hilbertiens $\mathcal{D}(T^{*}T)$ et $A(\mathcal{H})$ sont équivalents et denses dans $\mathcal{D}(T)$ et

$$T = \overline{BA^{-1}} \ .$$

(iv) L'opérateur $T^{*}T$ est de domaine dense et auto-adjoint positif.

(v) Si T est à valeurs dans $\mathcal{H}$, alors T est normal si, et seulement si, $T^{*}T = TT^{*}$.

Dmonstration de (i) La première assertion découle du théorème 7.3. Puisque

$$\mathcal{H} = \mathcal{D}(T) + T^{*}(\mathcal{D}(T^{*}))$$

par le théorème 7.4.iii, il suffit d'appliquer le théorème 5.7, i et ii, pour obtenir les autres assertions.

Dmonstration de (ii) La première formule découle aussi du théorème 7.3. En outre

$$D(T^{*}T) = \{\xi \in \mathcal{D}(T) \mid T\xi \in D(T^{*})\} = \left\{\xi \in \mathcal{D}(T) \;\middle|\; T^{\dagger}T\xi \in \mathcal{H}\right\} = \overset{-1}{Q}(\mathcal{H}) = A(\mathcal{H}) \ ,$$

ce qui montre que $A = (\mathrm{Id} + T^{*}T)^{-1}$. La troisième formule en découle. Pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, on a alors

$$\left(\xi \middle| \left(A^2 + B^{*}B\right)\eta\right)_{\mathcal{H}} = (A\xi | A\eta)_{\mathcal{H}} + (B\xi | B\eta)_{\mathcal{G}} = (A\xi | A\eta)_{\mathcal{H}} + (TA\xi | TA\eta)_{\mathcal{G}} =$$

$$= (A\xi | A\eta)_{\mathcal{H}} + (T^{*}TA\xi | A\eta)_{\mathcal{H}} = ((\mathrm{Id} + T^{*}T)A\xi | A\eta)_{\mathcal{H}} = (\xi | A\eta)_{\mathcal{H}} \ ,$$

ce qui prouve la quatrième formule en utilisant le théorème de l'image 5.4 et la proposition 5.7.

Dmonstration de (iii) L'exemple 5.11.2 montre, puisque $A(\mathcal{H}) = D(T^{*}T)$, que les sous-espaces hilbertiens $A(\mathcal{H})$ et $\mathcal{D}(T^{*}T)$ sont équivalents. Comme A est le noyau de $\mathcal{D}(T) \hookrightarrow$

$\mathcal{H}$, le sous-espace vectoriel $A(\mathcal{H})$ est dense dans $\mathcal{D}(T)$ par la proposition 5.3.i ; la formule $T = \overline{BA^{-1}}$ en découle par la proposition 7.2.ii.

Dmonstration de (iv) Comme l'opérateur A est auto-adjoint, la proposition 7.7 montre que T^*T est aussi auto-adjoint. Il est évidemment positif.

Dmonstration de (v) Si T est à valeurs dans $\mathcal{H}$, il est clair que T est normal si, et seulement si, les noyaux $(\mathrm{Id} + T^*T)^{-1}$ et $(\mathrm{Id} + TT^*)^{-1}$ sont égaux, ce qui est évidemment équivalent à $T^*T = TT^*$. □

REMARQUE 1 Le fait que $(\mathrm{Id} + T^*T)^{-1}$ est le noyau de $\mathcal{D}(T) \hookrightarrow \mathcal{H}$ se démontre directement de la manière suivante :

Pour tout $\theta \in \mathcal{D}(T)$ et $\xi \in \mathcal{H}$, on a

$$(\xi|\theta)_{\mathcal{H}} = (h\xi|\theta)_{\mathcal{D}(T)} = (h\xi|\theta)_{\mathcal{H}} + (Th\xi|T\theta)_{\mathcal{H}}$$

et

$$\theta \longmapsto (Th\xi|T\theta)_{\mathcal{H}} = (\xi|\theta)_{\mathcal{H}} - (h\xi|\theta)_{\mathcal{H}}$$

est évidemment continue, donc $Th\xi \in D(T^*)$, i.e. $h\xi \in D(\mathrm{Id} + T^*T)$ et

$$(\xi|\theta)_{\mathcal{H}} = \Big((\mathrm{Id} + T^*T)\, h\xi \Big| \theta \Big)_{\mathcal{H}} .$$

Puisque $D(T)$ est dense dans $\mathcal{H}$, on a $\xi = (\mathrm{Id} + T^*T)\, h\xi$. Réciproquement si $\eta \in D(\mathrm{Id} + T^*T)$ est solution de $\xi = (\mathrm{Id} + T^*T)\,\eta$, on obtient $(\xi|\theta)_{\mathcal{H}} = (\eta|\theta)_{\mathcal{D}(T)}$, donc $\eta \in h\xi$. Ceci finit de montrer que $\mathrm{Id} + T^*T$ est inversible et que $h = (\mathrm{Id} + T^*T)^{-1}$. □

DEFINITION Si T est un opérateur fermé dans $\mathcal{H}$, on désigne par $\mathcal{A}(T) = \mathcal{A}(A, B)$ la sous-algèbre stellaire unifère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ engendrée par A et B . On dit que c'est l' *algèbre stellaire* de T .

$\mathcal{A}(T)$ est la sous-algèbre unifère fermée engendrée par A , B et B^* .

COROLLAIRE *Si T est normal, alors A , B et B^* commutent deux à deux, i.e. $\mathcal{A}(T)$ est commutative.*

En particulier B est normal. Si T est autoadjoint, il en est de même de B.

On a $T(\mathrm{Id} + T^*T) \supset T + TT^*T = (\mathrm{Id} + TT^*)\, T$ par le théorème 7.5.i, donc l'égalité puisque ces opérateurs ont même domaine. Comme $A = (\mathrm{Id} + T^*T)^{-1}$ par (ii) , le lemme 7.7 montre que

$$AT = AT(\mathrm{Id} + T^*T)\, A = A(\mathrm{Id} + TT^*)\, TA = A(\mathrm{Id} + T^*T)\, TA \subset TA ,$$

en ayant utilisé (v). On prouve de la même manière que $AT^* \subset T^*A$. Sachant que A est autoadjoint par (i), la proposition 7.5, vii et v, montre que

$$T^*A = T^*A^* = (AT)^* \supset (TA)^* = B^* ,$$

donc que $B^* = T^*A$ puisque B^* est partout défini. Finalement on a les formules

$$B^*B = T^*ATA \subset T^*TA^2 ,$$

$$BB^* = TAT^*A \subset TT^*A^2 = T^*TA^2 ,$$

$$AB = ATA \subset TA^2 = BA$$

et

$$AB^* = AT^*A \subset T^*A^2 = B^*A \ .$$

Ces opérateurs étant partout définis, on a les égalités, ce qui finit de prouver que $\mathcal{A}(T)$ est commutative. Finalement si T est autoadjoint, alors

$$B^* = T^*A = TA = B \ .$$

□

REMARQUE 2 Le théorème spectral 8.4 montrera que la réciproque est vraie. La démonstration directe n'est pas difficile (exercice).

REMARQUE 3 Classiquement on définit un opérateur normal par la condition (v) du théorème.

7.9 Opérateurs différentiels

Dans ce numéro X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soit

$$L : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(X) : \varphi \longmapsto \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \cdot \partial^\alpha \varphi ,$$

un *opérateur différentiel* à coefficients $c_\alpha \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{loc}}(X)$. C'est une application linéaire continue.

En effet pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $c \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{loc}}(X)$ les applications

$$\partial^\alpha : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X) : \varphi \longmapsto \partial^\alpha \varphi$$

et

$$M_c : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(X) : \psi \longmapsto c \cdot \psi$$

sont continues. La première assertion a été démontrée en 4.4 ; la seconde est immédiate, puisque pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$ et $\psi \in \mathcal{D}(X, K)$, on a

$$\|c \cdot \psi\|_2 \leqslant \|c\|_{\infty,K} \cdot \lambda(K) \cdot \|\psi\|_\infty = \|c\|_{\infty,K} \cdot \lambda(K) \cdot p_{K,0}(\psi) .$$

L'adjoint formel $L^\dagger$ est alors donné par

$$\left\langle \varphi \middle| L^\dagger \xi \right\rangle = (L\varphi | \xi) = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \cdot \partial^\alpha \varphi \middle| \xi \right) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int \overline{c_\alpha \cdot \partial^\alpha \varphi} \cdot \xi \, d\lambda_X =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leqslant m} \langle \partial^\alpha \varphi | \overline{c_\alpha} \cdot \xi \rangle = \left\langle \varphi \middle| \sum_{|\alpha| \leqslant m} \partial^\alpha (\overline{c_\alpha} \cdot \xi) \right\rangle ,$$

i.e.

$$L^\dagger : \mathbf{L}^2(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X)' : \xi \longmapsto \sum_{|\alpha| \leqslant m} \partial^\alpha (\overline{c_\alpha} \cdot \xi) .$$

PROPOSITION *Si, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, on a $L^\dagger \varphi \in \mathbf{L}^2(X)$, alors L est fermable.*

Puisque $\mathcal{D}(X)$ est tonnelé, cela découle, grâce à la remarque 7.6.1, du théorème 7.6 avec $F = E = \mathcal{D}(X)$ et $\mathcal{H} = \mathcal{G} = \mathbf{L}^2(X)$. Mais remarquons que la continuité de

$$L^\bullet : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(X) : \varphi \longmapsto L^\dagger \varphi$$

peut être démontrée directement : pour $c \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{loc}}(X)$, les applications

$$M_c : \mathbf{L}^2(X) \longrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X) \hookrightarrow \mathcal{D}(X)' : \xi \longmapsto c \cdot \xi$$

et

$$\partial^\alpha : \mathcal{D}(X)' \longrightarrow \mathcal{D}(X)' : \mu \longmapsto \partial^\alpha \mu$$

sont évidemment continues. □

Les opérateurs dans $\mathbf{L}^2(X)$ définis sur $\mathcal{D}(X)$ qui suivent sont important en mécanique quantique :

EXEMPLE 1 (Les opérateurs de position et d'impulsion)

$$Q_j : \varphi \longmapsto \mathrm{pr}_j \cdot \varphi \quad \text{et} \quad P_j : \varphi \longmapsto \not{\partial}_j \varphi$$

Ces opérateurs sont formellement auto-adjoints, donc fermables. En outre

$$D\left(Q_j^*\right) = \left\{ \gamma \in \mathbf{L}^2(X) \;\middle|\; \mathrm{pr}_j \cdot \gamma \in \mathbf{L}^2(X) \right\}$$

et

$$D\left(P_j^*\right) = \left\{ \gamma \in \mathbf{L}^2(X) \;\middle|\; \not{\partial}_j \gamma \in \mathbf{L}^2(X) \right\} \ .$$

Remarquons si X est borné que Q_j^* est partout défini, donc borné. Ceci n'est jamais le cas de P_j^* .

EXEMPLE 2 Les opérateurs

$$A_{j,\pm} := P_j \pm i \cdot Q_j$$

sont aussi fermables, car

$$\left(A_{j,\pm}\right)^\dagger{}_{|\mathcal{D}(X)} = A_{j,\mp} \ .$$

EXEMPLE 3 (Opérateurs de Schrödinger)

Ce sont les opérateurs de la forme

$$\not{\Delta} + V \ ,$$

de potentiel $V \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{loc}}(X)$. Il sont fermables car

$$\left(\not{\Delta} + V\right)^\dagger{}_{|\mathcal{D}(X)} = \not{\Delta} + \overline{V} \ .$$

En outre

$$D\left(\left(\not{\Delta} + V\right)^*\right) = \left\{ \gamma \in \mathbf{L}^2(X) \;\middle|\; \left(\not{\Delta} + \overline{V}\right) \gamma \in \mathbf{L}^2(X) \right\} \ .$$

EXEMPLE 4 *Les opérateurs différentiels à coefficients constants sont fermables.*

En effet

$$L^\dagger \varphi = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \not{\partial}^\alpha \left(\overline{c_\alpha} \cdot \varphi\right) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \overline{c_\alpha} \cdot \not{\partial}^\alpha \varphi \ .$$

$\square$

EXEMPLE 5 *Si $c_\alpha \in \mathcal{C}^{(|\alpha|)}(X)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leqslant m$, ou plus généralement, si $\partial^\beta c_\alpha \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{loc}}(X)$ pour tout $\beta \leqslant \alpha$ et $|\alpha| \leqslant m$, alors L est fermable.*

En effet dans le premier cas, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, on a $\overline{c_\alpha} \cdot \varphi \in \mathcal{C}^{(|\alpha|)}(X)$, donc $\not{\partial}^\alpha\left(\overline{c_\alpha} \cdot \varphi\right) \in \mathcal{K}(X)$, et par suite $L^\dagger \varphi \in \mathcal{K}(X) \subset \mathbf{L}^2(X)$. En appliquant la formule de Leibniz classique, on voit que $L^\dagger{}_{|\mathcal{D}(X)}$ est un opérateur différentiel.

Dans le second cas, on considère $\overline{c_\alpha}$ comme une distribution, et on applique la formule de Leibniz (cf. proposition 4.5) :

$$\not\partial^\alpha \left(\varphi \cdot \overline{c_\alpha}\right) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \not\partial^{\alpha-\beta} \varphi \cdot \not\partial^\beta \overline{c_\alpha} \in \mathbf{L}^2\left(X\right) \ .$$

$\square$

REMARQUE 1 Le calcul ci-dessus peut se faire sans aucune hypothèse. On a

$$L^\dagger \varphi = \sum_{|\alpha| \leqslant m, \beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \not\partial^\beta \varphi \cdot \not\partial^{\alpha-\beta} \overline{c_\alpha} = \sum_{|\beta| \leqslant m} \not\partial^\beta \varphi \cdot \left[\sum_{|\alpha| \leqslant m, \alpha \geqslant \beta} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \not\partial^{\alpha-\beta} \overline{c_\alpha}\right]$$

et $\not\partial^{\alpha-\beta} \overline{c_\alpha} \in \mathcal{D}\left(X\right)'$ en général. Il suffit donc qu'il y ait des annulations judicieuses, c'est-à-dire que

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m, \alpha \geqslant \beta} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \not\partial^{\alpha-\beta} \overline{c_\alpha} \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{loc}}\left(X\right) \quad \text{pour tout } \beta \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\beta| \leqslant m \ ,$$

pour que L soit fermable.

REMARQUE 2 Si L est formellement auto-adjoint, on peut se demander si, pour tout $\xi \in D\left(L^*\right)$, on a encore

$$L^* \xi = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \cdot \not\partial^\alpha \xi \ .$$

Malheureusement, le second membre n'a en général pas de sens, car il faudrait à priori savoir que la distribution $\partial^\alpha \xi$ est multipliable par c_α (exercice).

Rappelons que

$$D\left(L^*\right) = \left\{\xi \in \mathbf{L}^2\left(X\right) \ \middle| \ L^\dagger \xi \in \mathbf{L}^2\left(X\right)\right\}$$

et que $\mathcal{D}\left(\overline{L}\right)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{D}\left(L^*\right)$. Si L est d'ordre m , l'un des problèmes de la théorie est de trouver des conditions sur L telles que

$$D\left(L^*\right) = \mathcal{H}^{(m)}\left(X\right) \ .$$

Dans ce cas

$$\mathcal{D}\left(L^*\right) \equiv \mathcal{H}^{(m)}\left(X\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}\left(\overline{L}\right) \equiv \mathcal{H}^{(m),0}\left(X\right)$$

d'après le corollaire 5.8. Rappelons (cf. proposition 4.11.i) que $\mathcal{H}^{(m)}\left(\mathbb{R}^n\right) = \mathcal{H}^{(m),0}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

EXEMPLE 6 (Les opérateurs différentiels classiques dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$)

Considérons l'opérateur

$$\mathrm{gr\not{a}d} : \mathcal{D}\left(X\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2\left(X, \mathbb{C}^n\right) = \mathbf{L}^2\left(X\right)^n : \varphi \longmapsto \left(\not\partial_j \varphi\right)_{j=1,\ldots,n} \ .$$

Un calcul immédiat montre que son adjoint formel est

$$\mathrm{gr\not{a}d}^\dagger = \mathrm{d\not{i}v} : \mathbf{L}^2\left(X, \mathbb{C}^n\right) \longrightarrow \mathcal{D}\left(X\right)' : \gamma \longmapsto \sum_{j=1}^n \not\partial_j \gamma_j \ .$$

De même l'adjoint formel de

$$\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v} : \mathcal{D}(X,\mathbb{C}^n) = \mathcal{D}(X)^n \longrightarrow \mathbf{L}^2(X) : \psi \longmapsto \sum_{j=1}^n \not\partial_j \psi_j$$

est

$$\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}^\dagger = \mathrm{gr}\not{\mathrm{a}}\mathrm{d} : \mathbf{L}^2(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X,\mathbb{C}^n)' = \left(\mathcal{D}(X)'\right)^n : \xi \longmapsto (\not\partial_j \xi)_{j=1,\ldots,n} \ .$$

On peut en fait définir

$$\mathrm{gr}\not{\mathrm{a}}\mathrm{d} : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X,\mathbb{C}^n) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v} : \mathcal{D}(X,\mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathcal{D}(X)$$

et on a

$$\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}^\dagger = \mathrm{gr}\not{\mathrm{a}}\mathrm{d} : \mathcal{D}(X)' \longrightarrow \mathcal{D}(X,\mathbb{C}^n)' : \xi \longmapsto (\not\partial_j \xi)_{j=1,\ldots,n} \ ,$$

$$\mathrm{gr}\not{\mathrm{a}}\mathrm{d}^\dagger = \mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v} : \mathcal{D}(X,\mathbb{C}^n)' \longrightarrow \mathcal{D}(X)' : \gamma \longmapsto \sum_{j=1}^n \not\partial_j \gamma_j \ ,$$

ainsi que

$$\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}\,(\mathrm{gr}\not{\mathrm{a}}\mathrm{d}) = \not\Delta : \xi \longmapsto \not\Delta \xi : \mathcal{D}(X)' \longrightarrow \mathcal{D}(X)' \ .$$

Ceci montre que $\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}^*$ est un prolongement fermé de $\mathrm{gr}\not{\mathrm{a}}\mathrm{d}$, qui est donc un opérateur fermable et que

$$\mathcal{D}(\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}^*) = \mathcal{H}^{(1)}(X) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}\left(\overline{\mathrm{gr}\not{\mathrm{a}}\mathrm{d}}\right) = \mathcal{H}^{(1),0}(X) \ .$$

On pose

$$\mathcal{H}^{(-1)}(X) := \mathcal{H}^{(1),0}(X)^\dagger$$

et on a

$$\mathcal{H}^{(-1)}(X) = \mathbf{L}^2(X) + \mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}\left(\mathbf{L}^2(X,\mathbb{C}^n)\right) \equiv \mathbf{L}^2(X) + \sum_{j=1}^n \partial_j \left(\mathbf{L}^2(X)\right) \ .$$

Soit

$$\mathcal{H}(X,\mathrm{div}) := \mathcal{D}(\mathrm{gr}\not{\mathrm{a}}\mathrm{d}^*) = \left\{ \gamma \in \mathbf{L}^2(X,\mathbb{C}^n) \ \middle| \ \sum_{j=1}^n \not\partial_j \gamma_j \in \mathbf{L}^2(X) \right\} \ ,$$

muni de la norme $\gamma \longmapsto \|\gamma\|_2^2 + \left\| \sum_{j=1}^n \not\partial_j \gamma_j \right\|_2^2$, et désignons par $\mathcal{H}^0(X,\mathrm{div})$ l'adhérence de $\mathcal{D}(X,\mathbb{C}^n)$ dans $\mathcal{H}(X,\mathrm{div})$. On a alors

$$\mathcal{D}\left(\overline{\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}}\right) = \mathcal{H}^0(X,\mathrm{div}) \ .$$

En outre

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2(X) &= \mathcal{H}^{(1)}(X) + \overline{\mathrm{d}\not{\mathrm{i}}\mathrm{v}}\left(\mathcal{H}^0(X,\mathrm{div})\right) = \\ &= \mathcal{H}^{(1),0}(X) + \mathrm{gr}\not{\mathrm{a}}\mathrm{d}^*\left(\mathcal{H}(X,\mathrm{div})\right) \ . \end{aligned}$$

On a des formules analogues pour $\mathcal{H}^0(X,\mathrm{div})^\dagger$ et $\mathbf{L}^2(X,\mathbb{C}^n)$.

Comme $\mathrm{gr}\not{\mathrm{a}}\mathrm{d}^\dagger\overline{\mathrm{gr}\not{\mathrm{a}}\mathrm{d}}$ coïncide avec $\not\Delta$ sur $\mathcal{H}^{(1),0}(X)$, le théorème 7.8.ii montre que

$$\mathrm{Id} + \not\Delta : \mathcal{H}^{(1),0}(X) \longrightarrow \mathcal{H}^{(-1)}(X)$$

est l'application de Riesz Q , donc que l'équation distributionnelle

$$(\mathrm{Id} + \not\Delta)\,\xi = \mu$$

possède pour tout $\mu \in \mathcal{H}^{(-1)}(X)$ une unique solution $\xi \in \mathcal{H}^{(1),0}(X)$.

L'opérateur auto-adjoint positif

$$\not\Delta_D := \mathrm{gr\not{a}d}^* \overline{\mathrm{gr\not{a}d}}$$

est défini sur

$$\left\{ \xi \in \mathcal{H}^{(1),0}(X) \;\middle|\; \Delta\xi \in \mathbf{L}^2(X) \right\} \ ,$$

et s'appelle *opérateur de Dirichlet* . L'opérateur

$$G := (\mathrm{Id} + \not\Delta_D)^{-1} : \mathbf{L}^2(X) \longrightarrow \mathcal{H}^{(1),0}(X) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(X)$$

est le noyau de $\mathcal{H}^{(1),0}(X) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(X)$, donc est borné. On dit que c'est l' *opérateur de Green* de l'ouvert X .

L'opérateur auto-adjoint positif

$$\not\Delta_N := \overline{\mathrm{d\not{i}v}}\; \mathrm{d\not{i}v}^*$$

est défini sur

$$\left\{ \xi \in \mathcal{H}^{(1)}(X) \;\middle|\; \operatorname{grad}\xi \in \mathcal{H}^0(X, \operatorname{div}) \right\} \ ,$$

et s'appelle *opérateur de Neumann* .

Lorsque X est une sous-variété compacte avec bord de $\mathbb{R}^n$ de dimension n , dont le bord $\partial X = X \smallsetminus X^\circ$ est une sous-variété indéfiniment dérivable ayant X d'un même côté, on peut caractériser $\mathcal{H}^{(1),0}(X)$ et $\mathcal{H}^0(X, \operatorname{div})$. Le théorème de trace (cf. Aubin[1], théorème 9.5.1) affirme que l'opérateur de restriction

$$f_{|X} \longmapsto f_{|\partial X} : \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)_{|X} \longrightarrow \mathcal{C}^{(\infty)}(\partial X)$$

possède un unique prolongement continu surjectif

$$\xi \longmapsto \xi_{|\partial X} : \mathcal{H}^{(1)}(X) \longrightarrow \mathcal{H}^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\partial X)$$

dont le noyau est $\mathcal{H}^{(1),0}(X)$. On a donc

$$\mathcal{H}^{(1),0}(X) = \left\{ \xi \in \mathcal{H}^{(1)}(X) \;\middle|\; \xi_{|\partial X} = 0 \right\} \ .$$

Pour toutes fonctions $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$, on a la formule d'intégration par partie (cf. cours d'Analyse [17], proposition 17.7) :

$$\int \operatorname{grad} f_{|X} \bullet v_{|X}\, d\lambda_X + \int f_{|X} \cdot \operatorname{div} v_{|X}\, d\lambda_X = \int f_{|\partial X} \cdot v_{|\partial X} \bullet \mathfrak{n}\, d\lambda_{\partial X} \ .$$

On peut montrer (cf. Aubin [2], théorème 12.1.5) que l'opérateur

$$v_{|X} \longmapsto v_{|\partial X} \bullet \mathfrak{n} : \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)_{|X} \longrightarrow \mathcal{C}^{(\infty)}(\partial X)$$

possède lui aussi un prolongement continu surjectif

$$\gamma \longmapsto \gamma_{|\partial X} \bullet \mathfrak{n} : \mathcal{H}(X, \operatorname{div}) \longrightarrow \mathcal{H}^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(\partial X)$$

dont le noyau est $\mathcal{H}^0(X, \operatorname{div})$. On a donc

$$\mathcal{H}^0(X, \operatorname{div}) = \left\{ \gamma \in \mathcal{H}(X, \operatorname{div}) \;\middle|\; \gamma_{|\partial X} \bullet \mathfrak{n} = 0 \right\} \ .$$

---

[1] J.P. Aubin, Analyse fonctionnelle appliquée, Tomes 1 et 2, Presses Universitaires de France, 1987

Grâce aux inégalités de Sobolev (cf. Brezis [4], théorème IX.25 et IX.26), on peut montrer que

$$D(\not\Delta_D) = \left\{\xi \in \mathcal{H}^{(2)}(X) \;\middle|\; \xi_{|\partial X} = 0\right\} \quad \text{et} \quad D(\not\Delta_N) = \left\{\xi \in \mathcal{H}^{(2)}(X) \;\middle|\; \partial_{\mathfrak{n}}\xi_{|\partial X} = 0\right\}$$

en ayant évidemment posé $\not\partial_{\mathfrak{n}}\xi_{|\partial X} := \mathrm{gr\not{a}d}\,\xi_{|\partial X} \bullet \mathfrak{n}$.

EXEMPLE 7 Plus généralement soit $A = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid 0 < |\alpha| \leqslant m\}$. En considérant les opérateurs

$$T : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2\left(X, \mathbb{C}^A\right) : \varphi \longmapsto (\not\partial^\alpha \varphi)$$

et

$$S : \mathcal{D}\left(X, \mathbb{C}^A\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2(X) : \psi \longmapsto \sum_{\alpha \in A} \not\partial^\alpha \psi_\alpha \ ,$$

on voit immédiatement que $T = S^\dagger{}_{|\mathcal{D}(X)}$,

$$\mathcal{D}(S^*) = \mathcal{H}^{(m)}(X) \quad , \quad T \subset S^* \ ,$$

et que $\mathcal{H}^{(m),0}(X) = \mathcal{D}\left(\overline{T}\right)$. Son semi-dual dans $\mathcal{D}(X)'$ est noté $\mathcal{H}^{(-m)}(X)$ et on a

$$\mathcal{H}^{(-m)}(X) = \mathbf{L}^2(X) + \sum_{\alpha \in A} \partial^\alpha \left(\mathbf{L}^2(X)\right) \ .$$

L'opérateur différentiel $\mathrm{Id} + \sum_{\alpha \in A} \not\partial^{2\alpha}$ est une isométrie de $\mathcal{H}^{(m),0}(X)$ sur $\mathcal{H}^{(-m)}(X)$.

EXEMPLE 8 (Cas d'une seule variable)

Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On peut montrer (exercice) que

$$\mathcal{D}(P^*) = \mathcal{H}^{(1)}(J) \subset \mathcal{AC}(J) \cap \mathcal{C}^0\left(\overline{J}\right)$$

et

$$\mathcal{D}\left(\overline{P}\right) = \mathcal{H}^{(1),0}(J) = \left\{\varphi \in \mathcal{H}^{(1)}(J) \;\middle|\; \varphi(\inf J) = \varphi(\sup J) = 0\right\} \ .$$

Ceci montre que $\mathcal{H}^{(1),0}(J)$ est bien ce à quoi l'on s'attendait ! Remarquons que $\mathcal{D}(J)$ est dense dans $\mathbf{L}^2(J)$ et aussi dans $\mathcal{D}\left(\overline{P}\right)$; c'est donc un domaine essentielle de $\overline{P}$, mais $\mathcal{D}(J)$ n'est évidemment pas dense dans $\mathcal{D}(P^*)$.

On peut montrer (exercice) que P ne possède sur $\mathbb{R}_+^*$ aucun prolongement auto-adjoint.

Grâce à la proposition 7.3.i et au théorème 7.4, i, on a les formules

$$\mathcal{H}^{(-1)}(J) = \mathbf{L}^2(J) + \not\partial\left(\mathbf{L}^2(J)\right)$$

et

$$\mathbf{L}^2(J) = \mathcal{H}^{(1)}(J) + \not\partial\left(\mathcal{H}^{(1),0}(J)\right) = \mathcal{H}^{(1),0}(J) + \not\partial\left(\mathcal{H}^{(1)}(J)\right) \ .$$

L'injection canonique $\mathcal{H}^{(1)}(J) \hookrightarrow \mathcal{C}^0\left(\overline{J}\right)$ est continue par le corollaire 4.8.i, ce qui montre qu'il existe une constante $c < \infty$ telle que

$$\|\varphi\|_\infty^2 \leqslant c \cdot \left(\|\varphi\|_2^2 + \|\not\partial\varphi\|_2^2\right) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{H}^{(1)}(J) \ .$$

L'inégalité de Sobolev est une amélioration de cette inégalité (exercice). Ceci prouve que, pour tout $x \in J$, on a $\delta_x \in \mathcal{H}^{(-1)}(J)$ et

$$\langle \varphi | \, \delta_x \rangle_{\mathcal{H}^{(1),0}} = \overline{\varphi(x)} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{H}^{(1),0}(J) \ .$$

On peut aussi utiliser la première égalité ci-dessus, car en choisissant $\chi \in \mathcal{D}(J)$ tel que $\chi(x) = 1$, on a

$$\partial(\chi \cdot h_x) = h_x \cdot \partial\chi + \chi \cdot \partial h_x = h_x \cdot \partial\chi + \delta_x \ ,$$

donc

$$\delta_x = -h_x \cdot \partial\chi + \partial(\chi \cdot h_x) \in \mathbf{L}^2(J) + \not\partial\left(\mathbf{L}^2(J)\right) = \mathcal{H}^{(-1)}(J) \ .$$

Pour tout $\eta \in \mathbf{L}^2(J)$ l'application

$$\eta \cdot \delta : y \longmapsto \eta(y) \cdot \delta_y : J \longrightarrow \mathcal{H}^{(-1)}(J)$$

est λ-intégrable dans $\mathcal{H}^{(-1)}(J)$ et

$$\int \eta(y) \cdot \delta_y \, dy = \eta \ .$$

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}^{(1),0}(J)$, il vient $\langle \varphi | \eta \cdot \delta \rangle_{\mathcal{H}^{(1),0}} = \overline{\varphi} \cdot \eta \in \mathbf{L}^1(J)$, ainsi que

$$\int \left| \langle \varphi | \eta \cdot \delta \rangle_{\mathcal{H}^{(1),0}} \right| d\lambda = \int |\overline{\varphi} \cdot \eta| \, d\lambda \leqslant \|\varphi\|_2 \cdot \|\eta\|_2 \leqslant \|\eta\|_2 \cdot \|\varphi\|_{\mathcal{H}^{(1),0}} \ ,$$

d'où le résultat par le théorème 3.12.i. □

Puisque l'application de Riesz réciproque

$$\overset{-1}{Q} = (\mathrm{Id} + \not\Delta_D)^{-1} : \mathcal{H}^{(-1)}(J) \longrightarrow \mathcal{H}^{(1),0}(J)$$

est continue, utilisant le lemme 3.12.iii on voit que l'application

$$\eta \cdot \overset{-1}{Q}\delta : y \longmapsto \eta(y) \cdot \overset{-1}{Q}\delta_y : J \longrightarrow \mathcal{H}^{(1),0}(J)$$

est λ_J-intégrable dans $\mathcal{H}^{(1),0}(J)$, considéré comme semi-dual de $\mathcal{H}^{(-1)}(J)$. Comme l'opérateur de Green $G = (\mathrm{Id} + \not\Delta_D)^{-1}$ est la restriction de $\overset{-1}{Q}$ à $\mathbf{L}^2(J)$, et on a

$$G\eta = \overset{-1}{Q}\eta = \int \eta(y) \cdot \overset{-1}{Q}\delta_y \, dy \quad \text{dans } \mathcal{H}^{(1),0}(J) \ ,$$

et $G\eta$ est l'unique solution $\xi \in \mathcal{H}^{(1),0}(J)$ de l'équation différentielle

$$\xi + \not\partial^2\xi = \eta \ .$$

Pour tout $x \in J$, on a alors

$$G\eta(x) = \left\langle \delta_x \middle| R^{-1}\eta \right\rangle_{\mathcal{H}^{(-1)}} = \int \left\langle \delta_x \middle| R^{-1}\delta_y \right\rangle_{\mathcal{H}^{(-1)}} \cdot \eta(y) \, dy \ .$$

Définissant le noyau $\varkappa$ par

$$\varkappa : J^2 \longrightarrow \mathbb{C} : (x, y) \longmapsto \left\langle \delta_x \middle| R^{-1}\delta_y \right\rangle_{\mathcal{H}^{(-1)}} = R^{-1}\delta_y(x) \ ,$$

l'unique solution $\varphi \in \mathcal{H}^{(1),0}(J)$ de

$$\varphi + \not\partial^2\varphi = \eta$$

est donnée par

$$\varphi(x) = \int \varkappa(x, y) \cdot \eta(y) \, dy \quad \text{pour tout } x \in J \ .$$

On dit que $\varkappa$ est le *noyau de Green* de l'intervalle J . Comme $\varkappa(\cdot, y)$ est l'unique solution dans $\mathcal{H}^{(1),0}(J)$ de l'équation

$$\varphi + \not\partial^2\varphi = \delta_y \ ,$$

on dit que c'est la *solution élémentaire* en y .

On peut évidemment calculer ce noyau (exercice). On obtient

$$\varkappa(x,y) = \pi \cdot e^{-2\pi\cdot|x-y|} \quad \text{dans le cas de } \mathbb{R} \ ,$$

et

$$\varkappa(x,y) = \pi \cdot \left(e^{-2\pi\cdot|x-y|} - e^{-2\pi\cdot(x+y)}\right) \quad \text{dans le cas de } \mathbb{R}_+^* \ .$$

7.10 Le spectre d'un opérateur (non-nécessairement borné) dans un espace de Banach

Dans ce numéro F est un espace de Banach.

Rappelons (cf. remarque 7.2.3) que la notion d'opérateur fermé (non-nécessairement borné) dans un espace de Banach ne pose pas problème et que $T : D(T) \longrightarrow F$ est dit *inversible* (cf. définition 7.5) si T est bijectif et si $\overset{-1}{T} \in \mathcal{L}(F)$. Si T est un opérateur borné son spectre $\operatorname{Sp} T$ est celui défini dans l'algèbre de Banach $\mathcal{L}(F)$ (cf. exemple 6.1.1 et définition 6.3.2), donc $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur spectrale de T si, et seulement si, $T - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ n'est pas inversible. Nous sommes donc conduit naturellement à poser la

DEFINITION Si T est un opérateur (non-nécessairement borné) dans F , on dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur spectrale* de T si $T - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ n'est pas inversible. Le *spectre* $\operatorname{Sp} T$ de T est l'ensemble des valeurs spectrales de T .

Si $z \in \mathbb{K} \smallsetminus \operatorname{Sp} T$, on pose $R(z, T) := (T - z \cdot \mathrm{Id})^{-1}$ et on dit que l'application

$$R(\cdot, T) : z \longmapsto (T - z \cdot \mathrm{Id})^{-1} : \mathbb{K} \smallsetminus \operatorname{Sp} T \longrightarrow \mathcal{L}(F)$$

est la *résolvente* de T .

PROPOSITION *Soit T un opérateur fermé dans F . Pour que $\lambda \in \mathbb{K}$ soit une valeur spectrale de T , il faut et il suffit que l'une des trois conditions suivantes soit satisfaite :*

(i) $\operatorname{Ker}(T - \lambda \cdot \mathrm{Id}) \neq \{0\}$ *. Dans ce cas on dit que λ est une* valeur propre *de T . Un élément $\varphi \in \operatorname{Ker}(T - \lambda \cdot \mathrm{Id}) \smallsetminus \{0\} \subset D(T)$ est dit* vecteur propre *de T associé à la valeur propre λ . On désigne par $\operatorname{Sp}_p T$ l'ensemble des valeurs propres de T et on dit que c'est le* spectre ponctuel .

(ii) $T - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ *est injectif, mais pas surjectif.*
On distingue plus précisément

(a) $T - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ *est d'image dense. L'ensemble $\operatorname{Sp}_c T$ de ces λ s'appelle le* spectre continu *de T .*

(b) $T - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ *n'est pas d'image dense. L'ensemble $\operatorname{Sp}_r T$ des ces λ s'appelle le* spectre résiduel *de T .*

Les ensembles $\operatorname{Sp}_p T$, $\operatorname{Sp}_c T$ et $\operatorname{Sp}_r T$ sont deux à deux disjoints et

$$\operatorname{Sp} T = \operatorname{Sp}_p T \cup \operatorname{Sp}_c T \cup \operatorname{Sp}_r T \ .$$

C'est immédiat en remarquant que si $T - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ est une bijection de $D(T)$ sur F , alors $(T - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{-1}$ est de graphe fermé, puisque $T - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ est fermé, donc continu par le théorème du graphe fermé 3.14. □

Ces trois conditions (i), (ii.a) et (ii.b) s'excluent mutuellement.

REMARQUE 1 Si F est de **dimension finie**, les conditions (ii.a) et (ii.b) ne peuvent pas se présenter, donc $\mathrm{Sp}\, T$ est constitué des valeurs propres de T :

$$\mathrm{Sp}\, T = \mathrm{Sp}_p\, T \ .$$

REMARQUE 2 Si T est un opérateur normal dans un espace de Hilbert, nous verrons (cf. corollaire 7.11.i) que $\mathrm{Sp}_r\, T = \emptyset$.

REMARQUE 3 Il n'est pas intéressant de considérer le spectre d'opérateurs qui ne sont pas fermés. En effet s'il existe $z \in \mathbb{K}$ tel que $T - z \cdot \mathrm{Id}$ soit inversible, $(T - z \cdot \mathrm{Id})^{-1}$ est continu, donc de graphe fermé et par suite aussi $T - z \cdot \mathrm{Id}$. On en déduit que T est fermé (cf. théorème 7.5.iii).

On peut encore montrer que si T est de domaine dense, alors T^k l'est aussi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

La démonstration se fait par récurrence, le cas $k = 1$ étant vrai par hypothèse. Le domaine de T^{k+1} est le même que celui de $(T - z \cdot \mathrm{Id})^{k+1}$, donc est égal à

$$(T - z \cdot \mathrm{Id})^{-1} \left(D\left(T^k\right)\right) = R(z,T)\left(D\left(T^k\right)\right) \ .$$

Mais comme $D\left(T^k\right)$ est dense dans F par l'hypothèse de récurrence et que $R(z,T)$ est continu, $D\left(T^{k+1}\right) = R(z,T)\left(D\left(T^k\right)\right)$ est dense dans $R(z,T)(F) = D(T)$. Ceci montre que $D\left(T^{k+1}\right)$ est dense dans F . □

THEOREME *Soit T un opérateur dans F . Alors $\mathrm{Sp}\, T$ est une partie fermée de $\mathbb{K}$ et la résolvente $R(\cdot,T)$ est une fonction analytique dans $\mathbb{K} \smallsetminus \mathrm{Sp}\, T$. Pour tout $z, w \in \mathbb{K} \smallsetminus \mathrm{Sp}\, T$, on a*

$$R(z,T) - R(w,T) = (z-w) \cdot R(z,T)\, R(w,T) \ .$$

Si $z \in \mathbb{K} \smallsetminus \mathrm{Sp}\, T$ alors, pour tout $w \in \mathbb{K}$ tel que $|w| \cdot \|R(z,T)\| < 1$, l'opérateur borné $S := \mathrm{Id} - w \cdot R(z,T)$ est inversible par le théorèm 6.2. On a alors

$$R(z,T)\, S^{-1} = S^{-1} S R(z,T)\, S^{-1} = S^{-1} R(z,T)\, S S^{-1} = S^{-1} R(z,T) \ ,$$

donc, en utilisant les formules du théorème et de la proposition 7.5,

$$S^{-1} R(z,T)\, [T - (z+w) \cdot \mathrm{Id}] \subset S^{-1} [\mathrm{Id} - w \cdot R(z,T)] = \mathrm{Id} =$$

$$= [\mathrm{Id} - w \cdot R(z,T)]\, S^{-1} = [T - (z+w) \cdot \mathrm{Id}]\, R(z,T)\, S^{-1} ;$$

ceci montre que $R(z,T)\, S^{-1}$ est l'inverse de $T - (z+w) \cdot \mathrm{Id}$, et par suite que $z + w \in \mathbb{K} \smallsetminus \mathrm{Sp}\, T$. Ainsi $\mathrm{Sp}\, T$ est fermé et $R(\cdot,T)$ est analytique, puisque

$$R(z+w,T) = R(z,T)\, [\mathrm{Id} - w \cdot R(z,T)]^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} R(z,T)^{k+1} \cdot w^k \ .$$

Pour démontrer la dernière formule, remarquons tout d'abord que

$$(T - z \cdot \mathrm{Id})\, (T - w \cdot \mathrm{Id}) = (T - w \cdot \mathrm{Id})\, (T - z \cdot \mathrm{Id}) \ .$$

On en déduit que $R(z,T)\, R(w,T)$ et $R(w,T)\, R(z,T)$ sont l'inverse de cet opérateur, donc égaux. Il vient alors

$$R(z,T) = (T - w \cdot \mathrm{Id})\, R(w,T)\, R(z,T) = (T - w \cdot \mathrm{Id})\, R(z,T)\, R(w,T)$$

et

$$R(w,T) = (T - z \cdot \mathrm{Id})\, R(z,T)\, R(w,T) \ ,$$

d'où le résultat par soustraction. □

EXERCICE (Un opérateur de translation) On considère l'opérateur T dans $\ell^2(\mathbb{N})$ défini par

$$T\varphi(k) = 0 \quad \text{pour } k = 0, 1$$

et

$$T\varphi(k) = \varphi(k-1) \quad \text{pour } k \geqslant 2 \ .$$

Montrer que

$$\mathrm{Sp}_p(T) = \{0\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant 1\} \ .$$

7.11 Liaison entre les spectres d'un opérateur et de son adjoint

Attention, dans ce qui suit l'ensemble $\overline{A}$ est l'ensemble complexe conjugué de $A \subset \mathbb{C}$, et non son adhérence!

PROPOSITION *Soit T un opérateur fermé de domaine dense dans $\mathcal{H}$. Alors on les formules :*

$$\operatorname{Sp} T^* = \overline{\operatorname{Sp} T} \ .$$

$$\overline{\operatorname{Sp}_r T} \subset \operatorname{Sp}_p T^*$$

$$\overline{\operatorname{Sp}_p T} \subset \operatorname{Sp}_p T^* \cup \operatorname{Sp}_r T^*$$

et

$$\overline{\operatorname{Sp}_c T} = \operatorname{Sp}_c T^* \ .$$

Si $T - z \cdot \mathrm{Id}$ est inversible, la théorème 7.5.ix montre que $(T - z \cdot \mathrm{Id})^* = T^* - \overline{z} \cdot \mathrm{Id}$ est injectif et que

$$\left(T^* - \overline{z} \cdot \mathrm{Id}\right)^{-1} = \left[(T - z \cdot \mathrm{Id})^{-1}\right]^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ ,$$

donc que $T^* - \overline{z} \cdot \mathrm{Id}$ est inversible. Comme $T = T^{**}$ (théorème 7.4.iv), on a aussi la réciproque, ce qui prouve la première formule.

Si $\lambda \in \operatorname{Sp}_r T$, alors

$$\{0\} \neq \operatorname{Im}(T - \lambda \cdot \mathrm{Id})^\perp = \operatorname{Ker}\left(T^* - \overline{\lambda} \cdot \mathrm{Id}\right)$$

par la théorème 7.5.viii, donc $\lambda \in \operatorname{Sp}_p T^*$.

Si $\lambda \in \operatorname{Sp}_p T$, pour la même raison on a

$$\operatorname{Im}\left(T^* - \overline{\lambda} \cdot \mathrm{Id}\right)^\perp = \operatorname{Ker}(T^{**} - \lambda \cdot \mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(T - \lambda \cdot \mathrm{Id}) \neq \{0\} \ ,$$

donc

$$\overline{\lambda} \in \operatorname{Sp} T^* \setminus \operatorname{Sp}_c T^* = \operatorname{Sp}_p T^* \cup \operatorname{Sp}_r T^*$$

par le corollaire 7.10.

Quant à la dernière formule, $\lambda \notin \operatorname{Sp}_c T$ signifie que

$$\lambda \in \complement(\operatorname{Sp} T) \cup \operatorname{Sp}_p T \cup \operatorname{Sp}_r T \ ,$$

donc entraîne par les formules précédentes et le corollaire 7.10 que

$$\overline{\lambda} \in \complement(\operatorname{Sp} T^*) \cup \operatorname{Sp}_p T^* \cup \operatorname{Sp}_r T^* = \complement(\operatorname{Sp}_c T^*) \ .$$

Puisque $T = T^{**}$ on obtient aussi l'autre implication. □

COROLLAIRE *Soit T un opérateur normal. Alors*

(i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\operatorname{Ker}(T - \lambda \cdot \mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}\left(T^* - \overline{\lambda} \cdot \mathrm{Id}\right) \ .$$

En particulier

$$\lambda \in \mathrm{Sp}_p T \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}_p T^*$$

et

$$\mathrm{Sp}_r T = \emptyset \ .$$

(ii) Pour tout $\lambda, \theta \in \mathrm{Sp}_p T$ *tels que* $\lambda \neq \theta$ *, on a*

$$\mathrm{Ker}\,(T - \lambda \cdot \mathrm{Id}) \perp \mathrm{Ker}\,(T - \theta \cdot \mathrm{Id})$$

dans $\mathcal{H}$ *, comme dans* $\mathcal{D}(T)$ *.*

Dmonstration de (i) Si T est normal, on montre facilement que $T - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ est normal, par exemple en utilisant les théorèmes 7.8.v et 7.5. Le lemme 7.7.ii montre alors que, pour tout $\xi \in D(T) = D(T^*)$, on a

$$\|(T - \lambda \cdot \mathrm{Id})\,\xi\| = \left\|\left(T^* - \overline{\lambda} \cdot \mathrm{Id}\right)\xi\right\| \ ,$$

d'où la première formule. L'équivalence est alors triviale et

$$\mathrm{Sp}_r T \subset \overline{\mathrm{Sp}_p T^*} = \mathrm{Sp}_p T \ ,$$

ce qui n'est possible que si $\mathrm{Sp}_r T = \emptyset$.

Dmonstration de (ii) Pour tout $\xi \in \mathrm{Ker}\,(T - \lambda \cdot \mathrm{Id})$ et $\eta \in \mathrm{Ker}\,(T - \theta \cdot \mathrm{Id})$, on a

$$\theta \cdot (\xi|\,\eta)_{\mathcal{H}} = (\xi|\,T\eta)_{\mathcal{H}} = (T^*\xi|\,\eta)_{\mathcal{H}} = \left(\overline{\lambda} \cdot \xi|\,\eta\right)_{\mathcal{H}} = \lambda \cdot (\xi|\,\eta)_{\mathcal{H}} \ ,$$

donc $(\xi|\,\eta)_{\mathcal{H}} = 0$. En outre

$$(T\xi|\,T\eta)_{\mathcal{H}} = \overline{\lambda} \cdot \theta \cdot (\xi|\,\eta)_{\mathcal{H}} = 0 \ ,$$

donc

$$(\xi|\,\eta)_T = (\xi|\,\eta)_{\mathcal{H}} + (T\xi|\,T\eta)_{\mathcal{H}} = 0 \ .$$

□

7.12 Opérateurs discrètement décomposables

DEFINITION Nous dirons qu'un opérateur T dans $\mathcal{H}$ est *décomposable* si T est fermable et s'il existe une décomposition hilbertienne $\mathcal{H} = \boxplus \mathcal{H}_k$ de $\mathcal{H}$ et des opérateurs T_k dans $\mathcal{H}_k$ tels que

$$\overline{T} = \overline{\bigoplus_k T_k} \ ,$$

où

$$\bigoplus_k T_k : \bigoplus_k D(T_k) \longrightarrow \mathcal{H} : \sum_k \xi_k \longmapsto \sum_k T_k \xi_k \ .$$

Nous désignerons par P_k l'orthoprojecteur de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_k$.

PROPOSITION *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) T *est décomposable.*

(ii) *Il existe des opérateurs fermables* T_k *dans* $\mathcal{H}_k$ *tels que*

  (a) $D\left(\overline{T_k}\right) = P_k\left(D\left(\overline{T}\right)\right) = D\left(\overline{T}\right) \cap \mathcal{H}_k$ *pour tout* k .

  (b) $\mathcal{D}\left(\overline{T}\right) = \boxplus \mathcal{D}\left(\overline{T_k}\right)$.

  (c) *Pour tout* $\xi \in D\left(\overline{T}\right)$ *, on a* $\overline{T}\xi = \sum_k \overline{T_k} P_k \xi$.

(iii) *On a* $P_k T \subset \overline{T} P_k$ *pour tout* k .

Chapitre 8

DÉCOMPOSITIONS SPECTRALES

Dans tout ce qui suit F est un espace localement convexe,
σ une intégrale de Radon sur un espace topologique séparé Λ
et
$\mathcal{H} = \int \widehat{\mathcal{H}}\, d\sigma$ une décomposition d'un sous-espace hilbertien dans $F^\dagger$.

Rappelons le lemme 5.12 et le théorème 5.13 : $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ est une décomposition de $\mathcal{H}$ dans $F^\dagger$ si, et seulement si, $\left\|\widehat{h}\varphi\right\|_\diamond \in \mathbf{L}^2(\sigma)$ pour tout $\varphi \in F$ et $\varphi \longmapsto \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_2$ est une semi-norme de Mackey sur F .

Version du 6 septembre 2004

8.1 Les opérateurs de multiplications

LEMME *Soient $\alpha : \Lambda \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction σ-mesurable et $\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.*

(i) Si $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, on a $\alpha \cdot \zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

(ii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $1_{\{|\alpha| \leqslant k\}} \cdot \zeta$, $1_{\{|\alpha| \leqslant k\}} \cdot \alpha \cdot \zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

(iii) On a $\zeta = \lim_k 1_{\{|\alpha| \leqslant k\}} \cdot \zeta$ dans $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

(iv) Si $\|\alpha \cdot \zeta\|_2 < \infty$, alors $\alpha \cdot \zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

Dmonstration de (i) Si $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, on a

$$\|\alpha \cdot \zeta\|_2^2 = \int^* \|\alpha(\lambda) \cdot \zeta(\lambda)\|_\lambda^2 \, d\sigma(\lambda) \leqslant \|\alpha\|_\infty^2 \cdot \int^* \|\zeta(\lambda)\|_\lambda^2 \, d\sigma(\lambda) = \|\alpha\|_\infty^2 \cdot \|\zeta\|_2^2 < \infty .$$

D'après la remarque 5.12.4, il existe une suite $(\zeta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\left|\widehat{h}(F)\right\rangle \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma)\right|$ telle que $\zeta = \lim_k \zeta_k$ dans $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$; mais comme

$$\|\alpha \cdot \zeta_k - \alpha \cdot \zeta\|_2^2 \leqslant \|\alpha\|_\infty^2 \cdot \|\zeta_k - \zeta\|_2^2 \longrightarrow 0 ,$$

il vient

$$\alpha \cdot \zeta = \lim_k \alpha \cdot \zeta_k \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) ,$$

puisque $\alpha \cdot \zeta_k \in \left|\widehat{h}(F)\right\rangle \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma)\right|$.

Dmonstration de (ii) C'est immédiat, puisque $1_{\{|\alpha| \leqslant k\}}$, $1_{\{|\alpha| \leqslant k\}} \cdot \alpha \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$.

Dmonstration de (iii) On a $\Lambda = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{|\alpha| \leqslant k\}$ et

$$\left\|1_{\{|\alpha| \leqslant k\}} \cdot \zeta - \zeta\right\|_\diamond = \left\|1_{\{|\alpha| > k\}} \cdot \zeta\right\|_\diamond \leqslant \|\zeta\|_\diamond \in \mathbf{L}^2(\sigma) .$$

Puisque $1_{\{|\alpha| > k\}} \cdot \|\zeta\|_\diamond$ est σ-mesurable, on obtient

$$\lim_k \left\|1_{\{|\alpha| \leqslant k\}} \cdot \zeta - \zeta\right\|_2^2 = \lim_k \int 1_{\{|\alpha| > k\}} \cdot \|\zeta\|_\diamond^2 \, d\sigma = 0$$

par le théorème de Lebesgue.

Dmonstration de (iv) Si $\|\alpha \cdot \zeta\|_2 < \infty$, on obtient

$$\left\|1_{\{|\alpha| \leqslant k\}} \cdot \alpha \cdot \zeta - \alpha \cdot \zeta\right\|_\diamond = \left\|1_{\{|\alpha| > k\}} \cdot \alpha \cdot \zeta\right\|_\diamond \leqslant \|\alpha \cdot \zeta\|_\diamond \in \mathbf{L}^2(\sigma) ,$$

et puisque $1_{\{|\alpha|>k\}} \cdot |\alpha| \cdot \|\zeta\|_\diamond$ est σ-mesurable, on en déduit

$$\lim_k \left\|1_{\{|\alpha|\leqslant k\}} \cdot \alpha \cdot \zeta - \alpha \cdot \zeta\right\|_2^2 = \lim_k \int 1_{\{|\alpha|>k\}} \cdot |\alpha|^2 \cdot \|\zeta\|_\diamond^2 \, d\sigma = 0$$

par le théorème de Lebesgue. □

Grâce à ce lemme nous pouvons introduire les notations suivantes :

DEFINITION 1 Posons

$$\mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) := \left\{\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \;\middle|\; \|\alpha \cdot \zeta\|_2 < \infty\right\}$$

et

$$M_\alpha : \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) : \zeta \longmapsto \alpha \cdot \zeta \ .$$

REMARQUE Rappelons que $\mathbf{L}^\infty(\sigma)$ est muni de la norme supérieure essentielle ! On a donc $|\alpha| \leqslant \|\alpha\|_\infty$ localement σ-p.p. .

Nous utiliserons comme précédemment (cf. exemple 1.2.6 et 6.10) la notation

$$\langle \mathrm{id}\rangle := 1 + |\mathrm{id}|^2 \ .$$

THEOREME

(i) *Si $\alpha : \Lambda \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction σ-mesurable, l'opérateur M_α est normal et $M_\alpha^* = M_{\overline{\alpha}}$. En particulier $\mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ est un espace de Hilbert pour la norme définie par M_α .*

Si A est une partie σ-mesurable sur laquelle α est essentiellement bornée, alors $1_A \cdot \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \subset \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

Les noyaux de $\mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \hookrightarrow \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ et $\alpha \cdot \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \hookrightarrow \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ sont respectivement $M_{\langle\alpha\rangle^{-1}}$ et $M_{|\alpha|^2 \cdot \langle\alpha\rangle^{-1}}$.

(ii) *Pour tout $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$ l'opérateur M_α est borné dans $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ de norme $\leqslant \|\alpha\|_\infty$. L'application*

$$M : \alpha \longmapsto M_\alpha : \mathbf{L}^\infty(\sigma) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)\right)$$

est linéaire, involutive, i.e. $M_\alpha^* = M_{\overline{\alpha}}$, multiplicative, i.e. $M_{\alpha\cdot\beta} = M_\alpha M_\beta$ pour tout $\beta \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$ et continue de norme 1 .

(iii) *Pour toute partie σ-mesurable $A \subset \Lambda$ l'opérateur $M_A := M_{1_A}$ est l'orthoprojecteur sur $1_A \cdot \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$,$M_\emptyset = M_0 = 0$ et $M_\Lambda = M_1 = \mathrm{Id}$.*

(iv) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *Pour tout $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, on a $\|M_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$.*

(b) *Pour toute partie σ-mesurable A qui n'est pas localement σ-négligeable, on a*

$$1_A \cdot \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \neq \{0\} \ .$$

(c) *Toute partie σ-mesurable A telle que $1_A \cdot \widehat{h} = 0$ scalairement σ-p.p. est localement σ-négligeable.*

Dmonstration de (i) Si $\zeta \in 1_A \cdot \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ et α est essentiellement bornée sur A , on a $\alpha \cdot \zeta = 1_A \cdot \alpha \cdot \zeta$ σ-p.p., donc $\alpha \cdot \zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ par le lemme 8.1. L'opérateur M_α est de domaine dense. En effet, pour tout $\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$, on a $1_{\{|\alpha|\leqslant k\}} \cdot \zeta \in \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ par le lemme (ii) et $\zeta = \lim_k 1_{\{|\alpha|\leqslant k\}} \cdot \zeta$ par le lemme (iii). Il est fermé car $\mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ est un espace de Hilbert pour la norme en graphe $\|\cdot\|_\alpha$. En effet si $(\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans cet espace, on a $\zeta := \lim_k \zeta_k$ et $\theta := \lim_k \alpha \cdot \zeta_k$ dans $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$. Mais par la proposition 5.12, il existe une sous-suite (k_l) de $\mathbb{N}$ telle que $\zeta := \lim_l \zeta_{k_l}$ et $\theta := \lim_l \alpha \cdot \zeta_{k_l}$ ponctuellement. On en déduit que $\theta = \alpha \cdot \zeta$, puis que $\zeta = \lim_k \zeta_k$ dans $\mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

Pour calculer le noyau de $\mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \hookrightarrow \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$, soient $\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ et $\theta \in \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$. On a

$$(\zeta|\,\theta)_{\mathbf{L}^2} = \int \left(\langle\alpha\rangle^{-1} \cdot \zeta\middle|\,\theta\right)_\diamond d\sigma + \int \left(\alpha \cdot \langle\alpha\rangle^{-1} \cdot \zeta\middle|\,\alpha \cdot \theta\right)_\diamond d\sigma =$$

$$= \left(\langle\alpha\rangle^{-1} \cdot \zeta\middle|\,\theta\right)_\alpha \ ,$$

car $\langle\alpha\rangle^{-1} \cdot \zeta \in \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$. Ce noyau est donc $\zeta \longmapsto \langle\alpha\rangle^{-1} \cdot \zeta$. Déterminons maintenant celui de $\alpha \cdot \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \hookrightarrow \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$. Remarquons tout d'abord que

$$\|\alpha \cdot \theta\|^2_{\alpha\cdot\mathbf{L}^2_\alpha} = \inf_{\gamma\in\mathbf{L}^2_\alpha,\alpha\cdot\gamma=\alpha\cdot\theta} \|\gamma\|^2_\alpha = \left\|1_{\{\alpha\neq0\}} \cdot \theta\right\|_\alpha = \int \langle\alpha\rangle \cdot \|\theta\|^2_\diamond \cdot 1_{\{\alpha\neq0\}}\, d\sigma \ .$$

On a alors

$$(\zeta|\,\alpha \cdot \theta)_{\mathbf{L}^2} = \int \langle\alpha\rangle \cdot \left(\overline{\alpha} \cdot \langle\alpha\rangle^{-1} \cdot \zeta\middle|\,\theta\right)_\diamond \cdot 1_{\{\alpha\neq0\}}\, d\sigma = \left(\alpha \cdot \overline{\alpha} \cdot \langle\alpha\rangle^{-1} \cdot \zeta\middle|\,\alpha \cdot \theta\right)_{\alpha\cdot\mathbf{L}^2_\alpha} \ ,$$

car $\overline{\alpha} \cdot \langle\alpha\rangle^{-1} \cdot \zeta \in \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$. Ce noyau est donc $\zeta \longmapsto |\alpha|^2 \cdot \langle\alpha\rangle^{-1} \cdot \zeta$.

Nous avons ainsi prouvé que

$$\mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) + \alpha \cdot \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) = \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \ ,$$

donc que M_α est normal par le lemme 7.7. Ainsi $\mathcal{D}(M^*_\alpha) = \mathcal{D}(M_\alpha) = \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) = \mathbf{L}^2_{\overline{\alpha}}\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$, et comme pour tout $\zeta, \theta \in \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$, on a

$$(\theta|\,M^*_\alpha\zeta) = (\alpha \cdot \theta|\,\zeta)_{\mathbf{L}^2} = (\theta|\,\overline{\alpha} \cdot \zeta)_{\mathbf{L}^2} = (\theta|\,M_{\overline{\alpha}}\zeta) \ ,$$

on obtient $M^*_\alpha = M_{\overline{\alpha}}$.

Dmonstration de (ii) Si $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, pour tout $\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$, on a

$$\|M_\alpha\zeta\|^2_2 = \int (\alpha \cdot \zeta|\,\alpha \cdot \zeta)_\diamond\, d\sigma \leqslant \|\alpha\|^2_\infty \cdot \int (\zeta|\,\zeta)_\diamond\, d\sigma = \|\alpha\|^2_\infty \cdot \|\zeta\|^2_2 \ ,$$

donc $\|M_\alpha\| \leqslant \|\alpha\|_\infty$. L'application M est évidemment linéaire, involutive et de norme $\leqslant 1$. Si $\beta \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, alors

$$M_{\alpha\cdot\beta}\zeta = (\alpha \cdot \beta) \cdot \zeta = \alpha \cdot (\beta \cdot \zeta) = M_\alpha M_\beta\zeta \ .$$

Dmonstration de (iii) Si A est une partie σ-mesurable de Λ , comme

$$1_A^2 = 1_A = \overline{1_A} \ ,$$

l'opérateur M_A satisfait par (ii) aux relations

$$M_A^2 = M_{1_A^2} = M_A = M_A^* \ ,$$

donc est un orthoprojecteur. Son image est $1_A \cdot \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

Dmonstration de (iv)

(a) $\Rightarrow$ (b) Si A n'est pas localement σ-négligeable, on a $\|M_A\| = \|1_A\|_\infty \neq 0$, donc $M_A \neq 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Si $1_A \cdot \widehat{h} = 0$ scalairement σ-p.p. , alors $1_A \cdot \widehat{h} = 0$ ponctuellement σ-p.p. par le théorème 5.12 ou directement en constatant que, pour tout $\varphi \in F$, on a $\left\|\widehat{h}\varphi\right\|_\diamond^2 = \left\langle \varphi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle = 0$ σ-p.p. . Ainsi $\left|1_A \cdot \widehat{h}\,(F)\right\rangle \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma)\right| = \{0\}$ et en utilisant l'exercice 5.12 on obtient

$$1_A \cdot \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) = \mathbf{L}^2\left(\sigma, 1_A \cdot \widehat{\mathcal{H}}\right) = \overline{\left|1_A \cdot \widehat{h}\,(F)\right\rangle \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma)\right|}^{\boldsymbol{\Lambda}^2} = \{0\} \ ;$$

(b) montre alors que A est localement σ-négligeable.

(c) $\Rightarrow$ (a) Il nous suffit de prouver que, pour tout $\lambda < \|\alpha\|_\infty$, on a $\lambda \leqslant \|M_\alpha\|$. Mais $A := \{\lambda < |\alpha|\}$ n'est pas localement σ-négligeable, donc on n'a pas $1_A \cdot \widehat{h} = 0$ ponctuellement σ-p.p. . Il existe donc un $\varphi \in F$ tel que $\left\{1_A \cdot \widehat{h}\varphi \neq 0\right\}$ ne soit pas σ-négligeable et il vient $\left\|1_A \cdot \widehat{h}\varphi\right\|_2^2 \neq 0$, ainsi que

$$\left\|M_\alpha\left(1_A \cdot \widehat{h}\varphi\right)\right\|_2^2 = \int 1_A \cdot |\alpha|^2 \cdot \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_\diamond^2 \geqslant \lambda^2 \cdot \int 1_A \cdot \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_\diamond^2 = \lambda^2 \cdot \left\|1_A \cdot \widehat{h}\varphi\right\|_2^2 \ ,$$

ce qui finit la démonstration. □

8.2 Les opérateurs de Toeplitz associés à une décomposition

DEFINITION 1 Soit P l'orthoprojecteur de $\mathbf{L}^2\left(\sigma,\widehat{\mathcal{H}}\right)$ sur

$$\mathcal{P} := \left(\operatorname{Ker}\left(\int \diamond\, d\sigma\right)\right)^{\perp \mathbf{L}^2} = \overline{\widehat{h}\,(F)}^{\mathbf{L}^2} \ ,$$

l'espace des représentants de Parseval associé à la décomposition de $\mathcal{H}$ (cf. remarque 5.14.1).

Pour toute fonction σ-mesurable $\alpha : \Lambda \longrightarrow \mathbb{K}$, nous poserons

$$D(\alpha) := \left\{\xi \in \mathcal{H} \ \middle|\ \widehat{\xi} \in \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma,\widehat{\mathcal{H}}\right)\right\} \ ,$$

et désignerons par Z_α l'opérateur dans $\mathcal{H}$ défini par

$$Z_\alpha : D(\alpha) \longrightarrow \mathcal{H} : \xi \longmapsto \int \alpha \cdot \widehat{\xi}\, d\sigma \ .$$

On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \arrow[d, "\widehat{\diamond}"'] & D(\alpha) \arrow[l, hook'] \arrow[d] \arrow[r, "Z_\alpha"] & \mathcal{H} \\
\mathcal{P} & \mathcal{P}\cap \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma,\widehat{\mathcal{H}}\right) \arrow[l, hook'] \arrow[d, hook] & \mathbf{L}^2\left(\sigma,\widehat{\mathcal{H}}\right) \arrow[u, "\int \diamond\, d\sigma"'] \\
& \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma,\widehat{\mathcal{H}}\right) \arrow[ur, "M_\alpha"'] &
\end{tikzcd} \ .$$

Puisque $\widehat{\diamond}$ est une isométrie de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{P}$, dont l'application réciproque est $\int \diamond\, d\sigma$, l'opérateur Z_α est équivalent à l'opérateur dans $\mathcal{P}$ défini par

$$\zeta \longmapsto P(\alpha \cdot \zeta) : \mathcal{P} \cap \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma,\widehat{\mathcal{H}}\right) \longrightarrow \mathcal{P} \ .$$

DEFINITION 2 Nous dirons que l'opérateur Z_α dans $\mathcal{H}$, ou l'opérateur équivalent dans $\mathcal{P}$, est un *opérateur de Toeplitz* .

REMARQUE Puisque $\mathcal{P}\cap\mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma,\widehat{\mathcal{H}}\right)$, muni de la norme induite par celle de $\mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma,\widehat{\mathcal{H}}\right)$, est un espace de Hilbert comme on le vérifie immédiatement, l'opérateur Z_α est fermé. La première question génante est savoir sous quelles conditions il est de domaine dense, i.e. $\mathcal{P} \cap \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma,\widehat{\mathcal{H}}\right)$

est dense dans $\mathcal{P}$. Nous n'étudierons pas cette question ici. Par contre si $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, on a le diagramme simplifié suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{Z_\alpha} & \mathcal{H} \\ \widehat{\diamond}\ \downarrow & & \uparrow\ \int \diamond \, d\sigma \\ \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) & \xrightarrow[M_\alpha]{} & \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \end{array} .$$

DEFINITION 3 Pour toute partie σ-mesurable A de Λ soit

$$\mathcal{H}_A := \int 1_A \cdot \widehat{\mathcal{H}} \, d\sigma$$

le sous-espace hilbertien de $F^\dagger$ de noyau $h_A := \int 1_A \cdot \widehat{h} \, d\sigma$.

L'exercice 5.12 montre que

$$\mathcal{H}_A = \int \left(\mathbf{L}^2\left(\sigma, 1_A \cdot \widehat{\mathcal{H}}\right)\right) d\sigma = \int \left(1_A \cdot \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)\right) d\sigma .$$

THEOREME

(i) *Pour tout $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$ l'opérateur Z_α est borné dans $\mathcal{H}$ de norme $\leqslant \|\alpha\|_\infty$. L'application*

$$Z : \alpha \longmapsto Z_\alpha : \mathbf{L}^\infty(\sigma) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

est linéaire, involutive, i.e. $Z_\alpha^* = Z_{\overline{\alpha}}$, positive, i.e. Z_α est un opérateur auto-adjoint positif si $\alpha \geqslant 0$, et continue de norme $\leqslant 1$.

(ii) *Pour toute partie σ-mesurable $A \subset \Lambda$ l'opérateur $Z_A := Z_{1_A}$ est auto-adjoint positif, $Z_\emptyset = Z_0 = 0$ et $Z_\Lambda = Z_1 = \mathrm{Id}$. On a $Z_A(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}_A$ et les noyaux de ces sous-espaces hilbertiens sont respectivement Z_A^2 et Z_A .*

(iii) *Soit A une partie σ-mesurable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *(a)* $1_A \cdot \widehat{h} = 0$ *scalairement σ-p.p. .*
- *(b)* $\mathcal{H}_A = \{0\}$.
- *(c)* $Z_A(\mathcal{H}) = \{0\}$.

(iv) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *(a)* *L'application*

$$\int \diamond \, d\sigma : \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \longrightarrow \mathcal{H}$$

est injective, i.e. $\widehat{h}(F)$ est dense dans $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

- *(b)* *Z est multiplicative, i.e. pour tout $\alpha, \beta \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, on a $Z_{\alpha\beta} = Z_\alpha Z_\beta$.*
- *(c)* *Pour toute partie σ-mesurable A l'opérateur Z_A est un orthoprojecteur, i.e.*

$$Z_A^2 = Z_A \quad ou \quad Z_A(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_A .$$

(d) Pour toute partie σ-mesurable A , on a

$$\mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_{\complement A} = \{0\} \ .$$

Dans ce cas, Z_A est l'orthoprojecteur de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_A = Z_A(\mathcal{H})$. Si les parties σ-mesurables A, B sont disjointes, on a $\mathcal{H}_A \perp \mathcal{H}_B$ et $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \boxplus \mathcal{H}_{\complement A}$.

Dmonstration de (i) La première partie est évidente par le théorème 8.1, puisque $\widehat{\diamond}$ et $\int \diamond \, d\sigma$ sont de norme $\leqslant 1$ et adjointes l'une de l'autre :

$$\|Z_\alpha\| = \left\| \left(\int \diamond \, d\sigma \right) \circ M_\alpha \circ \widehat{\diamond} \right\| \leqslant \|M_\alpha\| \leqslant \|\alpha\|_\infty$$

et

$$Z_\alpha^* = \left(\left(\int \diamond \, d\sigma \right) \circ M_\alpha \circ \widehat{\diamond} \right)^* = \left(\int \diamond \, d\sigma \right) \circ M_{\overline{\alpha}} \circ \widehat{\diamond} = Z_{\overline{\alpha}} \ .$$

La positivité découle du fait que $\widehat{\xi}$ est le représentant de Parseval de ξ , donc que

$$(\xi \,| Z_\alpha \xi) = \int \alpha \cdot \left(\widehat{\xi} \middle| \widehat{\xi} \right) \, d\sigma \geqslant 0 \ .$$

Dmonstration de (ii) Puisque 1_A est une fonctions réelle, l'opérateur Z_A est auto-adjoint. On a évidemment $Z_0 = 0$ et

$$Z_1 \xi = \int 1 \cdot \widehat{\xi} \, d\sigma = \xi \ .$$

Le noyau de $Z_A(\mathcal{H})$ est $Z_A Z_A^* = Z_A^2$ par l'exemple 5.4.5. Puisque Z_A est un opérateur auto-adjoint positif, c'est le noyau d'un sous-espace hilbertien de $\mathcal{H}$. Dans $F^\dagger$ sont noyau est

$$h^\dagger Z_A h = \int 1_A \cdot \widehat{h} \, d\sigma = h_A$$

par la proposition 5.5, ce qui finit de montrer que ce sous-espace hilbertien est $\mathcal{H}_A$.

Dmonstration de (iii) Pour toute partie σ-mesurable A , on a $1_A \cdot \widehat{h} = 0$ scalairement σ-p.p. si, et seulement si, pour tout $\varphi \in F$, on a $1_A \cdot \left\langle \varphi \middle| \widehat{h} \varphi \right\rangle = 0$ σ-p.p. par les formules de polarisation (cf. proposition 1.3), donc à $\int 1_A \cdot \left\langle \varphi \middle| \widehat{h} \varphi \right\rangle \, d\sigma = 0$ pour tout $\varphi \in F$. Mais cette relation signifie que $\int 1_A \cdot \widehat{h} \, d\sigma = 0$. Elle est alors successivement équivalente à $\mathcal{H}_A = \{0\}$, puis à $Z_A = 0$ et finalement à $Z_A(\mathcal{H}) = \{0\}$.

Dmonstration de (iv)

(a) $\Rightarrow$ (b) Si $\int \diamond \, d\sigma : \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \longrightarrow \mathcal{H}$ est injective, $\beta \cdot \widehat{\xi}$ est le représentant de Parseval de $Z_\beta \xi$. Par suite

$$Z_\alpha Z_\beta \xi = \int \alpha \cdot \left(\beta \cdot \widehat{\xi} \right) \, d\sigma = Z_{\alpha\beta} \xi \ .$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Si Z est multiplicative, on a $Z_A^2 = Z_{1_A^2} = Z_A$, ce qui par (ii) est équivalent à $Z_A(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_A$. Puisque Z_A est auto-adjoint, c'est un orthoprojecteur.

(c) $\Rightarrow$ (d) Si $\xi \in \mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_{\complement A}$, on a $\xi = Z_A \xi = Z_{\complement A} \xi = Z_A Z_{\complement A} \xi$, d'où le résultat puisque

$$Z_A Z_{\complement A} = Z_A (\mathrm{Id} - Z_A) = Z_A - Z_A^2 = Z_A - Z_A = 0 \ .$$

(d) $\Rightarrow$ (a) Si $\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ et $\int \zeta \, d\sigma = 0$, alors pour toute partie σ-mesurable A , on a

$$\int 1_A \cdot \zeta \, d\sigma = -\int 1_{\complement A} \cdot \zeta \, d\sigma \in \mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_{\complement A} = \{0\} \ ,$$

donc $\int 1_A \cdot \zeta \, d\sigma = 0$. Pour tout $\varphi \in F$, on a donc $\int 1_A \cdot \langle \varphi | \, \zeta \rangle \, d\sigma = 0$ quel que soit la partie σ-mesurable A , donc $\langle \varphi | \, \zeta \rangle = 0$ σ-presque partout (cf. exemple 1.16.1). Par la remarque 5.12.2, on en déduit que $\zeta = 0$ σ-presque partout, ce qui finit de prouver que $\int$ est injective.

Finalement si ces propriétés sont satisfaites, quel que soient les parties σ-mesurables A, B disjointes, on obtient $\mathcal{H}_A = Z_A(\mathcal{H}) \perp Z_B(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_B$, puisque Z est multiplicative et donc $Z_A Z_B = Z_{A \cap B} = Z_\emptyset = \{0\}$. □

8.3 Les décompositions non-dégénérées et directes

Les hypothèses de mesurabilité étant très faibles, il est facile de construire des exemples pathologiques. Une manière de les éviter est de supposer que $\widehat{h}$ est σ-mesurable au sens de Lusin, mais avec l'inconvénient de gêner le développement de la théorie. Cette mesurabilité est par contre très utile en pratique.

EXEMPLE Soient $A \subset [0,1]$ et $\widehat{\mathcal{H}} : [0,1] \longrightarrow Hilb\left(\mathbb{K}^{[0,1]}\right) : \lambda \longmapsto \mathbb{K} \cdot 1_A(\lambda) \cdot 1_{\{\lambda\}}$. On a

$$\widehat{h} : [0,1] \longrightarrow \mathcal{L}_s\left(\mathbb{K}^{([0,1])}, \mathbb{K}^{[0,1]}\right) = \mathbb{K}^{[0,1]^2} : \lambda \longmapsto 1_A(\lambda) \cdot \left|1_{\{\lambda\}}\right\rangle \left\langle 1_{\{\lambda\}}\right| \ ,$$

cette application est scalairement $\lambda_{[0,1]}$-mesurable et

$$\int \widehat{\mathcal{H}} \, d\lambda_{[0,1]} = \{0\} \ .$$

En outre $\left\{1_A \cdot 1_{\{\cdot\}} = 0\right\} = \complement A$ n'est pas nécessairement $\lambda_{[0,1]}$-mesurable.

En effet, pour tout $\varphi, \psi \in \mathbb{K}^{([0,1])}$, l'application

$$\lambda \longmapsto \left\langle \varphi \middle| 1_{\{\lambda\}} \right\rangle \left\langle 1_{\{\lambda\}} \middle| \psi \right\rangle = \overline{\varphi(\lambda)} \cdot \psi(\lambda)$$

est $\lambda_{[0,1]}$-négligeable. □

DEFINITION 1 Nous dirons que la décomposition $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ de $\mathcal{H}$ est *non-dégénérée* si toute partie σ-mesurable A telle que $1_A \cdot \widehat{h} = 0$ scalairement σ-p.p. est localement σ-négligeable.

SCOLIE ***1*** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) La décomposition $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ de $\mathcal{H}$ est non-dégénérée.

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, on a $\|M_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$.

(iii) Pour toute partie σ-mesurable A qui n'est pas localement σ-négligeable, on a $\mathcal{H}_A \neq \{0\}$.

(iv) Pour toute partie σ-mesurable A qui n'est pas localement σ-négligeable, on a $Z_A(\mathcal{H}) \neq \{0\}$.

C'est immédiat par les théorèmes 8.1.iv et 8.2.iii. □

REMARQUE 1 Soit $\zeta : \Lambda \longrightarrow F^\dagger$ une application scalairement σ-mesurable. Pour que tout ensemble σ-mesurable A tel que l'on ait $1_A \cdot \zeta = 0$ scalairement localement σ-p.p. soit localement σ-négligeable, il faut et il suffit que, pour tout $K \in \mathfrak{K}(\Lambda)$ tel que $1_K \cdot \zeta = 0$ scalairement σ-p.p. , on ait $\sigma(K) = 0$.

C'est immédiat puisqu'une partie est localement σ-négligeable si, et seulement si, toute partie compacte qu'elle contient est σ-négligeable. □

LEMME *Si $\zeta : \Lambda \longrightarrow F^\dagger$ est une application continue, ou plus généralement σ-mesurable au sens de Lusin, alors les ensembles $\{\zeta \neq 0\}$ et $\{\zeta = 0\}$ sont σ-mesurable. En outre* *(i)* *On a $\zeta = 0$ scalairement localement σ-p.p. si, et seulement si, $\zeta = 0$ localement σ-p.p. .*

(ii) *Pour que tout ensemble σ-mesurable A tel que l'on ait $1_A \cdot \zeta = 0$ scalairement localement σ-p.p. soit localement σ-négligeable, il faut et il suffit que $\zeta \neq 0$ localement σ-p.p. .*

La démonstration de la première partie est analogue à celle faite pour la proposition 15.11 du cours d'Analyse [17]. En effet, pour tout $K \in \mathfrak{K}(\Lambda)$, il existe une suite $(L_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{K}(K)$ telle que $N := K \smallsetminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} L_k$ soit σ-négligeable et $\zeta_{|L_k}$ soit continue pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\{\zeta \neq 0\} \cap K = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{\widehat{h}_{|L_k} \neq 0\right\}\right) \cup \widetilde{N} \quad \text{pour un certain } \widetilde{N} \subset N \ ,$$

donc $\{\zeta \neq 0\} \cap K$ est σ-mesurable ; on en déduit que $\{\zeta \neq 0\}$ est σ-mesurable (cf. cours d'Analyse [17], théorème 15.9.i).

Dmonstration de (i) La condition est évidemment suffisante, car $\{\zeta \neq 0\} \supset \{\langle \varphi | \zeta\rangle \neq 0\}$ pour tout $\varphi \in F$. Réciproquement, soit $K \in \mathfrak{K}(\Lambda)$ tel que $K \subset \{\zeta \neq 0\}$; avec les notations ci-dessus, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\lambda \in L_k$, il existe $\varphi \in F$ tel que $\langle \varphi | \zeta(\lambda)\rangle \neq 0$. Par la compacité de L_k , il existe une suite finie $\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n} \subset F$ telle que

$$L_k \subset \bigcup_{j=1}^{n} \left\{\left\langle \varphi_j \right| \zeta\right\rangle \neq 0\} \ .$$

Mais comme chaque ensemble $\{\langle \varphi | \zeta \neq 0\rangle\}$ est localement σ-négligeable, on en déduit que L_k est σ-négligeable, donc aussi K .

Dmonstration de (ii) La condition est évidemment nécessaire, car $1_{\{\zeta=0\}} \cdot \zeta = 0$ partout, donc $\{\zeta = 0\}$ est localement σ-négligeable par la remarque, ce qui montre que $\zeta \neq 0$ localement σ-p.p. . Réciproquement si $\zeta \neq 0$ localement σ-p.p. et $K \in \mathfrak{K}(\Lambda)$ tel que $1_K \cdot \zeta = 0$ scalairement σ-p.p. , on a $1_K \cdot \zeta = 0$ σ-p.p. par (i), donc $\sigma(K) = 0$. □

REMARQUE 2 Sans l'hypothèse de mesurabilité (ii) est faux comme le montre l'exemple ci-dessus. On a $\{\zeta = 0\} = \emptyset$ et $1_A \cdot \zeta = 0$ est scalairement σ-négligeable quel que soit la partie A .

PROBLEME Si $\widehat{h} = \widehat{h'}$ scalairement (localement) σ-p.p. , que peut-on dire de $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ et $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}'}\right)$? Pour $\varphi \in F$, est-ce que $\widehat{h'}\varphi$ est un champ à valeurs dans $\widehat{\mathcal{H}}$? Probablement non en considérant un cas dégénéré.

DEFINITION 2 Nous dirons que la décomposition $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ de $\mathcal{H}$ est *directe* si elle est non-dégénérée et si l'application

$$\int \diamond\, d\sigma : \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \longrightarrow \mathcal{H}$$

est injective.

Dans ce cas $\int \diamond\, d\sigma$ est unitaire et nous écrirons

$$\mathcal{H} = \int^{\boxplus} \widehat{\mathcal{H}}\, d\sigma \quad \text{dans } F^{\dagger} \ .$$

SCOLIE 2 ***Calcul fonctionnel borné***

Soit $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ *une décomposition de* $\mathcal{H}$ *non-dégénérée. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *La décomposition* $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ *de* $\mathcal{H}$ *est directe.*

(ii) Z *est multiplicative, i.e. pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$ *, on a* $Z_{\alpha\beta} = Z_\alpha Z_\beta$ *.*

(iii) *Pour toute partie* σ*-mesurable* A *l'opérateur* Z_A *est un orthoprojecteur, i.e.*

$$Z_A^2 = Z_A \quad \text{ou} \quad Z_A(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_A \ .$$

(iv) *Pour toute partie* σ*-mesurable* A *, on a*

$$\mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_{\complement A} = \{0\} \ .$$

Dans ce cas, Z_A *est l'orthoprojecteur de* $\mathcal{H}$ *sur* $\mathcal{H}_A = Z_A(\mathcal{H})$ *. Si les parties* σ*-mesurables* A, B *sont disjointes, on a* $\mathcal{H}_A \perp \mathcal{H}_B$ *et* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \boxplus \mathcal{H}_{\complement A}$ *.*

Nous avons recopier le théorème 8.2.iv. $\square$

8.4 Décompositions unidimensionnelles

Soient

$$\epsilon : \lambda \longmapsto \epsilon_\lambda : \Lambda \longrightarrow F^\dagger$$

une famille scalairement σ-mesurable de vecteurs dans $F^\dagger$ et

$$\mathbb{K} \cdot \epsilon : \Lambda \longrightarrow Hilb\left(F^\dagger\right) : \lambda \longmapsto \mathbb{K} \cdot \epsilon_\lambda$$

avec $\left\|\epsilon_\lambda\right\|_\lambda = 1$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ tel que $\epsilon_\lambda \neq 0$.

La famille correspondante des noyaux est

$$|\epsilon\rangle\langle\epsilon| : \Lambda \longrightarrow \mathcal{L}\left(F, F^\dagger\right) \ .$$

Elle est scalairement σ-mesurable.

REMARQUE $\mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathbb{K} \cdot \epsilon)$ est l'espace vectoriel des classes (modulo σ-p.p.) de champs de la forme $\zeta \cdot \epsilon$ pour une fonction $\zeta : \Lambda \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $\|\zeta\|_2^2 = \int |\zeta|^2 \, d\sigma < \infty$ et que $\zeta \cdot \langle\epsilon|\varphi\rangle$ soit σ-mesurable pour tout $\varphi \in F$.

EXEMPLE Reprenons l'exemple 8.3. Soient $A \subset [0,1]$ et $\epsilon : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}^{[0,1]} : \lambda \longmapsto 1_A(\lambda) \cdot 1_{\{\lambda\}}$. L'ensemble $\mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, 1_A \cdot \mathbb{K} \cdot 1_{\{\diamond\}}\right)$ est formé des classes modulo l'égalité $\lambda_{[0,1]}$-p.p. de fonction ζ quelconques sur $[0,1]$ telles que $\zeta = 0$ sur $\complement A$ et $\int^* |\zeta|^2 \, d\lambda_{[0,1]}$. On a $\Big| |\epsilon\rangle\langle\epsilon| \left(\mathbb{K}^{([0,1])}\right) \Big\rangle = \{0\}$, donc $\mathbf{L}^2\left(\lambda_{[0,1]}, 1_A \cdot \mathbb{K} \cdot 1_{\{\diamond\}}\right) = \{0\}$, mais

$$\mathbf{L}^2\left(\lambda_{[0,1]}\right) \cdot 1_A \cdot 1_{\{\diamond\}} = 1_A \cdot \mathbf{L}^2\left(\lambda_{[0,1]}\right) \subset \mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, 1_A \cdot \mathbb{K} \cdot 1_{\{\diamond\}}\right) \ .$$

THEOREME *La famille de noyaux $|\epsilon\rangle\langle\epsilon|$ est scalairement σ-intégrable si, et seulement si, ϵ est scalairement de carré σ-intégrable, i.e. $\langle\epsilon| F\rangle \subset \mathbf{L}^2(\sigma)$.*

Dans ce cas

(i) Pour que $\int \mathbb{K} \cdot \epsilon \, d\sigma$ soit un sous-espace hilbertien de $F^\dagger$, il faut et il suffit que

$$\langle\epsilon| : \varphi \longmapsto \langle\epsilon|\varphi\rangle : F \longrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma)$$

soit continue pour la topologie de Mackey sur F .

(ii) Soit $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ un sous-espace hilbertien de $F^\dagger$ de noyau h . Pour que l'on ait

$$\mathcal{H} = \int \mathbb{K} \cdot \epsilon \, d\sigma \ ,$$

il faut et il suffit que

$$\|h\varphi\|_{\mathcal{H}} = \|\langle\epsilon|\varphi\rangle\|_2 \quad \textit{pour tout } \varphi \in F \ .$$

(iii) On a

$$\Big| |\epsilon\rangle\langle\epsilon|(F) \Big\rangle \Big\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) \Big| \subset \mathbf{L}^2(\sigma, \mathbb{K} \cdot \epsilon) \subset \mathbf{L}^2(\sigma) \cdot \epsilon \subset \mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathbb{K} \cdot \epsilon) \ ,$$

et les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) *La décomposition* $\int \mathbb{K} \cdot \epsilon \, d\sigma$ *est non-dégénérée.*

(b) *Toute partie* σ*-mesurable* A *telle que* $1_A \cdot \epsilon = 0$ *scalairement* σ*-p.p. est localement* σ*-négligeable.*

(c) $\left| \langle \epsilon | F \rangle \right\rangle \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) \right|$ *est dense dans* $\mathbf{L}^2(\sigma)$.

(d) *On a* $\mathbf{L}^2(\sigma, \mathbb{K} \cdot \epsilon) = \mathbf{L}^2(\sigma) \cdot \epsilon$.

(iv) *Si* $\epsilon : \Lambda \longrightarrow F^\dagger$ *est continue, plus généralement* σ*-mesurable au sens de Lusin, alors la décomposition* $\int \mathbb{K} \cdot \epsilon \, d\sigma$ *est non-dégénérée.*

(v) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *La décomposition est directe, i.e.* $\mathcal{H} = \int^{\boxplus} \mathbb{K} \cdot \epsilon \, d\sigma$.

(b) *L'application*

$$\zeta \longmapsto \int \zeta \cdot \epsilon \, d\sigma : \mathbf{L}^2(\sigma) \longrightarrow \mathcal{H}$$

est unitaire.

(c) $\langle \epsilon | F \rangle$ *est dense dans* $\mathbf{L}^2(\sigma)$.

La première partie n'est qu'une reformulation du lemme 5.12.iv, puisque

$$|\epsilon\rangle \langle \epsilon | \varphi = \langle \epsilon | \varphi \rangle \cdot \epsilon \ ,$$

donc

$$\left\| \, |\epsilon\rangle \langle \epsilon | \varphi \right\|_\diamond = \| \langle \epsilon | \varphi \rangle \cdot \epsilon \|_\diamond = |\langle \epsilon | \varphi \rangle| \ ,$$

en remarquant que $\epsilon_\lambda = 0$ entraîne évidemment $\langle \epsilon_\lambda | \varphi \rangle = 0$.

Dmonstration de (i) C'est l'équivalence (ii)$\Longleftrightarrow$(iii) du théorème 5.13.

Dmonstration de (ii) Cela découle du théorème d'unicité 5.3.

Dmonstration de (iii) Pour tout $\varphi \in F$ et $f \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, on a

$$\left| |\epsilon\rangle \langle \epsilon | \varphi \right\rangle \left\langle f \right| = \overline{f} \cdot \langle \epsilon | \varphi \rangle \cdot \epsilon \quad \text{et} \quad \overline{f} \cdot \langle \epsilon | \varphi \rangle \in \mathbf{L}^2(\sigma) \ ,$$

ce qui prouve l'inclusion $\left| |\epsilon\rangle \langle \epsilon | (F) \right\rangle \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) \right| \subset \mathbf{L}^2(\sigma) \cdot \epsilon$; la remarque montre que $\mathbf{L}^2(\sigma) \cdot \epsilon \subset \mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathbb{K} \cdot \epsilon)$. Pour montrer que $\mathbf{L}^2(\sigma, \mathbb{K} \cdot \epsilon) \subset \mathbf{L}^2(\sigma) \cdot \epsilon$, il nous suffit de prouver que $\mathbf{L}^2(\sigma) \cdot \epsilon$ est un sous-espace vectoriel complet de $\mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathbb{K} \cdot \epsilon)$, puisque $\mathbf{L}^2(\sigma, \mathbb{K} \cdot \epsilon)$ est par définition l'adhérence de $\left| |\epsilon\rangle \langle \epsilon | (F) \right\rangle \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) \right|$ dans $\mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathbb{K} \cdot \epsilon)$. Considérons l'application

$$\Phi : \mathbf{L}^2(\sigma) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma) \cdot \epsilon \subset \mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathbb{K} \cdot \epsilon) : \zeta \longmapsto \zeta \cdot \epsilon \ .$$

On a

$$\|\zeta \cdot \epsilon\|_2^2 = \int_\Lambda^* \|\zeta(\lambda) \cdot \epsilon(\lambda)\|_{\mathbb{K} \cdot \epsilon_\lambda}^2 \, d\sigma(\lambda) = \int_\Lambda^* 1_{\{\epsilon \neq 0\}} \cdot |\zeta|^2 \, d\sigma \leqslant \|\zeta\|_2^2 \ ,$$

ce qui montre que Φ est continue, et

$$\operatorname{Ker} \Phi = \left\{ \theta \in \mathbf{L}^2(\sigma) \;\middle|\; \int^* 1_{\{\epsilon \neq 0\}} \cdot |\theta|^2 \, d\sigma = 0 \right\} \ .$$

La norme sur $\mathbf{L}^2(\sigma) / \operatorname{Ker} \Phi$, qui est un espace de Hilbert, est donnée par

$$\|\zeta + \operatorname{Ker} \Phi\|^2 = \inf_{\theta \in \zeta + \operatorname{Ker} \mathbf{\Phi}} \|\theta\|_2^2 \ .$$

On a d'une part

$$\|\zeta + \operatorname{Ker} \Phi\|^2 \geqslant \inf_{\theta \in \zeta + \operatorname{Ker} \mathbf{\Phi}} \int_\Lambda^* 1_{\{\epsilon \neq 0\}} \cdot |\theta|^2 \, d\sigma \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\theta \in \operatorname{Ker} \mathbf{\Phi}} \left(\int_\Lambda^* 1_{\{\epsilon \neq 0\}} \cdot |\zeta|^2 \, d\sigma - \int_\Lambda^* 1_{\{\epsilon \neq 0\}} \cdot |\theta - \zeta|^2 \, d\sigma \right) = \int_\Lambda^* 1_{\{\epsilon \neq 0\}} \cdot |\zeta|^2 \, d\sigma \ .$$

D'autre part pour tout $s \in \mathcal{S}(X)$ tel que $s \geqslant 1_{\{\epsilon \neq 0\}} \cdot |\zeta|^2$, en posant $\theta_s := 1_{\left\{s \geqslant |\zeta|^2\right\}} \cdot \zeta$, on a

$$\{\theta_s \neq \zeta\} = \left\{s < |\zeta|^2\right\} \subset \{\epsilon = 0\} \ ,$$

donc $\theta_s \cdot \epsilon = \zeta \cdot \epsilon$, i.e. $\theta_s \in \zeta + \operatorname{Ker} \Phi$. Mais comme $|\theta_s|^2 \leqslant s$, on obtient

$$\|\zeta + \operatorname{Ker} \Phi\|^2 = \inf_{\theta \in \zeta + \operatorname{Ker} \mathbf{\Phi}} \|\theta\|_2^2 \leqslant \int^* |\theta_s|^2 \, d\sigma \leqslant \int^* s \, d\sigma \ .$$

En prenant l'infimum on obtient finalement

$$\|\zeta + \operatorname{Ker} \Phi\|^2 = \int^* 1_{\{\epsilon \neq 0\}} \cdot |\zeta|^2 \, d\sigma = \|\zeta \cdot \epsilon\|_2^2$$

et montre que $\mathbf{L}^2(\sigma) \cdot \epsilon \approx \mathbf{L}^2(\sigma) / \operatorname{Ker} \Phi$ est complet.

Ces inclusions montrent l'équivalence (c)$\Longleftrightarrow$(d).

(a) $\Longleftrightarrow$ (b) La formule de polarisation montre que $1_A \cdot |\epsilon\rangle \langle\epsilon| = 0$ scalairement σ-p.p. est équivalent à $1_A \cdot \epsilon = 0$ scalairement σ-p.p.

(b) $\Rightarrow$ (c) Si $g \in \mathbf{L}^2(\sigma)$ est orthogonal à $\left| \langle\epsilon| F\rangle \right\rangle \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) \right|$, pour tout $\varphi \in F$, on a

$$\int |g| \cdot |\langle\epsilon| \varphi\rangle| \cdot 1_{\{g \neq 0\}} \, d\sigma = \int g \cdot \langle\epsilon| \varphi\rangle \cdot \overline{\operatorname{signum} g} \cdot \overline{\operatorname{signum} \langle\epsilon| \varphi\rangle} \cdot 1_{\{g \neq 0\}} \, d\sigma = 0 \ ,$$

puisque $\overline{\operatorname{signum} g} \cdot \operatorname{signum} \overline{\langle\epsilon| \varphi\rangle} \cdot 1_{\{g \neq 0\}} \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, donc $1_{\{g \neq 0\}} \cdot \langle\epsilon| \varphi\rangle = 0$ σ-p.p. ; (b) montre alors que $\{g \neq 0\}$ est localement σ-négligeable, donc σ-négligeable puisque cet ensemble est σ-modéré. Ceci finit de prouver que $g = 0$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Si K est une partie compacte telle que, pour tout $\varphi \in F$, on ait $1_K \cdot \langle\epsilon| \varphi\rangle = 0$ σ-p.p. , alors $1_K \perp \left| \langle\epsilon| F\rangle \right\rangle \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) \right|$, donc $\sigma(K) = 0$.

(c) $\Longleftrightarrow$ (d) C'est une conséquence des inclusions, car on a

$$\left| |\epsilon\rangle \langle\epsilon| (F) \right\rangle \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) \right| = \left[\left| \langle\epsilon| F\rangle \right\rangle \left\langle \mathbf{L}^\infty(\sigma) \right| \right] \cdot \epsilon \ .$$

Dmonstration de (iv) Par hypothèse on a $\epsilon \neq 0$ partout, donc $\epsilon \neq 0$ scalairement localement σ-p.p. par le lemme 8.3.ii.

Dmonstration de (v) C'est immédiat par définition et (iii). $\square$

EXEMPLE 1 (Décomposition triviale) Si σ une intégrale de Radon sur un espace localement compact Λ , alors

$$\mathbf{L}^2(\sigma) = \int^{\boxplus} \mathbb{K} \cdot \varepsilon_\lambda \, d\sigma(\lambda) \quad \text{dans } \mathcal{M}(\Lambda) \ ,$$

où ε_λ désigne l'intégrale de Dirac au point $\lambda \in \Lambda$.

L'application $\varepsilon : \Lambda \longrightarrow \mathcal{M}(\Lambda) : \lambda \longmapsto \varepsilon_\lambda$ est un homéomorphisme sur son image. Les noyaux de $\mathbf{L}^2(\sigma) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma)$ et $\mathbb{K} \cdot \varepsilon_\lambda \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$ sont respectivement

$$\varphi \longmapsto \varphi \cdot \sigma \quad \text{et} \quad |\varepsilon_\lambda\rangle \langle\varepsilon_\lambda| : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(X) \ ;$$

en outre, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(\Lambda)$, on a

$$\langle\varepsilon|\, \varphi\rangle = \varphi \ ,$$

donc

$$\left\| \, |\varepsilon\rangle \langle\varepsilon|\, \varphi \right\|_\diamond = |\langle\varepsilon|\, \varphi\rangle| = |\varphi| \ \ ,$$

et par suite

$$\left\| \, |\varepsilon\rangle \langle\varepsilon|\, \varphi \right\|_2^2 = \int |\varphi|^2 \ d\sigma = \|\varphi\|_2^2 \ .$$

Le théorème (ii) montre que $(\sigma, \mathbb{K} \cdot \varepsilon)$ est une décomposition de $\mathbf{L}^2(\sigma)$. Elle est non-dégénérée par (iv). Comme $\langle\varepsilon|\, \mathcal{K}(X)\rangle = \mathcal{K}(X)$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\sigma)$, la décomposition est directe par (v). $\square$

EXEMPLE 2 (Transformation de Fourier)

Rappelons (cf. exemple 4.3.4) que nous avons posé

$$e_\lambda := e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \diamond} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}^n \ ,$$

et

$$e_\diamond : \lambda \longmapsto e_\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

Alors $(\lambda^n, \mathbb{C} \cdot e_\diamond)$ est une décomposition directe de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, i.e.

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n}^{\boxplus} \mathbb{C} \cdot e_\lambda \, d\lambda \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

En particulier

$$\int |e_\lambda\rangle \langle e_\lambda| \ d\lambda = \mathrm{Id} : \varphi \longmapsto \varphi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

L'application $e_\diamond$ est évidemment continue. C'est en fait un homéomorphisme sur son image. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$, on a

$$\langle e_\diamond|\, \varphi\rangle = \int e^{-2\pi i \cdot \diamond \bullet x} \cdot \varphi(x) \ dx = \mathcal{F}\varphi \ ,$$

donc

$$\left\| \, |e_\diamond\rangle \langle e_\diamond|\, \varphi \right\|_\diamond = |\langle e_\diamond|\, \varphi\rangle| = |\mathcal{F}\varphi| \ \ ,$$

et par suite

$$\left\| \, |e_\diamond\rangle \langle e_\diamond|\, \varphi \right\|_2 = \left(\int |\mathcal{F}\varphi|^2 \ d\lambda^n \right)^{\frac{1}{2}} = \|\mathcal{F}\varphi\|_2 = \|\varphi\|_2$$

par le théorème de Plancherel 4.11. Ceci montre que $(\lambda^n, \mathbb{C} \cdot e_\diamond)$ est une décomposition non-dégénérée de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$. Elle est directe, car

$$\langle e_\diamond|\, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\rangle = \mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

est dense dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Remarquons que, pour tout $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, on a $\widehat{\xi} = \mathcal{F}\xi \cdot e_\diamond$, car

$$\xi = \overset{-1}{\mathcal{F}}\mathcal{F}\xi = \int \mathcal{F}\xi(\lambda) \cdot e_\lambda \, d\lambda$$

par la proposition 4.10.

EXEMPLE 3 Le théorème de Plancherel-Godement (cf. chapitre 9) est une généralisation de ces exemples.

8.5 Calcul fonctionnel mesurable

On considère une décomposition directe

$$\mathcal{H} = \int^{\boxplus} \widehat{\mathcal{H}}\, d\sigma \quad \text{dans } F^{\dagger} \ .$$

Puisque $\int \diamond\, d\sigma : \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \longrightarrow \mathcal{H}$ est unitaire, donc Z_α est unitairement équivalent à M_α , en particulier l'image de $\mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ est $\mathcal{D}(\alpha)$ et

$$\|Z_\alpha \xi\|^2 = \int |\alpha|^2 \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_\diamond^2 d\sigma \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{D}(\alpha) \ ,$$

toute assertion concernant les opérateurs Z_α se prouve donc dans $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$.

REMARQUE Dans la décomposition triviale

$$\mathbf{L}^2(\mu) = \int^{\boxplus} \mathbb{K} \cdot \varepsilon_x\, d\mu(x) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$$

on a $Z = M$!

THEOREME *Soient α, β des fonctions σ-mesurables.*

Z_α est un opérateur normal et $Z_\alpha^* = Z_{\overline{\alpha}}$.

Si A est une partie σ-mesurable sur laquelle α est essentiellement bornée, alors $\mathcal{H}_A \subset D(\alpha)$.

Les noyau de $\mathcal{D}(\alpha) \hookrightarrow \mathcal{H}$ et $Z_\alpha(\mathcal{D}(\alpha)) \hookrightarrow \mathcal{H}$ sont respectivement $Z_{\langle\alpha\rangle^{-1}}$ et $Z_{|\alpha|^2 \cdot \langle\alpha\rangle^{-1}}$

(i) Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a $Z_{a\cdot\alpha} = a \cdot Z_\alpha$.

(ii) Si $|\alpha| \leqslant a \cdot |\beta| + b$ pour certaines constantes $a, b \in \mathbb{R}_+$, alors $D(\beta)$ est dense dans $\mathcal{D}(\alpha)$, et

$$Z_\alpha = \overline{Z_{\alpha|D(\beta)}} \ .$$

(iii) $D(Z_\alpha + Z_\beta) = D(\alpha) \cap D(\beta)$ et $Z_{\alpha+\beta} = \overline{Z_\alpha + Z_\beta}$.

(iv) $D(Z_\alpha Z_\beta) = D(\alpha\beta) \cap D(\beta)$ et $Z_{\alpha\beta} = \overline{Z_\alpha Z_\beta}$.

(v) Si $\beta \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, alors

$$Z_{\alpha+\beta} = Z_\alpha + Z_\beta \quad \text{et} \quad Z_{\alpha\beta} = Z_\alpha Z_\beta \ .$$

(vi) Si $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions σ-mesurables telle que

$$\alpha = \lim_k \alpha_k \quad \sigma\text{-p.p.} \quad \text{et} \quad |\alpha_k| \leqslant a \cdot |\beta| + b \text{ pour certains } a, b \in \mathbb{R}_+ \ ,$$

alors pour tout $\xi \in D(\beta)$, on a

$$Z_\alpha \xi = \lim_k Z_{\alpha_k} \xi \quad \text{dans } \mathcal{H} \ .$$

En particulier on peut prendre la suite $\left(1_{\{|\alpha| \leqslant k\}} \cdot \alpha\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et on a la formule pour tout $\xi \in D(\alpha)$.

(vii) Pour que $\xi \in \operatorname{Ker} Z_\alpha$ *, il faut et il suffit que*

$$\widehat{\xi} = 0 \quad \sigma\text{-}p.p.\ sur\ \{\alpha \neq 0\} \ ,$$

i.e.

$$\operatorname{Ker} Z_\alpha = \mathcal{H}_{\{\alpha=0\}} \ .$$

(viii) On a $Z_\alpha = 0$ *si, et seulement si,* $\alpha = 0$ σ*-p.p. . En particulier si* $\alpha = \beta$ σ*-p.p. , alors* $Z_\alpha = Z_\beta$ *.*

(ix) Pour que Z_α *soit injectif, il faut et il suffit que l'on ait* $\alpha \neq 0$ σ*-p.p. . Dans ce cas* Z_α *est d'image dense et en définissant*

$$\frac{1}{\alpha} : \Lambda \longrightarrow \mathbb{K} : \lambda \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{\alpha(\lambda)} & \alpha(\lambda) \neq 0 \\ & si \\ 0 & \alpha(\lambda) = 0 \end{cases} \ ,$$

on a $Z_\alpha^{-1} = Z_{\frac{1}{\alpha}}$ *.*

(x) Pour que Z_α *soit auto-adjoint, il faut et il suffit que* α *soit réelle* σ*-p.p. .*

(xi) Si $\alpha \leqslant \beta$ σ*-p.p. , alors* $Z_\alpha \leqslant Z_\beta$ *, i.e.* $(\xi|\, Z_\alpha \xi) \leqslant (\xi|\, Z_\beta \xi)$ *pour tout* $\xi \in D(\alpha) \cap D(\beta)$ *.*

(xii) Pour que Z_α *soit auto-adjoint positif, il faut et il suffit que* $\alpha \geqslant 0$ σ*-p.p. .*

(xiii) Pour tout $z \in \mathbb{C}$*, on a*

$$\operatorname{Ker}(Z_\alpha - z \cdot \mathrm{Id}) = \mathcal{H}_{\{\alpha=z\}} \ .$$

Pour que $z \in \operatorname{Sp}_p T$ *, il faut et il suffit que* $\sigma(\{\alpha = z\}) > 0$ *.*

(xiv) On a $\|Z_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$ *. En particulier* $Z_\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *si, et seulement si,* $\alpha \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$ *.*

(xv) Pour que Z_α *soit inversible, il faut et il suffit que*

$$\sigma(\{\alpha = 0\}) = 0 \quad et \quad \frac{1}{\alpha} \in \mathbf{L}^\infty(\sigma) \ .$$

(xvi) Pour que $z \in \operatorname{Sp} Z_\alpha$*, il faut et il suffit que* $\sigma^*(\{\alpha \in U\}) > 0$ *pour tout voisinage (ouvert)* U *de* z *.*

Toute ces assertions découlent à l'aide de manipulations sur des fonctions du théorème 8.1. La partie initiale de (i).

Dmonstration de (i) C'est immédiat.

Dmonstration de (ii) L'inégalité montre que $D(\beta) \subset \mathcal{D}(\alpha)$, car pour tout $\eta \in D(\beta)$, on a

$$\|\alpha \cdot \widehat{\eta}\|_2 \leqslant \|(a \cdot |\beta| + b) \cdot \widehat{\eta}\|_2 \leqslant a \cdot \|\beta \cdot \widehat{\eta}\|_2 + b \cdot \|\widehat{\eta}\|_2 < \infty \ .$$

Soit $\xi \in \mathcal{D}(\alpha)$ et posons $B_k := \{|\beta| \leqslant k\}$. On a $1_{B_k} \cdot \widehat{\xi} \in D(\beta)$, et

$$\left\|1_{B_k} \cdot \widehat{\xi} - \widehat{\xi}\right\|_\alpha^2 = \int \left(1 + |\alpha|^2\right) \cdot |1_{B_k} - 1|^2 \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_2^2 d\sigma$$

tend vers 0 par le théorème de Lebesgue, puisque $\left(1 + |\alpha|^2\right) \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_2^2 \in \mathbf{L}^1(\sigma)$. La formule découle alors de la proposition 7.2.

Dmonstration de (iii) C'est immédiat par (ii), car $|\alpha|, |\beta|, |\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$, donc

$$D(|\alpha| + |\beta|) \subset D(\alpha) \cap D(\beta) \subset D(\alpha + \beta)$$

et $D(|\alpha| + |\beta|)$ est dense dans $\mathcal{D}(\alpha + \beta)$.

Dmonstration de (iv) C'est aussi immédiat par (ii), car $|\alpha \cdot \beta|, |\beta| \leqslant |\alpha \cdot \beta| + |\beta|$.

Dmonstration de (v) Cela découle du fait que $T + S$ et TS sont fermés, si T est fermé et $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (cf. proposition 7.1.iii et lemme 7.3).

Dmonstration de (vi) C'est une conséquence du théorème de Lebesgue, puisque

$$\left\|\alpha_k \cdot \widehat{\xi} - \alpha \cdot \widehat{\xi}\right\|_2^2 = \int |\alpha_k - \alpha|^2 \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_\diamond^2 d\sigma$$

et que

$$|\alpha_k - \alpha|^2 \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_\diamond^2 \leqslant 8 \cdot \left(a^2 |\beta|^2 + b^2\right) \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_\diamond^2 \in \mathbf{L}^1(\sigma) \ .$$

Dmonstration de (vii) Pour que $\xi \in \operatorname{Ker} Z_\alpha$, il faut et il suffit que $\xi \in D(\alpha)$ et $\|Z_\alpha \xi\| = 0$, donc que $\alpha \cdot \widehat{\xi} \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ et $\int |\alpha|^2 \left\|\widehat{\xi}\right\|_\diamond^2 d\sigma = 0$, et par suite que $\alpha \cdot \widehat{\xi} = 0$ σ-p.p. .

Dmonstration de (viii) On a $Z_\alpha = 0$ si, et seulement si, $\mathcal{H}_{\{\alpha=0\}} = \operatorname{Ker} Z_\alpha = \mathcal{H}$ d'après (vii), ce qui signifie que $\mathcal{H}_{\{\alpha\neq 0\}} = \{0\}$, donc que $\sigma(\{\alpha \neq 0\}) = 0$ puisque la décomposition est non-dégénérée.

Dmonstration de (ix) Grâce à (vii) Z_α est injectif si, et seulement si, $\mathcal{H}_{\{\alpha=0\}} = \{0\}$, i.e. si $\alpha \neq 0$ σ-p.p. puisque la décomposition est non-dégénérée. On alors

$$(\operatorname{Im} Z_\alpha)^\perp = \operatorname{Ker} Z_\alpha^* = \operatorname{Ker} Z_{\overline{\alpha}} = \operatorname{Ker} Z_\alpha = \{0\}$$

par la remarque 7.3.2, ce qui montre que Z_α est d'image dense. En outre

$$\overline{Z_\alpha Z_{\frac{1}{\alpha}}} = \overline{Z_{\frac{1}{\alpha}} Z_\alpha} = Z_{\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}} = Z_1 = \mathrm{Id}$$

par (viii), et comme la formule $(*)$ de 8.2 montre que $\alpha \cdot \mathbf{L}^2_\alpha\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) = \mathbf{L}^2_{\frac{1}{\alpha}}\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$, on obtient $Z_\alpha^{-1} = Z_{\frac{1}{\alpha}}$.

Dmonstration de (x) Cela découle de (viii), puisque $Z_\alpha = Z_{\overline{\alpha}}$ est équivalent à

$$0 = \overline{Z_\alpha - Z_{\overline{\alpha}}} = Z_{\alpha - \overline{\alpha}} \ .$$

Dmonstration de (xi) On a évidemment

$$(\xi | Z_\alpha \xi) = \int \alpha \cdot \left(\widehat{\xi} \middle| \widehat{\xi}\right) d\sigma \leqslant \int \beta \cdot \left(\widehat{\xi} \middle| \widehat{\xi}\right) d\sigma = (\xi | Z_\beta \xi) \ .$$

Dmonstration de (xii) Il nous suffit par (xi) de prouver la nécessité. Mais d'après (x) la fonction α est réelle σ-p.p. et, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant \left(Z_{\{-k\leqslant\alpha<0\}}\xi \middle| Z_\alpha Z_{\{-k\leqslant\alpha<0\}}\xi\right) = \int \alpha \cdot 1_{\{-k\leqslant\alpha<0\}} \cdot \|\xi\|^2 d\sigma \leqslant 0 \ ,$$

donc $1_{\{\alpha<0\}} \cdot \widehat{\xi} = 0$ σ-p.p. . Ceci montre que $\mathcal{H}_{\{\alpha<0\}} = \{0\}$, et par suite que $\sigma(\{\alpha < 0\}) = 0$, puisque la décomposition est non-dégénérée.

Dmonstration de (xiii) En effet $Z_\alpha - z \cdot \mathrm{Id} = Z_{\alpha - z}$ par (v), donc

$$\operatorname{Ker}(Z_\alpha - z \cdot \mathrm{Id}) = \operatorname{Ker} Z_{\alpha - z} = \mathcal{H}_{\{\alpha = z\}}$$

grâce à (vii). Ainsi $z \in \mathrm{Sp}_p$ si, et seulement si, $\mathcal{H}_{\{\alpha=c\}} \neq \{0\}$, ce qui signifie que $\sigma^*(\{\alpha = c\}) > 0$ puisque la décomposition est non-dégénérée.

Dmonstration de (xiv) Tout d'abord on a $\|Z_\alpha\| \leqslant \|\alpha\|_\infty$ par la proposition 8.1. Si $0 \leqslant a < \|\alpha\|_\infty$, alors $\sigma^*(\{|\alpha| > a\}) > 0$, donc $\sigma^*(\{k \geqslant |\alpha| > a\}) > 0$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Ainsi pour tout $\xi \in \mathcal{H}_{\{k\geqslant|\alpha|>a\}} \neq \{0\}$, on a $\widehat{\xi} = 0$ σ-p.p. sur $\complement\{k \geqslant |\alpha| > a\}$ et il vient

$$\|Z_\alpha \xi\|^2 = \int |\alpha|^2 \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_\diamond^2 d\sigma \geqslant \int a^2 \cdot 1_{\{k\geqslant|\alpha|>a\}} \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_\diamond^2 d\sigma = a^2 \cdot \|\xi\|^2 \neq 0\,;$$

on en déduit que $\|Z_\alpha\| \geqslant a$.

Dmonstration de (xv) La condition de (ii) est suffisante, car $\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1$ σ-presque partout, donc

$$Z_{\frac{1}{\alpha}} Z_\alpha \subset Z_1 = \mathrm{Id} = Z_\alpha Z_{\frac{1}{\alpha}}$$

par la proposition, (iv) et (v). Réciproquement, puisque Z_α est injectif, on a

$$\{0\} = \mathrm{Ker}\, Z_\alpha = \mathcal{H}_{\{\alpha=0\}}\ ,$$

donc $\sigma(\{\alpha = 0\}) = 0$. Comme $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$ σ-presque partout, il vient $Z_\alpha Z_{\frac{1}{\alpha}} \subset \mathrm{Id}$, donc $Z_{\frac{1}{\alpha}} = Z_\alpha^{-1}$ sur $D\left(Z_\alpha Z_{\frac{1}{\alpha}}\right) = D(1) \cap D\left(\frac{1}{\alpha}\right) = D\left(\frac{1}{\alpha}\right)$. Puisque $Z_{\frac{1}{\alpha}}$ est fermé, on en déduit que

$$Z_{\frac{1}{\alpha}} = Z_\alpha^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\ ,$$

donc que $\frac{1}{\alpha} \in L^\infty(\sigma)$ par (i).

Dmonstration de (xvi) Finalement remarquons que $z \notin \mathrm{Sp}\, Z_\alpha$ est équivalent à l'inversibilité de $Z_\alpha - c \cdot \mathrm{Id} = Z_{\alpha-c}$, donc à $\sigma(\{\alpha = z\}) = 0$ et $\frac{1}{\alpha-c} \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$. Mais ceci signifie qu'il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que $|\alpha - z| \geqslant \varepsilon$ σ-p.p. , donc que

$$\sigma(\{\alpha \in B(z,\varepsilon)\}) = 0\ .$$

□

EXERCICE Si α est une fonction σ-mesurable $\geqslant 0$, montrer que

$$Z_\alpha = Z_{\sqrt{\alpha}} Z_{\sqrt{\alpha}}\ .$$

Peut-on généraliser ce résultat ? Au lecteur la fantaisie !

8.6 Le théorème spectral

DEFINITION Soit T un opérateur fermé dans $\mathcal{H}$. Nous dirons qu'une décomposition directe non-dégénérée $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ de $\mathcal{H}$ dans $F^\dagger$ est une *diagonalisation* de T si

$$T = Z_\kappa$$

pour une certaine fonction σ-mesurable κ sur Λ . On dit alors que T est *diagonalisable* par $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}, \kappa\right)$ dans $F^\dagger$.

Nous désignerons par $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ le plus petit espace vectoriel $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ contenant $\mathcal{C}^0(\mathbb{C})$ et ayant la propriété :

Si (f_k) est une suite de $\mathcal{V}$ convergente ponctuellement vers une fonction f telle que, pour certains $a, b \in \mathbb{R}_+$, on ait $|f_k| \leqslant a \cdot |f| + b$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $f \in \mathcal{V}$.

On peut montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ est l'espace vectoriel des fonctions boréliennes sur $\mathbb{C}$, mais il est plus important de constater que pour toute fonction σ-mesurable α et toute fonction $f \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$, la fonction $f \circ \alpha$ est σ-mesurable.

THEOREME *Soit T un opérateur fermé dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) T *est normal.*

(ii) *L'algèbre $\mathcal{A}(T)$ est commutative.*

(iii) *Il existe un espace localement convexe tonnelé F tel que $\mathcal{H}$ soit un sous-espace hilbertien de $F^\dagger$ et que T soit diagonalisable dans $F^\dagger$.*

Dans ce cas, il existe une unique application $f \longmapsto f(T)$ de $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ dans l'ensemble des opérateurs normaux dans $\mathcal{H}$ telle que

$$f(T) = Z_{f \circ \kappa} : \xi \longmapsto \int f \circ \kappa \cdot \widehat{\xi}\, d\sigma$$

quelle que soit la diagonalisation de T .

(i) $\Rightarrow$ (ii) C'est le corollaire 7.8.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Puisque $\mathcal{A}(T) = \mathcal{A}(A, B)$ est commutative, le théorème 6.10 montre que $\mathcal{A}(T)$ est isomorphe à $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A}(T))$ et que $\operatorname{Sp} \mathcal{A}(T)$ s'identifie à la fermeture de $\operatorname{Sp} T$ dans la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Pour tout $\xi \in \mathcal{H} \smallsetminus \{0\}$, la forme linéaire

$$f \longmapsto (\xi |\, f(T)\, \xi) : \mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A}(T)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

est positive, donc définit une intégrale de Radon σ_ξ sur $\operatorname{Sp} \mathcal{A}(T)$. L'application

$$\mathcal{C}(\operatorname{supp} \sigma_\xi) \longrightarrow \mathcal{H} : f \longmapsto f(T)\, \xi$$

est une isométrie :

$$\|f(T)\xi\|^2 = (\xi\,|f(T)^* f(T)\xi) = \left(\xi\,\middle||f|^2(T)\xi\right) = \int |f|^2\,d\sigma_\xi\ .$$

Ceci montre que $\mathbf{L}^2(\sigma_\xi)$ est isomorphe à la fermeture $\mathcal{H}_\xi$ du sous-espace vectoriel $F_\xi := \mathcal{A}(T)\xi$ dans $\mathcal{H}$, la multiplication par f dans $\mathbf{L}^2(\sigma_\xi)$ correspondant à l'opérateur induit par $f(T)$ dans $\mathcal{H}_\xi$. On a

$$\mathbf{L}^2(\sigma_\xi) = \int^{\boxplus} \mathbb{C}\cdot\varepsilon_\lambda\,d\sigma_\xi(\lambda)$$

dans $\mathcal{M}(\operatorname{supp}\sigma_\xi)$; comme

$$F_\xi \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{supp}\sigma_\xi) : f(T)\xi \longmapsto f$$

est une bijection, par transposition on obtient une bijection

$$\Phi : \mathcal{M}(\operatorname{supp}\sigma_\xi) \longrightarrow F_\xi^\dagger$$

donc une décomposition directe de $\mathcal{H}_\xi$ dans $F_\xi^\dagger$:

$$\mathcal{H}_\xi = \int^{\boxplus} \mathbb{C}\cdot\Phi\varepsilon_\lambda\,d\sigma_\xi(\lambda)\ .$$

En rappelant que

$$a := \langle\mathrm{id}\rangle^{-1} \quad \text{et} \quad b := \mathrm{id}\cdot\langle\mathrm{id}\rangle^{-1}\ ,$$

on a

$$a(T) = (\mathrm{Id} + T^*T)^{-1} = A \quad \text{et} \quad b(T) = T(\mathrm{Id} + T^*T)^{-1} = B\ .$$

En considérant les restrictions a_ξ , b_ξ et κ_ξ de a , b et id à $\operatorname{supp}\sigma_\xi \smallsetminus \{\infty\}$, prolongée par 0 à l'infini si nécessaire, les opérateurs induit par A , B et $T = \overline{BA^{-1}}$ dans $\mathcal{H}_\xi$ sont alors respectivement égaux à Z_{a_ξ} , Z_{b_ξ} et

$$\overline{Z_{b_\xi} Z_{\frac{1}{a_\xi}}} = \overline{Z_{\frac{b_\xi}{a_\xi}}} = \overline{Z_{\mathrm{id}_\xi}}\ ,$$

car $\sigma_\xi(\{\infty\}) = 0$.

Il suffit alors de constater, par le lemme de Zorn, qu'il existe une famille $(\xi_j)_{j\in J}$ telle que

$$\mathcal{H} = \boxplus_{j\in J} \mathcal{H}_{\xi_j}\ ,$$

et on pose

$$(\Lambda,\sigma) := \biguplus_{j\in J}\left(\operatorname{supp}\sigma_{\xi_j}, \sigma_{\xi_j}\right) \quad , \quad F := \bigoplus_{j\in J} F_{\xi_j} \quad , \quad \kappa := \kappa_{\xi_j} \text{ sur } \operatorname{supp}\sigma_{\xi_j}\ .$$

(iii) ⇒ (i) C'est une conséquence évidente du calcul fonctionnel mesurable (théorème 8.5).

Le reste est alors facile. □

DEFINITION On dit que $f \longmapsto f(T)$ est le *calcul fonctionnel mesurable* associé à l'opérateur T . Il nous permet de définir toute une série d'opérateurs à partir de T :

(a) Si P est un polynôme complexe à deux variables, alors en posant $f(\lambda) := P(\lambda,\bar\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $f(T) = P(T,T^*)$ en général, mais dans certains cas il est nécessaire de prendre la fermeture de $P(T,T^*)$. Par exemple si $P(X,Y) = X - Y$ et T est auto- adjoint, on a $f \circ \kappa = 0$ σ-p.p. , donc $f(T) = 0$; par contre $T - T^*$ est nul, mais seulement défini sur $D(T)$!

(b) $T^{\frac{1}{2}}$, si T est auto-adjoint positif.

(c) $|T| := (T^*T)^{\frac{1}{2}}$, si T est un opérateur fermé quelconque.

(d) $T^{\pm}$ tels que $T = T^+ - T^-$ et $T^{\pm}$ auto-adjoints positifs, si T est auto-adjoint.

(e) e^T , $\sin\ T$, $\cos\ T$, etc...

(f) $\ln T$, et $T^z := e^{z \cdot \ln\ T}$ pour $z \in \mathbb{C}$, si T est auto-adjoint positif injectif (i.e. $0 \notin \mathrm{Sp}_p T$), et plus généralement si l'on peut définir une branche du logarithme sur $\mathrm{Sp}\, T$.

8.7 Equations d'évolution

Le calcul fonctionnel nous permet de résoudre certaines équations aux dérivées partielles dont l'une des variables, en général celle du temps, joue un rôle particulier. Considérons par exemple une équation du type

$$\partial_t \zeta (t, x) = L_x \zeta (t, x) \ .$$

On l'interprète comme une équation différentielle ordinaire à valeurs vectorielles, en considérant L_x comme un opérateur dans un certain espace de fonctions ne dépendant que de la variable x .

C'est l'exemple typique d'une *équation d'évolution*

$$\partial \zeta = T \zeta \ ,$$

où T est un opérateur dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

DEFINITION Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que $\zeta : I \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ est une *solution* de cette équation si ζ est dérivable dans $\mathcal{H}$, i.e. pour tout $t \in I$,

$$\partial \zeta (t) := \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \cdot [\zeta (t+s) - \zeta (t)] \quad \text{existe dans } \mathcal{H} \ ,$$

et si

$$\partial \zeta (t) = T \zeta (t) \quad \text{pour tout } t \in I \ .$$

Dans ce cas, $\zeta : J \longrightarrow \mathcal{H}$ est continue.

Remarquons qu'une solution ζ est continûment dérivable, i.e. $\partial_t \zeta : I \longrightarrow \mathcal{H}$ est continue si, et seulement si $T\zeta : I \longrightarrow \mathcal{H}$ est continue, i.e. $\zeta : I \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ est continue.

On la

PROPOSITION *Soit T un opérateur normal dans $\mathcal{H}$ diagonalisé par $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}, \kappa\right)$ dans $F^\dagger$. Etant donné $t \in I$, on a*

$$T e^{tT} = Z_{\kappa \cdot e^{t\kappa}} \ ;$$

en particulier $\xi \in D\left(T e^{tT}\right)$ si, et seulement si,

$$\kappa \cdot e^{t\kappa} \cdot \left\| \widehat{\xi} \right\| \in \mathbf{L}^2 (\sigma) \ .$$

Si $\xi \in D\left(T e^{tT}\right)$ pour tout $t \in I$, alors

$$\zeta : t \longmapsto e^{tT} \xi : I \longrightarrow \mathcal{D}(T)$$

est une solution continûment dérivable de l'équation d'évolution $\partial \zeta = T\zeta$.

La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante, car pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\left| e^{t \cdot z} \right| \leqslant e^{|t \cdot z|} \leqslant e^{|t|} \quad \text{si } |z| \leqslant 1 \ ,$$

donc

$$\left| e^{t \cdot z} \right| \leqslant \left| z \cdot e^{t \cdot z} \right| + e^{|t|} \ ,$$

et le théorème 8.5.ii montre que $D(\kappa \cdot e^{t\cdot\kappa}) \subset D(e^{t\cdot\kappa})$. La formule en découle également.

Il nous reste à prouver que ζ est continûment dérivable et satisfait à l'équation d'évolution. Etant donné $t \in I$, soit $[a,b]$ un voisinage de t dans I . Si $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers 0 telle que $t+\varepsilon_k \in [a,b]$, on a

$$\frac{1}{\varepsilon_k} \cdot \left[e^{(t+\varepsilon_k)\cdot T}\xi - e^{t\cdot T}\xi\right] = f_k(T)\,\xi$$

en ayant posé

$$f_k := \frac{1}{\varepsilon_k} \cdot \left[e^{(t+\varepsilon_k)\cdot \mathrm{id}} - e^{t\cdot \mathrm{id}}\right] \ ,$$

puisque $\xi \in D\left(e^{t\cdot T}\right)$ pour tout $t \in I$. En outre

$$\lim\nolimits_k f_k(z) = z \cdot e^{t\cdot z} \ ,$$

et le théorème de la moyenne montre que

$$|f_k(z)| \leqslant \sup\nolimits_{s\in[a,b]} |z\cdot e^{s\cdot z}| = \sup\nolimits_{s\in[a,b]} \left|z\cdot e^{s\cdot \operatorname{Re} z}\right| \leqslant |z| \cdot \left(e^{a\cdot \operatorname{Re} z} + e^{b\cdot \operatorname{Re} z}\right) = |z\cdot e^{a\cdot z}| + \left|z\cdot e^{b\cdot z}\right| \ .$$

Ainsi

$$|f_k \circ \kappa| \leqslant |\kappa \cdot e^{a\cdot\kappa}| + \left|\kappa\cdot e^{b\cdot\kappa}\right| \quad \text{pour tout } k\in\mathbb{N}\,;$$

mais par hypothèse on a

$$\left[|\kappa \cdot e^{a\cdot\kappa}| + \left|\kappa\cdot e^{b\cdot\kappa}\right|\right] \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_{\diamond} \in \mathbf{L}^2(\sigma) \ ,$$

et le théorème 8.5.vi nous permet de conclure : ζ est dérivable et

$$\partial\zeta(t) = \lim\nolimits_k f_k(T)\,\xi = Z_{\kappa\cdot e^{t\cdot\kappa}}\xi = Te^{t\cdot T}\xi \ .$$

Finalement

$$\lim\nolimits_k \kappa \cdot e^{(t+\varepsilon_k)\cdot \mathrm{id}} = \kappa\cdot e^{t\cdot \mathrm{id}} \quad \text{ponctuellement}$$

et

$$\left|\kappa \cdot e^{(t+\varepsilon_k)\cdot \mathrm{id}}\right| \leqslant |\kappa \cdot e^{a\cdot\kappa}| + \left|\kappa\cdot e^{b\cdot\kappa}\right| \quad \text{pour tout } k\in\mathbb{N}\,;$$

comme ci-dessus on en déduit que

$$\lim\nolimits_k T\zeta(t+\varepsilon_k) = \lim\nolimits_k Te^{(t+\varepsilon_k)\cdot T}\xi = \lim\nolimits_k Z_{\kappa\cdot e^{(t+\varepsilon_k)\cdot\kappa}}\xi = Z_{\kappa\cdot e^{t\cdot\kappa}}\xi = Te^{t\cdot T}\xi = T\zeta(t) \ ,$$

donc que $T\zeta$ est continue, et par suite que $\zeta : I \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ est continue. □

COROLLAIRE ***Equation de la chaleur.*** *Supposons que T est un opérateur auto-adjoint positif de la forme $T = S^*S$ pour un certain opérateur fermé S défini dans $\mathcal{H}$ et à valeurs dans $\mathcal{G}$. Alors pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, l'équation de la chaleur*

$$\partial\zeta + T\zeta = 0$$

possède une unique solution $\zeta : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ continûment dérivable satisfaisant à la condition initiale

$$\lim\nolimits_{t\to 0+} \zeta(t) = \xi \ .$$

On a

$$\zeta(t) = e^{-t\cdot T}\xi \quad \textit{pour tout } t\in I \ ,$$

cette solution est indéfiniment dérivable, satisfait à l'équation

$$\partial^k\zeta + T^k\zeta = 0 \ ,$$

ainsi qu'à

$$\frac{1}{2}\left\|\zeta\left(t\right)\right\|_{\mathcal{H}}^{2}+\int_{0}^{t}\left\|S\zeta\left(s\right)\right\|_{\mathcal{G}}^{2}\,ds=\frac{1}{2}\left\|\xi\right\|_{\mathcal{H}}^{2}$$

pour tout $t>0$ *.*

En outre, si $\xi\in D\left(T\right)$ *, on a*

$$\lim_{t\rightarrow0+}\partial\zeta\left(t\right)+T\xi=0\ .$$

La condition de la proposition appliquée à $-T$ est satisfaite. En effet $\kappa\cdot e^{-t\cdot\kappa}\in\mathbf{L}^{\infty}\left(\sigma\right)$, puisque $z\longmapsto z\cdot e^{-t\cdot z}$ atteint son maximum sur $\mathbb{R}_{+}$ en $\frac{1}{t}$ et que $\kappa\geqslant0$ σ-p.p. par le théorème 8.5.xii. Ceci montre que $t\longmapsto e^{-t\cdot T}\xi$ est une solution continûment dérivable. On prouve par récurrence qu'elle est indéfiniment dérivable et satisfait à l'équation donnée en considérant $-T^{k}$. Par ailleurs, si $\left(t_{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{R}_{+}^{*}$ convergente vers 0 , on a

$$\lim_{k}\exp\left(-t_{k}\cdot\kappa\right)=1\quad\text{pontuellement}$$

et

$$\left|\exp\left(-t_{k}\cdot\kappa\right)\right|\leqslant1\ \sigma\text{-p.p.}\ .$$

Par le théorème 8.5.vi on obtient

$$\lim_{k}\exp\left(-t_{k}\cdot T\right)\xi=\xi\ .$$

Si $\xi\in D\left(T\right)$, on obtient de même la dernière assertion, puisque

$$\lim_{k}\kappa\cdot\exp\left(-t_{k}\cdot\kappa\right)=\kappa\quad\text{ponctuellement}$$

et

$$\left|\exp\left(-t_{k}\cdot\kappa\right)\right|\leqslant\left|\kappa\right|\ \ \sigma\text{-p.p.}\ .$$

Il nous reste à prouver la formule et l'unicité. Si ζ est une solution continûment dérivable, on a

$$\partial\left\|\zeta\right\|_{\mathcal{H}}^{2}=\partial\left(\zeta|\,\zeta\right)_{\mathcal{H}}=\left(\partial\zeta|\,\zeta\right)_{\mathcal{H}}+\left(\zeta|\,\partial\zeta\right)_{\mathcal{H}}=-2\left(\zeta|\,T\zeta\right)_{\mathcal{H}}=$$

$$=-2\left(S\zeta|\,S\zeta\right)_{\mathcal{G}}=-2\left\|S\zeta\right\|_{\mathcal{G}}^{2}\ ,$$

car $D\left(T\right)=D\left(S^{*}S\right)\subset D\left(S\right)$. Il suffit donc d'intégrer entre $\varepsilon>0$ et t , puis de faire tendre ε vers 0 :

$$\left\|\zeta\left(t\right)\right\|_{\mathcal{H}}^{2}-\left\|\xi\right\|_{\mathcal{H}}^{2}=\lim_{\varepsilon\rightarrow0+}\left\|\zeta\left(t\right)\right\|_{\mathcal{H}}^{2}-\left\|\zeta\left(\varepsilon\right)\right\|_{\mathcal{H}}^{2}=\lim_{\varepsilon\rightarrow0+}\int_{\varepsilon}^{t}\partial_{t}\left\|\zeta\right\|_{\mathcal{H}}^{2}=$$

$$=-2\cdot\lim_{\varepsilon\rightarrow0+}\int_{\varepsilon}^{t}\left\|S\zeta\right\|_{\mathcal{G}}^{2}=-2\cdot\int_{0}^{t}\left\|S\zeta\right\|_{\mathcal{G}}^{2}\ .$$

D'autre part, par linéarité, on peut supposer que la condition initiale $\xi=0$; mais alors

$$0\leqslant\left\|\zeta\left(t\right)\right\|_{\mathcal{H}}^{2}=-2\cdot\int_{0}^{t}\left\|S\zeta\right\|_{\mathcal{G}}^{2}\leqslant0\ ,$$

et par suite $\zeta=0$. □

EXEMPLE Classiquement le problème de la diffusion de la chaleur est modélisé par l'équation

$$\partial_{t}\zeta+\not{\Delta}_{D}\zeta=0\ ,$$

où $\not{\Delta}_D$ est l'opérateur de Dirichlet sur un ouvert X de $\mathbb{R}^n$. Il est résolu, grâce au théorème précédent, car on peut montrer, en utilisant la nucléarité de $\mathcal{D}(X)$, que $\not{\Delta}_D$ est diagonalisable dans $\mathcal{D}(X)$. Si X est borné, cette diagonalisation est discrète, i.e.

$$\mathrm{Sp}\,\not{\Delta}_D = \mathrm{Sp}_p\,\not{\Delta}_D \ ,$$

et $\mathcal{H}$ se décompose dans $\mathcal{H}$! En effet l'injection canonique $\mathcal{D}(\not{\Delta}_D) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(X)$ est compacte, donc aussi le noyau de ce sous- espace hilbertien ; ainsi

$$\frac{1}{1+(\mathrm{Sp}\,\not{\Delta}_D)^2} = \mathrm{Sp}\left(\mathrm{Id} + (\not{\Delta}_D)^2\right)^{-1} \smallsetminus \{0\}$$

est discret, et par suite aussi

$$\mathrm{Sp}\,\not{\Delta}_D = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{Sp}\left(\mathrm{Id} + (\not{\Delta}_D)^2\right)^{-1} \smallsetminus \{0\}} - 1} \ .$$

Nous en donnerons dans le numéro suivant une solution explicite pour $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}_+^*$.

8.8 La décomposition de Fourier

Rappelons (cf. exemple 5.14.2) que

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) = \int^{\boxplus} \mathbb{C} \cdot e_\lambda \, d\lambda \ .$$

Cette décomposition est évidemment non-dégérée et, pour tout $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, le champ $\mathcal{F}\xi \cdot e_\diamond$ est la décomposition de Parseval $\widehat{\xi}$ de ξ . En outre les applications

$$g \longmapsto g \cdot e_\diamond : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C} \cdot e_\diamond)$$

et

$$g \longmapsto \int g \cdot e_\diamond \, d\lambda^n : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

sont unitaires : cf. §5.15.

PROPOSITION *Soit $\rho \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\rho > 0$ presque partout.*

(i) Si $\rho \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \rho)$. Si $\frac{1}{\rho} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \rho) \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Pour toute fonction λ^n-mesurable $\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, l'opérateur de multiplication M_α par α et $\alpha(\not\nabla) := Z_\alpha$ sont normaux dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ et, pour tout $\xi \in \mathcal{D}(\alpha) = \int \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \langle\alpha\rangle) \cdot e_\diamond \, d\lambda^n$, on a

$$\alpha(\not\nabla)\,\xi = \int \alpha \cdot \mathcal{F}\xi \cdot e_\lambda \, d\lambda^n = \overset{-1}{\mathcal{F}}(\alpha \cdot \mathcal{F}\xi) \ ,$$

i.e.

$$\alpha(\not\nabla) = \overset{-1}{\mathcal{F}} M_\alpha \mathcal{F} \ .$$

(iii) Si $\alpha \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$, alors M_α et Z_α sont des opérateurs essentiellement normaux sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, on a $\alpha \cdot \mathcal{F}\xi \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$, l'application $y \longmapsto \xi(y) \cdot \left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\alpha\right)_y$ est λ^n-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ et

$$\left(\overline{\alpha}(\not\nabla)_{|\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}\right)^\dagger \xi = \int \alpha(\lambda) \cdot \mathcal{F}\xi(\lambda) \cdot e_\lambda \, d\lambda = \int \xi(y) \cdot \left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\alpha\right)_y \, dy \ .$$

En particulier

$$\alpha(\not\nabla) = \left(\overline{\alpha}(\not\nabla)_{|\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}\right)^\dagger{}_{|\mathcal{D}(\alpha)} \ .$$

Dmonstration de (i) L'inclusion $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \rho)$ est claire si $\rho \in L^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$. D'autre part, si θ est orthogonal à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \rho)$, alors $\int \overline{\varphi} \cdot \theta \cdot \rho = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, donc $\theta = 0$ presque partout par la proposition et l'exemple 3 de 1.16. Ceci prouve que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \rho)$. Si maintenant $\frac{1}{\rho} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $\theta \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \rho)$, on a

$$\int \frac{|\theta|}{\langle \mathrm{id} \rangle^m} = \int |\theta| \cdot \rho^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\rho^{-\frac{1}{2}}}{\langle \mathrm{id} \rangle^m} \leqslant \left(\int |\theta|^2 \cdot \rho \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int \frac{1}{\langle \mathrm{id} \rangle^{2m}} \cdot \frac{1}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \ .$$

Dmonstration de (ii) Remarquons tout d'abord que

$$\mathbf{L}^2_\alpha \left(\mathbb{R}^n, \mathbb{C} \cdot e_\diamond \right) = \mathbf{L}^2 \left(\mathbb{R}^n, \langle \alpha \rangle \right) \cdot e_\diamond \ .$$

Mais comme $\alpha \cdot \mathbf{L}^2 \left(\mathbb{R}^n, \langle \alpha \rangle \right) \subset \mathbf{L}^2 \left(\mathbb{R}^n \right) \subset \mathcal{M}^{\mathrm{mod}} \left(\mathbb{R}^n \right)$, l'exemple 4.10.2 montre que

$$\int \alpha \cdot \mathcal{F}\xi \cdot e_\lambda \, d\lambda^n = \overset{-1}{\mathcal{F}} \left(\alpha \cdot \mathcal{F}\xi \right) \ .$$

Dmonstration de (iii) La première partie est immédiate par (i) et la proposition 7.2.ii. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S} \left(\mathbb{R}^n \right)$ et $\xi \in \mathbf{L}^2 \left(\mathbb{R}^n \right)$, il vient

$$\left\langle \varphi \middle| \overline{\alpha} \left(\nabla\!\!\!\!/ \right)^\dagger \xi \right\rangle = \left(\overline{\alpha} \left(\nabla\!\!\!\!/ \right) \varphi \middle| \xi \right) = \int \alpha \cdot \overline{\mathcal{F}\varphi} \cdot \mathcal{F}\xi = \left\langle \mathcal{F}\varphi \middle| \alpha \cdot \mathcal{F}\xi \right\rangle = \left\langle \varphi \middle| \overset{-1}{\mathcal{F}} \left(\alpha \cdot \mathcal{F}\xi \right) \right\rangle \ ,$$

donc

$$\overline{\alpha} \left(\nabla\!\!\!\!/ \right)^\dagger \xi = \int \alpha \left(\lambda \right) \cdot \mathcal{F}\xi \left(\lambda \right) \cdot e_\lambda \, d\lambda$$

par l'exemple 4.10.2. Quant à la dernière assertion, on a $\overline{\alpha} \cdot \mathcal{F}\varphi \in \mathbf{L}^1 \left(\mathbb{R}^n \right)$ et à nouveau par l'exemple 4.10.2 on peut calculer ponctuellement :

$$\overline{\overline{\alpha} \left(\nabla\!\!\!\!/ \right) \varphi} \left(y \right) = \overline{\int \overline{\alpha \left(\lambda \right)} \cdot \mathcal{F}\varphi \left(\lambda \right) \cdot e_\lambda \left(y \right) \, d\lambda} = \int \alpha \left(\lambda \right) \cdot \overline{\mathcal{F}\varphi_{-y} \left(\lambda \right)} \, d\lambda =$$

$$= \int \alpha \left(\lambda \right) \cdot \left\langle \varphi_{-y} \middle| e_\lambda \right\rangle \, d\lambda = \left\langle \varphi_{-y} \middle| \int \alpha \cdot e_\lambda \, d\lambda \right\rangle = \left\langle \varphi \middle| \left(\overset{-1}{\mathcal{F}} \alpha \right)_y \right\rangle \ ,$$

en ayant utilisé l'une des formules de la proposition 4.9.

Comme $\bar{\alpha} \left(\nabla\!\!\!\!/ \right) \varphi \in \mathbf{L}^2 \left(\mathbb{R}^n \right)$, on en déduit que

$$y \longmapsto \left\langle \varphi \middle| \xi \left(y \right) \cdot \left(\overset{-1}{\mathcal{F}} \alpha \right)_y \right\rangle : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

est intégrable, donc que $y \longmapsto \xi \left(y \right) \cdot \left(\overset{-1}{\mathcal{F}} \alpha \right)_y$ est scalairement λ^n-intégrable dans $\mathcal{S} \left(\mathbb{R}^n \right)'$, car

$$\left\langle \varphi \middle| \overline{\alpha} \left(\nabla\!\!\!\!/ \right)^\dagger \xi \right\rangle = \left(\overline{\alpha} \left(\nabla\!\!\!\!/ \right) \varphi \middle| \xi \right) = \int \overline{\overline{\alpha} \left(\nabla\!\!\!\!/ \right) \varphi} \left(y \right) \cdot \xi \left(y \right) \, dy = \int \xi \left(y \right) \cdot \left\langle \varphi \middle| \left(\overset{-1}{\mathcal{F}} \alpha \right)_y \right\rangle \, dy \ .$$

On a donc

$$\overline{\alpha} \left(\nabla\!\!\!\!/ \right)^\dagger \xi = \int \xi \left(y \right) \cdot \left(\overset{-1}{\mathcal{F}} \alpha \right)_y \, dy \ .$$

Finalement l'application $y \longmapsto \xi \left(y \right) \cdot \left(\overset{-1}{\mathcal{F}} \alpha \right)_y$ est λ^n-intégrable dans $\mathcal{S} \left(\mathbb{R}^n \right)'$ par définition (cf. proposition 3.12), puisque

$$\mathbf{L}^\infty \left(\mathbb{R}^n \right) \cdot \mathbf{L}^2 \left(\mathbb{R}^n \right) \subset \mathbf{L}^2 \left(\mathbb{R}^n \right) \ .$$

□

REMARQUE 1 Pour $\eta \in \mathcal{H}^{(-\infty)}(\mathbb{R}^n) = \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(\mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)\right)$ et $\mu \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) + \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n)$, on peut définir le produit de convolution par

$$\eta * \mu := \int \eta_y \, d\mu(y) \ .$$

Remarquons que $\eta * \delta_y = \eta_y$. En outre, si $\eta \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, on peut montrer que

$$\eta_y : x \longmapsto \eta(x-y)$$

est $\mu-$intégrable pour presque tous les $x \in \mathbb{R}^n$, que $\int \eta(\cdot - y)\, d\mu(y) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ et que

$$\eta * \mu = \int \xi(\cdot - y)\, d\mu(y) \ .$$

Le produit de convolution définit ci-dessus est donc un prolongement du produit de convolution classique.

Pour tout $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, on peut donc écrire

$$\left(\bar{\alpha}(\nabla\!\!\!/)_{|\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}\right)^\dagger \xi = \overset{-1}{\mathcal{F}}\alpha * \xi \ .$$

REMARQUE 2 La condition $\alpha \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$ est nécessaire pour que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset D(\alpha)$.

REMARQUE 3 Un polynôme complexe

$$P := \sum_\alpha c_\alpha \cdot \mathrm{id}^\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

à n variables sur $\mathbb{R}^n$ satisfait évidemment à la condition ci-dessus. Posons

$$L := \sum_\alpha c_\alpha \cdot \partial\!\!\!/^\alpha : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

et calculons $P(\nabla\!\!\!/)$:

Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$P(\nabla\!\!\!/)\varphi = \int P(\lambda) \cdot \mathcal{F}\varphi(\lambda) \cdot e_\lambda \, d\lambda = \int \mathcal{F}(L\varphi)\, e_\lambda \, d\lambda = \overset{-1}{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(L\varphi)) = L\varphi$$

par le théorème 4.9 et l'exemple 4.10.2, ce qui montre que

$$\overline{L} = P(\nabla\!\!\!/)$$

est un opérateur normal. Par la proposition (iii), pour tout $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, on obtient

$$L^\dagger \xi = \left(P(\nabla\!\!\!/)_{|\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}\right)^\dagger \xi = \int \overline{P(\lambda)} \cdot \mathcal{F}\xi(\lambda) \cdot e_\lambda \, d\lambda = \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(\overline{P} \cdot \mathcal{F}\xi\right) \ ,$$

donc

$$D\left(\overline{L}\right) = D(L^*) = \left\{\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \mid L^\dagger\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)\right\} = \left\{\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \mid P \cdot \mathcal{F}\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)\right\} \ .$$

Pour simplifier les notations on ne fait pas de distinction entre $P(\nabla\!\!\!/)$ et L . On considère également $P(\nabla\!\!\!/)$ comme un opérateur différentiel dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.

Remarquons en outre que

$$\int \lambda_j \cdot e_\lambda \, d\lambda = \int \partial\!\!\!/_j e_\lambda \, d\lambda = \partial\!\!\!/_j\left(\int e_\lambda \, d\lambda\right) = \partial\!\!\!/_j \delta \ ,$$

et par suite que

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}P = \int P(\lambda)\, e_\lambda \, d\lambda = \sum_\alpha c_\alpha \cdot \int \lambda^\alpha \cdot e_\lambda \, d\lambda = \sum_\alpha c_\alpha \cdot \not{\partial}^\alpha \delta = P(\not{\nabla})\, \delta \ .$$

Nous avons donc prouvé le

THEOREME *Tout opérateur différentiel à coefficients constants* $P(\not{\nabla}) = \sum_\alpha c_\alpha \cdot \not{\partial}^\alpha$ *sur* $\mathbb{R}^n$ *est essentiellement normal sur* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *, et diagonalisable par* $(\lambda^n, \mathbb{C} \cdot e_\lambda, P)$ *dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ *. Le domaine de définition de sa fermeture est*

$$\left\{ \xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; P \cdot \mathcal{F}\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \right\} \ .$$

Pour tout $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ *, on a*

$$P(\not{\nabla})\, \xi = \overset{-1}{\mathcal{F}}P * \xi = P(\not{\nabla})\, \delta * \xi \ .$$

EXEMPLE 1 On a

$$\frac{1}{4\pi^2} \cdot \Delta_D = \not{\Delta}_D = |\not{\nabla}|^2$$

et son domaine de définition est $\mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R}^n)$.

EXEMPLE 2 Revenons maintenant à la résolution explicite de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^n$. Comme dans la démonstration du corollaire 8.7, et en modifiant celle du théorème 8.5.vi, on montre que pour tout $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$, l'application

$$\zeta : t \longmapsto \int e^{-t \cdot |\lambda|^2} \cdot f(\lambda) \cdot e_\lambda \, d\lambda : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathcal{D}(\not{\Delta}_D)$$

est indéfiniment dérivable, et l'unique solution continûment dérivable de $\partial_t \zeta + \not{\Delta}_D \zeta = 0$ et de condition initiale

$$\xi := \lim_{t \to 0+} \zeta(t) = \int f(\lambda) \cdot e_\lambda \, d\lambda = \overset{-1}{\mathcal{F}} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

On peut même montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'application

$$\Psi_s : \xi \longmapsto \zeta : \mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^{(\infty)}\left(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{H}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)\right)$$

est linéaire et continue. En outre $\mathcal{C}^{(\infty)}\left(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{H}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)\right)$ est un espace localement convexe tonnelé réflexif, donc le dual d'un espace tonnelé.

Calculons la solution E_y , dite élémentaire , de condition initiale

$$\delta_y = \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet y} \cdot e_\lambda \, d\lambda \ .$$

On peut le faire ponctuellement. Il vient

$$E_y(t)(x) = \int e^{-t \cdot |\lambda|^2} \cdot e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet y} \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet x} \, d\lambda = \int e^{-\left[t \cdot |\lambda|^2 - 2\pi i \cdot \lambda \bullet (x-y)\right]} \, d\lambda =$$

$$= \exp\left(-\frac{\pi^2 \cdot |x-y|^2}{t}\right) \cdot \int \exp\left(-t \cdot \left[\lambda - \frac{\pi i \cdot (x-y)}{t}\right]^2\right) d\lambda =$$

$$= \exp\left(-\frac{\pi^2 \cdot |x-y|^2}{t}\right) \cdot \int e^{-t\cdot|\lambda|^2}\, d\lambda = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2 \cdot |x-y|^2}{t}\right) ,$$

en ayant utilisé le théorème de Cauchy. On a donc

$$E_y(t)(x) = E(t)(x-y)$$

en ayant posé

$$E(t) := \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2 \cdot |\mathrm{id}|^2}{t}\right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ .$$

Mais comme $\delta_y = \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(e^{-2\pi i \cdot y \bullet \diamond}\right) \in \mathcal{H}^{(-s)}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s > \frac{n}{2}$, quel que soit $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, on prouve que

$$\xi = \int \xi(y) \cdot \delta_y \, dy \quad \text{dans } \mathcal{H}^{(-s)}(\mathbb{R}^n) \ .$$

Le lemme 3.12.iii montre alors que

$$\zeta = \Psi_{-s}\xi = \int \xi(y) \cdot \Psi_{-s}\delta_y \, dy = \int \xi(y) \cdot E_y \, dy \quad \text{dans } \mathcal{C}^{(\infty)}\left(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{H}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)\right) \ .$$

En particulier

$$\zeta(t)(x) = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \int \exp\left(-\frac{\pi^2 \cdot |x-y|^2}{t}\right) \cdot \xi(y)\ dy$$

pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Utilisant le produit de convolution, on aurait aussi pu écrire

$$\zeta(t) = \overset{-1}{\mathcal{F}} e^{-t\cdot|\mathrm{id}|^2} * \xi ,$$

d'où le même résultat puisque $\overset{-1}{\mathcal{F}} e^{-t\cdot|\mathrm{id}|^2} = E(t)$. L'invariance par translation de $\Delta\!\!\!/_D$ est évidemment fondamentale.

EXEMPLE 3 Considérons la décomposition directe non-dégénérée

$$\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \int_{\mathbb{R}_+^*}^{\boxplus} \mathbb{C} \cdot \sqrt{2} \sin(2\pi\lambda\cdot)\ d\lambda \quad \text{dans } \mathcal{D}\left(\mathbb{R}_+^*\right)' \ .$$

L'opérateur de Dirichlet $\Delta\!\!\!/_D$ est aussi diagonalisé par $|\mathrm{id}|^2$. Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, la solution élémentaire E_y de l'équation de la chaleur de condition initiale

$$\delta_y = 4 \cdot \int \sin(2\pi\lambda y) \cdot \sin(2\pi\lambda\cdot)\ d\lambda$$

est

$$E_y(x) = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\exp\left(-\frac{\pi^2 \cdot |x-y|^2}{t}\right) - \exp\left(-\frac{\pi^2 \cdot (x+y)^2}{t}\right)\right) \ .$$

EXEMPLE 4 Calcul de la résolvente de $\Delta\!\!\!/_D$ dans $\mathbb{R}^n$.

Puisque $\Delta\!\!\!/_D = |\nabla\!\!\!/|^2$, le théorème 8.5.xvi montre que

$$\mathrm{Sp}\,\Delta\!\!\!/_D = \mathbb{R}_+ \ .$$

Pour tout $c \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} c > 0$, on a $-c^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, donc $\not{\Delta}_D + c^2 \cdot \mathrm{Id}$ est inversible et

$$\left(\Delta_D + c^2 \cdot \mathrm{Id}\right)^{-1} = \overset{-1}{\mathcal{F}} \frac{1}{c^2 + |\mathrm{id}|^2} * \ ,$$

où

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} \frac{1}{c^2 + |\mathrm{id}|^2} = \int \frac{1}{c^2 + |\lambda|^2} \cdot e_\lambda \, d\lambda \ .$$

Si $n = 1$, on a immédiatement

$$\int \frac{1}{c^2 + |\lambda|^2} \cdot e_\lambda \, d\lambda = \frac{\pi}{c} \cdot e^{-2\pi c \cdot |\mathrm{id}|} \ .$$

Si $n \geqslant 2$, pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, soit σ l'intégrale de Radon superficielle sur la sphère $\mathbb{S}_r^{n-1}$ de rayon r et calculons tout d'abord ponctuellement, ce qui est possible :

$$\int e_\lambda(x) \, d\sigma = r^{n-1} \cdot \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\pi i \cdot |x| \cdot r \cdot \sin \vartheta} \cdot \cos^{n-2} \vartheta \, d\vartheta =$$

$$= r^{n-1} \cdot \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(2\pi \cdot |x| \cdot r \cdot \sin \vartheta\right) \cdot \cos^{n-2} \vartheta \, d\vartheta =$$

$$= r^{n-1} \cdot \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \int_{-1}^{1} \left(1 - t^2\right)^{\frac{n-3}{2}} \cos\left(2\pi \cdot |x| \cdot r \cdot t\right) dt =$$

$$= \frac{2\pi}{|x|^{\frac{n-2}{2}}} \cdot r^{\frac{n}{2}} \cdot J_{\frac{n-2}{2}}\left(2\pi \cdot |x| \cdot r\right) \ .$$

Il vient alors

$$\int \frac{1}{c^2 + |\lambda|^2} \cdot e_\lambda \, d\lambda = \lim_{R \to \infty} \int_0^R \frac{2\pi}{|\mathrm{id}|^{\frac{n-2}{2}}} \cdot \frac{r^{\frac{n}{2}}}{c^2 + r^2} \cdot J_{\frac{n-2}{2}}\left(2\pi \cdot |\mathrm{id}| \cdot r\right) \, dr =$$

$$= \frac{2\pi}{|\mathrm{id}|^{\frac{n-2}{2}}} \cdot c^{\frac{n-2}{2}} \cdot K_{\frac{n-2}{2}}\left(2\pi \cdot c \cdot |\mathrm{id}|\right)$$

dans $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)'$ par la formule de Hankel-Nicholson (cf. Abramowitz-Stegun 11.4.44).

Rappelons quelques résultats de la théorie des fonctions de Bessel. Les fonctions de Hankel d'ordre ν , définies pour $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$ par

$$H_\nu^{\pm}(r) := \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{e^{\pm i\left(r - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty t^{\nu - \frac{1}{2}} \cdot \left(1 \pm \frac{it}{2r}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} \cdot e^{-t} \, dt$$

sur $\mathbb{R}_+^*$, forment un système fondamental de solutions de l'équation différentielle de Bessel :

$$\mathrm{id}^2 \cdot \partial^2 f + \mathrm{id} \cdot \partial f + \left(\mathrm{id}^2 - \nu^2\right) \cdot f = 0 \ .$$

La fonction de Bessel d'ordre ν est définie par

$$J_\nu = \frac{1}{2}\left(H_\nu^+ - H_\nu^-\right)$$

et on a

$$J_\nu(r) = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^\nu}{\pi^{\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \cdot \int_{-1}^{1} \left(1 - t^2\right)^{\nu - \frac{1}{2}} \cdot \cos(rt) \, dt \ .$$

La fonction de Macdonald d'ordre ν est définie par

$$K_\nu(r) := \frac{\pi}{2} \cdot e^{i\pi\cdot\frac{\nu+1}{2}} \cdot H_\nu^+(ir) = \left(\frac{\pi}{2r}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{e^{+i\left(r+\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty t^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\frac{t}{2r}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t}\, dt\ .$$

On a

$$K_\nu(r) = \int_0^\infty \cosh(\nu t) \cdot e^{-r\cdot\cosh t}\, dt = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^\nu \cdot \int_0^\infty t^{-\nu-1} \cdot e^{-t-\frac{r^2}{4t}}\, dt\ .$$

Remarquons que les fonctions de Bessel et de Macdonald d'indice demi-entier sont élémentaires. En particulier pour $n = 3$, on a

$$\int e_\lambda(x)\, d\sigma = \frac{2r}{|x|} \cdot \sin(2\pi \cdot |x| \cdot r)$$

et

$$\int \frac{1}{c^2 + |\lambda|^2} \cdot e_\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2\,|\mathrm{id}|} \cdot e^{-2\pi c\cdot|\mathrm{id}|}\ .$$

Pour $n = 2$, on obtient

$$\int \frac{1}{c^2 + |\lambda|^2} \cdot e_\lambda\, d\lambda = 2\pi \cdot K_0(2\pi c \cdot |\mathrm{id}|) = 2\pi \cdot \int_0^\infty \cos(\mathrm{id} \cdot \sinh\ t)\ dt\ .$$

EXEMPLE 5 Calculons le propagateur

$$\exp(-it \cdot \not{\Delta}_D)\ .$$

On a

$$\exp(-it \cdot \not{\Delta}_D) = \overset{-1}{\mathcal{F}} e^{-it\cdot|\mathrm{id}|^2} *\ ,$$

et

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} e^{-it\cdot|\mathrm{id}|^2} = \int e^{-it\cdot|\lambda|^2} \cdot e_\lambda\, d\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int e^{-(2\pi\varepsilon+it)\cdot|\lambda|^2} \cdot e_\lambda\, d\lambda\ .$$

Ponctuellement il vient

$$\int e^{-(2\pi\varepsilon+it)\cdot|\lambda|^2+2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\, d\lambda =$$

$$= \exp\left(-\frac{\pi^2\cdot|x|^2}{2\pi\varepsilon+it}\right) \cdot \int \exp\left(-\left|(2\pi\varepsilon+it)^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda - \frac{\pi i x}{(2\pi\varepsilon+it)^{\frac{1}{2}}}\right|^2\right) d\lambda =$$

$$= \exp\left(-\frac{\pi^2\cdot|x|^2}{2\pi\varepsilon+it}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2\pi\varepsilon+it}\right)^{\frac{n}{2}}\ ,$$

grâce au théorème de Cauchy, d'où en passant à la limite

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} e^{-it\cdot|\mathrm{id}|^2} = \left(\frac{\pi}{it}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2\cdot|\mathrm{id}|^2}{it}\right)\ .$$

Le mouvement d'une particule libre en mécanique quantique est décrit par l'hamiltonien

$$H = \frac{h^2}{2m} \cdot \not{\Delta}_D$$

et l'équation de Schrödinger

$$i \cdot \frac{h}{2\pi} \partial \zeta = H\zeta \ .$$

On peut montrer, comme pour l'équation de la chaleur, que la solution est donné par le groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires

$$t \longmapsto \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} \cdot t \cdot H\right) = \exp\left(-i\frac{\pi h}{m} \cdot t \cdot \not{\Delta}_D\right) = \left(\frac{m}{iht}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(i\frac{\pi m}{ht} \cdot |\mathrm{id}|^2\right) * \ .$$

Si la particule est au temps 0 dans l'état ξ , au temps t elle se trouve dans l'état

$$\exp\left(-\frac{2\pi i}{h} t \cdot H\right) \xi = \left(\frac{m}{iht}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \int \exp\left(i\frac{\pi m}{ht} \cdot |\mathrm{id} - y|^2\right) \cdot \xi(y)\, dy =$$

$$= \left(\frac{m}{iht}\right)^{n/2} \cdot \exp\left(i\frac{\pi m}{ht} \cdot |\mathrm{id}|^2\right) \cdot \int \exp\left(-2\pi i \cdot \frac{m}{ht} \cdot \mathrm{id} \cdot y\right) \cdot \exp\left(i\frac{\pi m}{ht} \cdot |y|^2\right) \cdot \xi(y)\, dy =$$

$$= \left(\frac{m}{iht}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(i\frac{\pi m}{ht} \cdot |\mathrm{id}|^2\right) \cdot \mathcal{F}\left(\exp\left[i\frac{\pi m}{ht} \cdot |\mathrm{id}|^2 \cdot \xi\right]\right)\left(\frac{m}{ht} \cdot \mathrm{id}\right) \ .$$

On peut alors montrer lorsque $t \longmapsto \infty$ que

$$\exp\left(-\frac{2\pi i}{h} t \cdot H\right) \xi \sim \left(\frac{m}{iht}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(i\frac{\pi m}{ht} \cdot |\mathrm{id}|^2\right) \cdot \mathcal{F}\xi\left(\frac{m}{ht} \cdot \mathrm{id}\right) \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \ ,$$

donc que la répartition de la position pour des temps assez grand est environ

$$\left(\frac{m}{ht}\right)^n \cdot \left|\mathcal{F}\xi\left(\frac{m}{ht} \cdot \mathrm{id}\right)\right|^2 \ .$$

Remarquons que $|\mathcal{F}\xi|^2$ est la répartition de $\frac{p}{h}$ au temps 0 . Celle de l'impulsion p est donc donnée par la transformation $p \longmapsto \frac{p}{h}$, i.e.

$$\left(\frac{1}{h}\right)^n \cdot \left|\mathcal{F}\xi\left(\frac{1}{h} \cdot \mathrm{id}\right)\right|^2 \ .$$

Une particule classique d'impulsion p partant de 0 en 0 se trouve au temps t en $\frac{p}{m} \cdot t$. Partant statistiquement avec la répartition $\left(\frac{1}{h}\right)^n \cdot \left|\mathcal{F}\xi\left(\frac{1}{h} \cdot \mathrm{id}\right)\right|^2$, on obtient la répartition de la position par la transformation $x \longmapsto \frac{mx}{t}$, i.e. $\left(\frac{m}{ht}\right)^n \cdot \left|\mathcal{F}\xi\left(\frac{m}{ht} \cdot \mathrm{id}\right)\right|^2$.

Ceci montre que la particule quantique ayant une certaine répartition de l'impulsion au temps 0 se comporte asymptotiquement comme une particule classique partant statistiquement de 0 au temps 0 avec la même répartition de l'impulsion.

8.9 Equation de Schrödinger

REMARQUE 1 A un système quantique on associe un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Les éléments $\xi \in \mathcal{H}$ tels que $\|\xi\| = 1$ sont dits les *états observables* de ce système. Observer un tel système revient à considérer un opérateur auto-adjoint T dans $\mathcal{H}$, dite une *observable* . Si T est diagonalisé par $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}, \kappa\right)$ dans $F^{\dagger}$, et si l'on observe beaucoup de systèmes préparés dans l'état $\xi \in D(T)$, la *probabilité* d'obtenir une valeur mesurée dans une partie $A \subset \mathbb{R}$ est

$$\int_{\kappa^{-1}(A)} \left\|\widehat{\xi}\right\|_{\diamond}^{2} d\sigma = \int \left(\widehat{\xi}\middle| 1_{\kappa^{-1}(A)} \cdot \widehat{\xi}\right)_{\diamond} d\sigma = \left(\xi\middle| Z_{\kappa^{-1}(A)}\xi\right) .$$

Remarquons que

$$\int_{\Lambda} \left\|\widehat{\xi}\right\|_{\diamond}^{2} d\sigma = \|\xi\|^2 = 1 .$$

La *valeur moyenne* de toutes les observations possibles est alors

$$\int \kappa \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_{\diamond}^{2} d\sigma = \int \left(\widehat{\xi}\middle| \kappa \cdot \widehat{\xi}\right)_{\diamond} d\sigma = (\xi| T\xi) .$$

On appelle *écart* (quadratique moyen) le nombre $\Delta(T, \xi)$ défini par

$$\Delta(T, \xi)^2 := \|T\xi - (\xi| T\xi) \cdot \xi\|^2 = \int |\kappa - (\xi| T\xi)|^2 \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_{\diamond}^{2} d\sigma ,$$

qui donne une certaine mesure de la concentration des valeurs mesurées autour de la valeur moyenne, c'est-à-dire une mesure de l' *incertitude* sur la valeur moyenne.

On a $\Delta(T, \xi) = 0$ si, et seulement si, ξ est un état propre de T de valeur propre $(\xi| T\xi)$.

En effet $\Delta(T, \xi) = 0$ si, et seulement si, $|\kappa - (\xi| T\xi)|^2 \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\|_{\diamond}^{2} = 0$ σ-p.p. , ce qui est équivalent à $\widehat{\xi} = 0$ σ-p.p. sur la partie $\{\kappa \neq (\xi| T\xi)\}$. Ceci est équivalent à

$$\xi \in \mathcal{H}_{\{\kappa = (\xi|T\xi)\}} = \operatorname{Ker}(T - (\xi| T\xi) \cdot \mathrm{Id})$$

par le theorème 8.5.xiii. □

REMARQUE 2 A tout système quantique est associé l'observable *énergie* H , dite le *hamiltonien* du système. En général H est un opérateur différentiel auto-adjoint dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, par exemple

$$H = \frac{1}{2m} \cdot \not{\partial}^2 + \frac{k^2}{2} \cdot \mathrm{id}^2$$

pour l'oscillateur harmonique dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, ou

$$H = \frac{1}{2m} \cdot \not{\Delta} - \frac{e^2}{|\mathrm{id}|}$$

pour l'électron de l'atome d'hydrogène neutre dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$, en ayant choisi des unités telles que la constante de Planck h soit égale à 1 , i.e. $\hbar$ à $\frac{1}{2\pi}$.

Soient donc $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et H un opérateur auto-adjoint dans $\mathcal{H}$. L'évolution du système est décrite par une fonction $\zeta : \mathbb{R} \longrightarrow D(H)$ dérivable dans $\mathcal{H}$ et solution de l' *équation de Schrödinger*

$$\not{\partial}\zeta = -H\zeta \ ,$$

ou comme la note les physiciens

$$i\hbar \cdot \dot{\zeta} = H\zeta \ .$$

PROPOSITION *Pour tout $\xi \in D(H)$, l'équation de Schrödinger possède une unique solution telle que $\zeta(0) = \xi$. On a*

$$\zeta(s) = U_s\xi \quad \textit{en ayant posé} \quad U_s := e^{-2\pi is\cdot H} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ .$$

L'application $s \longmapsto U_s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ est une représentation unitaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{H}$ (fortement) continue.

Mettons l'équation sous la forme

$$\partial\zeta = -2\pi i \cdot H\zeta \ ,$$

et soit $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}, \kappa\right)$ une diagonalisation de H dans $F^\dagger$; on peut supposer que la fonction κ est réelle puisque H est auto-adjoint (théorème 8.5.x). Pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, on a alors

$$e^{-2\pi it\cdot\kappa} \in \mathbf{L}^\infty(\sigma) \quad , \quad e^{-2\pi i(s+t)\cdot\kappa} = e^{-2\pi is\cdot\kappa}e^{-2\pi it\cdot\kappa} \quad \text{et} \quad \overline{e^{-2\pi it\cdot\kappa}} = e^{-2\pi i(-t)\cdot\kappa} \ ,$$

donc

$$U_t := e^{-2\pi it\cdot H} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \quad , \quad U_0 = \mathrm{Id} \quad , \quad U_{s+t} = U_sU_t \quad \text{et} \quad U_t^* = U_{-t}$$

par le calcul fonctionnel borné (scolie 8.3.2), ce qui prouve que $s \longmapsto U_s$ est une représentation unitaire. Elle est fortement continue, car

$$\lim_{t\to 0} e^{-2\pi i(s+t)\cdot\kappa} = e^{-2\pi is\cdot\kappa} \quad \text{ponctuellement} \quad \text{et} \quad \left|e^{-2\pi i(s+t)\cdot\kappa}\right| \leqslant 1 \ ,$$

donc

$$\lim_{t\to 0} U_{s+t}\xi = U_s\xi \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H}$$

par le théorème 8.5.vi.

Soit alors $\xi \in D(H)$. Puisque l'opérateur $-2\pi i \cdot H$ est diagonalisé par $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}, -2\pi i \cdot \kappa\right)$ et que

$$-2\pi i \cdot \kappa \cdot e^{-2\pi it\cdot\kappa} \cdot \left\|\widehat{\xi}\right\| \in \mathbf{L}^2(\sigma) \ ,$$

on a $\xi \in D\left(-2\pi i \cdot He^{-2\pi is\cdot H}\right)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, donc que

$$\zeta : s \longmapsto U_s\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{D}(-2\pi i \cdot H) \equiv \mathcal{D}(H)$$

est une solution continûment dérivable telle que $\zeta(0) = U_0\xi = \xi$.

Prouvons l'unicité. Par linéarité, il nous suffit de montrer que si ζ est une solution telle que $\zeta(0) = 0$, alors $\zeta = 0$. Mais on a

$$\partial\left(\|\zeta\|^2\right) = \partial(\zeta|\,\zeta) = (\partial\zeta|\,\zeta) + (\zeta|\,\partial\zeta) = (-2\pi i \cdot H\zeta|\,\zeta) + (\zeta|\,2\pi i \cdot H\zeta) = 0 \ ,$$

ce qui prouve que $\|\zeta\|$ est une fonction constante égale à $\|\zeta(0)\| = 0$, donc que $\zeta = 0$. □

REMARQUE 3 Nous dirons que $\zeta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}$ telle que $\|\zeta\| = 1$ est *stationnaire* si, pour toute observable T de ζ , i.e. telle que $\zeta(\mathbb{R}) \subset D(T)$, la valeur moyenne $(\zeta|\,T\zeta)$ de T est constante au cours du temps.

Pour que ζ soit stationnaire, il faut et il suffit que ζ soit de la forme

$$\zeta = f \cdot \xi \quad \text{pour un } \xi \in \mathcal{H} \text{ tel que } \|\xi\| = 1 \text{ et une fonction } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U} \ .$$

En effet si $\xi \in D(T)$, on a

$$(\zeta | T\zeta) = (f \cdot \xi | Tf \cdot \xi) = |f|^2 \cdot (\xi | T\xi) = (\xi | T\xi) \ .$$

Réciproquement, pour tout $\eta \in \mathcal{H}$, l'orthoprojecteur $P_\eta = |\eta)(\eta|$ sur $\mathbb{C} \cdot \eta$ est une observable de ζ , donc

$$(\zeta | P_\eta \zeta) = |(\eta | \zeta)|^2 \quad \text{est constant.}$$

Pour tout $\eta \perp \zeta(0)$, on a

$$(\eta | \zeta(t)) = (\eta | \zeta(0)) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \ ,$$

donc $\zeta(t) \perp \eta$, et par suite que $\zeta(t) \in \mathbb{U} \cdot \zeta(0)$. Ainsi $\zeta(t) = f(t) \cdot \zeta(0)$ pour un certain $f(t) \in \mathbb{U}$. □

DEFINITION On dit que $\zeta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}$ est un *état stationnaire* si ζ est une solution stationnaire de l'équation de Schrödinger.

COROLLAIRE *Les états stationnaires sont exactement ceux de la forme*

$$t \longmapsto e^{-2\pi i E \cdot t} \cdot \xi \ ,$$

où ξ est un vecteur propre de H associé à la valeur propre E , i.e.

$$H\xi = E\xi \ ;$$

on dit que c'est l'équation de Schrödinger indépendante du temps.

La suffisance est immédiate, puisque

$$\not{\partial} \left(e^{-2\pi i E \cdot \diamond} \cdot \xi\right) = -E \cdot e^{-2\pi i E \cdot \diamond} \cdot \xi = -H \left(e^{-2\pi i E \cdot \diamond} \cdot \xi\right) \ .$$

Réciproquement, si ζ est un état stationnaire, il est de la forme $f \cdot \xi$, où $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| = 1$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$. Mais comme $f = (\xi | \zeta)$, f est continûment dérivable et il vient

$$\not{\partial} f \cdot \xi = \not{\partial} \zeta = -H\zeta = -f \cdot H\xi \ .$$

En particulier on a

$$H\xi = -\frac{\not{\partial} f(0)}{f(0)} \cdot \xi \ ,$$

ce qui montre que ξ est un vecteur propre de H associée à la valeur propre $E := -\frac{\not{\partial} f(0)}{f(0)}$; il vient alors

$$\not{\partial} f \cdot \xi = -f \cdot H\xi = -f \cdot E \cdot \xi \ ,$$

donc $\not{\partial} f = -E \cdot f$, ce qui montre que $f = f(0) \cdot e^{-2\pi i E \cdot \diamond}$, d'où le résultat en remplaçant ξ par $f(0) \cdot \xi$. □

REMARQUE 4 Les états d'un système quantique sont représentés par les éléments d'un sous-espace vectoriel dense D d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Etant donné $\eta \in D$ l'état initial au temps 0 du système et $s \in \mathbb{R}$, soit $V(s, \eta) \in D$ l'état du système au temps t . D'après l'interprétation probabiliste, si η est observable, alors $V(s, \eta)$ l'est aussi, i.e.

$$\|V(s, \eta)\| = 1 \quad \text{si} \quad \|\eta\| = 1 \ .$$

Les phénomènes ondulatoires proviennent du *principe de superposition* , qui stipule que

$$V_s : \eta \longmapsto V(s,\eta) : D \longrightarrow D$$

est un opérateur linéaire. On $V_0 = \mathrm{Id}$. L'évolution étant *déterministe* et *réversible* , pour tout $s,t \in \mathbb{R}$, il vient

$$V_{s+t}\eta = V(s+t,\eta) = V(s,V(t,\eta)) = V_s V(t,\eta) = V_s V_t \eta \ ,$$

donc

$$V_{s+t} = V_s V_t \ .$$

Ceci montre que chaque V_s est une bijection isométrique de D sur D , donc un opérateur unitaire ; il est clair qu'il se prolonge en un opérateur unitaire U_s dans $\mathcal{H}$ et que

$$s \longmapsto U_s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

est une représentation unitaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{H}$.

En admettant la continuité de l'évolution du système, i.e. la continuité de

$$s \longmapsto V_s \eta$$

pour tout $\eta \in D$, la représentation $s \longmapsto U_s$ est fortement continue.

En effet, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ et $\varepsilon > 0$, choisissons $\eta \in D$ tel que $\|\eta - \xi\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que l'on ait $\|V_t\eta - \eta\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ si $|t| \leqslant \delta$. Pour ces t , on obtient alors

$$\|U_t\xi - \xi\| \leqslant \|U_t\xi - U_t\eta\| + \|V_t\eta - \eta\| + \|\eta - \xi\| \leqslant \|V_t\eta - \eta\| + 2\|\eta - \xi\| \leqslant \varepsilon \ .$$

□

Ainsi, les principes fondamentaux de la mécanique quantique entraîne que l'évolution d'un système quantique est décrite par une représentation fortement continue de $\mathbb{R}$ dans un espace de Hilbert. Nous avons vu dans la proposition précédente que l'équation de Schrödinger induit une telle représentation. Nous allons maintenant montrer la réciproque.

THEOREME (de Stone) *Soit $s \longmapsto U_s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$ une représentation unitaire fortement continue. Alors il existe un unique opérateur auto-adjoint H dans $\mathcal{H}$ tel que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, on ait*

$$U_s = e^{-2\pi i s \cdot H} \ .$$

Plus précisément, le domaine de H est l'ensemble des $\xi \in \mathcal{H}$ tels que $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot (U_t\xi - \xi)$ existe, et on a

$$H\xi = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot (U_t\xi - \xi) \ .$$

Pour tout $a \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$, le théorème 3.12.ii montre que $s \longmapsto a(s) \cdot U_s$ est λ-intégrale dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}_\sigma) = \Big(|\mathcal{H}\rangle_{\,i} \langle\mathcal{H}| \Big)^\dagger$. Posons

$$\pi(a) := \int a(s) \cdot U_s \, ds \quad \text{dans } \mathcal{L}_s(\mathcal{H}_\sigma) \ .$$

Il est clair que

$$\pi : \mathcal{K}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) : a \longmapsto \pi(a)$$

est linéaire. On a

$$\pi(a^*) = \int \overline{a(-s)} \cdot U_s \, ds = \int \overline{a(s)} \cdot U_{-s} \, ds = \int \overline{a(s)} \cdot U_s^* \, ds =$$

$$= \int (a(s) \cdot U_s)^* \, ds = \left(\int a(s) \cdot U_s \, ds \right)^* = \pi(a)^*$$

par le lemme 3.12.iii appliqué à $\diamond^* : \mathcal{L}_s(\mathcal{H}_\sigma) \longrightarrow \mathcal{L}_s(\mathcal{H}_\sigma)$, qui est évidemment continue. Pour tout $b \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$, et en évaluant en $\xi \in \mathcal{H}$, donc en calculant les intégrales dans $\mathcal{H}_\sigma$, il vient

$$\pi(a * b)\xi = \int \left(\int a(s-t) \cdot b(t) \, dt \right) \cdot U_s \xi \, ds = \int a(s-t) \cdot b(t) \cdot U_s \xi \, d(s,t) =$$

$$= \int a(s) \cdot b(t) \cdot U_{s+t} \xi \, d(s,t) = \int \left(\int a(s) \cdot U_s (b(t) \cdot U_t \xi) \, dt \right) ds =$$

$$= \int a(s) \cdot U_s \left(\int b(t) \cdot U_t \xi \, dt \right) ds = \left(\int a(s) \cdot U_s \, ds \right) \left(\int b(t) \cdot U_t \xi \, dt \right) = \pi(a) \pi(b) \xi \ ,$$

en ayant utilisé le théorème de Fubini, la formule de changement de variable, ainsi que le lemme 3.12.iii appliqué à U_s .

Nous avons donc prouvé que π est une représentation de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{H}$. Par le corollaire au théorème de Plancherel-Godement nous pouvons considérer un $\mathcal{K}(\mathbb{R})$-module F tel que $\mathcal{H}$ soit isomorphe à un sous-module hilbertien diagonalisable dans $F^\dagger$, i.e. il existe un espace localement compact Λ , une intégrale de Radon σ et des applications continues

$$\varepsilon : \Lambda \longrightarrow F^\dagger \quad \text{et} \quad \varkappa : \Lambda \longrightarrow \mathrm{Sp}_h \, \mathcal{K}(\mathbb{R})$$

tels que

$$\mathcal{H} = \int^{\boxplus} \mathbb{C} \cdot \varepsilon \, d\sigma \quad \text{et} \quad a\xi = \int \langle \varkappa | \, a \rangle \cdot \widehat{\xi} \cdot \varepsilon \, d\sigma \ .$$

Remarquons qu'il existe une fonction continue $\kappa : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R} : \lambda \longmapsto \kappa(\lambda)$ tel que

$$\langle \varkappa | \, a \rangle = \int e^{-2\pi i s \cdot \kappa} \cdot a(s) \, ds \ .$$

Posons $H := Z_\kappa$. C'est un opérateur auto-adjoint et on a $e^{-2\pi i s \cdot H} = Z_{e^{-2\pi i s \cdot \kappa}}$. Pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, il vient

$$\int a(s) \cdot (\eta | \, U_s \xi) \, ds = (\eta | \, a\xi) = \int \left(\widehat{\eta} \cdot \varepsilon | \, \widehat{a\xi} \cdot \varepsilon \right)_\diamond d\sigma = \int \left(\widehat{\eta} \cdot \varepsilon | \, \langle \varkappa | \, a \rangle \cdot \widehat{\xi} \cdot \varepsilon \right)_\diamond d\sigma =$$

$$= \int \overline{\widehat{\eta}} \cdot \left(\int e^{-2\pi i s \cdot \kappa} \cdot a(s) \, ds \right) \cdot \widehat{\xi} \, d\sigma = \int a(s) \cdot \left(\int \overline{\widehat{\eta}} \cdot e^{-2\pi i s \cdot \kappa} \cdot \widehat{\xi} \, d\sigma \right) ds =$$

$$= \int a(s) \cdot \left(\int \overline{\widehat{\eta}} \cdot e^{-2\pi i s \cdot \kappa} \cdot \widehat{\xi} \, d\sigma \right) ds = \int a(s) \cdot \left(\eta | \, e^{-2\pi i s \cdot H} \xi \right) ds \ .$$

Par comparaison on obtient

$$U_s = e^{-2\pi i s \cdot H} \ .$$

Etant donné $\xi \in D(H)$, en posant $\zeta := U_\diamond \xi = e^{-2\pi i \diamond \cdot H} \xi$, la proposition précédente montre que ζ est dérivable, donc que

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot (U_t \xi - \xi) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot (\zeta(t) - \zeta(0)) = \partial \zeta(0)$$

existe. Réciproquement, définissons un opérateur S sur l'ensemble $D(S)$ des ξ possèdant cette propriété par

$$S\xi := -\frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot (U_t\xi - \xi) \ .$$

Pour tout $\xi, \eta \in D(S)$, on obtient

$$(\xi|\, S\eta) = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{t\to 0} \left(\xi \middle| \, \frac{1}{t} \cdot (U_t\eta - \eta) \right) = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t} \cdot (U_t^*\xi - \xi) \middle| \, \eta \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{-t} \cdot (U_{-t}\xi - \xi) \middle| \, \eta \right) = (S\xi|\, \eta) \ .$$

Ainsi S est un opérateur symétrique, $D(S) \supset D(H)$ et

$$H\xi = -\partial\!\!\!/\zeta(0) = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot (U_t\xi - \xi) = S\xi \ ,$$

montrant que S est un prolongement de H . On en déduit que

$$H \subset S \subset S^* \subset H^* = H \ ,$$

et par suite $H = S$, ainsi que $D(H) = D(S)$. □

8.10 Opérateurs bornés décomposables

REMARQUE 1 Soient $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ et $\mathcal{G} \hookrightarrow G^\dagger$. Tout opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ est univoquement déterminé par $Th = g^\dagger Th \in \mathcal{L}\left(F, G^\dagger\right)$.

DEFINITION 1 Soient $\mathcal{H} = \int^{\boxplus} \widehat{\mathcal{H}}\, d\sigma \hookrightarrow F^\dagger$ et $\mathcal{G} = \int^{\boxplus} \widehat{\mathcal{G}}\, d\sigma \hookrightarrow G^\dagger$. Si, pour tout $\lambda \in \Lambda$, on se donne $\widehat{T}(\lambda) \in \mathcal{L}\left(\widehat{\mathcal{H}}(\lambda), \widehat{\mathcal{G}}(\lambda)\right)$, nous dirons que $\widehat{T}$ est un *champ d'opérateurs* et nous écrirons $\widehat{T} \in \mathcal{L}\left(\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\mathcal{G}}\right)$. Pour tout champ ζ à valeurs dans $\widehat{\mathcal{H}}$, on définit un champ à valeurs dans $\widehat{\mathcal{G}}$ en posant

$$\widehat{T}\zeta(\lambda) := \begin{cases} \widehat{T}(\lambda)\,\zeta(\lambda) & \text{si } \zeta(\lambda) \in \widehat{\mathcal{H}}(\lambda) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Nous dirons que $\widehat{T}$ est *scalairement σ-mesurable* si

$$\widehat{Th} : \Lambda \longrightarrow \mathcal{L}\left(F, G^\dagger\right)$$

est scalairement σ-mesurable. Nous dirons que $\widehat{T}$ est borné si

$$\left\|\widehat{T}\right\|_\infty := \sup_{\lambda\in\Lambda} \left\|\widehat{T}(\lambda)\right\| < \infty .$$

REMARQUE 2 Dans ce qui suit nous allons utiliser les relations d'équivalence de l'égalité σ-p.p. , pour celle-ci nous ne faisons pas de distinction entre la classe d'un élément et cet élément, et de l'égalité scalaire σ-p.p. . Pour cette dernière la dépendance de l'ensemble négligeable des éléments-test fait évidemment problème, mais pas toujours comme nous le verrons ci-dessous grâce aux résultats de 5.12.

THEOREME *Si $\widehat{T}$ est scalairement σ-mesurable et borné, alors*

$$\widehat{T} : \zeta \longmapsto \widehat{T}\zeta \longmapsto \left[\widehat{T}\zeta\right] : \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \longrightarrow \mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{G}}\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{G}}\right)$$

définit un opérateur continu de norme $\leqslant \left\|\widehat{T}\right\|_\infty$ *, dont l'adjoint*

$$\widehat{T}^\dagger : \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{G}}\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$$

est définie par le champ scalairement σ-mesurable et borné définit par

$$\widehat{T}^\dagger(\lambda) := \widehat{T}(\lambda)^\dagger \in \mathcal{L}\left(\widehat{\mathcal{G}}(\lambda), \widehat{\mathcal{H}}(\lambda)\right) .$$

L'opérateur

$$\int \widehat{T}\, d\sigma : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G} : \xi \longmapsto \int \widehat{T\xi}\, d\sigma = \int \left[\widehat{T\xi}\right] d\sigma$$

est continu de norme $\leqslant \left\|\widehat{T}\right\|_\infty$ *et on a*

$$\left(\int \widehat{T}\, d\sigma\right)^\dagger = \int \widehat{T}^\dagger\, d\sigma\ .$$

Pour tout $\zeta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$, on a

$$\left\|\left[\widehat{T}\zeta\right]\right\|_2^2 \leqslant \left\|\widehat{T}\zeta\right\|_2^2 = \int^* \left\|\widehat{T}\zeta\right\|_\diamond^2 d\sigma \leqslant \left\|\widehat{T}\right\|_\infty \cdot \|\zeta\|_2^2\ .$$

Mais comme il existe une suite $(\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \left|\widehat{h}\,(F)\right\rangle \left\langle \mathcal{K}\mathbf{L}^2\,(\sigma)\right|$ telle que $\zeta = \lim_k \zeta_k$ dans $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ et ponctuellement σ-p.p. par la proposition 5.12, et que $\widehat{T}\zeta_k$ est scalairement σ-mesurable par hypothése et linéarité, on voit que $\widehat{T}\zeta \in \mathbf{\Lambda}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{G}}\right)$ et le théorème 5.12 nous permet de considérer la classe $\left[\widehat{T}\zeta\right]$ de $\widehat{T}\zeta$ modulo l'égalité scalaire σ-p.p. . Ceci prouve la première partie. Soit donc

$$\widehat{T}^\dagger : \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{G}}\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$$

l'adjointe de l'application linéaire $\widehat{T}$. Pour tout $\theta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{G}}\right)$, on a

$$\int \left(\zeta\middle|\, \widehat{T}^\dagger\theta\right)_\diamond d\sigma = \left(\zeta\middle|\, \widehat{T}^\dagger\theta\right)_{\mathbf{L}^2} = \left(\left[\widehat{T}\zeta\right]\middle|\,\theta\right)_{\mathbf{L}^2} =$$

$$= \int \left(\widehat{T}\,(\lambda)\,\zeta\,(\lambda)\middle|\,\theta\,(\lambda)\right)_\lambda d\sigma\,(\lambda) = \int \left(\zeta\middle|\,\widehat{T}\,(\lambda)^\dagger\,\theta\,(\lambda)\right)_\lambda d\sigma\,(\lambda)$$

par le corollaire 5.12. Mais pour tout $\varphi \in F$ et $f \in \mathcal{K}\mathbf{L}^\infty\,(\sigma)$, on en déduit

$$\int f \cdot \left(\widehat{h}\varphi\middle|\,\widehat{T}^\dagger\theta\right)_\diamond d\sigma = \int \left(\overline{f}\cdot\widehat{h}\varphi\middle|\,\widehat{T}^\dagger\theta\right)_\diamond d\sigma = \int f \cdot \left(\widehat{h}\varphi\middle|\,\widehat{T}\,(\lambda)^\dagger\,\theta\,(\lambda)\right)_\lambda d\sigma\,(\lambda)\ ,$$

donc

$$\left\langle \varphi\middle|\,\widehat{T}\,(\cdot)^\dagger\,\theta\,(\cdot)\right\rangle = \left\langle \varphi\middle|\,\widehat{T}^\dagger\theta\right\rangle \quad \sigma\text{-p.p.}\ .$$

Ceci montre que le champ $\widehat{T}\,(\cdot)^\dagger\,\theta\,(\cdot)$ est scalairement σ-mesurable, puisque $\widehat{T}^\dagger\theta \in \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$. Le champ d'opérateurs $\widehat{T}\,(\cdot)^\dagger$ est donc scalairement σ-mesurable et borné, car $\left\|\widehat{T}\,(\cdot)^\dagger\right\| = \left\|\widehat{T}\,(\cdot)\right\|$, et les égalités ci-dessus montrent que

$$\left(\zeta\middle|\,\widehat{T}^\dagger\theta\right)_{\mathbf{L}^2} = \int \left(\zeta\middle|\,\widehat{T}\,(\lambda)^\dagger\,\theta\,(\lambda)\right)_\lambda d\sigma\,(\lambda) = \int \left(\zeta\middle|\,\left[\widehat{T}\,(\cdot)^\dagger\,\theta\right]\right)_\diamond d\sigma\ ,$$

donc qu'il représente $\widehat{T}^\dagger$. La dernière partie est immédiate puisque les décompositions sont directes. $\square$

PROBLEME Sous quelles conditions a-t-on $\left\|\widehat{T}\right\| = \left\|\widehat{T}\right\|_\infty$?

DEFINITION 2 On dit qu'un opérateur de la forme $\int \widehat{T}\, d\sigma$ est *décomposable* .

8.11 Opérateurs fermés décomposables.

LEMME *Si $\widehat{\mathcal{D}}$ est une famille scalairement σ-mesurable de sous-espaces hilbertiens $\widehat{\mathcal{D}}(\lambda) \leqslant \widehat{\mathcal{H}}(\lambda)$, alors $\widehat{\mathcal{D}}$ est σ-intégrable dans $F^\dagger$ et définit une décomposition directe du sous-espace hilbertien*

$$\mathcal{D} := \int^{\boxplus} \widehat{\mathcal{D}}\, d\sigma \leqslant \mathcal{H} \ .$$

Si chaque $\widehat{\mathcal{D}}(\lambda)$ est dense dans $\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)$, alors $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{H}$.

L'intégrabilité découle de l'équivalence (ii)$\Leftrightarrow$(iii) du théorème 5.13 car

$$\left\|\widehat{d\varphi}\right\|_2^2 = \int^* \left\langle \varphi \middle| \widehat{d\varphi} \right\rangle d\sigma \leqslant \int^* \left\langle \varphi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle d\sigma = \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_2^2 \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

La décomposition est directe car la restriction de $\int$: $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \longrightarrow F^\dagger$ à $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{D}}\right) \hookrightarrow \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ est évidemment encore injective. Cette dernière inclusion montre également que les représentants de Parseval d'un élément de $\mathcal{D}$ dans les décompositions $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{D}}\right)$ et $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ sont identiques. En particulier, pour tout $\varphi \in F$, on a $\widehat{d\varphi} = \widehat{d}\varphi$.

Pour la seconde partie soit $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $\xi \perp \mathcal{D}$. Pour tout $\varphi \in F$ et $f \in \mathbf{L}^\infty(\sigma)$, on a alors

$$0 = \left(\overline{f} \cdot d\varphi \middle| \xi\right) = \int f \cdot \left(\widehat{d\varphi} \middle| \widehat{\xi}\right) d\sigma = \int f \cdot \left(\widehat{d}\varphi \middle| \widehat{\xi}\right)_\diamond d\sigma = \int f \cdot \left\langle \varphi \middle| \widehat{\xi} \right\rangle d\sigma \ ,$$

donc $\left\langle \varphi \middle| \widehat{\xi} \right\rangle = 0$ σ-p.p. . Ceci montre que $\widehat{\xi} = 0$ scalairement σ-p.p. et par suite σ-p.p. par le théorème 5.12. On en déduit évidemment que $\xi = 0$. □

DEFINITION 1 Pour tout $\lambda \in \Lambda$, soit $\widehat{T}(\lambda)$ un opérateur fermé de domaine $\widehat{\mathcal{D}}(\lambda)$ dense dans $\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)$ à valeurs dans $\widehat{\mathcal{G}}(\lambda)$. Nous dirons que $\widehat{T}$ est un *champ d'opérateurs fermés* et qu'il est *scalairement σ-mesurable* , si $\widehat{\mathcal{D}}$ et le champ d'opérateurs $\widehat{T} \in \mathcal{L}\left(\widehat{\mathcal{D}}, \widehat{\mathcal{G}}\right)$ sont scalairement σ-mesurables.

PROPOSITION *Si $\widehat{T}$ est un un champ scalairement σ-mesurable d'opérateurs fermés, alors $T := \int \widehat{T}\, d\sigma$ est un opérateur fermé de domaine dense dans $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{G}$ et $\mathcal{D}(T) = \int \widehat{\mathcal{D}}\, d\sigma$.*

Par le théorème 7.1, il suffit de vérifier que le produit scalaire de $\int \widehat{\mathcal{D}}\, d\sigma$ est le produit scalaire en graphe. Mais pour tout $\eta \in \int \widehat{\mathcal{D}}\, d\sigma =: \mathcal{D}$, on a

$$\|\eta\|_{\mathcal{D}}^2 = \|\widehat{\eta}\|_{2,\widehat{\mathcal{D}}}^2 = \int \|\widehat{\eta}\|_{\diamond,\widehat{\mathcal{D}}}^2\, d\sigma = \int \left(\|\widehat{\eta}\|_{\diamond,\widehat{\mathcal{H}}}^2 + \left\|\widehat{T}\widehat{\eta}\right\|_{\diamond,\widehat{\mathcal{G}}}^2\right) d\sigma =$$

$$= \|\widehat{\eta}\|_{2,\widehat{\mathcal{H}}}^2 + \left\|\widehat{T}\widehat{\eta}\right\|_{2,\widehat{\mathcal{G}}}^2 = \|\eta\|_{\mathcal{H}}^2 + \|T\eta\|_{\mathcal{G}}^2 = \|T\eta\|_{\mathcal{D}(T)}^2 \ .$$

□

DEFINITION 2 Un opérateur de la forme $T = \int \widehat{T}\, d\sigma$ est dit *décomposable* et $\widehat{T}$ est dite une *décomposition* de T .

THEOREME *Si $\widehat{T} \in \mathcal{L}\left(\widehat{\mathcal{D}}, \widehat{\mathcal{G}}\right)$ est une décomposition de T , alors le champ d'opérateurs $\widehat{T}^* \in \mathcal{L}\left(\widehat{\mathcal{D}}^*, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ défini par*

$$\widehat{\mathcal{D}}^*(\lambda) := \mathcal{D}\left(\widehat{T}(\lambda)^*\right) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{G}}(\lambda) \quad \text{et} \quad \widehat{T}^*(\lambda) := \widehat{T}(\lambda)^*$$

est l'adjoint de l'opérateur $\widehat{T}$ dans $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ à valeurs dans $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{G}}\right)$ et est une décomposition de l'adjoint T^* de T .

D'après le théorème (i) et la remarque de 7.4, le noyau de $\widehat{\mathcal{D}}^*(\lambda) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{G}}(\lambda)$ est

$$\widehat{D}^*(\lambda) = \mathrm{Id} - \widehat{T}(\lambda)\, \widehat{T}(\lambda)^\dagger \ .$$

Mais comme $\widehat{D}^* = \mathrm{Id} - \widehat{T}\widehat{T}^\dagger$ est un opérateur dans $\mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{G}}\right)$ par le théorème 8.8, on en déduit que $\widehat{\mathcal{D}}^*$ est une famille scalairement σ-mesurable de sous-espaces hilbertiens de $G^\dagger$. Mais comme $\widehat{\mathcal{D}}^*(\lambda) \leqslant \widehat{\mathcal{G}}(\lambda)$ le lemme montre qu'elle est σ-intégrable dans $G^\dagger$.

On a

$$\widehat{D}\widehat{T}^*\left(\mathrm{Id} - \widehat{T}\widehat{T}^\dagger\right) = \widehat{T}^\dagger\left(\mathrm{Id} - \widehat{T}\widehat{T}^\dagger\right) = \left(\mathrm{Id} - \widehat{T}^\dagger\widehat{T}\right)\widehat{T}^\dagger = \widehat{D}\widehat{D}^\dagger\widehat{T}^\dagger$$

par la proposition 5.1, donc

$$\widehat{T}^*\left(\mathrm{Id} - \widehat{T}\widehat{T}^\dagger\right) = \widehat{D}^\dagger\widehat{T}^\dagger : \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{G}}\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{D}}\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \ ,$$

ce qui montre que $\widehat{T}^*$ est un champ d'opérateurs σ-mesurable.

$$\left\langle \psi \middle| \left[\mathrm{Id} - \widehat{T}(\cdot)\, \widehat{T}(\cdot)^\dagger\right] \widehat{g}\psi \right\rangle = \|\widehat{g}\psi\|_{2,\widehat{\mathcal{G}}}^2 - \left\|\widehat{T}(\cdot)^\dagger\, \widehat{g}\psi\right\|_{2,\widehat{\mathcal{H}}}^2$$

Pour montrer que $\widehat{T^*}$ est scalairement σ-mesurable, il nous suffit de voir que, pour tout $\varphi \in F$ et $\psi \in G$, la fonction

$$\left\langle \varphi \middle| \widehat{T}^*\left(\mathrm{Id} - \widehat{T}\widehat{T}^\dagger\right) \widehat{g}\psi \right\rangle = \left(\widehat{h}\varphi \middle| \widehat{T^*}\left(\mathrm{Id} - \widehat{T}\widehat{T}^\dagger\right) g\psi\right)_{\diamond,\widehat{\mathcal{H}}} = \left(\widehat{T}\widehat{h}\varphi \middle| \left(\mathrm{Id} - \widehat{T}\widehat{T}^\dagger\right) g\psi\right)_{\diamond,\widehat{\mathcal{G}}}$$

est σ-mesurable. Mais cela présuppose que $\widehat{h}\varphi \in \widehat{\mathcal{D}}$, ce qui revient à supposer que les semi-dualités $\left\langle \widehat{\mathcal{D}}(\lambda) \middle| \widehat{\mathcal{D}}(\lambda)^\dagger \right\rangle$ sont bien plongées par rapport à $\widehat{\mathcal{H}}(\lambda)$.

Chapitre 9

THÉORÈME DE PLANCHEREL-GODEMENT

Version du 16 septembre 2001

9.1 Modules sur une algèbre localement convexe involutive

DEFINITION 1 Soit $\mathcal{A}$ une algèbre. Nous dirons qu'une semi-norme p sur $\mathcal{A}$ est *sous-multiplicative* si, pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, on a

$$p(ab) \leqslant p(a) \cdot p(b) \ .$$

Nous dirons que c'est une *algèbre localement convexe* si $\mathcal{A}$ est munie d'une topologie localement convexe séparée telle que la multiplication

$$(a, b) \longmapsto ab : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

soit séparément continue.

Nous dirons que $\mathcal{A}$ est *involutive* , si $\mathcal{A}$ est en outre munie d'une involution continue notée

$$\diamond^* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} : a \longmapsto a^* \ .$$

REMARQUE 1 La multiplication d'une algèbre, muni d'une topologie localement convexe engendrée par une famille de semi-normes sous-multiplicatives, est globalement continue. La réciproque est probablement fausse.

Soit p une semi-norme sur $\mathcal{A}$ telle qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ satisfaisant à

$$p(ab) \leqslant c \cdot p(a) \cdot p(b) \quad \text{pour tout } a, b \in \mathcal{A} \ .$$

Alors $c \cdot p$ est sous-multiplicative !

EXEMPLE 1 Une algèbre normée involutive, en particulier une algèbre stellaire, est évidemment une algèbre localement convexe involutive.

EXEMPLE 2 Soit X un espace complètement régulier. Alors $\mathcal{C}^b(X)$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et $\mathcal{C}(X)$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de X , sont des algèbres localement convexes involutives pour la multiplication ponctuelle et l'involution $f \longmapsto \overline{f}$. La norme $\|\cdot\|_\infty$ et les semi-normes $\|\cdot\|_{\infty,K}$ pour $K \in \mathfrak{K}(X)$ étant sous-multiplicatives, les multiplications de $\mathcal{C}^b(X)$ et $\mathcal{C}(X)$ sont globalement continues.

EXEMPLE 3 Soit X un espace localement compact. Alors $\mathcal{K}(X)$, muni de sa topologie localement convexe finale (cf. exemple 2.10.2), est une algèbre localement convexe involutive pour la multiplication ponctuelle et l'involution $f \longmapsto \overline{f}$. La multiplication dans $\mathcal{K}(X)$ est globalement continue.

En effet l'injection canonique

$$\mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(X) \times \mathcal{K}(X)$$

et la multiplication

$$\mathcal{C}^0(X) \times \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X) : (f, \psi) \longmapsto f \cdot \psi$$

sont continues. Si l'on veut utiliser les semi-normes de $\mathcal{K}(X)$ décrite dans l'exemple 2.10.2, il suffit d'écrire les inégalités suivantes. Etant donné

$$\varphi, \psi \in \mathcal{K}(X) \quad \text{et} \quad (\psi_K)_{K\in\mathfrak{K}(X)} \in \bigoplus_{K\in\mathfrak{K}(X)} \mathcal{K}(X, K) \quad \text{tels que } \psi = \sum_{K\in\mathfrak{K}(X)} \psi_K \ ,$$

on a

$$\left(\bigwedge_{K\in\mathfrak{K}(X)} c_K \cdot \|\cdot\|_K^\infty\right)(\varphi \cdot \psi) \leqslant \sum_{K\in\mathfrak{K}(X)} c_K \cdot \|\varphi \cdot \psi_K\|_K^\infty \leqslant \|\varphi\|_\infty \cdot \sum_{K\in\mathfrak{K}(X)} c_K \cdot \|\psi_K\|_{\infty,K} \ ,$$

donc

$$\left(\bigwedge_{K\in\mathfrak{K}(X)} c_K \cdot \|\cdot\|_K^\infty\right)(\varphi \cdot \psi) \leqslant \|\varphi\|_\infty \cdot \left(\bigwedge_{K\in\mathfrak{K}(X)} c_K \cdot \|\cdot\|_K^\infty\right)(\psi) \ .$$

□

EXEMPLE 4 Soit G un groupe topologique (localement compact) opérant continûment à gauche et respectivement à droite sur un espace topologique X . Nous écrirons

$$G \times X \longrightarrow X : (s, x) \longmapsto s \cdot x \quad \text{et respectivement } G \times X \longrightarrow X : (s, x) \longmapsto x \cdot s$$

et on a

$$s \cdot (t \cdot x) = (st) \cdot x \quad \text{et} \quad (x \cdot s) \cdot t = x \cdot (st) \ .$$

Pour toute fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ on définit $s \cdot f$ et $f \cdot s$ par transport de structure, i.e. telles que

$$(s \cdot f)(s \cdot x) = f(x) \quad \text{et} \quad (f \cdot s)(x \cdot s) = f(x) \ ,$$

donc telles que

$$(s \cdot f)(x) = f\left(s^{-1} \cdot x\right) \quad \text{et} \quad (f \cdot s)(x) = f\left(x \cdot s^{-1}\right) \ ;$$

on vérifie que G opère convenablement sur $\mathbb{K}^X$. De même si μ est une intégrale de Radon sur X on pose

$$\int f \, d(s \cdot \mu) = \int s^{-1} \cdot f \, d\mu = \int f(sx) \, d\mu(x)$$

et

$$\int f \, d(\mu \cdot s) = \int f \cdot s^{-1} \, d\mu = \int f(xs) \, d\mu(x) \ .$$

Les applications

$$\gamma(s) : x \longmapsto s \cdot x \quad \text{et (attention)} \quad \delta(s) : x \longmapsto x \cdot s^{-1}$$

sont des homéomorphismes de X tels que

$$\gamma(st) = \gamma(s)\gamma(t) \quad \text{et} \quad \delta(st) = \delta(s)\delta(t)$$

puisque

$$(st)\cdot x = s\cdot(t\cdot x) \quad \text{et} \quad x\cdot(st)^{-1} = x\cdot\left(t^{-1}s^{-1}\right) = \left(x\cdot t^{-1}\right)\cdot s^{-1} \ ,$$

donc

$$\gamma, \delta : G \longrightarrow Hom\acute{e}om(X)$$

sont des homomorphismes de groupes. Il en est évidemment de même de

$$\gamma, \delta : G \longrightarrow Bij\left(\mathbb{K}^X\right) \quad \text{et} \quad \gamma, \delta : G \longrightarrow Bij(\mathcal{M}(X))$$

en posant

$$[\gamma(s) f](x) = (s\cdot f)(x) = f\left(s^{-1}\cdot x\right) \quad \text{et} \quad [\delta(s) f](x) = \left(f\cdot s^{-1}\right)(x) = f(x\cdot s) \ ,$$

ainsi que

$$\int f\, d(\gamma(s)\mu) = \int f(st)\ d\mu(t) = \int f(t)\ d\mu\left(s^{-1}t\right)$$

et

$$\int f\, d(\delta(s)\mu)(t) = \int f\left(ts^{-1}\right)\ d\mu(t) = \int f(t)\ d\mu(ts) \ .$$

Si m est une intégrale de Haar à gauche sur G , i.e. $s\cdot m = m$ pour tout $s \in G$, le *module* $\Delta : G \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est défini, pour tout $s \in G$, par

$$\delta(s) m = \Delta(s)\cdot m \quad \text{, i.e.} \quad m\cdot s = \Delta(s)^{-1}\cdot m \ .$$

C'est un homomorphisme. On a

$$\int f(ts)\ dm(t) = \int f\, d(m\cdot s) = \Delta(s)^{-1}\cdot\int f\, dm$$

et on peut montrer que

$$\overset{\vee}{m} = \Delta^{-1}\cdot m\,;$$

on dit que c'est l'intégrale de Haar à droite associée à m .

On munit $\mathbf{L}^1(m)$ d'une structure d'algèbre de Banach involutive en considérant le produit de convolution

$$(a*b)(s) := \int a(t)\cdot b\left(t^{-1}s\right)\ dm(t) = \int a(st)\cdot b\left(t^{-1}\right)\ dm(t) =$$

$$= \int a\left(t^{-1}\right)\cdot b(ts)\ d\overset{\vee}{m}(t) = \int a\left(st^{-1}\right)\cdot b(t)\ d\overset{\vee}{m}(t) \ ,$$

qui est définit m-p.p. grâce au théorème de Tonneli, et l'involution

$$a^* := (\Delta\cdot\overline{a})^{\vee} : s \longmapsto \Delta(s)^{-1}\cdot\overline{a\left(s^{-1}\right)} \ .$$

En munissant $\mathcal{K}(G)$ de la convolution et de l'involution induite, on obtient une algèbre localement convexe involutive, dont la multiplication n'est pas globalement continue en général.

EXERCICE Montrer que le produit de convolution dans $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ n'est pas continu (globalement).

REMARQUE 2 Si A est une algèbre et V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, rappelons que la donnée d'une structure de A-module (à gauche) compatible sur V , i.e. d'une action

$$(a,v) \longmapsto av : A \times V \longrightarrow V$$

de A dans V telle que, pour tout $a,b \in A$, $v,w \in V$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on ait

$$a\,(v + \alpha \cdot w) = av + \alpha \cdot aw \quad , \quad (a + \alpha \cdot b)\,v = av + \alpha \cdot bv \quad \text{et} \quad (ab)\,v = a\,(bv) \ ,$$

est équivalente à la donnée d'une *représentation* de A dans V , i.e. d'un morphisme

$$\pi : A \longrightarrow L\,(V)$$

de l'algèbre A dans celle des endomorphismes de V , en définissant

$$\pi\,(a) : V \longrightarrow V : v \longmapsto av \quad , \text{i.e.} \quad \pi\,(a)\,v := av \ .$$

Dans ce cas on dit que V est un *A-module (à gauche) algébrique* . Si W est sous-espace vectoriel de V , on dit que W est un *sous-module* de V si W est *A-invariant* , i.e. si $AW \subset W$.

Si V et W sont des A-modules et $T : V \longrightarrow W$ une application linéaire, on dit que T est *A-linéaire* si, pour tout $v \in V$ et $a \in A$, on a

$$T\,(av) = aTv \ .$$

En désignant par π et $\widetilde{\pi}$ les représentations correspondantes de A dans V et W , cela signifie que

$$T\pi\,(a) = \widetilde{\pi}\,(a)\,T \ .$$

On dit que T est un *opérateur d'entrelacement* . Nous désignerons par $L^{\mathcal{A}}\,(V,W)$ l'ensemble de ces opérateurs. C'est un espace vectoriel.

DEFINITION 2 Soient $\mathcal{A}$ une algèbre localement convexe et F un espace localement convexe séparé. Nous dirons que F est un *A-module (à gauche topologique)* si F est muni d'une structure de $\mathcal{A}$-module (à gauche) algébrique telle que l'action

$$\mathcal{A} \times F \longrightarrow F : (a,\varphi) \longmapsto a\varphi$$

soit séparément continue. Cela signifie que, pour tout $a \in \mathcal{A}$, l'application linéaire

$$\pi\,(a) : F \longrightarrow F : \varphi \longmapsto a\varphi$$

est continue et que

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}_s\,(F)$$

est continue. On dit que c'est une *représentation (simplement) continue* de $\mathcal{A}$ dans F .

Si l'action est seulement continue en la seconde variable, on dit que $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}\,(F)$ est une *représentation* dans (l'espace localement convexe) F .

Nous dirons qu'un $\mathcal{A}$-module F , ou une représentation dans F , est *non-dégénéré* si $\mathcal{A}F$ est total dans F .

REMARQUE 3 On peut supposer que $\mathcal{A}$ et F sont muni de leur topologie de Mackey. En effet si $\mathcal{A}$ est une algèbre localement convexe, il en est de même de $\mathcal{A}_\tau$, et si F est un $\mathcal{A}$-module, alors F_τ est un $\mathcal{A}_\tau$-module.

Cela découle du théorème 3.11.ii. □

Dans tout ce qui suit, et sauf mention expresse du contraire,

$\mathcal{A}$ est une algèbre localement convexe involutive
et
F un $\mathcal{A}$-module (à gauche topologique).

PROPOSITION *Soit F un $\mathcal{A}$-module normé. Pour que l'action de $\mathcal{A}$ dans F soit globalement continue, il faut et il suffit que la représentation π soit normiquement continue, i.e. que $a \longmapsto \|\pi(a)\|$ soit une semi-norme continue sur $\mathcal{A}$.*

La condition est nécessaire, car si p est une semi-norme continue sur $\mathcal{A}$ telle que

$$\|a\varphi\| \leqslant p(a) \cdot \|\varphi\| \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A} \text{ et } \varphi \in F$$

(proposition 2.4), on a

$$\|\pi(a)\| = \sup_{\|\varphi\| \leqslant 1} \|a\varphi\| \leqslant p(a) \ .$$

La réciproque est évidente puisque $\|a\varphi\| \leqslant \|\pi(a)\| \cdot \|\varphi\|$. □

EXEMPLE 5 La multiplication de $\mathcal{A}$ définit une structure de $\mathcal{A}$-module sur tout idéal de $\mathcal{A}$.

EXEMPLE 6 Soit F un $\mathcal{A}$-module. Pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $\mu \in F^\dagger$, on définit $a\mu$ par

$$\langle b|\, a\mu\rangle := \langle a^*b|\, \mu\rangle \quad \text{pour tout } b \in \mathcal{A} \ .$$

Alors $a\mu \in F^\dagger$ et

$$\mathcal{A} \times F^\dagger \longrightarrow F^\dagger : (a, \mu) \longmapsto a\mu$$

est une structure de $\mathcal{A}$-module sur $F^\dagger$.

On vérifie immédiatement que $F^\dagger$ est un $\mathcal{A}$-module algébrique. Par exemple, pour tout $a, b, c \in \mathcal{A}$, on a

$$\langle c|\, (ab)\,\mu\rangle = \langle (ab)^*\, c|\, \mu\rangle = \langle b^*\,(a^*c)|\, \mu\rangle = \langle a^*c|\, b\mu\rangle = \langle c|\, a\,(b\mu)\rangle \ ,$$

donc $(ab)\,\mu = a\,(b\mu)$. C'est un $\mathcal{A}$-module, car pour tout $b \in \mathcal{A}$, il est clair que

$$(a, \mu) \longmapsto \langle b|\, a\mu\rangle = \langle a^*b|\, \mu\rangle$$

est séparément continue. □

EXEMPLE 7 Si F et G sont des $\mathcal{A}$-modules, on définit également une structure de $\mathcal{A}$-module sur $\mathcal{L}_s(F, G)$ en posant

$$(aT)\,\varphi := a\,(T\varphi) \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A} \ , \ T \in \mathcal{L}_s(F, G) \text{ et } \varphi \in F \ .$$

9.2 Représentations dans un sous-espace hilbertien

DEFINITION 1 Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert muni d'une structure de $\mathcal{A}$-module à gauche algébrique. On dit que $\mathcal{H}$ est *involutif* , si pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ et $a \in \mathcal{A}$, on a

$$(a\xi|\, \eta) = (\xi|\, a^*\eta) \ .$$

Cela signifie que $\pi(a^*)$ est un adjoint de $\pi(a)$, donc $\pi(a)$ est un opérateur borné par le théorème de Hellinger-Toeplitz 3.17. Ainsi

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) : a \longmapsto \pi(a)$$

est un morphisme d'algèbre involutive. On dit que c'est une *représentation (involutive)* de l'algèbre involutive $\mathcal{A}$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Nous dirons simplement ***représentation*** , sauf mention expresse du contraire. Remarquons que cette représentation n'est pas nécessairement continue, i.e. $\mathcal{H}$ n'est pas nécessairement un $\mathcal{A}$-module (topologique).

DEFINITION 2 Nous dirons qu'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est un *A-module de Hilbert* si $\mathcal{H}$ est un $\mathcal{A}$-module à gauche algébrique involutif dont l'action est globalement continue.

Par la proposition 9.1 cela signifie que la représentation π est normiquement continue.

EXEMPLE Si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre involutive de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors l'identité est une représentation de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{A}$ est munie de la norme induite par $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, cette représentation est évidemment normiquement continue, donc $\mathcal{H}$ est un $\mathcal{A}$-module de Hilbert.

PROPOSITION *Soit π une représentation de l'algèbre involutive $\mathcal{A}$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.*

(i) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach complexe involutive unifère, alors π est de norme $\leqslant 1$, i.e. l'action de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$ est globalement continue ; plus précisément on a

$$\|a\xi\| \leqslant \|a\| \cdot \|\xi\| \quad \textit{pour tout } a \in \mathcal{A} \textit{ et } \xi \in \mathcal{H} \ .$$

(ii) Si $\mathcal{A}$ est muni de sa topologie de Mackey, alors $\mathcal{H}$ est $\mathcal{A}$-module si, et seulement si, l'application

$$a \longmapsto a\xi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{H}$$

est faiblement continue.

La première partie découle du théorème 6.7, la seconde du théorème 3.11.ii. ———— □

THEOREME *Soit $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ un sous-espace hilbertien.*

(i) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathcal{H}$ est $\mathcal{A}$-invariant.

(b) Pour tout $a \in \mathcal{A}$, il existe une constante $c_a \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\langle \varphi|\, ah\,(a^*\varphi)\rangle \leqslant c_a \cdot \|h\varphi\|^2 \ .$$

Dans ce cas on a $\pi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *et*

$$\|\pi(a)\|^2 = \sup_{\varphi \in F, \langle \varphi | h\varphi \rangle \leqslant 1} \langle \varphi | ah(a^* \varphi) \rangle$$

est la plus petite des constante c_a *. En outre*

(ii) $\mathcal{H}$ *est involutif si, et seulement si,* $h : F \longrightarrow \mathcal{H}$ *ou* $h : F \longrightarrow F^\dagger$ *est* $\mathcal{A}$*-linéaire.*

(iii) $\mathcal{H}$ *est un* $\mathcal{A}$*-module si, et seulement si, pour tout* $\xi \in \mathcal{H}$ *, la semi-norme* $a \longmapsto \|a\xi\|_{\mathcal{H}}$ *est continue, respectivement faiblement continue si* $\mathcal{A}$ *est munie de sa topologie de Mackey.*

(a) Cette condition est automatiquement vérifée si l'algèbre $\mathcal{A}$ *est tonnelée, et l'action est même globalement continue.*

Dmonstration de (i) Remarquons tout d'abord que, pour tout $\varphi \in F$ et $a \in \mathcal{A}$, on a la formule

$$\langle \varphi | ah(a^* \varphi) \rangle = \langle a^* \varphi | h(a^* \varphi) \rangle = \|h(a^* \varphi)\|^2 \ . \tag{$*$}$$

(a) ⇒ (b) Montrons pour commencer que $\pi(a)$ est un opérateur borné dans $\mathcal{H}$. Il nous suffit de montrer, pour tout $a \in \mathcal{A}$, que $\xi \longmapsto \|a\xi\|$ est une semi-norme continue sur $\mathcal{H}$. Par la proposition 5.3.ii on a

$$\|a\xi\| = \sup_{\varphi \in F, \langle \varphi | h\varphi \rangle \leqslant 1} |\langle \varphi | a\xi \rangle| \ ; \tag{$**$}$$

puisque $F^\dagger$ est un $\mathcal{A}$-module et que $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ est continue, $\xi \longmapsto |\langle \varphi | a\xi \rangle|$ est une semi-norme continue sur $\mathcal{H}$, d'où le résultat par le scolie 2.13. Utilisant $(*)$, il vient alors

$$\|h(a^* \varphi)\|^2 = \langle \varphi | ah(a^* \varphi) \rangle = |(h\varphi | ah(a^* \varphi))| \leqslant$$

$$\leqslant \|h\varphi\| \cdot \|ah(a^* \varphi)\| \leqslant \|h\varphi\| \cdot \|\pi(a)\| \cdot \|h(a^* \varphi)\| \ ,$$

donc

$$\|h(a^* \varphi)\| \leqslant \|h\varphi\| \cdot \|\pi(a)\| \ .$$

Il suffit donc de poser

$$c_a := \sup_{\varphi \in F, \langle \varphi | h\varphi \rangle \leqslant 1} \langle \varphi | ah(a^* \varphi) \rangle \leqslant \|\pi(a)\|^2 \ .$$

(b) ⇒ (a) Pour tout $a \in \mathcal{A}$, $\xi \in \mathcal{H}$ et $\varphi \in F$, on a

$$|\langle \varphi | a\xi \rangle|^2 = |(h(a^* \varphi) | \xi)|^2 \leqslant \|h(a^* \varphi)\|^2 \cdot \|\xi\|^2 =$$

$$= \langle \varphi | ah(a^* \varphi) \rangle \cdot \|\xi\|^2 \leqslant c_a \cdot \|\xi\|^2 \cdot \|h\varphi\|^2$$

en vertu de $(*)$; on obtient alors

$$\sup_{\varphi \in F, \langle \varphi | h\varphi \rangle \leqslant 1} |\langle \varphi | a\xi \rangle|^2 \leqslant c_a \cdot \|\xi\|^2 < \infty \ ,$$

ce qui montre que $a\xi \in \mathcal{H}$ par la proposition 5.3.ii. On a en outre

$$\|\pi(a)\|^2 = \sup_{\|\xi\| \leqslant 1} \|a\xi\|^2 = \sup_{\|\xi\| \leqslant 1} \sup_{\varphi \in F, \langle \varphi | h\varphi \rangle \leqslant 1} |\langle \varphi | a\xi \rangle|^2 \leqslant c_a \ ,$$

ce qui finit de prouver la formule.

Dmonstration de (i) Remarquons que $h : F \longrightarrow \mathcal{H}$ est $\mathcal{A}$-linéaire si, et seulement si, il en est de même de $h^\dagger h$, puisque $h^\dagger : \mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ est $\mathcal{A}$-linéaire, $\mathcal{H}$ étant muni de la structure induite par celle de $F^\dagger$, et injective.

(a) Pour tout $\varphi \in F$, $\eta \in \mathcal{H}$ et $a \in \mathcal{A}$, on a

$$(h(a\varphi)|\eta) = \langle a\varphi|\eta\rangle = \langle\varphi|a^*\eta\rangle = (h\varphi|a^*\eta) \ .$$

On en déduit que $h(a\varphi) = ah\varphi$ si $\mathcal{H}$ est involutif, i.e. h est $\mathcal{A}$-linéaire. Réciproquement, on obtient

$$(ah\varphi|\eta) = (h\varphi|a^*\eta) \ ,$$

d'où le résultat par la continuité de $\pi(a)$, puisque $h(F)$ est dense dans $\mathcal{H}$.

Dmonstration de (ii) La caractérisation de $\mathcal{H}$ comme sous-module de $F^\dagger$ est triviale. Si $\mathcal{A}$ est tonnelée, on peut conclure, en vertu de $(**)$, à l'aide du scolie 2.13, car $a \longmapsto |\langle\varphi|a\xi\rangle|$ est une semi-norme continue sur $\mathcal{A}$, puisque $F^\dagger$ est un $\mathcal{A}$-module. Comme

$$\|\pi(a)\| = \sup_{\xi\in\mathcal{H},\|\xi\|\leqslant 1} \|a\xi\| \ ,$$

on voit de même que $a \longmapsto \|\pi(a)\|$ est une semi-norme continue sur $\mathcal{A}$. L'action de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$ est donc globalement continue par la proposition 9.1. □

DEFINITION 3 Soit $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ un sous-espace hilbertien. Nous dirons que $\mathcal{H}$ est un *sous-module hilbertien* de $F^\dagger$, si $\mathcal{H}$ est $\mathcal{A}$-invariant, involutif et un $\mathcal{A}$-module à action globalement continue.

On remarquera que la représentation dans un sous-module hilbertien est par hypothèse normiquement continue (proposition 9.1).

COROLLAIRE *Pour qu'un sous-espace hilbertien $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ de noyau h soit un sous-module hilbertien, il faut et il suffit que h soit $\mathcal{A}$-linéaire et qu'il existe une semi-norme continue p sur $\mathcal{A}$ telle que*

$$\langle\varphi|ah(a^*\varphi)\rangle \leqslant p(a)^2 \cdot \langle\varphi|h\varphi\rangle \quad \textit{pour tout } a \in \mathcal{A} \textit{ et } \varphi \in F \ .$$

Dans ce cas on a $\|\pi(a)\| \leqslant p(a)$.

9.3 Intégration de sous-modules hilbertiens unidimensionnels

Nous supposerons que $\mathcal{A}$ est commutative.

DEFINITION 1 Etant donné $\mu \in F^\dagger \smallsetminus \{0\}$, on dit que μ est un A-*vecteur propre* , ou un *vecteur propre simultané* pour l'action de $\mathcal{A}$, si pour tout $a \in \mathcal{A}$, il existe $\chi_a \in \mathbb{K}$ tel que

$$a\mu = \chi_a \cdot \mu \ ,$$

et si $a\mu \neq 0$ pour un certain $a \in \mathcal{A}$.

Cela signifie que le sous-espace hilbertien $\mathbb{K} \cdot \mu \hookrightarrow F^\dagger$ est un $\mathcal{A}$-module algébrique non-dégénéré. On vérifie immédiatement que

$$a \longmapsto \chi_a : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$$

est une forme linéaire multiplicative $\neq 0$. Par exemple, pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, on a

$$\chi_{ab} \cdot \mu = (ab)\,\mu = a\,(\chi_b \cdot \mu) = \chi_b \cdot (\chi_a \cdot \mu) = (\chi_a \cdot \chi_b) \cdot \mu \ .$$

Si χ désigne la forme semi-linéaire correspondante $a \longmapsto \overline{\chi_a}$, on a

$$\chi_a = \langle \chi | \, a \rangle$$

et χ est un caractère $\neq 0$ de $\mathcal{A}$ (cf. définition 6.4.1). Il est continu. En effet il existe $\varphi \in F$ tel que $\langle \varphi | \, \mu \rangle = 1$, donc

$$\langle \chi | \, a \rangle = \langle \chi | \, a \rangle \cdot \langle \varphi | \, \mu \rangle = \langle \varphi | \, \langle \chi | \, a \rangle \cdot \mu \rangle = \langle \varphi | \, a\mu \rangle \ ,$$

et $a \longmapsto a\mu : \mathcal{A} \longrightarrow F^\dagger$ est continue, puisque F est un $\mathcal{A}$-module.

On en déduit que l'action de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{K} \cdot \mu$ est globalement continue, car

$$\mathcal{A} \times \mathbb{K} \cdot \mu \longrightarrow \mathbb{K} \cdot \mu : (a, \xi) \longmapsto a\xi = \langle \chi | \, a \rangle \cdot \xi$$

est évidemment continue.

Nous avons donc prouvé la première partie du

LEMME *Si $\mu \in F^\dagger$ un $\mathcal{A}$-vecteur propre, alors il existe un (unique) caractère continu $\chi \in \mathcal{A}^\dagger \smallsetminus \{0\}$ tel que*

$$a\mu = \langle \chi | \, a \rangle \cdot \mu \quad \textit{pour tout } a \in \mathcal{A} \ ,$$

et $\mathbb{K} \cdot \mu$ est un $\mathcal{A}$-module à action globalement continue.

Pour que $\mathbb{K} \cdot \mu \hookrightarrow F^\dagger$ soit un sous-module hilbertien, il faut et il suffit que χ soit hermitien.

Pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $\xi, \eta \in \mathbb{K} \cdot \mu$, on a d'une part

$$(a\xi | \, \eta) = (\langle \chi | \, a \rangle \cdot \xi | \, \eta) = \overline{\langle \chi | \, a \rangle} \cdot (\xi | \, \eta)$$

et d'autre part

$$(\xi | \, a^*\eta) = (\xi | \, \langle \chi | \, a^* \rangle \cdot \eta) = \langle \chi | \, a^* \rangle \cdot (\xi | \, \eta) \ ,$$

d'où le résultat. □

Ceci nous conduit à la

DEFINITION 2 On dit que χ est le *caractère propre* de μ . Nous désignerons par $\mathrm{Sp}_h \mathcal{A}$ l'ensemble des caractères hermitiens continus $\neq 0$ de $\mathcal{A}$ et nous le munirons de la topologie faible induite par $\mathcal{A}^\dagger$.

COROLLAIRE *Si $\chi \in \mathrm{Sp}_h \mathcal{A}$, alors $\mathbb{K} \cdot \chi \hookrightarrow \mathcal{A}^\dagger$ est un sous-module hilbertien de $\mathcal{A}^\dagger$.*

Soient Λ un espace topologique séparé,

$$\epsilon : \Lambda \longrightarrow F^\dagger : \lambda \longmapsto \epsilon_\lambda \quad \text{et} \quad \varkappa : \Lambda \longrightarrow \mathrm{Sp}_h \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^\dagger : \lambda \longmapsto \varkappa_\lambda$$

des applications telles que chaque ϵ_λ soit un $\mathcal{A}$-vecteur propre de caractère propre $\varkappa_\lambda$ et σ une intégrale de Radon positive sur Λ .

(i) Si ϵ est continue, il en est de même de $\varkappa$.

(ii) Si ϵ est scalairement σ-mesurable et $\neq 0$ scalairement localement σ-p.p. , alors $\varkappa$ est scalairement σ-mesurable.

Pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, on a

$$\langle b | \, a\chi \rangle = \langle a^* b | \, \chi \rangle = \langle a^* | \, \chi \rangle \cdot \langle b | \, \chi \rangle = \langle \chi | \, a \rangle \cdot \langle b | \, \chi \rangle \ ,$$

ce qui montre que χ est un $\mathcal{A}$-vecteur propre.

Dmonstration de (i) Il suffit d'utiliser la formule

$$\langle \varkappa | \, a \rangle \cdot \langle \varphi | \, \epsilon \rangle = \langle \varphi | \, a\epsilon \rangle = \langle a^* \varphi | \, \epsilon \rangle \ ,$$

puisque pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe $\varphi \in F$ tel que $\langle \varphi | \, \epsilon_\lambda \rangle \neq 0$, donc $\langle \varphi | \, \epsilon \rangle \neq 0$ dans un voisinage ouvert de λ .

Dmonstration de (ii) Pour tout $\varphi \in F$, on a

$$\langle \varkappa | \, a \rangle = \frac{\langle a^* \varphi | \, \epsilon \rangle}{\langle \varphi | \, \epsilon \rangle} \quad \text{sur } \{ \langle \varphi | \, \epsilon \rangle \neq 0 \} \ ,$$

donc $\langle \varkappa | \, a \rangle$ est σ-mesurable sur cet ensemble. Peut-on conclure ? $\square$

Pour tout $a \in \mathcal{A}$, la transformée de Gelfand

$$\mathcal{G}a : \mathrm{Sp}_h \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K} : \lambda \longmapsto \langle \lambda | \, a \rangle$$

est une fonction continue et la transformation de Gelfand

$$\mathcal{G} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Sp}_h \mathcal{A}) : a \longmapsto \mathcal{G}a$$

est un morphisme d'algèbre involutive.

L'involutivité provient du fait que l'on ne considère que des caractères hermitiens :

$$\mathcal{G}a^*(\lambda) = \langle \lambda | \, a^* \rangle = \overline{\langle \lambda | \, a \rangle} = \overline{\mathcal{G}a(\lambda)} \ .$$

Rappelons, si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach complexe unifère et commutative, que tout caractère est continu, i.e. $\mathrm{Sp}\, \mathcal{A} \subset \mathcal{A}^\dagger$ (corollaire 6.4) et, si $\mathcal{A}$ est une algèbre stellaire unifère et commutative, que tout caractère est hermitien, i.e. $\mathrm{Sp}\, \mathcal{A} = \mathrm{Sp}_h \mathcal{A}$ (théorème de Gelfand-Neumark 6.6).

PROPOSITION *$\mathcal{G}(\mathcal{A})$ est une sous-algèbre involutive de $\mathcal{C}(\mathrm{Sp}_h \mathcal{A})$ séparant fortement les points de $\mathrm{Sp}_h \mathcal{A}$ et, pour tout compact K de $\mathrm{Sp}_h \mathcal{A}$, il existe une suite finie $(a_j)_{j=1,\ldots,n} \subset \mathcal{A}$ telle que $\sum_{j=1}^n \langle \epsilon | \, a_j^* a_j \rangle > 0$ sur K .*

Soit $\Lambda \subset \mathrm{Sp}_h \mathcal{A}$. Si $\Lambda \cup \{0\}$ est une partie compacte de $\mathcal{A}^\dagger$, alors $\mathcal{G}(\mathcal{A})_{|\Lambda}$ est dense dans $\mathcal{C}^0(\Lambda)$ et $\left|\mathcal{G}(\mathcal{A})_{|\Lambda}\right|^2$ est dense dans $\mathcal{C}^0_+(\Lambda)$. Si σ est une intégrale de Radon positive sur Λ , alors $\mathcal{G}(\mathcal{A}\mathcal{A})_{|\Lambda}$, donc aussi $\mathcal{G}(\mathcal{A})_{|\Lambda}$, sont denses dans $\mathbf{L}^2(\sigma)$.

Il est clair que $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ est une sous-algèbre involutive de $\mathcal{C}(\mathrm{Sp}_h \mathcal{A})$. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{Sp}_h \mathcal{A}$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors λ_1 et λ_2 sont linéairement indépendants. En effet si $\lambda_2 = \alpha \cdot \lambda_1$, en choisissant $a \in \mathcal{A}$ tel que $\langle a | \lambda_2 \rangle \neq 0$, il vient

$$\alpha^2 \cdot \langle a | \lambda_1 \rangle^2 = \langle a | \lambda_2 \rangle^2 = \left\langle a^2 \middle| \lambda_2 \right\rangle = \alpha \cdot \left\langle a^2 \middle| \lambda_1 \right\rangle = \alpha \cdot \langle \alpha | \lambda_1 \rangle^2 \neq 0 \ ,$$

donc $\alpha = 1$, i.e. $\lambda_1 = \lambda_2$, ce qui est absurde. La forme linéaire τ sur $\mathbb{K} \cdot \lambda_1 + \mathbb{K} \cdot \lambda_2$ telle que $\tau(\lambda_1) = 1$ et $\tau(\lambda_2) = 0$ est évidemment continue pour la topologie induite par $\mathcal{A}^\dagger$ (cf. théorème 2.7), donc se prolonge par le théorème de Hahn-Banach 3.6 en une forme linéaire continue $\langle a|$ sur $\mathcal{A}^\dagger$ pour un $a \in \mathcal{A}$ (cf. théorème 3.7). Ceci montre que $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ sépare fortement les points de $\mathrm{Sp}_h \mathcal{A}$.

Si K est une partie compacte de $\mathrm{Sp}_h \mathcal{A}$, pour tout $\lambda \in K$, il existe $a_\lambda \in \mathcal{A}$ tel que $\mathcal{G}a_\lambda(\lambda) \neq 0$. On a donc

$$\langle \mathcal{G}(a_\lambda^* a_\lambda) \rangle = |\mathcal{G}a_\lambda|^2 > 0 \quad \text{sur un voisinage ouvert de } \lambda \ .$$

Par la compacité de K , il existe une suite finie $(a_j)_{j=1,\ldots,n} \subset \mathcal{A}$ telle

$$\sum_{j=1}^n \mathcal{G}\left(a_j^* a_j\right) = \sum_{j=1}^n |\mathcal{G}a_j|^2 > 0 \quad \text{sur } K \ .$$

Si $\Lambda \cup \{0\}$ est compacte, alors Λ est localement compact et $\mathcal{G}(\mathcal{A})_{|\Lambda} \subset \mathcal{C}^0(\Lambda)$, d'où la première assertion de densité par le théorème de Stone-Weierstraß. Si maintenant $f \in \mathcal{C}^0_+(\Lambda)$, il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ telle que $\sqrt{f} = \lim_k \mathcal{G}a_{k|\Lambda}$ dans $\mathcal{C}^0(\Lambda)$. On a alors

$$f = \left|\sqrt{f}\right|^2 = \lim_k |\mathcal{G}a_k|^2 \ ,$$

ce qui prouve la deuxième assertion de densité. Finalement, puisque $\mathcal{K}(\Lambda)$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\sigma)$, il nous suffit de montrer que tout élément $f \in \mathcal{K}(\Lambda)$ peut être approximé par des éléments de $\mathcal{G}(\mathcal{A}\mathcal{A})_{|\Lambda}$ dans $\mathbf{L}^2(\sigma)$. Mais comme $\operatorname{supp} f$ est compact, il existe par ce qui précède un $a \in \mathcal{A}$ tel que $\mathcal{G}a > 0$ sur $\operatorname{supp} f$, puis $g \in \mathcal{K}(\Lambda)$ tel que $f = g \cdot \mathcal{G}a$. Par la densité de $\mathcal{G}(\mathcal{A})_{|\Lambda}$ dans $\mathcal{C}^0(\Lambda)$, pour tout $\delta > 0$, il existe $b \in \mathcal{A}$ tel que $\|\mathcal{G}b - g\|_\infty \leqslant \frac{\delta}{\|\mathcal{G}a\|_2}$, et on a

$$\|f - \mathcal{G}(ba)\|_2 = \|[g - \mathcal{G}b] \cdot \mathcal{G}a\|_2 \leqslant \|g - \mathcal{G}b\|_\infty \cdot \|\mathcal{G}a\|_2 \leqslant \delta \ .$$

□

THEOREME *Soient Λ un espace topologique séparé, σ une intégrale de Radon positive sur Λ ,*

$$\epsilon : \Lambda \longrightarrow F^\dagger \quad \text{et} \quad \varkappa : \Lambda \longrightarrow \mathrm{Sp}_h \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^\dagger$$

des applications scalairement σ-mesurables telles que chaque ϵ_λ soit un $\mathcal{A}$-vecteur propre de caractère $\varkappa_\lambda$.

Pour que $|\epsilon\rangle \langle\epsilon|$ soit scalairement σ-intégrable et définisse un sous-espace hilbertien

$$\mathcal{H} := \int \mathbb{K} \cdot \epsilon \, d\sigma \hookrightarrow F^\dagger \ ,$$

il faut et il suffit que $\langle \epsilon | F \rangle \subset \mathbf{L}^2(\sigma)$ *et que*

$$\langle \epsilon | : \varphi \longmapsto \langle \epsilon | \varphi \rangle : F \longrightarrow \mathbf{L}^2(\sigma)$$

soit continue pour la topologie de Mackey sur F *.*

Dans ce cas

(i) *Le noyau* $h = \int |\epsilon\rangle \langle \epsilon| \, d\sigma$ *est* $\mathcal{A}$*-linéaire.*

(ii) *Pour que* $\mathcal{H}$ *soit* $\mathcal{A}$*-invariant, il faut et il suffit que* $\langle \varkappa | \mathcal{A} \rangle \subset \mathbf{L}^\infty(\sigma)$ *. Dans ce cas*

(a) $\mathcal{H}$ *est involutif,*

$$\pi(a) = Z_{\langle \varkappa | a \rangle} \quad \text{et} \quad \|\pi(a)\| = \|\langle \varkappa | a \rangle\|_{\infty,\sigma} \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A} \ .$$

(b) $\mathcal{H}$ *est non-dégénéré si, et seulement si,* $\langle \epsilon | \mathcal{A}\mathcal{A} \rangle$ *est total dans* $\langle \epsilon | \mathcal{A} \rangle$ *, comme sous-espace de* $\mathbf{L}^2(\sigma)$ *.*

(c) *Pour que* $\mathcal{H}$ *soit un sous-module hilbertien, il faut et il suffit que* $\langle \epsilon | : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{L}^\infty(\sigma)$ *soit continue. Ceci est toujours le cas si l'algèbre* $\mathcal{A}$ *est tonnelée.*

La première partie découle du théorème 5.15.i sur les décompositions unidimensionnelles.

Dmonstration de (i) Le noyau est $\mathcal{A}$-linéaire, car pour tout $\varphi, \psi \in F$ et $a \in \mathcal{A}$, on a

$$\langle \varphi | h(a\psi) \rangle = \int \langle \varphi | \epsilon \rangle \cdot \langle \epsilon | a\psi \rangle \, d\sigma = \int \langle \varphi | \epsilon \rangle \cdot \langle \varkappa | a \rangle \cdot \langle \epsilon | \psi \rangle \, d\sigma =$$

$$= \int \langle \varphi | a\epsilon \rangle \cdot \langle \epsilon | \psi \rangle \, d\sigma = \int \langle a^*\varphi | \epsilon \rangle \cdot \langle \epsilon | \psi \rangle \, d\sigma = \langle a^*\varphi | h\psi \rangle = \langle \varphi | ah\psi \rangle \ .$$

Dmonstration de (ii) Nous allons utiliser le théorème 9.2 pour montrer que $\mathcal{H}$ est $\mathcal{A}$-invariant. Pour tout $\varphi \in F$ et $a \in \mathcal{A}$, on a

$$\langle \varphi | ah(a^*\varphi) \rangle = \int \langle a^*\varphi | \epsilon \rangle \cdot \langle \epsilon | a^*\varphi \rangle \, d\sigma = \int \langle \varkappa | a \rangle \cdot \langle \varphi | \epsilon \rangle \cdot \overline{\langle \varkappa | a \rangle} \cdot \langle \epsilon | \varphi \rangle \, d\sigma =$$

$$= \int |\langle \varkappa | a \rangle|^2 \cdot \langle \varphi | \epsilon \rangle \cdot \langle \epsilon | \varphi \rangle \, d\sigma \leqslant \|\langle \varkappa | a \rangle\|_{\infty,\sigma}^2 \cdot \int \langle \varphi | \epsilon \rangle \cdot \langle \epsilon | \varphi \rangle \, d\sigma = \|\langle \varkappa | a \rangle\|_{\infty,\sigma}^2 \cdot \langle \varphi | h\varphi \rangle \ ,$$

donc

$$\|\pi(a)\|^2 = \sup_{\varphi \in F, \langle \varphi | h\varphi \rangle \leqslant 1} \langle \varphi | ah(a^*\varphi) \rangle \leqslant \|\langle \varkappa | a \rangle\|_{\infty,\sigma} < \infty \ .$$

Montrons l'autre inégalité. Pour tout $\varphi \in F$ et $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\|\pi(a)\|^2 \cdot \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{k}} \geqslant \left(\left\| \pi\left(a^k\right) \right\|^2 \cdot \langle \varphi | h\varphi \rangle \right)^{\frac{1}{k}} \geqslant \left\langle \varphi \middle| (aa^*)^k h\varphi \right\rangle^{\frac{1}{k}} =$$

$$= \left(\int |\langle \varkappa | a \rangle|^{2k} \cdot |\langle \epsilon | \varphi \rangle|^2 \, d\sigma \right)^{\frac{1}{k}} \geqslant \delta^{\frac{2}{k}} \cdot \left(\int_{\{\langle \epsilon | \varphi \rangle \geqslant \delta\}} |\langle \varkappa | a \rangle|^{2k} \, d\sigma \right)^{\frac{1}{k}}$$

et, en passant à la limite

$$\|\pi(a)\|^2 \geqslant \lim_k \left(\int_{\{\langle \epsilon | \varphi \rangle \geqslant \delta\}} |\langle \varkappa | a \rangle|^{2k} \, d\sigma \right)^{\frac{1}{k}} = \|\langle \varkappa | a \rangle\|_{\infty,\sigma,\{\langle \epsilon | \varphi \rangle \geqslant \delta\}}^2$$

(exercice ; on remarquera que l'intégrale $1_{\{\langle \epsilon | \varphi \rangle \geqslant \delta\}} \cdot \sigma$ est bornée, puisque $\{\langle \epsilon | \varphi \rangle \geqslant \delta\}$ est σ-intégrable par la proposition AN.20.9). Cette inégalité est trivialement vraie si $\langle \varphi | h\varphi \rangle = 0$.

Par sécurité, on peut remarquer que

$$\langle \varphi | h\varphi \rangle = \int |\langle \epsilon | \varphi \rangle|^2 \, d\sigma \geqslant \delta^2 \cdot \sigma \left(\{ \langle \epsilon | \varphi \rangle \geqslant \delta \} \right) \, !$$

Finalement il vient

$$\| \langle \varkappa | a \rangle \|_{\infty,\sigma} = \sup_{K \in \mathfrak{K}(\Lambda)} \| \langle \varkappa | a \rangle \|_{\infty,\sigma,K} \leqslant \| \pi (a) \|$$

(exercice; la fonction $\langle \varkappa | a \rangle$ est σ-modérée, puisque elle est de carré σ-intégrable).

(a) $\mathcal{H}$ est involutif, puisque son noyau est $\mathcal{A}$-linéaire. il vient alors

$$\langle b | a\xi \rangle = \langle a^* b | \xi \rangle = (h (a^* b) | \xi) = \int \left(\langle \epsilon | a^* b \rangle \cdot \epsilon \middle| \hat{\xi} \right)_\diamond d\sigma =$$

$$= \int \overline{\langle \epsilon | b \rangle} \cdot \langle \epsilon | a \rangle \cdot \left(\epsilon \middle| \hat{\xi} \right)_\diamond d\sigma = \int \left(\langle \epsilon | b \rangle \cdot \epsilon \middle| \langle \epsilon | a \rangle \cdot \hat{\xi} \right)_\diamond d\sigma = \left\langle b \middle| \int \langle \epsilon | a \rangle \cdot \hat{\xi} \, d\sigma \right\rangle \ ,$$

donc $\pi (a) = Z_{\langle \epsilon | a \rangle}$. L'égalité des normes a été prouvée ci-dessus.

(b) Pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, la $\mathcal{A}$-linéarité de h montre que $\mathcal{A} h (\mathcal{A}) = h (\mathcal{A}\mathcal{A}) = \langle \epsilon | \mathcal{A}\mathcal{A} \rangle \cdot \epsilon$. Mais

$$\int \diamond \cdot \epsilon \, d\sigma : \overline{\langle \epsilon | \mathcal{A} \rangle} \longrightarrow \mathcal{H}$$

est unitaire, d'où le résultat puisque $h (\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$.

(c) C'est conséquence de la proposition 9.1 et du théorème 9.2.ii.b.

REMARQUE Pour tout $a, b, c \in \mathcal{A}$, on a

$$(ha | \pi (c) \, hb) = \langle a | chb \rangle = \int \langle \epsilon | c \rangle \cdot \overline{\langle \epsilon | a \rangle} \cdot \langle \epsilon | b \rangle \, d\sigma \ ,$$

ce qui montre que l'intégrale bornée $\overline{\langle \epsilon | a \rangle} \cdot \langle \epsilon | b \rangle \cdot \sigma$ est déterminée par des produits scalaires.

EXERCICE Etudier le cas $\mathcal{K} (X)$, où X est un espace localement compact.

Soient Λ une partie de $\mathrm{Sp}_h \mathcal{A}$, munie de la topologie induite, et

$$\epsilon : \Lambda \hookrightarrow \mathcal{A}^\dagger : \lambda \longmapsto \lambda \, ;$$

cette application est continue; c'est même un homéomorphisme par définition. Remarquons que

$$\mathcal{G} a_{|\Lambda} = \langle \epsilon | a \rangle$$

est continue. Il en est de même de l'application

$$| \epsilon \rangle \langle \epsilon | : \lambda \longmapsto | \lambda \rangle \langle \lambda | : \Lambda \longrightarrow \mathcal{L}_s \left(\mathcal{A}, \mathcal{A}^\dagger \right) \ ,$$

puisque pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, la fonction

$$\langle a | \epsilon \rangle \cdot \langle \epsilon | b \rangle = \left(\overline{\mathcal{G} a} \cdot \mathcal{G} b \right)_{|\Lambda} : \lambda \longmapsto \langle a | \lambda \rangle \cdot \langle \lambda | b \rangle$$

est continue.

9.4 Le théorème de Plancherel-Godement

Nous supposerons que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que $\mathcal{A}$ est commutative.

THEOREME (d'existence) *Soit $\mathcal{H}$ un sous-module hilbertien non-dégénéré de $\mathcal{A}^\dagger$. Alors il existe une partie fermée $\operatorname{Sp}\mathcal{H}$ de $\operatorname{Sp}_h\mathcal{A}$, appelée le spectre de $\mathcal{H}$, et une intégrale de Radon positive $\sigma_{\mathcal{H}}$ sur $\operatorname{Sp}\mathcal{H}$ telles que*

(i) $\operatorname{Sp}\mathcal{H}\cup\{0\}$ *est une partie compacte de $\mathcal{A}^\dagger$ et $0\in\overline{\operatorname{Sp}\mathcal{H}}$ si, et seulement si,* $\operatorname{Id}\notin\overline{\pi(\mathcal{A})}$.

(ii) *En notant $\epsilon : \operatorname{Sp}\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{A}^\dagger : \lambda \longmapsto \lambda$, on a*

$$\mathcal{H} = \int^{\boxplus} \mathbb{K}\cdot\epsilon\, d\sigma_{\mathcal{H}} \ .$$

(iii) *Pour tout $a\in\mathcal{A}$, on a $\pi(a) = Z_{\langle\epsilon|a\rangle}$ et $\overline{\pi(\mathcal{A})} = Z_{\mathcal{C}^0(\operatorname{Sp}\mathcal{H})}$.*

(iv) $\operatorname{supp}\sigma_{\mathcal{H}} = \operatorname{Sp}\mathcal{H}$.

Dmonstration de (i) Soit $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ l'algèbre stellaire unifère engendrée par $\pi(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Comme $\pi(\mathcal{A})+\mathbb{C}\cdot\operatorname{Id}$ est une sous-algèbre involutive unifère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, on a

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}} = \overline{\pi(\mathcal{A})+\mathbb{C}\cdot\operatorname{Id}} \ .$$

Elle est commutative et par le théorème de Gelfand-Neumark 6.6

$$\mathcal{G} : \mathcal{A}_{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$$

est un isomorphisme d'algèbre stellaire unifère. Considérons $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{H}}$, qui est un morphisme d'algèbre involutive. Il est continu, puisque π est normiquement continue par hypothèse, donc

$$\pi^\dagger : \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^\dagger \longrightarrow \mathcal{A}^\dagger : \nu \longmapsto \nu\circ\pi$$

est faiblement continue.

Calculons $\operatorname{Ker}\pi^\dagger$. Etant donné $\nu\in\operatorname{Ker}\pi^\dagger$, i.e $\nu\in\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^\dagger$ tel que $\nu\circ\pi = 0$, on a $\nu = 0$ sur $\pi(\mathcal{A})$, donc $\overline{\pi(\mathcal{A})}\subset\operatorname{Ker}\nu$. On a $\nu\neq 0$ si, et seulement si, $\operatorname{Id}\notin\operatorname{Ker}\nu$. Dans ce cas

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}} = \operatorname{Ker}\nu\oplus\mathbb{C}\cdot\operatorname{Id}\supset\overline{\pi(\mathcal{A})}\oplus\mathbb{C}\cdot\operatorname{Id}\supset\overline{\pi(\mathcal{A})+\mathbb{C}\cdot\operatorname{Id}} = \mathcal{A}_{\mathcal{H}} \ ,$$

puisque $\overline{\pi(\mathcal{A})}\oplus\mathbb{C}\cdot\operatorname{Id}$ est fermé dans $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ par le corollaire 2.8, donc $\operatorname{Ker}\nu = \overline{\pi(\mathcal{A})}$. Ainsi si $\operatorname{Ker}\pi^\dagger\neq\{0\}$, i.e. $\operatorname{Id}\notin\overline{\pi(\mathcal{A})}$, il existe une unique forme semi-linéaire continue χ_∞ sur $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ s'annulant sur $\overline{\pi(\mathcal{A})}$ et prenant la valeur 1 sur Id ; c'est un caractère et $\operatorname{Ker}\pi^\dagger = \mathbb{C}\cdot\chi_\infty$.

Désignons par

$$\Phi : \mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A}_{\mathcal{H}}) \xrightarrow{\mathcal{G}^{-1}} \mathcal{A}_{\mathcal{H}} \hookrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

l'intégrale spectrale associée à $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ et considérons, pour tout $\xi,\eta\in\mathcal{H}$, la forme linéaire

$$m_{\xi,\eta} : f \longmapsto (\xi|\,\Phi(f)\,\eta) : \mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A}_{\mathcal{H}}) \longrightarrow \mathbb{C} \ .$$

Elle est continue, puisque

$$\|m_{\xi,\eta}\| \leqslant \sup\nolimits_{f\in\mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A}_{\mathcal{H}}),\|f\|_\infty\leqslant 1} \|\xi\|\cdot\|\Phi(f)\|\cdot\|\eta\| = \|\xi\|\cdot\|\eta\| \ .$$

C'est donc une intégrale de Radon (complexe) et, pour tout $T \in \mathcal{A}_{\mathcal{H}}$, on a $m_{\xi,T\eta} = \mathcal{G}T \cdot m_{\xi,\eta}$. En effet $T = \Phi\mathcal{G}T$ et

$$\int f \, dm_{\xi,T\eta} = (\xi | \Phi(f) \Phi(\mathcal{G}T) \eta) = (\xi | \Phi(f \cdot \mathcal{G}T) \eta) = \int f \cdot \mathcal{G}T \, dm_{\xi,\eta} \; .$$

Nous allons maintenant montrer, si $\mathrm{Id} \notin \overline{\pi(\mathcal{A})}$, que l'on a

$$m_{\xi,\eta}(\{\chi_\infty\}) = 0 \quad \text{et} \quad \chi_\infty \in \overline{\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_{\mathcal{H}} \smallsetminus \{\chi_\infty\}} \; .$$

La forme sesquilinéaire

$$(\xi, \eta) \longmapsto m_{\xi,\eta}(\{\chi_\infty\}) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

est continue, car

$$|m_{\xi,\eta}(\{\chi_\infty\})| \leqslant |m_{\xi,\eta}|(\{\chi_\infty\}) \leqslant |m_{\xi,\eta}|(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_{\mathcal{H}}) = \|m_{\xi,\eta}\| \leqslant \|\xi\| \cdot \|\eta\| \; .$$

Il existe donc un opérateur $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $m_{\xi,\eta}(\{\chi_\infty\}) = (\xi | P\eta)$ et, pour tout $a \in \mathcal{A}$, on obtient

$$(\xi | Pa\eta) = \int 1_{\{\chi_\infty\}} \, dm_{\xi,\pi(a)\eta} = \int 1_{\{\chi_\infty\}} \cdot \mathcal{G}\pi(a) \, dm_{\xi,\eta} = 0 \quad \text{pour tout } \xi, \eta \in \mathcal{H} \; ,$$

puisque $\mathcal{G}\pi(a)(\chi_\infty) = \langle \pi(a) | \chi_\infty \rangle = 0$. Ainsi $Pa\eta = 0$, et comme $\mathcal{H}$ est non-dégénéré, i.e. $\mathcal{AH}$ est total dans $\mathcal{H}$, on en déduit que $P = 0$, ce qui prouve la première assertion. Démontrons la seconde par l'absurde. Si $\chi_\infty \notin \overline{\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_{\mathcal{H}} \smallsetminus \{\chi_\infty\}}$, l'ensemble $\{\chi_\infty\}$ est ouvert et fermé, donc $1_{\chi_\infty} \in \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$ et $\Phi(1_{\chi_\infty}) \neq 0$. Mais

$$(\xi | P\eta) = \int 1_{\chi_\infty} \, dm_{\xi,\eta} = (\xi | \Phi(1_{\chi_\infty}) \eta) \quad \text{pour tout } \xi, \eta \in \mathcal{H} \; ,$$

donc $\Phi(1_{\chi_\infty}) = P = 0$, ce qui est contradictoire.

Posons $\mathrm{Sp}'\,\mathcal{A}_{\mathcal{H}} := \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_{\mathcal{H}} \smallsetminus \mathrm{Ker}\,\pi^\dagger$; on a

$$\mathcal{G}\left(\overline{\pi(\mathcal{A})}\right)_{|\,\mathrm{Sp}'\,\mathcal{A}_{\mathcal{H}}} = \mathcal{C}^0(\mathrm{Sp}'\,\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$$

et $\pi^\dagger_{|\,\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_{\mathcal{H}}}$ est injective, donc un homéomorphisme sur son image, puisque $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ est compact. Nous pouvons maintenant définir

$$\mathrm{Sp}\,\mathcal{H} := \pi^\dagger(\mathrm{Sp}'\,\mathcal{A}_{\mathcal{H}}) = \pi^\dagger(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_{\mathcal{H}}) \smallsetminus \{0\} \; .$$

Alors $\mathrm{Sp}\,\mathcal{H} \subset \mathrm{Sp}_h\,\mathcal{A}$, puisque tout caractère de $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ est hermitien, et $\overline{\mathrm{Sp}\,\mathcal{H}} = \pi^\dagger(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_{\mathcal{H}}) \subset \mathrm{Sp}\,\mathcal{H} \cup \{0\}$. On a évidemment $0 \in \overline{\mathrm{Sp}\,\mathcal{H}}$ si, et seulement si, $\mathrm{Id} \notin \overline{\pi(\mathcal{A})}$. Ceci finit de prouver (i).

Dmonstration de (ii) Pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $\chi \in \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$, on a

$$\langle \pi^\dagger \chi | a \rangle = \langle \chi | \pi(a) \rangle = \mathcal{G}\pi(a)(\chi) \; ,$$

donc

$$\langle \epsilon | a \rangle \circ \pi^\dagger{}_{|\,\mathrm{Sp}'\,\mathcal{A}_{\mathcal{H}}} = \mathcal{G}\pi(a) \; .$$

En outre

$$\Psi : f \longmapsto \Phi\left(f \circ \pi^\dagger{}_{|\,\mathrm{Sp}'\,\mathcal{A}_{\mathcal{H}}}\right) : \mathcal{C}\left(\overline{\mathrm{Sp}\,\mathcal{H}}\right) \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{H}}$$

est un isomorphisme d'algèbre stellaire unifère tel que $\Psi(\mathcal{C}^0(\mathrm{Sp}\,\mathcal{H})) = \overline{\pi(\mathcal{A})}$.

La remarque 9.3 montre comment nous devons procéder pour construire $\sigma_{\mathcal{H}}$. Pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, soit

$$\sigma_{a,b} := \pi^\dagger{}_{|\,\mathrm{Sp}'\,\mathcal{A}_{\mathcal{H}}}\left(m_{ha,hb|\,\mathrm{Sp}'\,\mathcal{A}_{\mathcal{H}}}\right) \; ;$$

quel que soit $f \in \mathcal{C}\left(\overline{\operatorname{Sp}\mathcal{H}}\right)$, on a

$$\langle a|\, \Psi(f)\, hb\rangle = \left(ha|\, \Phi\left(f \circ \pi^{\dagger}{}_{|\operatorname{Sp}\mathcal{A}_{\mathcal{H}}}\right) hb\right) = \int_{\operatorname{Sp}\mathcal{A}_{\mathcal{H}}} f \circ \pi^{\dagger}{}_{|\operatorname{Sp}\mathcal{A}_{\mathcal{H}}}\, dm_{ha,hb} =$$

$$= \int_{\operatorname{Sp}'\mathcal{A}_{\mathcal{H}}} f \circ \pi^{\dagger}{}_{|\operatorname{Sp}'\mathcal{A}_{\mathcal{H}}}\, dm_{ha,hb} = \int f\, d\sigma_{a,b} \ . \qquad (*)$$

En outre $\sigma_{a,a}$ est positive, car pour tout $f \in \mathcal{C}_+^0(\operatorname{Sp}\mathcal{H})$, on a

$$\int f\, d\sigma_{a,a} = \left(ha \middle| \Psi\left(f^{\frac{1}{2}} \cdot f^{\frac{1}{2}}\right) ha\right) = \left(\Psi\left(f^{\frac{1}{2}}\right) a \middle| \Psi\left(f^{\frac{1}{2}}\right) a\right) \geqslant 0 \ .$$

Il nous faut maintenant construire $\sigma_{\mathcal{H}} \in \mathcal{M}(\operatorname{Sp}\mathcal{H})$ de telle manière que

$$\sigma_{a,b} = \overline{\langle \epsilon|\, a\rangle} \cdot \langle \epsilon|\, b\rangle \cdot \sigma_{\mathcal{H}} \ .$$

Pour tout $\rho \in \mathcal{K}(\operatorname{Sp}\mathcal{H})$, on aurait

$$\rho \cdot \sigma_{a,b} = \overline{\langle \epsilon|\, a\rangle} \cdot \langle \epsilon|\, b\rangle \cdot \rho \cdot \sigma_{\mathcal{H}} \ ,$$

ce qui nous conduit tout d'abord à construire $\sigma_\rho \in \mathcal{M}^b(\operatorname{Sp}\mathcal{H})$ tel que

$$\rho \cdot \sigma_{a,b} = \overline{\langle \epsilon|\, a\rangle} \cdot \langle \epsilon|\, b\rangle \cdot \sigma_\rho \ ,$$

puisque l'intégrale $\sigma_{\mathcal{H}}$ est la forme linéaire

$$\sigma_{\mathcal{H}} : \rho \longmapsto \int \rho\, d\sigma_{\mathcal{H}} = \int 1\, d\sigma_\rho \ .$$

Soit J l'ensemble des $\rho \in \mathcal{C}^0(\operatorname{Sp}\mathcal{H})$ telles qu'il existe $\sigma_\rho \in \mathcal{M}^b(\operatorname{Sp}\mathcal{H})$ satisfaisant à

$$\rho \cdot \sigma_{a,b} = \overline{\langle \epsilon|\, a\rangle} \cdot \langle \epsilon|\, b\rangle \cdot \sigma_\rho \quad \text{pour tout } a, b \in \mathcal{A} \ .$$

(a) σ_ρ est univoquement déterminée.
En effet, pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a

$$\int \langle \epsilon|\, a^* a\rangle\ d\sigma_\rho = \int \overline{\langle \epsilon|\, a\rangle} \cdot \langle \epsilon|\, a\rangle\ d\sigma_\rho = \int \rho\, d\sigma_{a,a} \ .$$

Notre assertion en découle car $|\langle \epsilon|\, \mathcal{A}\rangle|^2$ est dense dans $\mathcal{C}_+^0(\operatorname{Sp}\mathcal{H})$ par la proposition 9.3 et $\mathcal{C}_+^0(\operatorname{Sp}\mathcal{H})$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\operatorname{Sp}\mathcal{H})$.

(b) J est un sous-espace vectoriel, l'application $\rho \longmapsto \sigma_\rho : J \longrightarrow \mathcal{M}^b(\operatorname{Sp}\mathcal{H})$ est linéaire et, pour tout $\rho \in J$ tel que $\rho \geqslant 0$, on a $\sigma_\rho \geqslant 0$.

La linéarité est immédiate en utilisant l'unicité démontrée en (a). Soient maintenant $\rho \in J$ tel que $\rho \geqslant 0$ et $f \in \mathcal{C}_+^0(\operatorname{Sp}\mathcal{H})$. Il nous suffit de montrer que $\int f\, d\sigma_\rho \geqslant 0$. Mais $|\langle \epsilon|\, \mathcal{A}\rangle|^2$ est dense dans $\mathcal{C}_+^0(\operatorname{Sp}\mathcal{H})$ par la proposition 9.3 ; il existe donc une suite $(a_j)_{j=1,\ldots,n} \subset \mathcal{A}$ telle que $f = \lim_k |\langle \epsilon|\, a_k\rangle|^2 = \lim_k \overline{\langle \epsilon|\, a_k\rangle}\, \langle \epsilon|\, a_k\rangle$, donc

$$\int f\, d\sigma_\rho = \lim_k \int \overline{\langle \epsilon|\, a_k\rangle} \cdot \langle \epsilon|\, a_k\rangle\ d\sigma_\rho = \lim_k \int \rho\, d\sigma_{a_k,a_k} \geqslant 0 \ .$$

(c) J est un idéal de $\mathcal{C}^0(\operatorname{Sp}\mathcal{H})$ et

$$\sigma_{\varkappa\rho} = \varkappa \cdot \sigma_\rho \quad \text{pour tout } \varkappa \in \mathcal{C}^0(\operatorname{Sp}\mathcal{H}) \text{ et } \rho \in J \ .$$

En effet, pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, on a $\varkappa \cdot \sigma_\rho \in \mathcal{M}^b(\operatorname{Sp}\mathcal{H})$ et

$$(\varkappa\rho) \cdot \sigma_{a,b} = \varkappa \cdot \left(\overline{\langle \epsilon|\, a\rangle} \cdot \langle \epsilon|\, b\rangle \cdot \sigma_\rho\right) = \overline{\langle \epsilon|\, a\rangle} \cdot \langle \epsilon|\, b\rangle \cdot (\varkappa \cdot \sigma_\rho) \ .$$

(d) Pour tout $u, v \in \mathcal{A}$, on a $\overline{\langle \epsilon | u \rangle} \cdot \langle \epsilon | v \rangle \in J$ et

$$\sigma_{\overline{\langle \epsilon | u \rangle} \cdot \langle \epsilon | v \rangle} = \sigma_{u,v} \ .$$

Cela revient à montrer que, pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, on a

$$\overline{\langle \epsilon | u \rangle} \cdot \langle \epsilon | v \rangle \cdot \sigma_{a,b} = \overline{\langle \epsilon | a \rangle} \cdot \langle \epsilon | b \rangle \cdot \sigma_{u,v} \ .$$

Mais pour tout $c \in \mathcal{A}$, il vient

$$\int \langle \epsilon | c \rangle \cdot \overline{\langle \epsilon | u \rangle} \cdot \langle \epsilon | v \rangle \, d\sigma_{a,b} = \langle a | (cu^* v) \, hb \rangle = \langle u | (ca^* b) \, hv \rangle = \int \langle \epsilon | c \rangle \cdot \overline{\langle \epsilon | a \rangle} \cdot \langle \epsilon | b \rangle \, d\sigma_{u,v} \ ,$$

par la commutativité de $\mathcal{A}$ et la $\mathcal{A}$-linéarité de h , d'où le résultat compte tenu du fait que $\langle \epsilon | \mathcal{A} \rangle$ est dense dans $\mathcal{C}^0 (\mathrm{Sp}\, \mathcal{H})$.

(e) On a $\mathcal{K} (\mathrm{Sp}\, \mathcal{H}) \subset J$.

Soit $f \in \mathcal{K} (\mathrm{Sp}\, \mathcal{H})$. Par la proposition 9.3, il existe une suite finie $(a_j)_{j=1,\ldots,n} \subset \mathcal{A}$ telle que

$$\rho := \sum_{j=1}^{n} \overline{\langle \epsilon | a_j \rangle} \, \langle \epsilon | a_j \rangle > 0 \quad \text{sur } \operatorname{supp} f$$

et $\rho \in J$ par (d). Il existe alors $g \in \mathcal{K} (\mathrm{Sp}\, \mathcal{H})$ tel que $f = g \cdot \rho$, donc $f \in J$ par (c).

Nous pouvons maintenant conclure la démonstration. La forme linéaire

$$\sigma_{\mathcal{H}} : \mathcal{K} (\mathrm{Sp}\, \mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{K} : \rho \longmapsto \int 1 \, d\sigma_\rho$$

est une intégrale de Radon positive sur $\mathrm{Sp}\, \mathcal{H}$ par (e) et (b). Pour tout $\varkappa \in \mathcal{K} (\mathrm{Sp}\, \mathcal{H})$, on a

$$\int \varkappa \cdot \rho \, d\sigma_{\mathcal{H}} = \int 1 \, d\sigma_{\varkappa \cdot \rho} = \int \varkappa \, d\sigma_\rho \ ,$$

donc

$$\sigma_\rho = \rho \cdot \sigma_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \rho \in \mathcal{K} (\mathrm{Sp}\, \mathcal{H}) \ ,$$

ainsi que

$$\sigma_{a,b} = \sigma_{\overline{\langle \epsilon | a \rangle} \cdot \langle \epsilon | b \rangle} = \overline{\langle \epsilon | a \rangle} \cdot \langle \epsilon | b \rangle \cdot \sigma_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } a, b \in \mathcal{A} \ .$$

L'intégrale $\sigma_{a,b}$ étant bornée, on a $\overline{\langle \epsilon | a \rangle} \cdot \langle \epsilon | b \rangle \in \mathbf{L}^1 (\sigma_{\mathcal{H}})$, donc $\langle \epsilon | \mathcal{A} \rangle \subset \mathbf{L}^2 (\sigma_{\mathcal{H}})$.

Utilisant $(*)$ avec $f = 1$, on obtient

$$\langle a | hb \rangle = \int d\sigma_{a,b} = \int \overline{\langle \epsilon | a \rangle} \cdot \langle \epsilon | b \rangle \, d\sigma_{\mathcal{H}} = \int \langle a | \epsilon \rangle \cdot \langle \epsilon | b \rangle \, d\sigma_{\mathcal{H}} = \left\langle a \middle| \left(\int | \epsilon \rangle \langle \epsilon | \, d\sigma_{\mathcal{H}} \right) b \right\rangle \ ;$$

on a donc $h = \int | \epsilon \rangle \langle \epsilon | \, d\sigma_{\mathcal{H}}$, i.e. $\mathcal{H} = \int \mathbb{K} \cdot \epsilon \, d\sigma_{\mathcal{H}}$. En vertu des théorèmes 9.3.iii et 5.15, iv et v, la décomposition est directe. Ceci finit de prouver (ii).

Dmonstration de (iii) La première formule de *(iii)* découle du théorème 9.3.ii.a. A nouveau grâce à $(*)$, pour tout $f \in \mathcal{C}^0 (\mathrm{Sp}\, \mathcal{H})$ et $a, b \in \mathcal{A}$, il vient

$$\langle a | \Psi (f) \, hb \rangle = \int f \, d\sigma_{a,b} = \int \langle a | \epsilon \rangle \cdot f \cdot \langle \epsilon | b \rangle \, d\sigma_{\mathcal{H}} = \left\langle a \middle| \int f \cdot \langle \epsilon | b \rangle \cdot \epsilon \, d\sigma_{\mathcal{H}} \right\rangle = \langle a | Z_f hb \rangle \ ,$$

donc $\Psi (f) = Z_f$, et par suite $\overline{\pi (\mathcal{A})} = Z_{\mathcal{C}^0 (\mathrm{Sp}\, \mathcal{H})}$.

Dmonstration de (iv) Pour tout $f \in \mathcal{C}^0 (\mathrm{Sp}\, \mathcal{H})$ tel que $f = 0$ sur $\operatorname{supp} \sigma_{\mathcal{H}}$, on a

$$0 = \int f \cdot \overline{\langle \epsilon | a \rangle} \cdot \langle \epsilon | b \rangle \, d\sigma_{\mathcal{H}} = \int f \, d\sigma_{a,b} = (ha | \Psi (f) \, hb) \quad \text{pour tout } a, b \in \mathcal{A} \ ,$$

donc $\Psi(f) = 0$, et par suite $f = 0$; ceci montre que $\mathrm{Sp}\,\mathcal{H} \setminus \mathrm{supp}\,\sigma_{\mathcal{H}} = \emptyset$.

Le théorème d'existence est complètement démontré. $\square$

THEOREME (d'unicité) *Soient* $\Lambda \subset \mathrm{Sp}_h \mathcal{A}$ *et* σ *une intégrale de Radon sur* Λ *telles que* $\mathcal{H} := \int \mathbb{K} \cdot \epsilon\, d\sigma$ *soit un sous-module hilbertien non-dégénéré de* $\mathcal{A}^\dagger$ *. Alors* $\mathrm{supp}\,\sigma$ *est une partie dense de* $\mathrm{Sp}\,\mathcal{H}$ *, l'image de* $\sigma_{|\,\mathrm{supp}\,\sigma}$ *dans* $\mathrm{Sp}\,\mathcal{H}$ *est égale à* $\sigma_{\mathcal{H}}$ *et la décomposition est directe.*

Puisque, pour tout $a \in \mathcal{A}$, les fonctions $\langle \epsilon |\, a\rangle$ sont continues, on a

$$\|\langle \epsilon |\, a\rangle\|_{\infty,\mathrm{supp}\,\sigma} = \|\langle \epsilon |\, a\rangle\|_{\infty,\sigma} = \|\pi(a)\|$$

grâce au théorème 9.3.ii.a. Pour tout $\lambda \in \mathrm{supp}\,\sigma$, il est alors clair que le caractère λ s'annule sur $\mathrm{Ker}\,\pi$, donc définit un caractère $\widetilde{\lambda}$ de $\pi(\mathcal{A})$. L'égalité montre également que $\widetilde{\lambda}$ est continu, donc se prolonge (univoquement) par continuité en un caractère χ tout d'abord à $\overline{\pi(\mathcal{A})}$, puis à $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$. Par construction on a $\lambda = \pi^\dagger \chi$, ce qui prouve l'inclusion $\mathrm{supp}\,\sigma \subset \mathrm{Sp}\,\mathcal{H}$.

Pour tout $a, b, c \in \mathcal{A}$, on a

$$\int_{\mathrm{supp}\,\sigma} \langle \epsilon |\, c\rangle \cdot \overline{\langle \epsilon |\, a\rangle} \cdot \langle \epsilon |\, b\rangle \; d\sigma = \langle a |\, chb\rangle = \int_{\mathrm{Sp}\,\mathcal{H}} \langle \epsilon |\, c\rangle \cdot \overline{\langle \epsilon |\, a\rangle} \cdot \langle \epsilon |\, b\rangle \; d\sigma_{\mathcal{H}} \ ,$$

ce qui montre que l'image de l'intégrale bornée $\overline{\langle \epsilon |\, a\rangle} \cdot \langle \epsilon |\, b\rangle \cdot \sigma$ dans $\mathrm{Sp}\,\mathcal{H}$ coïncide avec $\overline{\langle \epsilon |\, a\rangle} \cdot \langle \epsilon |\, b\rangle \cdot \sigma_{\mathcal{H}}$, puisque $\langle \epsilon |\, \mathcal{A}\rangle$ est dense dans $\mathcal{C}^0(\mathrm{Sp}\,\mathcal{H})$. Pour tout $f \in \mathcal{K}(\mathrm{Sp}\,\mathcal{H})$, soient $\rho = \sum_{j=1}^n \overline{\langle \epsilon |\, a_j\rangle} \langle \epsilon |\, a_j\rangle$ et $g \in \mathcal{K}(\mathrm{Sp}\,\mathcal{H})$ tels que $f = g \cdot \rho$ comme dans (e) ci-dessus. On obtient alors

$$\int_{\mathrm{supp}\,\sigma} f\, d\sigma = \sum_{j=1}^n \int_{\mathrm{supp}\,\sigma} g \cdot \overline{\langle \epsilon |\, a_j\rangle} \langle \epsilon |\, a_j\rangle \; d\sigma = \sum_{j=1}^n \int_{\mathrm{Sp}\,\mathcal{H}} g \cdot \overline{\langle \epsilon |\, a_j\rangle} \langle \epsilon |\, a_j\rangle \; d\sigma_{\mathcal{H}} = \int_{\mathrm{Sp}\,\mathcal{H}} f\, d\sigma_{\mathcal{H}} \ ,$$

ce qui prouve la deuxième assertion. La densité de $\mathrm{supp}\,\sigma$ dans $\mathrm{Sp}\,\mathcal{H}$ est alors évidente, puisque $\mathrm{supp}\,\sigma_{\mathcal{H}} = \mathrm{Sp}\,\mathcal{H}$. Finalement, on vérifie immédiatement que $\mathcal{H} = \int^{\boxplus} \mathbb{K} \cdot \epsilon\, d\sigma$, puisque $\mathcal{H} = \int^{\boxplus} \mathbb{K} \cdot \epsilon\, d\sigma_{\mathcal{H}}$. $\square$

9.5 Sous-modules hilbertiens cycliques

DEFINITION 1 Nous dirons qu'une forme semi-linéaire μ sur $\mathcal{A}$ est *positive* si $\langle a^* a | \mu \rangle \geqslant 0$ pour tout $a \in \mathcal{A}$. Nous désignerons par $\mathcal{A}^\dagger_+$ l'ensemble des formes semi-linéaires continues et positives.

On vérifie immédiatement que $\mathcal{A}^\dagger_+$ est un cône convexe fermé dans $\mathcal{A}^\dagger$. Il est saillant si, et seulement si, l'ensemble des $a^* a$ pour $a \in \mathcal{A}$ est total dans $\mathcal{A}$.

PROPOSITION *Soit $\mu \in \mathcal{A}^\dagger$. Alors*

$$\diamond\mu : a \longmapsto a\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^\dagger$$

est un noyau $\mathcal{A}$-linéaire.

(i) Pour que $\diamond\mu$ soit positive, il faut et il suffit que $\mu \in \mathcal{A}^\dagger_+$.

(ii) $\diamond\mu$ définit un sous-espace hilbertien de $\mathcal{A}^\dagger$ si, et seulement si, $a \longmapsto \langle a^* a | \mu \rangle^{\frac{1}{2}}$ est une semi-norme continue pour la topologie de Mackey sur $\mathcal{A}$.

Dans ce cas nous désignerons par $\mathcal{H}_\mu$ le sous-espace hilbertien de $\mathcal{A}^\dagger$ de noyau $\diamond\mu$ et on a

(iii) Pour que $\mathcal{H}_\mu$ soit un sous-module hilbertien, il faut et il suffit qu'il existe une semi-norme continue p sur $\mathcal{A}$ telle que, pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, on ait

$$\langle b | aa^* b\mu \rangle \leqslant p(a)^2 \cdot \langle b | b\mu \rangle \ .$$

C'est immédiat, la dernière partie n'étant qu'une reformulation du corollaire 9.2. — □

DEFINITION 2 Nous dirons qu'un sous-module hilbertien de la forme $\mathcal{H}_\mu$ est *cyclique* .

On dit souvent que le sous-module hilbertien $\mathcal{H}_\mu$ a été obtenu par la construction de Gelfand-Neumark-Segal.

EXEMPLE Soit $\mathcal{H}$ un $\mathcal{A}$-module de Hilbert. Nous supposerons qu'il existe un vecteur $\zeta \in \mathcal{H}$ *totalisateur* (ou *cyclique*) pour l'action de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire tel que $\mathcal{A}\zeta$ soit dense dans $\mathcal{H}$. L'application linéaire continue

$$\diamond\zeta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{H} : a \longmapsto a\zeta$$

est donc d'image dense et, en considérant la semi-dualité $(\mathcal{H} | \mathcal{H})$, on obtient un plongement continu

$$(\diamond\zeta)^\dagger : \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{A}^\dagger \ .$$

La forme semi-linéaire continue sur $\mathcal{A}$

$$\mu_\zeta := (\diamond\zeta)^\dagger \zeta : b \longmapsto \left\langle b \middle| (\diamond\zeta)^\dagger \zeta \right\rangle = (b\zeta | \zeta)_{\mathcal{H}}$$

est positive, car

$$(b^* b\zeta | \zeta)_{\mathcal{H}} = (b\zeta | b\zeta)_{\mathcal{H}} \geqslant 0 \ .$$

Pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, on obtient alors

$$\left\langle b\middle| (\diamond\zeta)^\dagger (\diamond\zeta)\, a\right\rangle = (b\zeta|\, a\zeta)_{\mathcal{H}} = (a^* b\zeta|\, \zeta)_{\mathcal{H}} = \left\langle a^* b\middle|\, \mu_\zeta\right\rangle = \left\langle b\middle|\, a\mu_\zeta\right\rangle \ .$$

Le noyau du sous-espace hilbertien $(\diamond\zeta)^\dagger(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{A}^\dagger$ est donc $\diamond\mu_\zeta$, i.e. $(\diamond\zeta)^\dagger(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_{\mu_\zeta} =: \mathcal{H}_\zeta$. En outre $(\diamond\zeta)^\dagger$ est un opérateur d'entrelacement, i.e. est $\mathcal{A}$-linéaire ; en effet pour tout $a, b \in \mathcal{A}$ et $\eta \in \mathcal{H}$, on a

$$\left\langle b\middle| (\diamond\zeta)^\dagger (a\eta)\right\rangle = (b\zeta|\, a\eta)_{\mathcal{H}} = (a^* b\zeta|\, \eta)_{\mathcal{H}} = ((\diamond\zeta)(a^* b)|\, \eta)_{\mathcal{H}} = \left\langle a^* b\middle| (\diamond\zeta)^\dagger \eta\right\rangle = \left\langle b\middle|\, a (\diamond\zeta)^\dagger \eta\right\rangle \ .$$

Nous avons donc montré que $\mathcal{H}_\zeta$ est un sous-module hilbertien de $\mathcal{A}^\dagger$ et que $(\diamond\zeta)^\dagger$ est un isomorphisme du $\mathcal{A}$-module de Hilbert $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_\zeta$, transformant le vecteur totalisateur ζ en μ_ζ . En d'autres termes

THEOREME *Tout $\mathcal{A}$-module de Hilbert à vecteur totalisateur ζ est isomorphe à un sous-module hilbertien de $\mathcal{A}^\dagger$.*

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et l'algèbre $\mathcal{A}$ est commutative, on peut évidemment appliquer le théorème de Plancherel-Godement à $\mathcal{H}_\zeta$. Remarquons que dans ce cas l'intégrale de Radon positive $\sigma_{\mathcal{H}_\zeta}$ peut être définie directement. Théorème de Bochner-Godement.

DEFINITION 3 Soient $\mathcal{H}$ un $\mathcal{A}$-module de Hilbert et $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien. Si $\mathcal{A}\mathcal{G}$ est total dans $\mathcal{H}$, nous dirons que $\mathcal{G}$ est *totalisateur* dans $\mathcal{H}$.

Nous désignerons par $\not{L}\left(G, F^\dagger\right)$ l'espace vectoriel des applications semi-linéaires continues de G dans $F^\dagger$. On obtient une semi-dualité $\left\langle F \otimes G\middle| \not{L}\left(G, F^\dagger\right)\right\rangle$ en posant

$$\langle \varphi \otimes \gamma|\, T\rangle := \langle \varphi|\, T\gamma\rangle \ .$$

Remarquons que $\not{L}\left(\mathbb{K}, F^\dagger\right) \approx F^\dagger$ par $T \longmapsto T1$ car $F \otimes \mathbb{K} \approx F$.

L'application $\mathcal{A}\times\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} : (a, \gamma) \longmapsto a\gamma$ est bilinéaire continue, donc séparément continue ; elle définit donc une application linéaire continue

$$\Psi : \mathcal{A} \otimes_i \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} : a \otimes \gamma \longmapsto a\gamma$$

d'image dense. On obtient donc un plongement continu

$$\Psi^\dagger : \mathcal{H} \hookrightarrow \not{L}\left(\mathcal{G}, \mathcal{A}^\dagger\right) \ .$$

Pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$, l'application semi-linéaire continue

$$T_\gamma := \Psi^\dagger\gamma : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{A}^\dagger$$

est définie par

$$\langle b|\, T_\gamma\theta\rangle = \langle b \otimes \theta|\, T_\gamma\rangle = \left\langle b \otimes \theta\middle|\, \Psi^\dagger\gamma\right\rangle = (b\theta|\, \gamma)_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } b \in \mathcal{A} \text{ et } \theta \in \mathcal{G} \ .$$

On peut aussi définir les coefficients $\mu_{\theta,\gamma}$ de la représentation par

$$\left\langle b\middle|\, \mu_{\theta,\gamma}\right\rangle := (b\theta|\, \gamma)_{\mathcal{H}} \ .$$

Pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $\gamma \in \mathcal{G}$, on a alors

$$\left\langle b \otimes \theta\middle|\, \Psi^\dagger\Psi(a \otimes \gamma)\right\rangle = (b\theta|\, a\gamma)_{\mathcal{H}} = (a^* b\theta|\, \gamma)_{\mathcal{H}} = \langle a^* b|\, T_\gamma\theta\rangle = \langle b|\, a(T_\gamma\theta)\rangle = \langle b|\, (aT_\gamma)\,\theta\rangle \ ,$$

ce qui montre que le noyau de $\Psi^\dagger(\mathcal{H}) \hookrightarrow \not{L}\left(\mathcal{G}, \mathcal{A}^\dagger\right)$ est donné par

$$a \otimes \gamma \longmapsto aT_\gamma \ .$$

9.6 Démonstration du théorème spectral

Nous allons montrer le théorème spectral 8.4. Soit T un opérateur fermé dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Laissée au lecteur.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. L'algèbre stellaire $\mathcal{A}(T)$ satisfait aux hypothèses du paragraphe 6.10. Il existe donc une homéomorphisme θ de $\operatorname{Sp}\mathcal{A}(T)$ sur une partie Λ de $\overline{\mathbb{C}}$ telle que $\Lambda \cup \{\infty\}$ soit compacte. On a $\infty \in \overline{\Lambda}$ si, et seulement s'il existe $\chi \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}(T)$ tel que $\langle A|\, \chi\rangle = 0$, c'est-à-dire si Id n'appartient pas à l'algèbre stellaire $\mathcal{A}(A,B)$ engendrée par A et B . On a également un isomorphisme d'algèbres stellaire

$$\Phi : \mathcal{C}^0(\Lambda) \longrightarrow \mathcal{A}(A,B) \ .$$

En fait θ induit un homéomorphisme de $\operatorname{Sp}_h \mathcal{A}(A,B)$ sur Λ !

Supposons maintenant que $\mathcal{H}$ possède un vecteur totalisateur pour l'action de $\mathcal{A}(A,B)$. Le théorème 9.5 montre que $\mathcal{H}$ est isomorphe à un sous-module hilbertien de $\mathcal{A}(A,B)^{\dagger}$ auquel on peut appliquer le théorème de Plancherel-Godement 9.5. Soient donc $\epsilon : \Lambda \longrightarrow \mathcal{A}(A,B)^{\dagger} : \lambda \longmapsto \epsilon \circ \theta^{-1}(\lambda)$, $\sigma := \theta(\sigma_{\mathcal{H}})$ et

$$\mathcal{H} = \int^{\boxplus} \mathbb{C} \cdot \epsilon \, d\sigma \hookrightarrow \mathcal{A}(A,B)^{\dagger} \ .$$

On a alors

$$A = Z_{1/\left(1+|\mathrm{id}|^2\right)} \quad \text{et} \quad B = Z_{\mathrm{id}/\left(1+|\mathrm{id}|^2\right)} \ ,$$

donc $A^{-1} = Z_{1+|\mathrm{id}|^2}$ par le théorème 8.3.(ix) , puis

$$Z_{\mathrm{id}} = \overline{Z_{\mathrm{id}/\left(1+|\mathrm{id}|^2\right)} Z_{1+|\mathrm{id}|^2}} = \overline{BA^{-1}} = T$$

en vertu des théorème 8.3.(iv) et 7.9.(iii) . Puisque

$$\operatorname{supp}\sigma = \theta(\operatorname{supp}\sigma_{\mathcal{H}}) = \theta(\operatorname{Sp}\mathcal{H}) = \theta(\operatorname{Sp}_h \mathcal{A}(A,B)) = \Lambda \ ,$$

le théorème 8.3.(xvi) montre que $\operatorname{Sp} T = \Lambda$.

Considérons maintenant le cas général. Par le principe de maximalité de Hausdorff, il existe une famille $\left(\zeta_j\right)_{j\in J}$ de $\mathcal{H}$ telle que

$$\mathcal{H} = \boxplus_{j\in J} \overline{\mathcal{A}\zeta_j} \ .$$

Le sous-espace vectoriel fermé

$$\mathcal{G} := \boxplus_{j\in J} \mathbb{C} \cdot \zeta_j \sqsubset \mathcal{H}$$

est totalisateur, car le sous-espace vectoriel fermé engendré par $\mathcal{A}\mathcal{G}$ contient évidemment $\mathcal{A}\zeta_j$, donc aussi $\overline{\mathcal{A}\zeta_j}$, et par suite $\mathcal{H}$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & \overline{\mathcal{A}\zeta_j} & \hookrightarrow & \mathcal{H} & & & \\ & & & & & \Psi^\dagger & \\ (\diamond\zeta_j)^\dagger & \downarrow & & & \searrow & & \\ & & & & & & \\ & \mathcal{H}_{\zeta_j} & \hookrightarrow & \mathcal{A}^\dagger & \hookrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{G},\mathcal{A}^\dagger) & \\ & & & \mu & \longmapsto & \zeta_j\circ\mu & \end{array} .$$

En effet, pour tout $a, b \in \mathcal{A}$ et $\gamma \in \mathcal{G}$, on a

$$\left\langle b\otimes\gamma\middle|\,\Psi^\dagger a\zeta_j\right\rangle = \left(b\gamma\middle|\,a\zeta_j\right) = \sum_{k\in J}\overline{(\zeta_k|\,\gamma)}\cdot\left(b\zeta_k\middle|\,a\zeta_j\right) = \left(\gamma\middle|\,\zeta_j\right)\cdot\left(b\zeta_j\middle|\,a\zeta_j\right) =$$

$$= \left(\gamma\middle|\,\zeta_j\right)\cdot\left\langle a^*b\,\middle|\mu_{\zeta_j}\right\rangle = \left\langle b\otimes\theta\middle|\,\zeta_j\otimes a\mu_{\zeta_j}\right\rangle = \left\langle b\otimes\theta\middle|\,\zeta_j\otimes(\diamond\zeta_j)^\dagger\,a\zeta_j\right\rangle$$

9.7 Critères d'auto-adjonction

Nous allons donner dans ce paragraphe des critères pour qu'un opérateur symétrique soit essentiellement auto-adjoint et prouver que certains hamiltoniens sont de ce type.

Appendice 1

TOPOLOGIE

Nous avons rassemblé dans ce chapitre les notions topologiques, dont nous avons besoin dans ce cours. Certaines des démonstrations sont mots à mots les mêmes que celles faites dans le cadre des espaces métriques (cf. cours d'Analyse [17], chapitre 10).

Version du 2 février 2004

1.1 Ensembles ouverts et fermés

DEFINITION 1 Soit X un ensemble. On dit qu'une partie $\mathfrak{T}$ de $\mathfrak{P}(X)$ est une *topologie* si l'on a

(a) Si $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{T}$, alors $\bigcup_{O \in \mathfrak{G}} O \in \mathfrak{T}$.

(b) Si $\mathfrak{F}$ est une partie finie de $\mathfrak{T}$, alors $\bigcap_{O \in \mathfrak{F}} O \in \mathfrak{T}$.

On dit que $(X, \mathfrak{T})$ est un espace topologique.Une partie $O \subset X$ est dite *ouverte* si $O \in \mathfrak{T}$. Une partie $F \subset X$ est dite *fermée* si $\complement A := X \setminus A$ est ouverte. A la place de $(X, \mathfrak{T})$ on écrit souvent simplement X .

PROPOSITION *Soient X un espace métrique, d sa métrique, $x \in X$, $\varepsilon > 0$,*

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant \varepsilon\} \quad \textit{et} \quad D_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \ .$$

En posant

$$\mathfrak{T}_{(X,d)} := \{O \subset X \mid \forall x \in O \ \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } B_\varepsilon(x) \subset O\}$$

on définit une topologie sur X .

Cela a été démontré dans la proposition 10.12, cours d'Analyse [17]. Ainsi à tout espace métrique est associé un espace topologique.

DEFINITION 2 On dit qu'un espace topologique est *métrisable* si sa topologie peut être définie par une métrique.

EXEMPLE 1 Soit X un espace topologique, $\mathfrak{T}$ sa topologie et Y une partie de X . En posant

$$\mathfrak{T}_Y := \{O \cap Y \mid O \in \mathfrak{T}\}$$

on définit une topologie sur Y , dite la *topologie induite* .

Si X est un espace métrique et $\mathfrak{T}$ sa topologie, alors $\mathfrak{T}_Y$ est le topologie qui provient de la métrique induite par X sur Y (cf. cours d'Analyse [17], exercice 10.12).

DEFINITION 3 Pour tout $A \subset X$, on définit l'intérieur A° de A par

$$A^\circ := \bigcup_{O \text{ ouvert}, \ \subset A} O \ .$$

On dit que $x \in A$ est un *point intérieur* de A s'il existe une partie ouverte O telle que $x \in O \subset A$. Si x est un point intérieur de A , on dit que A est un *voisinage* de x . En posant

$$\overline{A} := \bigcap_{F \text{ fermé}, \supset A} F$$

on définit la *fermeture* de A .

Une partie A est dite *dense* si $\overline{A} = X$.

L'ensemble A° est la plus grande partie ouverte contenue dans A . L'ensemble des points intérieurs de A est égal à A° . L'ensemble $\overline{A}$ est la plus petite partie fermée contenant A .

EXEMPLE 2 Soient X un espace métrique, $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. L'ensemble $B_{\varepsilon}(x)$, respectivement $D_{\varepsilon}(x)$, est un voisinage fermé respectivement ouvert de x . On dit que la boule fermée, respectivement ouverte, de *centre* x et *rayon* ε . On a

$$\overline{D_{\varepsilon}(x)} \subset B_{\varepsilon}(x) \quad \text{et} \quad D_{\varepsilon}(x) \subset B_{\varepsilon}(x)^{\circ} \ .$$

Ces inclusions sont en général stricte.

PROPOSITION *Soient A, B des parties d'un espace topologique X . Alors*

(i) A *ouverte* $\iff$ $A^{\circ} = A$.

(ii) A *fermée* $\iff$ $\overline{A} = A$.

(iii) $A^{\circ} \cap B^{\circ} = (A \cap B)^{\circ}$.

(iv) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

(v) $A^{\circ} \cup B^{\circ} \subset (A \cup B)^{\circ}$.

(vi) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

(vii) $X \setminus A^{\circ} = \overline{X \setminus A}$.

(viii) $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^{\circ}$.

Cf. cours d'Analyse [17], exercice 10.16.

1.2 Continuité

DEFINITION Soient X, Y des espaces topologiques. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est dite *continue* en $x \in X$ si, pour toute partie ouverte O de Y telle que $f(x) \in O$, il existe une partie ouverte U de X telle que $x \in U$ et $f(U) \subset O$.

L'application f est dite *continue* si elle est continue en tout point de X.

THEOREME *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est continue.*

(ii) $\overset{-1}{f}(O)$ *est ouverte pour toute partie ouverte O de Y.*

(iii) $\overset{-1}{f}(F)$ *est fermée pour toute partie fermée F de Y.*

(iv) $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ *pour toute partie $A \subset X$.*

Cf. cours d'Analyse [17], proposition 10.16. Seule l'équivalence avec (iv) n'a pas été démontrée.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Pour toute partie $A \subset X$, la partie $\overset{-1}{f}\left(\overline{f(A)}\right)$ est fermée et $\overset{-1}{f}\left(\overline{f(A)}\right) \supset \overset{-1}{f}(f(A)) \supset A$. On en déduit que $\overset{-1}{f}\left(\overline{f(A)}\right) \supset \overline{A}$ et par suite que $f\left(\overline{A}\right) \subset f\left(\overset{-1}{f}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subset \overline{f(A)}$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Soit F une partie fermée de Y. En posant $A := \overset{-1}{f}(F)$, on a $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{F} = F$, donc $\overline{A} \subset \overset{-1}{f}(F) = A \subset \overline{A}$, ce qui montre que $A = \overset{-1}{f}(F)$ est fermée. $\square$

EXEMPLE Soient X un espace topologique et Y une partie de X munie de la topologie induite. L'injection canonique $Y \hookrightarrow X$ est alors continue.

COROLLAIRE *Si les applications $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont continues, alors l'application*

$$h = g \circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

l'est aussi.

Cette assertion n'a pas été démontrée topologiquement (cf. cours d'Analyse [17], théorème 7.3). La démonstration est immédiate en utilisant (ii).

1.3 Convergence

DEFINITION 1 Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de X est dite *convergente* si, pour toute partie ouverte U telle que $x \in U$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait

$$x_k \in U \quad \text{pour tout } k \geqslant N \ .$$

EXEMPLE 1 Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de X est alors convergente vers x pour $\mathfrak{T}_{(X,d)}$ si, et seulement si, elle converge vers x par rapport à la métrique d .

PROPOSITION *Soient X, Y des espaces topolgiques. Alors*

(i) Si une fonction $f : X \longrightarrow Y$ est continue en $x \in X$ et si une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x , alors la suite $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

(ii) Soient $A \subset X$ et $x \in X$. S'il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$, qui converge vers x , alors $x \in \overline{A}$.

Rappelons que la réciproque de ces assertions est valable dans le cas suivant :

THEOREME *Soient X, Y des espaces topologiques et supposons que X est métrisable.*

(i) Soit $x \in X$. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est continue en x si, et seulement si, pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente vers x , la suite $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $f(x)$.

(ii) Etant donné $A \subset X$ et $x \in X$, on a $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ convergente vers x .

REMARQUE 1 En toute généralité on ne peut pas caractériser la continuité et la fermeture à l'aide des suites. Il faut introduire une généralisation de la notion de suite : les filtres.

DEFINITION 2 Soit X un ensemble. On dit qu'une famille non-vide $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(X)$ est une *base de filtre* si

(a) $\emptyset \notin \mathfrak{B}$.

(b) Pour tout $A, B \in \mathfrak{B}$, il existe $C \in \mathfrak{B}$ tel que $C \subset A \cap B$.
On dit que $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ est un *filtre* si c'est une base de filtre et si en plus

(c) Pour tout $A \in \mathfrak{F}$ et $A \subset B \subset X$, on a $B \in \mathfrak{F}$.

Soient $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ des bases de filtre. On dit que $\mathfrak{B}$ est *plus fine* que $\mathfrak{C}$ si, pour tout $C \in \mathfrak{C}$, il existe $B \in \mathfrak{B}$ telle que $B \subset C$.

Si $\mathfrak{F}$ est un filtre alors, pour tout $A, B \in \mathfrak{F}$, on a $A \cap B \in \mathfrak{F}$. Une base de filtre $\mathfrak{B}$ engendre un filtre

$$\widetilde{\mathfrak{B}} := \{A \subset X \mid \text{il existe } B \in \mathfrak{B} \text{ tel que } B \subset A\} \ .$$

Si $\mathfrak{C}$ est une autre base de filtre, alors $\mathfrak{B}$ est plus fine que $\mathfrak{C}$ si, et seulement si, $\widetilde{\mathfrak{B}} \supset \widetilde{\mathfrak{C}}$.

EXEMPLE 2 Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de X , alors l'ensemble des parties de la forme $\{x_l \mid l \geqslant k\}$ est une base de filtre sur X .

EXEMPLE 3 Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application et $\mathfrak{B}$ une base de filtre sur X , alors $f(\mathfrak{B}) := \{f(A) \mid A \in \mathfrak{B}\}$ est une base de filtre sur Y .

En particulier si X est une partie de Y et en considérant l'injection canonique, on voit que toute base de filtre sur X est une base de filtre sur Y .

EXEMPLE 4 Si X est un espace topologique et $x \in X$, alors l'ensemble $\mathfrak{V}(x)$ des voisinages de x est un filtre.

DEFINITION 3 Soit X un espace topologique. On dit qu'une base de filtre $\mathfrak{B}$ *converge* vers $x \in X$, si pour tout voisinage V de X , il existe $A \in \mathfrak{B}$ tel que $A \subset V$, i.e. si $\mathfrak{B}$ est plus fine que $\mathfrak{V}(x)$. On écrit alors

$$x = \lim \mathfrak{B} = \lim_{y\in\mathfrak{B}} y \ .$$

Si Y est un autre espace topologique et $f : X \longrightarrow Y$ une application, on dit que $y \in Y$ est une *valeur limite* de f suivant $\mathfrak{B}$ si $f(\mathfrak{B})$ converge vers y et on écrit

$$y = \lim f(\mathfrak{B}) = \lim_{x\in\mathfrak{B}} f(x) = \lim_{\mathfrak{B}} f \ .$$

REMARQUE 2 Pour qu'une base de filtre converge, il faut et il suffit que le filtre engendré converge.

Le théorème ci-dessus est alors valable en toute généralité.

THEOREME *Soient X, Y des espaces topologiques.*

(i) Soit $x \in X$. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est continue en x si, et seulement si, pour tout filtre $\mathfrak{F}$ qui converge vers x , la base de filtre $f(\mathfrak{F})$ converge vers $f(x)$.

(ii) Etant donné $A \subset X$ et $x \in X$, on a $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, il existe un filtre sur A qui converge vers x dans X .

1.4 Espaces topologiques séparés

DEFINITION Un espace topologique X est dit *séparé* si, pour tout $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe des partie ouverte O, U telles que $x \in O$, $y \in U$ et $O \cap U = \emptyset$.

En particulier, dans un espace séparé toute partie ne contenant qu'un point est fermée.

EXEMPLE Tout espace métrique est séparé.

THEOREME *Soient X, Y des espaces topologiques séparés et A une partie dense de X .*

(i) Si $f, g : X \longrightarrow Y$ sont des applications continues telles que $f_{|A} = g_{|A}$, alors $f = g$.

(ii) Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue d'image dense, alors $f(A)$ est dense dans Y .

Dmonstration de (i) Il suffit de montrer que $\{f = g\}$ est fermée et contient A .

Dmonstration de (ii) Utilisant le théorème 10.2, on a

$$\overline{f(A)} \supset f\left(\overline{A}\right) = f(X) \ ,$$

donc

$$\overline{f(A)} \supset \overline{f(X)} = Y \ .$$

□

1.5 Parties et espaces compacts

DEFINITION 1 Soit X un espace topologique séparé. Une partie $K \subset X$ est dite *compacte* si, pour tout recouvrement ouvert de K possède un sous-recouvrement fini. Si X est compact, on dit que X est un *espace compact* .

On désigne par $\mathfrak{K}(X)$ l'ensemble des parties compactes de X .

EXEMPLE 1 Si X est un espace métrique, alors $K \subset X$ est compact si, et seulement si, toute suite de K contient une sous-suite convergente.

Cf. cours d'Analyse [17], théorème 10.17.

THEOREME *Soient X, Y des espaces topologiques séparés.*

(i) Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue et $K \subset X$ est compacte, alors $f(K)$ est compact.

(ii) Une partie compacte est fermée.

(iii) Une partie fermée contenue dans une partie compacte est compacte.

Dmonstration de (i) Cf. cours d'Analyse [17], théorème 10.19.

Dmonstration de (ii) La démonstration du cours d'Analyse [17], Corollaire 10.17 utilise les suites. Voici une démonstration topologique. Soit $x \in X \setminus K$. Puisque X est séparé, pour tout $y \in K$, il existe des voisinages ouverts U_y de y et V_y de x tels que $U_y \cap V_y = \emptyset$. La famille $(U_y)_{y \in K}$ est évidemment un recouvrement ouvert de K ; il existe donc une partie finie $F \subset K$ telle que $(U_y)_{y \in F}$ soit encore un recouvrement de K . On en déduit que $V := \bigcap_{y \in F} V_y$ est un voisinage de x qui ne coupe pas $\bigcup_{y \in E} U_y$, donc aussi K . Ceci montre que $X \setminus K$ offen ist.

Dmonstration de (iii) Soient A une partie fermée de X et K une partie compacte la contenant. Comme $X \setminus A$ est ouvert, il suffit de constater qu'une famille $\mathcal{R}$ est un recouvrement ouvert de A si, et seulement si, $\mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ est un recouvrement ouvert de K . ——— $\square$

COROLLAIRE *Pour qu'une partie $K \subset X$ soit compacte, il faut et il suffit que que K muni de la topologie induite soit un espace compact.*

Cf. cours d'Analyse [17], exercice 10.17.4.

EXEMPLE 2 Soit X un espace topologique séparé. L'ensemble $\complement(\mathfrak{K}(X))$ des parties de la forme $X \setminus K$, où $K \in \mathfrak{K}(X)$ est une base de filtre sur X .

Utilisant la notion de filtre on peut donner une caractérisation utile des espaces compacts. Mais tout d'abord

DEFINITION 2 On dit qu'un filtre $\mathfrak{U}$ est un *ultrafiltre* s'il est maximal, i.e. si tout filtre $\mathfrak{F}$ plus fin que $\mathfrak{U}$, i.e. $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{U}$, est égal à $\mathfrak{F}$.

REMARQUE Par le principe de maximalité de Hausdorff, tout filtre est contenu dans un ultrafiltre.

THEOREME

(i) *Soit X un espace topologique séparé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *X soit compact.*

(b) *Pour toute famille $\mathfrak{B}$ d'ensembles fermés telle que $\bigcap_{B\in\mathfrak{B}} B = \emptyset$, il existe une sous-famille finie de $\mathfrak{B}$ dont l'intersection est vide.*

(c) *Pour toute base de filtre $\mathfrak{B}$ formées d'ensembles fermés, on a $\bigcap_{B\in\mathfrak{B}} B \neq \emptyset$.*

(d) *Tout ultrafiltre sur X est convergent.*

(ii) ***Tychonoff*** *Si $(X_j)_{j\in J}$ est une famille d'espaces compacts, alors $\prod_{j\in J} X_j$ est compact.*

Dmonstration de (i)

(a) $\Longleftrightarrow$ (b) Il suffit de passer aux complémentaires.

(b) $\Longleftrightarrow$ (c) C'est la contraposition.

(c) $\Rightarrow$ (d) Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre. La famille des adhérences $\overline{A}$ pour $A \in \mathfrak{U}$ est une base de filtre satisfaisant à (c). Soit donc $x \in \bigcap_{A\in\mathfrak{U}} \overline{A}$. Pour tout voisinage V de x , on a $V \cap A \neq \emptyset$ pour tout $A \in \mathfrak{U}$, donc $V \in \mathfrak{U}$ par la maximalité de $\mathfrak{U}$. Ceci montre que $\mathfrak{U}$ converge vers x .

(d) $\Rightarrow$ (c) Par la remarque, il existe un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ plus fin que $\mathfrak{B}$. Cet ultrafiltre converge donc vers un $x \in X$. Soit $B \in \mathfrak{B}$. On a $B \in \mathfrak{U}$ et, pour tout voisinage V de x , on a aussi $V \in \mathfrak{U}$, donc $B \cap V \in \mathfrak{U}$, ce qui montre que $B \cap V \neq \emptyset$. On en déduit que $x \in \overline{B} = B$, ce qui montre que $\bigcap_{B\in\mathfrak{B}} B \neq \emptyset$.

Dmonstration de (ii) Si $\mathfrak{U}$ est un ultrafiltre sur $\prod_{j\in J} X_j$, alors $\mathrm{pr}_j(\mathfrak{U})$ est une base de filtre et elle engendre un ultrafiltre sur X_j . Par hypothèse chaque $\mathrm{pr}_j(\mathfrak{U})$ converge, donc aussi $\mathfrak{U}$. $\square$

Appendice 2

LES POLYNOMES ORTHOGONAUX

CLASSIQUES

de

JACOBI

LAGUERRE

et

HERMITE

Version du 2 février 2004

2.1 Relations de récurrence

DEFINITION Soit $X \subset \mathbb{R}$ et μ une intégrales de Radon telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait

$$\int |\mathrm{id}|^k \, d\mu < \infty \ .$$

On dit que $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un *système de polynômes orthogonaux* par rapport à μ si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

(a) $p_k \in \mathcal{P}_k$, le sous-espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant k$,

(b) $p_{k+1} \perp \mathcal{P}_k$.

Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\rho : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. On dit que ρ est un *poids* si

$$\int |\mathrm{id}|^k \cdot \rho \, d\lambda_J < \infty$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Nous utiliserons, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la notation $z! := \Gamma(z+1)$ et rappelons la définition du coefficient binomial généralisé

$$\binom{z}{k} = \prod_{l=1}^{k} \frac{z-l+1}{l} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

THEOREME *Il existe une* ***relation de récurrence*** *de la forme*

$$\mathrm{id} \cdot p_k = a_k \cdot p_{k+1} + b_k \cdot p_k + c_k \cdot p_{k-1} \ ,$$

en ayant posé $p_{-1} = 0$. En outre si $p_0 = g_0 \cdot 1$, $\widetilde{g_0} = 0$ et

$$p_k \in g_k \cdot \mathrm{id}^k + \widetilde{g_k} \cdot \mathrm{id}^{k-1} + \mathcal{P}_{k-2} \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \ ,$$

on a $g_k \neq 0$ et

$$a_k = \frac{g_k}{g_{k+1}} \quad , \quad b_k = \frac{\widetilde{g_k}}{g_k} - \frac{\widetilde{g_{k+1}}}{g_{k+1}} \quad , \quad c_k = \frac{\|p_k\|_{2,\mu}}{\|p_{k-1}\|_{2,\mu}} \cdot a_{k-1} \ .$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Si le système est orthonormé, alors

$$c_k = a_{k-1} \ .$$

2.2 Polynômes orthogonaux classiques

Les polynômes classiques orthogonaux sont caractérisés par le

THEOREME *Soient $\rho : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ un poids et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un système de polynômes orthogonaux associé à ρ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est équivalent, i.e. après une transformation affine et une renormalisation, à un système classique de polynômes.*

(ii) ***Formule de Rodrigues***

Le poids ρ est indéfiniment dérivable, il existe un polynôme $p > 0$ sur J sans racine multiple tel que $p = 0$ sur ∂J et une suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$p_k = \frac{1}{d_k \cdot \rho} \cdot \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

(iii) ***Equation différentielle de type hypergéométrique***

Le poids ρ est continûment dérivable, il existe un polynôme $p > 0$ sur J de degré $\leqslant 2$ sans racine multiple tel que $p = 0$ sur ∂J et une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait

$$Lp_k := -\frac{1}{\rho} \cdot \partial \left(\rho \cdot p \cdot \partial p_k\right) = \lambda_k \cdot p_k$$

ou bien

$$p \cdot \partial^2 p_k + q \cdot \partial p_k + \lambda_k \cdot p_k = 0 \ ,$$

où

$$q := \frac{\partial \left(\rho \cdot p\right)}{\rho} \ .$$

Dans ce cas q est un polynôme de degré 1 ,

$$\lambda_k = -k \cdot \left[\partial q + \frac{k-1}{2} \cdot \partial^2 p\right]$$

et les constantes sont données dans la table qui suit :

	Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$	*Laguerre* $L_k^{(\alpha)}$	*Hermite* H_k
J	$]-1,1[$	$]0,\infty[$	$]-\infty,\infty[$
ρ	$(1-\mathrm{id})^\alpha \cdot (1+\mathrm{id})^\beta$ $\alpha,\beta > -1$	$\mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-\mathrm{id}}$ $\alpha > -1$	$e^{-\mathrm{id}^2}$

	Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$	Laguerre $L_k^{(\alpha)}$	Hermite H_k
Normalisation	$J_k^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{\alpha+k}{k}$	$L_k^{(\alpha)}(0) = \binom{\alpha+k}{k}$	$H_k \in 2^k \cdot \mathrm{id}^k + \mathcal{P}_{k-1}$
g_k	$\frac{1}{2^k} \cdot \binom{\alpha+\beta+2k}{k}$	$\frac{(-1)^k}{k!}$	2^k
$\lVert p_k \rVert_{2,\rho}^2$	$\frac{2^{\alpha+\beta+1} \cdot (\alpha+k)! \cdot (\beta+k)!}{(\alpha+\beta+2k+1) \cdot k! \cdot (\alpha+\beta+k)!}$	$\frac{(\alpha+k)!}{k!}$	$\sqrt{\pi} \cdot 2^k \cdot k!$
a_k	$\frac{2(k+1)(\alpha+\beta+k+1)}{(\alpha+\beta+2k+1)(\alpha+\beta+2k+2)}$	$-(k+1)$	$\frac{1}{2}$
c_k	$\frac{2(\alpha+k)(\beta+k)}{(\alpha+\beta+2k)(\alpha+\beta+2k+1)}$	$-(\alpha+k)$	k
$\widetilde{g_k}$	$-\frac{(\beta-\alpha)}{2^k \cdot (k-1)!} \cdot \frac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+k)!}$	$\frac{(-1)^{k-1} \cdot (\alpha+k)}{(k-1)!}$	0
b_k	$\frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha+\beta+2k)(\alpha+\beta+2k+2)}$	$\alpha+2k+1$	0
p	$1-\mathrm{id}^2$	id	1
d_k	$(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!$	$k!$	$(-1)^k$
λ_k	$k \cdot (\alpha+\beta+k+1)$	k	$2k$
q	$\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2) \cdot \mathrm{id}$	$\alpha+1-\mathrm{id}$	$-2 \cdot \mathrm{id}$

2.3 Polynômes de Jacobi spéciaux

Legendre :

$$P_k = J_k^{(0,0)} \ .$$

Tchebycheff :

$$\begin{aligned} 1^{\text{e}} \text{ espèce} \quad T_k &= \frac{1}{\binom{-\frac{1}{2}+k}{k}} \cdot J_k^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)} \ . \\ 2^{\text{e}} \text{ espèce} \quad U_k &= \frac{k+1}{\binom{\frac{1}{2}+k}{k}} \cdot J_k^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \ . \end{aligned}$$

Gegenbauer ou ultrasphériques :

$$G_k^{(\gamma)} = \frac{\binom{2\gamma+k-1}{k}}{\binom{\gamma-\frac{1}{2}+k}{k}} \cdot J_k^{\left(\gamma-\frac{1}{2},\gamma-\frac{1}{2}\right)} \quad \text{pour } 0 \neq \gamma > -\frac{1}{2} \ .$$

et

$$G_k^{(0)} = \lim\nolimits_{\gamma\to 0} \frac{1}{\gamma} \cdot G_k^{(\gamma)} \ .$$

Les valeurs des différentes constantes sont données dans la table suivante :

	P_k	T_k	U_k	$G_k^{(\gamma)}$
ρ	1	$\left(1-\mathrm{id}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$	$\left(1-\mathrm{id}^2\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(1-\mathrm{id}^2\right)^{\gamma-\frac{1}{2}}$
Normalisation en 1	1	1	$k+1$	$\binom{2\gamma+k-1}{k}$ si $\gamma \neq 0$; $\begin{matrix} 1 & \text{si } k=0 \\ \frac{2}{k} & \text{sinon} \end{matrix}$ si $\gamma = 0$
$\left\Vert p_k\right\Vert_{2,\rho}$	$\frac{2}{2k+1}$	π si $k=0$; $\frac{\pi}{2}$ si $k>0$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi 2^{1-2\gamma}\Gamma(2\gamma+k)}{(\gamma+k)\cdot k!\cdot\Gamma(\gamma)^2}$ si $\gamma \neq 0$; $\begin{matrix} 2 & \text{si } k=0 \\ \frac{2\pi}{k^2} & \text{sinon} \end{matrix}$ si $\gamma = 0$
a_k	$\frac{k+1}{2k+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{k+1}{2(\gamma+k)}$
c_k	$\frac{k}{2k+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2\gamma+k-1}{2(\gamma+k)}$

	P_k	T_k	U_k	$G_k^{(\gamma)}$
b_k	0	0	0	0
d_k	$(-1)^k\, 2^k \cdot k!$	$\frac{(-1)^k \cdot 2^k \cdot \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{(-1)^k \cdot 2^{k+1} \cdot \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(k+1)\cdot\sqrt{\pi}}$	$\frac{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k! \cdot \Gamma(2\gamma)\Gamma\left(\gamma+k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\gamma+k)\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}$
λ_k	$k \cdot (k+1)$	k^2	$k\,(k+2)$	$k\,(2\gamma+k)$

2.4 Fonctions génératrices

Il est souvent utile de connaître la *fonction génératrice* associée à un système de polynômes orthogonaux $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convenable, que l'on introduit pour renormaliser les polynômes. Elle est définie par

$$\Phi(x,z) := \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \cdot p_k(x) \cdot z^k$$

pour tout $x \in J$ et $|z| < R$. En utilisant la théorie des fonctions on peut montrer que l'on a

	ρ_k	$\Phi(x,z)$	R
Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$	$2^{-(\alpha+\beta)}$	$\frac{\left(1-z+\sqrt{1-2xz+z^2}\right)^{-\alpha}\cdot\left(1+z+\sqrt{1-2xz+z^2}\right)^{-\beta}}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$	1
Laguerre $L_k^{(\alpha)}$	1	$\dfrac{e^{xz/(z-1)}}{(1-z)^{a+1}}$	1
Hermite H_k	$\dfrac{1}{k!}$	e^{2xz-z^2}	∞
Legendre P_k	1	$\dfrac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$	1
Tchebycheff T_k	1	$\dfrac{(1-xz)}{1-2xz+z^2}$	1
Tchebycheff U_k	1	$\dfrac{1}{1-2xz+z^2}$	1
Gegenbauer $G_k^{(\gamma)}$	1	$\dfrac{1}{(1-2xz+z^2)^{\gamma}}$ si $\gamma \neq 0$; $-\ln(1-2xz+z^2)$ si $\gamma = 0$	1

2.5 Polynômes de Jacobi

$$J\left(k,\alpha,\beta,x\right)=\frac{\left(1-x\right)^{-\alpha}\cdot\left(1+x\right)^{-\beta}}{\left(-1\right)^{k}\cdot 2^{k}\cdot k!}\cdot D_{x^{k}}\left(\left(1-x\right)^{\alpha}\cdot\left(1+x\right)^{\beta}\cdot\left(1-x^{2}\right)^{k}\right)$$

$$J\left(0,\alpha,\beta,x\right)=1$$

$$J\left(1,\alpha,\beta,x\right)=\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta+2\right)x+\frac{1}{2}\left(\alpha-\beta\right)$$

$$J\left(2,\alpha,\beta,x\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\alpha+\beta+4\right)\left(\alpha+\beta+3\right)x^{2}+\frac{1}{4}\left(\alpha+\beta+3\right)\left(\alpha-\beta\right)x+\frac{1}{8}\left(\alpha-\beta\right)^{2}-\frac{1}{8}\left(\alpha+\beta\right)-\frac{1}{2}$$

$$J\left(3,\alpha,\beta,x\right)=$$

$$=\frac{1}{48}\left(\alpha+\beta+6\right)\left(\alpha+\beta+5\right)\left(\alpha+\beta+4\right)x^{3}+\frac{1}{16}\left(\alpha+\beta+5\right)\left(\alpha+\beta+4\right)\left(\alpha-\beta\right)x^{2}$$

$$+\frac{1}{16}\left(\alpha+\beta+4\right)\left(\left(\alpha-\beta\right)^{2}-\left(\alpha+\beta\right)-6\right)x+\frac{1}{48}\left(\alpha-\beta\right)\left(\left(\alpha-\beta\right)^{2}-3\left(\alpha+\beta\right)-16\right)$$

$$J\left(4,\alpha,\beta,x\right)=$$

$$=\frac{1}{384}\left(\alpha+\beta+8\right)\left(\alpha+\beta+7\right)\left(\alpha+\beta+6\right)\left(\alpha+\beta+5\right)x^{4}$$

$$+\frac{1}{96}\left(\alpha+\beta+7\right)\left(\alpha+\beta+6\right)\left(\alpha+\beta+5\right)\left(\alpha-\beta\right)x^{3}$$

$$+\frac{1}{64}\left(\alpha+\beta+6\right)\left(\alpha+\beta+5\right)\left(\left(\alpha-\beta\right)^{2}-\left(\alpha+\beta\right)-8\right)x^{2}$$

$$+\frac{1}{96}\left(\alpha+\beta+5\right)\left(\alpha-\beta\right)\left(\left(\alpha-\beta\right)^{2}-3\left(\alpha+\beta\right)-22\right)x$$

$$+\frac{1}{384}\left(\alpha-\beta\right)^{4}-\frac{1}{64}\left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha-\beta\right)^{2}-\frac{37}{384}\left(\alpha-\beta\right)^{2}+6\alpha\beta+\frac{7}{64}\left(\alpha+\beta\right)+\frac{3}{8}$$

2.6 Polynômes de Laguerre

$$L(k,\alpha,x) = \frac{x^{-\alpha}\cdot e^{x}}{k!}\cdot D_{x^k}\left(x^{\alpha}\cdot e^{-x}\cdot x^{k}\right)$$

$$L(0,\alpha,x) = 1$$

$$L(1,\alpha,x) = -x+\alpha+1$$

$$L(2,\alpha,x) = \frac{1}{2}x^2-(\alpha+2)\,x+\frac{1}{2}(\alpha+2)(\alpha+1)$$

$$L(3,\alpha,x) = -\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}(\alpha+3)\,x^2-\frac{1}{2}(\alpha+3)(\alpha+2)\,x+\frac{1}{6}(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)$$

$$L(4,\alpha,x) =$$

$$= \frac{1}{24}x^4-\frac{1}{6}(\alpha+4)\,x^3+\frac{1}{4}(\alpha+4)(\alpha+3)\,x^2$$

$$-\frac{1}{6}(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)\,x+\frac{1}{24}(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)$$

$$L(5,\alpha,x) =$$

$$= -\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{24}(\alpha+5)\,x^4-\frac{1}{12}(\alpha+5)(\alpha+4)\,x^3+\frac{1}{12}(\alpha+5)(\alpha+4)(\alpha+3)\,x^2$$

$$-\frac{1}{24}(\alpha+5)(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)\,x+\frac{1}{120}(\alpha+5)(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)$$

$$L(6,\alpha,x) =$$

$$= \frac{1}{720}x^6-\frac{1}{120}(\alpha+6)\,x^5+\frac{1}{48}(\alpha+6)(\alpha+5)\,x^4-\frac{1}{36}(\alpha+5)(\alpha+4)(\alpha+6)\,x^3$$

$$+\frac{1}{48}(\alpha+5)(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+6)\,x^2-\frac{1}{120}(\alpha+5)(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+6)\,x$$

$$+\frac{1}{720}(\alpha+6)(\alpha+5)(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)$$

2.7 Polynômes de Hermite

$$H(k,x) = (-1)^k \cdot e^{x^2} \cdot D_{x^k}\left(e^{-x^2}\right)$$

$$H(0,x) = 1$$

$$H(1,x) = 2x$$

$$H(2,x) = 4x^2 - 2$$

$$H(3,x) = 8x^3 - 12x$$

$$H(4,x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H(5,x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

$$H(6,x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$$

$$H(7,x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$$

$$H(8,x) = 256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680$$

$$H(9,x) = 512x^9 - 9216x^7 + 48384x^5 - 80640x^3 + 30240x$$

$$H(10,x) = 1024x^{10} - 23040x^8 + 161280x^6 - 403200x^4 + 302400x^2 - 30240$$

$$H(11,x) =$$

$$= 2048x^{11} - 56320x^9 + 506880x^7 - 1774080x^5 + 2217600x^3 - 665280x$$

$$H(12,x) =$$
$$= 4096x^{12} - 135168x^{10} + 1520640x^8 - 7096320x^6 + 13305600x^4 - 7983360x^2 + 665280$$

$$H(13,x) =$$
$$= 8192x^{13} - 319488x^{11} + 4392960x^9 - 26357760x^7 + 69189120x^5 - 69189120x^3 + 17297280x$$

$$H(14,x) =$$
$$= 16384x^{14} - 745472x^{12} + 12300288x^{10} - 92252160x^8$$
$$+322882560x^6 - 484323840x^4 + 242161920x^2 - 17297280$$

$$H(15,x) =$$
$$= 32768x^{15} - 1720320x^{13} + 33546240x^{11} - 307507200x^9$$
$$+1383782400x^7 - 2905943040x^5 + 2421619200x^3 - 518918400x$$

$$H(16,x) =$$
$$= 65536x^{16} - 3932160x^{14} + 89456640x^{12} - 984023040x^{10} + 5535129600x^8$$
$$-15498362880x^6 + 19372953600x^4 - 8302694400x^2 + 518918400$$

$$H(17,x) =$$
$$= 131072x^{17} - 8912896x^{15} + 233963520x^{13} - 3041525760x^{11} + 20910489600x^9$$
$$-75277762560x^7 + 131736084480x^5 - 94097203200x^3 + 17643225600x$$

$$H(18,x) =$$
$$= 262144x^{18} - 20054016x^{16} + 601620480x^{14} - 9124577280x^{12} + 75277762560x^{10}$$
$$-338749931520x^8 + 790416506880x^6 - 846874828800x^4 + 317578060800x^2 - 17643225600$$

$$H(19,x) =$$
$$= 524288x^{19} - 44826624x^{17} + 1524105216x^{15} - 26671841280x^{13} + 260050452480x^{11}$$
$$-1430277488640x^9 + 4290832465920x^7 - 6436248698880x^5 + 4022655436800x^3 - 670442572800x$$

$$H(20,x) =$$
$$= 1048576x^{20} - 99614720x^{18} + 3810263040x^{16} - 76205260800x^{14} + 866834841600x^{12}$$
$$-5721109954560x^{10} + 21454162329600x^{8} - 42908324659200x^{6} + 40226554368000x^{4}$$
$$-13408851456000x^{2} + 670442572800$$

2.8 Polynômes de Legendre

$$P(k,x) = \frac{1}{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!} \cdot D_{x^k}\left(\left(1-x^2\right)^k\right)$$

$$P(0,x) = 1$$

$$P(1,x) = x$$

$$P(2,x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P(3,x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$P(4,x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$$

$$P(5,x) = \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x$$

$$P(6,x) = \frac{231}{16}x^6 - \frac{315}{16}x^4 + \frac{105}{16}x^2 - \frac{5}{16}$$

$$P(7,x) = \frac{429}{16}x^7 - \frac{693}{16}x^5 + \frac{315}{16}x^3 - \frac{35}{16}x$$

$$P(8,x) = \frac{6435}{128}x^8 - \frac{3003}{32}x^6 + \frac{3465}{64}x^4 - \frac{315}{32}x^2 + \frac{35}{128}$$

$$P(9,x) = \frac{12155}{128}x^9 - \frac{6435}{32}x^7 + \frac{9009}{64}x^5 - \frac{1155}{32}x^3 + \frac{315}{128}x$$

$$P(10,x) = \frac{46189}{256}x^{10} - \frac{109395}{256}x^8 + \frac{45045}{128}x^6 - \frac{15015}{128}x^4 + \frac{3465}{256}x^2 - \frac{63}{256}$$

$$P(11,x) = \frac{88179}{256}x^{11} - \frac{230945}{256}x^9 + \frac{109395}{128}x^7 - \frac{45045}{128}x^5 + \frac{15015}{256}x^3 - \frac{693}{256}x$$

$$P(12,x) =$$
$$= \frac{676039}{1024}x^{12} - \frac{969969}{512}x^{10} + \frac{2078505}{1024}x^{8} - \frac{255255}{256}x^{6} + \frac{225225}{1024}x^{4} - \frac{9009}{512}x^{2} + \frac{231}{1024}$$

$$P(13,x) =$$
$$= \frac{1300075}{1024}x^{13} - \frac{2028117}{512}x^{11} + \frac{4849845}{1024}x^{9} - \frac{692835}{256}x^{7} + \frac{765765}{1024}x^{5} - \frac{45045}{512}x^{3} + \frac{3003}{1024}x$$

$$P(14,x) =$$
$$= \frac{5014575}{2048}x^{14} - \frac{16900975}{2048}x^{12} + \frac{22309287}{2048}x^{10} - \frac{14549535}{2048}x^{8}$$
$$+ \frac{4849845}{2048}x^{6} - \frac{765765}{2048}x^{4} + \frac{45045}{2048}x^{2} - \frac{429}{2048}$$

$$P(15,x) =$$
$$= \frac{9694845}{2048}x^{15} - \frac{35102025}{2048}x^{13} + \frac{50702925}{2048}x^{11} - \frac{37182145}{2048}x^{9}$$
$$+ \frac{14549535}{2048}x^{7} - \frac{2909907}{2048}x^{5} + \frac{255255}{2048}x^{3} - \frac{6435}{2048}x$$

$$P(16,x) =$$
$$= \frac{300540195}{32768}x^{16} - \frac{145422675}{4096}x^{14} + \frac{456326325}{8192}x^{12} - \frac{185910725}{4096}x^{10} + \frac{334639305}{16384}x^{8}$$
$$- \frac{20369349}{4096}x^{6} + \frac{4849845}{8192}x^{4} - \frac{109395}{4096}x^{2} + \frac{6435}{32768}$$

$$P(17,x) =$$
$$= \frac{583401555}{32768}x^{17} - \frac{300540195}{4096}x^{15} + \frac{1017958725}{8192}x^{13} - \frac{456326325}{4096}x^{11} + \frac{929553625}{16384}x^{9}$$
$$- \frac{66927861}{4096}x^{7} + \frac{20369349}{8192}x^{5} - \frac{692835}{4096}x^{3} + \frac{109395}{32768}x$$

$$P(18,x) =$$
$$= \frac{2268783825}{65536}x^{18} - \frac{9917826435}{65536}x^{16} + \frac{4508102925}{16384}x^{14} - \frac{4411154475}{16384}x^{12} + \frac{5019589575}{32768}x^{10}$$
$$- \frac{1673196525}{32768}x^{8} + \frac{156165009}{16384}x^{6} - \frac{14549535}{16384}x^{4} + \frac{2078505}{65536}x^{2} - \frac{12155}{65536}$$

$$P(19,x) =$$
$$= \frac{4418157975}{65536}x^{19} - \frac{20419054425}{65536}x^{17} + \frac{9917826435}{16384}x^{15} - \frac{10518906825}{16384}x^{13} + \frac{13233463425}{32768}x^{11}$$
$$- \frac{5019589575}{32768}x^{9} + \frac{557732175}{16384}x^{7} - \frac{66927861}{16384}x^{5} + \frac{14549535}{65536}x^{3} - \frac{230945}{65536}x$$

$$P(20,x) =$$
$$= \frac{34461632205}{262144}x^{20} - \frac{83945001525}{131072}x^{18} + \frac{347123925225}{262144}x^{16} - \frac{49589132175}{32768}x^{14} + \frac{136745788725}{131072}x^{12}$$
$$- \frac{29113619535}{65536}x^{10} + \frac{15058768725}{131072}x^{8} - \frac{557732175}{32768}x^{6} + \frac{334639305}{262144}x^{4} - \frac{4849845}{131072}x^{2} + \frac{46189}{262144}$$

2.9 Polynômes de Tchebycheff

1e espèce

$$T(k,x) = \binom{-\frac{1}{2}+k}{k}^{-1} \cdot J\left(k, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, x\right)$$

$$T(1,x) = 1$$

$$T(1,x) = x$$

$$T(2,x) = 2x^2 - 1$$

$$T(3,x) = 4x^3 - 3x$$

$$T(4,x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T(5,x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T(6,x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$T(7,x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

$$T(8,x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$

$$T(9,x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$$

$$T(10,x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1$$

$$T(11,x) = 1024x^{11} - 2816x^9 + 2816x^7 - 1232x^5 + 220x^3 - 11x$$

$$T(12,x) = 2048x^{12} - 6144x^{10} + 6912x^8 - 3584x^6 + 840x^4 - 72x^2 + 1$$

$$T(13,x) = 4096x^{13} - 13\,312x^{11} + 16\,640x^{9} - 9984x^{7} + 2912x^{5} - 364x^{3} + 13x$$

$$T(14,x) =$$

$$= 8192x^{14} - 28\,672x^{12} + 39\,424x^{10} - 26\,880x^{8} + 9408x^{6} - 1568x^{4} + 98x^{2} - 1$$

$$T(15,x) =$$

$$= 16\,384x^{15} - 61\,440x^{13} + 92\,160x^{11} - 70\,400x^{9} + 28\,800x^{7} - 6048x^{5} + 560x^{3} - 15x$$

$$T(16,x) =$$

$$= 32\,768x^{16} - 131\,072x^{14} + 212\,992x^{12} - 180\,224x^{10} + 84\,480x^{8}$$

$$-21\,504x^{6} + 2688x^{4} - 128x^{2} + 1$$

$$T(17,x) =$$

$$65\,536x^{17} - 278\,528x^{15} + 487\,424x^{13} - 452\,608x^{11} + 239\,360x^{9}$$

$$-71\,808x^{7} + 11\,424x^{5} - 816x^{3} + 17x$$

2$^{\text{e}}$ espèce

$$U(k,x) = (k+1)\cdot\binom{\frac{1}{2}+k}{k}^{-1}\cdot J\left(k,\frac{1}{2},\frac{1}{2},x\right)$$

$$U(0,x) = 1$$

$$U(1,x) = 2x$$

$$U(2,x) = 4x^{2} - 1$$

$$U(3,x) = 8x^{3} - 4x$$

$$U(4,x) = 16x^{4} - 12x^{2} + 1$$

$$U(5,x) = 32x^{5} - 32x^{3} + 6x$$

$$U(6,x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$$

$$U(7,x) = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$$

$$U(8,x) = 256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1$$

$$U(9,x) = 512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x$$

$$U(10,x) = 1024x^{10} - 2304x^8 + 1792x^6 - 560x^4 + 60x^2 - 1$$

$$U(11,x) = 2048x^{11} - 5120x^9 + 4608x^7 - 1792x^5 + 280x^3 - 12x$$

$$U(12,x) = 4096x^{12} - 11\,264x^{10} + 11\,520x^8 - 5376x^6 + 1120x^4 - 84x^2 + 1$$

$$U(13,x) = 8192x^{13} - 24\,576x^{11} + 28\,160x^9 - 15\,360x^7 + 4032x^5 - 448x^3 + 14x$$

$$U(14,x) =$$

$$16\,384x^{14} - 53\,248x^{12} + 67\,584x^{10} - 42\,240x^8 + 13\,440x^6 - 2016x^4 + 112x^2 - 1$$

$$U(15,x) =$$

$$= 32\,768x^{15} - 114\,688x^{13} + 159\,744x^{11} - 112\,640x^9 + 42\,240x^7 - 8064x^5 + 672x^3 - 16x$$

$$U(16,x) =$$

$$= 65\,536x^{16} - 245\,760x^{14} + 372\,736x^{12} - 292\,864x^{10} + 126\,720x^8$$

$$-29\,568x^6 + 3360x^4 - 144x^2 + 1$$

$$U(17,x) =$$

$$= 131\,072x^{17} - 524\,288x^{15} + 860\,160x^{13} - 745\,472x^{11} + 366\,080x^9$$

$$-101\,376x^7 + 14\,784x^5 - 960x^3 + 18x$$

2.10 Polynômes de Gegenbauer ou ultrasphériques

$$G(k,\gamma,x)=\frac{\Gamma(2\gamma+k)\cdot\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\gamma)\cdot\Gamma\left(\gamma+k+\frac{1}{2}\right)}\cdot J\left(k,\gamma-\frac{1}{2},\gamma-\frac{1}{2},x\right)$$

$$G(0,\gamma,x)=1$$

$$G(1,\gamma,x)=2\gamma x$$

$$G(2,\gamma,x)=2\gamma(\gamma+1)x^2-\gamma$$

$$G(3,\gamma,x)=\frac{4}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)x^3-2\gamma(\gamma+1)x$$

$$G(4,\gamma,x)=\frac{2}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)x^4-2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)x^2+2(\gamma+1)\gamma$$

$$G(5,\gamma,x)=$$

$$=\frac{4}{15}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)x^5$$

$$-\frac{4}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)x^3+\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)x$$

$$G(6,\gamma,x)=$$

$$=\frac{4}{45}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)(\gamma+5)x^6$$

$$-\frac{2}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)x^4$$

$$+\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)x^2-\frac{1}{6}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)$$

$$G(7,\gamma,x) =$$

$$= \frac{8}{315}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)(\gamma+5)(\gamma+6)\,x^7$$

$$-\frac{4}{15}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)(\gamma+5)\,x^5$$

$$+\frac{2}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)\,x^3$$

$$-\frac{1}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)\,x$$

$$G(8,\gamma,x) =$$

$$= \frac{2}{315}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)(\gamma+5)(\gamma+6)(\gamma+7)\,x^8$$

$$-\frac{4}{45}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)(\gamma+5)(\gamma+6)\,x^6$$

$$+\frac{1}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)(\gamma+5)\,x^4$$

$$-\frac{1}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)\,x^2$$

$$+\frac{1}{24}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)$$

Cas $\gamma = 0$:

$$F(k,x) = \lim\nolimits_{\gamma\to 0} \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\Gamma(2\gamma+k)\cdot\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\gamma)\cdot\Gamma\left(\gamma+k+\frac{1}{2}\right)}\cdot J\left(k,\gamma-\frac{1}{2},\gamma-\frac{1}{2},x\right)$$

$$F(0,x) = 1$$

$$F(1,x) = 2x$$

$$F(2,x) = 2x^2 - 1$$

$$F(3,x) = \frac{8}{3}x^3 - 2x$$

$$F(4,x) = 4x^4 - 4x^2 + \frac{1}{2}$$

$$F(5,x) = \frac{32}{5}x^5 - 8x^3 + 2x$$

$$F(6,x) = \frac{32}{3}x^6 - 16x^4 + 6x^2 - \frac{1}{3}$$

$$F(7,x) = \frac{128}{7}x^7 - 32x^5 + 16x^3 - 2x$$

$$F(8,x) = 32x^8 - 64x^6 + 40x^4 - 8x^2 + \frac{1}{4}$$

Chapitre 10

ESPACES LOCALEMENT CONVEXES ORDONNÉS

Le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Version du 11 juin 2001

10.1 Espaces vectoriels ordonnés

Soit F un espace vectoriel.

DEFINITION 1 Si F est muni d'un préordre noté $\leqslant$, nous dirons que F est un *espace vectoriel préordonné* si ce préordre est compatible avec la structure d'espace vectoriel, i.e. si pour tout $\varphi, \psi, \theta \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\varphi \leqslant \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi + \theta \leqslant \psi + \theta \text{ et } \alpha \cdot \varphi \leqslant \alpha \cdot \psi \ .$$

LEMME

(i) Si F est préordonné, alors $F_+ := \{\varphi \in F \mid \varphi \geqslant 0\}$ est un cône convexe, i.e. pour tout $\varphi, \psi \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on a $\varphi + \psi, \alpha \cdot \varphi \in F_+$, et $\varphi \leqslant \psi$ est équivalent à $\psi - \varphi \in F_+$.

(ii) Réciproquement si F_+ est un cône convexe, alors la relation $\psi - \varphi \in F_+$, notée $\varphi \leqslant \psi$, définit une structure d'espace vectoriel préordonné sur F , et l'ensemble des éléments positifs de F est F_+ .

(iii) Pour qu'un espace vectoriel préordonné F soit ordonné, il faut et il suffit que que F_+ soit saillant *, i.e. que $F_+ \cap (-F_+) = \{0\}$.*

C'est immédiat.

EXEMPLE $\mathbb{K}$ est ordonné par le cône $\mathbb{R}_+$.

DEFINITION 2 Soient F et G des espaces vectoriels munis chacun d'un préordre et $T : F \longrightarrow G$ une application (semi-)linéaire. Nous dirons que T est *positive* si, pour tout $\varphi \in F_+$, on a $T\varphi \in G_+$, i.e. si pour tout $\varphi, \psi \in F$ tels que $\varphi \leqslant \psi$, on a $T\varphi \leqslant \psi$.

Une forme semi-linéaire μ sur F est donc *positive* si, pour tout $\varphi \in F_+$, on a $\langle \varphi | \, \mu \rangle \geqslant 0$, i.e. si pour tout $\varphi, \psi \in F$ tels que $\varphi \leqslant \psi$, on a $\langle \varphi | \, \mu \rangle \leqslant \langle \psi | \, \mu \rangle$.

Si F et G sont localement convexes, nous désignerons par $\mathcal{L}_+ (F, G)$ l'ensemble des applications linéaires continues positives de F dans G et par $F_+^\dagger$ l'ensemble des formes semi-linéaires continues sur F et positives.

Il serait préférable de dire que T (ou μ) est croissante!

PROPOSITION *Soient F et G des espaces localement convexes munis chacun d'un préordre.*

(i) *Si G_+ est fermé dans G , alors $\mathcal{L}_+(F,G)$ est fermé dans $\mathcal{L}_s(F,G)$.*
En particulier $F_+^\dagger$ est fermé dans $F^\dagger$.

En effet, pour tout $\varphi \in F$, l'application

$$\varepsilon_\varphi : \mathcal{L}_s(F,G) \longrightarrow G : T \longmapsto T\varphi$$

est continue et

$$\mathcal{L}_+(F,G) = \bigcap_{\varphi \in F_+} \overset{-1}{\varepsilon_\varphi}(G_+) \ .$$

□

10.2 Complexification et formes linéaires

Soit F un espace localement convexe **complexe** muni d'un préordre.

PROPOSITION *Soit E un sous-espace vectoriel réel de F .*

(i) Soit μ une forme semi-linéaire sur F . Pour qu'il existe des formes semi-linéaires ν, ρ sur F , qui sont réelles sur E et telles que $\mu = \nu + i \cdot \rho$, il faut et il suffit que

$$\langle E \cap i \cdot E | \, \mu \rangle = \{0\} \ .$$

On a

$$\nu : E \oplus i \cdot E \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi + i \cdot \psi \longrightarrow \operatorname{Re} \langle \varphi | \, \mu \rangle - i \cdot \operatorname{Re} \langle \psi | \, \mu \rangle$$

et

$$\rho : E \oplus i \cdot E \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi + i \cdot \psi \longrightarrow \operatorname{Im} \langle \varphi | \, \mu \rangle - i \cdot \operatorname{Im} \langle \psi | \, \mu \rangle \ .$$

(ii) Soit F un espace localement convexe séparé. Pour que toute forme semi-linéaire continue μ sur F se décompose sous la forme $\mu = \nu + i \cdot \rho$ pour certaines formes semi-linéaires continues ν, ρ réelles sur E , il faut et il suffit que pour la topologie faible de F on ait

$$\operatorname{lin}_{\mathbb{C}} E = E \overset{top}{\oplus} i \cdot E \ .$$

Cette décomposition est unique si, et seulement si,

$$F = \overline{E \oplus_{top} i \cdot E} \ .$$

Dmonstration de (i) La condition est nécessaire, car si $\varphi \in E \cap i \cdot E$, il existe $\psi \in E$ tel que $\varphi = i \cdot \psi$, donc

$$\langle \varphi | \, \nu \rangle = \langle i \cdot \psi | \, \nu \rangle = -i \cdot \langle \psi | \, \nu \rangle \in \mathbb{R} \cap i \cdot \mathbb{R} = \{0\} \ ,$$

ainsi que $\langle \varphi | \, \rho \rangle = 0$. Mais alors

$$\langle \varphi | \, \mu \rangle = \langle \varphi | \, \nu \rangle + i \cdot \langle \varphi | \, \rho \rangle = 0 \ .$$

Réciproquement la fonction

$$\nu : E + i \cdot E \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi + i \cdot \psi \longmapsto \operatorname{Re} \langle \varphi | \, \mu \rangle - i \cdot \operatorname{Re} \langle \psi | \, \mu \rangle$$

est bien définie, car si $\varphi + i \cdot \psi = 0$, on a $\varphi, \psi \in E \cap i \cdot E$, donc $\langle \varphi | \, \mu \rangle = \langle \psi | \, \mu \rangle = 0$. Elle est évidemment additive et, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, il vient

$$\langle \alpha \cdot (\varphi + i \cdot \psi) | \, \nu \rangle = \langle \operatorname{Re} \alpha \cdot \varphi - \operatorname{Im} \alpha \cdot \psi + i \cdot (\operatorname{Im} \alpha \cdot \varphi + \operatorname{Re} \alpha \cdot \psi) | \, \nu \rangle =$$

$$= \operatorname{Re} \langle \operatorname{Re} \alpha \cdot \varphi - \operatorname{Im} \alpha \cdot \psi | \, \mu \rangle - i \cdot \operatorname{Re} \langle \operatorname{Im} \alpha \cdot \varphi + \operatorname{Re} \alpha \cdot \psi | \, \mu \rangle =$$

$$= \overline{\alpha} \cdot \operatorname{Re} \langle \varphi | \, \mu \rangle - i \cdot \overline{\alpha} \cdot \operatorname{Re} \langle \psi | \, \mu \rangle = \overline{\alpha} \cdot \langle (\varphi + i \cdot \psi) | \, \nu \rangle \ .$$

Elle est donc semi-linéaire et il suffit de considérer un prolongement semi-linéaire ν à F et de poser $\rho := -i \cdot (\mu - \nu)$, puisque

$$\langle \varphi + i \cdot \psi | \, \rho \rangle = -i \cdot [\langle \varphi + i \cdot \psi | \, \mu \rangle - (\operatorname{Re} \langle \varphi | \, \mu \rangle - i \cdot \operatorname{Re} \langle \psi | \, \mu \rangle)] =$$

$$= -i \cdot [i \cdot \mathrm{Im}\langle \varphi | \mu \rangle - i \cdot i \cdot \mathrm{Im}\langle \psi | \mu \rangle] = \mathrm{Im}\langle \varphi | \mu \rangle - i \cdot \mathrm{Im}\langle \psi | \mu \rangle \ .$$

Dmonstration de (ii) La condition $E \cap i \cdot E = \{0\}$ est nécessaire par le théorème de Hahn-Banach 3.6. D'autre part, la topologie de F étant définie par les formes semi-linéaires continues qui sont réelles sur E , on en déduit que les applications

$$\varphi + i \cdot \psi \longmapsto \varphi \ , \ \varphi + i \cdot \psi \longmapsto \psi : \mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E \longrightarrow E$$

sont continues, puisque il en est de même de

$$\varphi + i \cdot \psi \longmapsto \varphi \longmapsto \langle \varphi | \nu \rangle = \mathrm{Re}\langle \varphi + i \cdot \psi | \nu \rangle \ .$$

On en déduit que

$$\mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E \longrightarrow E \times E : \varphi + i \cdot \psi \longmapsto (\varphi, \psi)$$

est continue, donc $\mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E$ est isomorphe à $E \times E$, puisque l'addition

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \varphi + i \cdot \psi : E \times E \longrightarrow \mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E$$

est évidemment continue. Ainsi $\mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E = E \overset{top}{\oplus} i \cdot E$ par l'exemple 2.10.5.

Réciproquement en reprenant la construction algébrique ci-dessus, il suffit de constater que la forme semi-linéaire ν est continue sur $\mathrm{lin}_{\mathbb{C}} E$ et qu'elle possède par Hahn-Banach un prolongement continu à F .

La dernière partie est immédiate. □

REMARQUE 1 Rappelons qu'une forme $\mathbb{C}$-semi-linéaire μ est univoquement déterminée par sa partie réelle (cf. remarque 3.6.2). On a

$$\langle \varphi | \mu \rangle = \mathrm{Re}\langle \varphi | \mu \rangle + i \cdot \mathrm{Re}\langle i\varphi | \mu \rangle \ . \qquad (*)$$

COROLLAIRE

(i) Une forme semi-linéaire μ sur F est positive si, et seulement si,

$$\mathrm{Re}\langle F_+ + i \cdot (F_+ - F_+) | \mu \rangle \subset \mathbb{R}_+ \ .$$

(ii) Soit μ une forme semi-linéaire sur F . Pour qu'il existe des formes semi-linéaires positives ν, ρ sur F telles que $\mu = \nu + i \cdot \rho$, il faut et il suffit que

$$\langle (F_+ - F_+) \cap i \cdot (F_+ - F_+) | \mu \rangle = \{0\}$$

et que

$$\mathrm{Re}\langle F_+ - i \cdot F_+ | \mu \rangle \subset \mathbb{R}_+ \ .$$

Dmonstration de (i) En effet la formule $(*)$ montre que $\langle \varphi | \mu \rangle \geqslant 0$ est équivalent à

$$\mathrm{Re}\langle \varphi | \mu \rangle \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}\langle i\varphi | \mu \rangle = 0 \ .$$

Dmonstration de (ii) La seconde condition est nécessaire et suffisante pour la positivité, car pour tout $\varphi, \psi \in F_+$, on a

$$\mathrm{Re}\langle \varphi - i \cdot \psi | \mu \rangle = \mathrm{Re}\langle \varphi | \mu \rangle + \mathrm{Im}\langle \psi | \mu \rangle = \langle \varphi | \nu \rangle + \langle \psi | \rho \rangle$$

et

$$\langle \varphi | \nu \rangle = \mathrm{Re}\langle \varphi | \mu \rangle \quad \text{et} \quad \langle \psi | \rho \rangle = \mathrm{Im}\langle \psi | \mu \rangle = \mathrm{Re}\langle -i \cdot \psi | \mu \rangle \ .$$

□

REMARQUE 2 H.H. Schäfer définit dans son livre [2] la positivité d'une forme (semi-)linéaire complexe par la positivité de $\operatorname{Re}\langle\cdot|\,\mu\rangle$. Ceci lui permet de ramener immédiatement le cas complexe au cas réel grâce à la formule $(*)$. Que signifie cette positivité ? Dans le cas d'un espace ordonné complexifié ordonné par le cône $F_+ - i\cdot F_+$ le corollaire (ii) caractérise cette notion.

[2] H.H. Schäfer, *Topological vector spaces,* MacMillan, New York, 1966.

10.3 Décomposition en formes linéaires positives

Soit F un espace localement convexe muni d'un préordre.

THEOREME *On suppose qu'il existe une famille de semi-normes croissantes sur F_+ définissant la topologie de F .*

(i) Si F est séparé, alors F est ordonné.

(ii) On a

$$F^{\dagger} = \mathrm{lin}_{\mathbb{K}} F_+^{\dagger} \ ;$$

plus précisément toute forme semi-linéaire continue s'écrit sous la forme

$$\mu = \sum_{\varepsilon^2=1} \varepsilon \cdot \mu_\varepsilon \quad si\ \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad et \quad \mu = \sum_{\varepsilon^4=1} \varepsilon \cdot \mu_\varepsilon \quad si\ \mathbb{K} = \mathbb{C} \ ,$$

chaque μ_ε étant une forme semi-linéaire continue positive.

Dmonstration de (i) En effet pour tout $\varphi \in F_+ \cap (-F_+)$, on a $\varphi, -\varphi \geqslant 0$, i.e. $0 \leqslant \varphi \leqslant 0$, donc $0 \leqslant p(\varphi) \leqslant 0$ pour toute semi-norme continue p croissante sur F_+ , donc $\varphi = 0$ par la proposition 2.5.

Dmonstration de (ii) Grâce à la proposition 10.2.ii, on ramène le cas complexe au cas réel en remplaçant F par $F_+ - F_+$. Il nous suffit donc de montrer que toute forme linéaire μ continue sur F est la différence de deux formes linéaires continues positives.

Puisque μ est continue, il existe une semi-norme p continue sur F et croissante sur F_+ telle $|\mu| \leqslant p$. On a donc $\mu \leqslant p$ et nous allons prouver qu'il existe une forme linéaire ν positives telle que $\nu \leqslant p$ et $\nu - \mu$ soit positive, i.e.

$$\nu \leqslant p \quad , \quad \nu \leqslant 0 \quad \text{sur} \ -F_+ \quad , \quad \nu \leqslant \mu \quad \text{sur} \ -F_+ \ .$$

Le résultat en découle puisque $\mu = \nu - (\nu - \mu)$, $|\nu| \leqslant p$ et $|\nu - \mu| \leqslant 2p$. D'après le principe d'Orlicz 3.6, il nous suffit de montrer que la fonctionnelle définie, pour tout $\varphi \in F$, par

$$q(\varphi) := \inf_{\varphi_1 \in F, \varphi_2, \varphi_3 \in F_+, \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3} \left[p(\varphi_1) - 0 - \mu(\varphi_3)\right]$$

est finie. On a évidemment $q(\varphi) \leqslant p(\varphi) < \infty$ et comme $0 \leqslant \varphi_3 \leqslant \varphi_2 + \varphi_3 = \varphi_1 - \varphi$, il vient

$$\mu(\varphi_3) \leqslant p(\varphi_3) \leqslant p(\varphi_2 + \varphi_3) = p(\varphi_1 - \varphi) \leqslant p(\varphi_1) + p(-\varphi) \ ,$$

donc

$$-p(-\varphi) \leqslant p(\varphi_1) - \mu(\varphi_3)$$

et par suite

$$-\infty < -p(-\varphi) \leqslant q(\varphi)$$

□

DEFINITION Nous dirons que F est un *espace localement convexe ordonné* si F est séparé, s'il existe une famille de semi-normes croissantes sur F_+ définissant la topologie de F et si F_+ est fermé.

Ainsi

COROLLAIRE *Si F est un espace localement convexe ordonné, alors $F^\dagger = \mathrm{lin}_{\mathbb{K}} F_+^\dagger$.*

En outre F_σ est un espace localement convexe ordonné si, et seulement si, $F^\dagger = \mathrm{lin}_{\mathbb{K}} F_+^\dagger$.

Pour la seconde assertion il suffit de constater que

$$|\langle \cdot | \mu \rangle| \leqslant \sum_{\varepsilon} |\langle \cdot | \mu_\varepsilon \rangle|$$

et que le membre de droite est une semi-norme continue sur F_σ et croissante sur F_+ . – □

REMARQUE On peut écrire tout $z \in \mathbb{C}$ de manière unique sous la forme

$$z = \sum_{\varepsilon^4 = 1} \varepsilon \cdot z_\varepsilon \quad \text{et } z_\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ .$$

On a $z_{\pm 1} = (\mathrm{Re}\, z)^{\pm}$ et $z_{\pm i} = (\mathrm{Im}\, z)^{\pm}$ et $z_\varepsilon \leqslant |z|$.

10.4 Prolongement d'une forme linéaire positive

DEFINITION 1 Si $p : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ est une fonctionnelle sous-linéaire, on pose

$$p_{\leqslant} := p \wedge \infty_{\complement(-F_+)} \ .$$

LEMME *Pour tout $\varphi \in F$, on a*

$$p_{\leqslant}(\varphi) = \inf_{\psi \in F, \psi \geqslant \varphi} p(\psi)$$

et $p_{\leqslant}$ est la, plus grande fonction croissante sur F qui soit plus petite que p .

Par définition on a

$$p_{\leqslant}(\varphi) = \inf_{\psi \in F, \theta \in -F_+, \varphi = \psi + \theta} [p(\psi) + 0] = \inf_{\psi \in F, \psi \geqslant \varphi} p(\psi)$$

et si $f : F \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est croissante et telle que $f \leqslant p$, on a immédiatement $f \leqslant p_{\leqslant}$. ——— $\square$

THEOREME *Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, F un espace vectoriel, p une fonctionnelle sous-linéaire sur F , E un sous-espace vectoriel de F , τ une forme linéaire sur E et considérons la fonction sur F définie par*

$$q(\varphi) := \inf_{\varphi, \psi \in F, \epsilon \in E, \varphi \leqslant \psi + \epsilon} [p(\psi) + \tau(\epsilon)] \in \overline{\mathbb{R}} \ .$$

(i) q est croissante et on a $q(0) = 0$ si, et seulement si, $\tau \leqslant p_{\leqslant}$ sur E .

(ii) Soit μ une forme linéaire. Pour que μ soit $\leqslant p$, positive et prolonge τ , il faut et il suffit que $\mu \leqslant q$.

(iii) On a $q < \infty$ sur F si, et seulement si, pour tout $\varphi \in F$, il existe $\psi \in F$ et $\epsilon \in E$ tels que $\varphi \leqslant \psi + \epsilon$ et $p(\psi) < \infty$.

Dans ce cas, il existe une forme linéaire positive $\mu \leqslant p$ qui prolonge τ , si, et seulement si, $\tau \leqslant p_{\leqslant}$ sur E .

Dmonstration de (i) Il est clair que q est croissante. D'autre part $q(0) = 0$ est équivalent à $p(\psi) + \tau(\epsilon) \geqslant 0$, pour tout $\psi \in F$ et $\epsilon \in E$ tels que $0 \leqslant \psi + \epsilon$, donc à $\tau(\epsilon) \leqslant p(\psi)$, pour tout $\psi \in F$ et $\epsilon \in E$ tels que $\epsilon \leqslant \psi$. Finalement cette condition est équivalente à $\tau \leqslant p_{\leqslant}$ sur E .

Dmonstration de (ii) Cela découle du théorème 2.1.i, car notre problème s'écrit sous la forme

$$\mu \leqslant p \quad , \quad \mu \leqslant 0 \quad \text{sur } -F_+ \quad \text{et} \quad \mu \leqslant \tau \quad \text{sur } E \ ,$$

et la fonctionnelle correspondante est

$$\inf_{\varphi, \psi \in F, \theta \in F_+, \epsilon \in E, \varphi = \psi - \theta + \epsilon} [p(\psi) + 0 + \tau(\epsilon)] = \inf_{\varphi, \psi \in F, \epsilon \in E, \varphi \leqslant \psi + \epsilon} [p(\psi) + \tau(\epsilon)] = q(\varphi) \ .$$

Dmonstration de (iii) La première partie est immédiate. La condition de la seconde partie est nécessaire par (i), car $0 = \mu(0) \leqslant q(0)$ entraîne $q(0) = 0$. Réciproquement on a

$q(0) = 0$ et comme $q < \infty$ sur F , on vérifie immédiatement que q est sous-linéaire à valeurs dans $-\widetilde{\mathbb{R}}$. Pour tout $\varphi \in F$, on a alors

$$0 = q(0) = q(\varphi - \varphi) \leqslant q(\varphi) + q(-\varphi) \ ,$$

donc

$$-\infty < -q(-\varphi) \leqslant q(\varphi) \ ,$$

ce qui montre que q est une forme sous-linéaire. Par le principe d'Orlicz 3.6, il existe une forme linéaire $\mu \leqslant p$ qui prolonge τ . □

COROLLAIRE *Si E est cofinal dans F , i.e. si pour tout $\varphi \in F$ il existe $\epsilon \in E$ tel que $\varphi \leqslant \epsilon$, alors toute forme linéaire positive τ sur E , pour l'ordre induit par $E \cap F_+$ sur E , possède un prolongement linéaire positif sur F .*

En posant $p := \infty_{\complement(F \smallsetminus \{0\})}$, on a $p_{\leqslant} = \infty_{\complement(-F_+)}$. La cofinalité montre que $q < \infty$ sur F , tandis que l'hypothèse sur τ entraîne $\tau \leqslant p_{\leqslant}$ sur E . □

10.5 Espaces de Fréchet ordonnés

LEMME *Si p est une semi-norme sur F , alors la fonction définie sur F par*

$$\widetilde{p}(\varphi) := \bigwedge_{u \in \mathbb{U}\cap\mathbb{K}} \left(p_{|u \cdot F_+}\right)^{\infty} = \inf_{(\varphi_u) \in F_+^{(\mathbb{U}\cap\mathbb{K})}, \varphi = \sum_{u \in \mathbb{U}\cap\mathbb{K}} u \cdot \varphi_u} \sum_{u \in \mathbb{U}\cap\mathbb{K}} p(\varphi_u)$$

est une semi-norme sur $\operatorname{lin}_{\mathbb{K}} F_+$ telle que $p \leqslant \widetilde{p}$ et $p = \widetilde{p}$ sur $(\mathbb{U} \cap \mathbb{K}) \cdot F_+$.

On a

$$\{\widetilde{p} \leqslant 1\} = \overline{\operatorname{cs}}\left(\{p \leqslant 1\} \cap F_+\right) \ .$$

Pour tout $\varphi \in F$ et $(\varphi_u) \in F_+^{(\mathbb{U}\cap\mathbb{K})}$ tels que $\varphi = \sum_{u \in \mathbb{U}\cap\mathbb{K}} u \cdot \varphi_u$, on a

$$p(\varphi) \leqslant \sum_{u \in \mathbb{U}\cap\mathbb{K}} p(u \cdot \varphi_u) = \sum_{u \in \mathbb{U}\cap\mathbb{K}} p(\varphi_u)$$

d'où l'on tire $p(\varphi) \leqslant \widetilde{p}(\varphi)$. Finalement par la proposition 3.10.vi, on obtient

$$\{\widetilde{p} \leqslant 1\} = \overline{\operatorname{co}}\left(\bigcup_{u \in \mathbb{U}\cap\mathbb{K}} \left\{\left(p_{|u \cdot F_+}\right)^{\infty} \leqslant 1\right\}\right) =$$

$$= \overline{\operatorname{co}}\left(\bigcup_{u \in \mathbb{U}\cap\mathbb{K}} u \cdot \left(\{p \leqslant 1\} \cap F_+\right)\right) = \overline{\operatorname{cs}}\left(\{p \leqslant 1\} \cap F_+\right) \ .$$

□

REMARQUE 1 Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et admettons que $\operatorname{lin}_{\mathbb{R}} F_+ \cap i \cdot \operatorname{lin}_{\mathbb{R}} F_+ = \{0\}$. Pour tout $\varphi \in \operatorname{lin}_{\mathbb{R}} F_+$, on a

$$\widetilde{p}(\varphi) = \inf_{\psi,\theta \in F_+, \varphi = \psi - \theta} \left[p(\psi) + p(\theta)\right] \ .$$

Pour toute famille $(\varphi_u) \in F_+^{\mathbb{U}}$ telle que $\varphi = \sum_{u \in \mathbb{U}} u \cdot \varphi_u \in \operatorname{lin}_{\mathbb{R}} F_+$, on a $\sum_{u \in \mathbb{U}} \operatorname{Im} u \cdot \varphi_u = 0$ grâce à l'hypothèse, donc

$$\varphi = \sum_{u \in \mathbb{U}} \operatorname{Re} u \cdot \varphi_u = \sum_{u \in \mathbb{U}} (\operatorname{Re} u)^+ \cdot \varphi_u - \sum_{u \in \mathbb{U}} (\operatorname{Re} u)^- \cdot \varphi_u$$

et

$$p\left(\sum_{u \in \mathbb{U}} (\operatorname{Re} u)^+ \cdot \varphi_u\right) + p\left(\sum_{u \in \mathbb{U}} (\operatorname{Re} u)^- \cdot \varphi_u\right) \leqslant \sum_{u \in \mathbb{U}} (\operatorname{Re} u)^+ \cdot p(\varphi_u) + \sum_{u \in \mathbb{U}} (\operatorname{Re} u)^- \cdot p(\varphi_u) =$$

$$= \sum_{u \in \mathbb{U}} |\operatorname{Re} u| \cdot p(\varphi_u) \leqslant \sum_{u \in \mathbb{U}} p(\varphi_u) \, .$$

On a donc

$$\widetilde{p}(\varphi) \leqslant \inf_{\psi,\theta \in F_+, \varphi = \psi - \theta} \left[p(\psi) + p(\theta)\right] \leqslant \inf_{(\varphi_u) \in F_+^{\mathbb{U}}, \varphi = \sum_{u \in \mathbb{U}} u \cdot \varphi_u} \sum_{u \in \mathbb{U}} p(\varphi_u) = \widetilde{p}(\varphi) \ .$$

Si $\varphi = \psi + i \cdot \theta = \sum_{u \in \mathbb{U}} u \cdot \varphi_u$, on a

$$\psi = \sum_{u \in \mathbb{U}} \operatorname{Re} u \cdot \varphi_u \quad \text{et} \quad \theta = \sum_{u \in \mathbb{U}} \operatorname{Im} u \cdot \varphi_u \ ,$$

donc

$$\cos t \cdot \psi + \sin t \cdot \theta = \sum_{u \in \mathbb{U}} (\cos t \cdot \operatorname{Re} u + \sin t \cdot \operatorname{Im} u) \cdot \varphi_u =$$

$$= \sum_{u \in \mathbb{U}} \operatorname{Re}\left(e^{-it} \cdot u\right) \cdot \varphi_u \ ,$$

et par suite

$$\widetilde{p}\,(\cos t \cdot \psi + \sin t \cdot \theta) \leqslant \sum_{u \in \mathbb{U}} \widetilde{p}\left(\operatorname{Re}\left(e^{-it} \cdot u\right) \cdot \varphi_u\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{u \in \mathbb{U}} \widetilde{p}\,(\varphi_u) = \sum_{u \in \mathbb{U}} p\,(\varphi_u) \ .$$

Ainsi

$$\sup\nolimits_{t \in \mathbb{R}} \widetilde{p}\,(\cos t \cdot \psi + \sin t \cdot \theta) \leqslant \widetilde{p}\,(\varphi) \leqslant \widetilde{p}\,(\psi) + \widetilde{p}\,(\theta) \ .$$

EXEMPLE 1 Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une semi-norme telle que

$$p\,(x, y) = x + y \quad \text{pour tout } x, y \geqslant 0 \ ,$$

par exemple $p\,(x, y) = |x + y|$. On a alors

$$\widetilde{p}\,(x, y) = |x| + |y| \ .$$

En effet

$$\widetilde{p}\,(x, y) = \inf\nolimits_{s,t,u,v \geqslant 0, x = s-u, y = t-v} \left[p\,(s, t) + p\,(u, v)\right] = \inf\nolimits_{s,t,u,v \geqslant 0, x = s-u, y = t-v} \left[s + t + u + v\right] =$$

$$= \inf\nolimits_{s,t,u,v \geqslant 0, x = s-u, y = t-v} \left[x + y + 2\,(u + v)\right] = x + y + 2\,(x_- + y_-) = |x| + |y| \ .$$

□

EXEMPLE 2 Soient $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une semi-norme. On a alors

$$\widetilde{p}\,(z) = p\,(|z|) = p\,(1) \cdot |z| \ .$$

C'est immédiat puisque $z = \operatorname{sgn}(z) \cdot |z|$. □

THEOREME *Nous supposerons lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ que*

$$\operatorname{lin}_{\mathbb{C}} F_+ = (F_+ - F_+) \overset{top}{\oplus} i \cdot (F_+ - F_+) \ .$$

Si la topologie de F est définie par une suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de semi-normes, i.e. F est métrisable, et si F_+ est séquentiellement complet, alors $\operatorname{lin}_{\mathbb{K}} F_+$ est complet pour la topologie $\mathfrak{T}_{(\widetilde{p_k})}$ définie par les semi-normes $(\widetilde{p_k})_{k \in \mathbb{N}}$ correspondantes.

Nous pouvons supposer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, que (p_k) est croissante et soit (φ_l) une suite de Cauchy dans $F_+ - F_+$. Il nous suffit de montrer qu'il existe une sous-suite convergente dans $F_+ - F_+$. Puisque, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{p,q \to \infty} \widetilde{p_k}\left(\varphi_p - \varphi_q\right) = 0$, il existe par récurrence une suite strictement croissante α de $\mathbb{N}$ telle $\widetilde{p_k}\left(\varphi_p - \varphi_{\alpha(k)}\right) < \frac{1}{2^k}$ pour tout $p \geqslant \alpha(k)$. On peut donc en extrayant au besoin une sous-suite admettre que $\widetilde{p_k}\left(\varphi_{k+1} - \varphi_k\right) < \frac{1}{2^k}$.

Il existe donc $\psi_k, \theta_k \in F_+$ tels que $\varphi_{k+1} - \varphi_k = \psi_k - \theta_k$ et

$$p_k(\psi_k) + p_k(\theta_k) \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} .$$

Mais

$$\sum_{l=k}^{\infty} p_k(\psi_l) \leqslant \sum_{l=k}^{\infty} p_l(\psi_l) \leqslant \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{2^{l-1}} < \infty ,$$

ce qui montre que la série $\sum_l \psi_l$ est absolument convergente. Il en est de même de $\sum_l \theta_l$. Par le critère de Weierstraß (cf. théorème 2.5.ii), adapté au cas d'un cône convexe séquentiellement complet, les séries $\sum_l \psi_l$ et $\sum_l \theta_l$ sont convergentes dans F_+ pour $\mathfrak{T}_{(p_k)}$. Mais comme $\widetilde{p_k} = p_k$ sur F_+ , elles convergent aussi pour $\mathfrak{T}_{(\widetilde{p_k})}$. On en déduit que la suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente, puisque

$$\varphi_k = \varphi_0 + \sum_{l=0}^{k-1} \left(\varphi_{l+1} - \varphi_l\right) = \sum_{l=0}^{k-1} \psi_l - \sum_{l=0}^{k-1} \theta_l .$$

$\square$

REMARQUE 2 Dans le cas complexe, sans l'hypothèse, on pourrait espérer que l'argument suivant conduise au but. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une suite à support fini $\left(\psi_u^k\right) \in F_+^{\mathbb{U}}$ telle que $\varphi_{k+1} - \varphi_k = \sum_{u\in\mathbb{U}} u \cdot \psi_u^k$ et

$$\sum_{u\in\mathbb{U}} p_k\left(\psi_u^k\right) \leqslant \frac{1}{2^k} .$$

On a

$$\sum_{u\in\mathbb{U}} \sum_{l=k}^{\infty} p_k\left(\psi_u^l\right) \leqslant \sum_{l=k}^{\infty} \sum_{u\in\mathbb{U}} p_l\left(\psi_u^l\right) \leqslant \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{2^l} < \infty ,$$

donc toutes les séries $\sum_{l=0}^{\infty} \psi_u^l$ sont convergentes dans F_+ . En outre $\sum_{u\in\mathbb{U}} u \cdot \left(\sum_{l=}^{\infty} \psi_u^l\right)$ est absolument convergente. Mais elle n'est pas en général convergente comme le montre l'exemple suivant.

Dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$, on pose

$$\mathcal{H}_+ := \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[\mathbb{R}_+ \cdot (e_{2k} + k \cdot e_{2k+1}) + i\mathbb{R}_+ \cdot e_{2k+1}\right]\right) .$$

Ce cône convexe est saillant et fermé, donc complet. On a alors

$$\mathcal{H}_+ - \mathcal{H}_+ = \boxplus_{k\in\mathbb{N}} \left[\mathbb{R} \cdot (e_{2k} + k \cdot e_{2k+1}) \boxplus i\mathbb{R} \cdot e_{2k+1}\right]$$

dans l'espace de Hilbert réel $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ muni du produit scalaire $\mathrm{Re}\,(\cdot|\cdot)$, ainsi que

$$\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\, \mathcal{H}_+ = \boxplus_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{C} \cdot (e_{2k} + k \cdot e_{2k+1}) + \boxplus_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{C} \cdot e_{2k+1} \neq \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N}) ,$$

mais dense dans $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$, puisque

$$e_{2k} = (e_{2k} + k \cdot e_{2k+1}) - k \cdot e_{2k+1} \in \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\, \mathcal{H}_+ .$$

La suite

COROLLAIRE *Si F est un espace de Fréchet définit par la suite de semi-normes $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et F_+ un cône convexe fermé tel que*

$$F = F_+ - F_+ \quad si\ \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad et \quad F = (F_+ - F_+) \overset{top}{\oplus} i \cdot (F_+ - F_+) \quad si\ \mathbb{K} = \mathbb{C}\ ,$$

alors la suite $(\widetilde{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ définit aussi la topologie de F .

Si F est un espace de Banach, il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\|\varphi\| \leqslant \widetilde{\|\varphi\|} \leqslant c \cdot \|\varphi\| \quad pour\ tout\ \varphi \in F\ .$$

En outre, pour tout $\mu \in F^\dagger$, on a

$$\|\mu\|_+ := \sup_{\varphi\in F_+, \|\varphi\|\leqslant 1} |\langle \varphi | \mu\rangle| \leqslant \|\mu\| \leqslant c \cdot \|\mu\|_+\ .$$

En effet

$$\mathrm{Id} : F_{(\widetilde{p_k})} \longrightarrow F_{(p_k)}$$

est continue puisque $p_k \leqslant \widetilde{p_k}$, d'où la première partie par le théorème d'isomorphie de Banach 3.14.

Pour la seconde, étant donné $\varphi \in F$ tel que $\|\varphi\| \leqslant 1$, on a $\widetilde{\|\varphi\|} \leqslant c \cdot \|\varphi\| \leqslant c$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(\psi_u) \in F_+^{\mathbb{U}\cap\mathbb{K}}$ telle que $\varphi = \sum_{u\in\mathbb{U}\cap\mathbb{K}} u \cdot \psi_u$ et $\sum_{u\in\mathbb{U}\cap\mathbb{K}} \|\psi_u\| \leqslant c + \varepsilon$. On a alors

$$|\langle \varphi | \mu\rangle| \leqslant \sum_{u\in\mathbb{U}\cap\mathbb{K}} |\langle \psi_u | \mu\rangle| \leqslant \left(\sum_{u\in\mathbb{U}\cap\mathbb{K}} \|\psi_u\|\right) \cdot \|\mu\|_+ \leqslant (c+\varepsilon) \cdot \|\mu\|_+\ ,$$

donc $\|\mu\| \leqslant (c+\varepsilon) \cdot \|\mu\|_+$, ce qui finit de prouver notre assertion. $\square$

10.6 Continuité des applications linéaires positives

THEOREME *Soit F est un espace de Fréchet et F_+ un cône convexe fermé tel que*

$$F = F_+ - F_+ \quad si\ \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad et \quad F = (F_+ - F_+) \overset{top}{\oplus} i \cdot (F_+ - F_+) \quad si\ \mathbb{K} = \mathbb{C} .$$

Alors toute forme linéaire positive sur F est continue.

Nous pouvons supposer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de semi-normes définissant la topologie de F , par le corollaire 10.5 il en est de même de la suite croissante de semi-normes $(\widetilde{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Si μ est une forme linéaire positive qui n'est pas continue, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $|\langle \cdot | \mu\rangle| \nleqslant 2^k \cdot \widetilde{p_k}$. Il existe donc $\varphi_k \in F$ tel que $\widetilde{p_k}(\varphi_k) < \frac{1}{2^k}$ et $|\langle \varphi_k | \mu\rangle| \geqslant 1$, puis $\psi_k, \theta_k \in F_+$ tels que $\varphi_k = \psi_k - \theta_k$ et $p_k(\psi_k) + p_k(\theta_k) \leqslant \frac{1}{2^k}$. Comme μ est positive et

$$|\langle \psi_k | \mu\rangle - \langle \theta_k | \mu\rangle| \geqslant 1 ,$$

on a $\langle \psi_k | \mu\rangle \geqslant \frac{1}{2}$ ou $\langle \theta_k | \mu\rangle \geqslant \frac{1}{2}$. Il existe donc une suite $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset F_+$ telle que $\langle \gamma_k | \mu\rangle \geqslant \frac{1}{2}$ et $p_k(\gamma_k) \leqslant \frac{1}{2^k}$. La série $\sum_{l\in\mathbb{N}} \gamma_l$ est absolument convergente puisque, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{l=k}^{\infty} p_k(\gamma_l) \leqslant \sum_{l=k}^{\infty} p_l(\gamma_l) \leqslant \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{2^l} < \infty .$$

Elle est donc convergente par le critère de Weierstraß et en posant $\gamma = \sum_{l\in\mathbb{N}} \gamma_l$, il vient

$$\infty > \langle \gamma | \mu\rangle \geqslant \left\langle \sum_{l=0}^{k} \gamma_l \middle| \mu \right\rangle \geqslant \frac{k+1}{2} ,$$

ce qui est absurde. □

COROLLAIRE *Si G est un espace localement convexe ordonné, alors toute application linéaire positive de F dans G est continue.*

Si F et G sont des espaces de Banach, alors $\mathcal{L}_+(F,G)$ est faiblement complet.

Soit $T : F \longrightarrow G$ une application linéaire positive. Par le corollaire 10.3 on a $G^\dagger = \mathrm{lin}_{\mathbb{K}} G_+^\dagger$ et pour tout $\nu \in G_+^\dagger$, la forme linéaire $\langle T | \nu\rangle$ sur F est positive, donc continue. Ceci montre que T est faiblement continue continue, donc continue puisque F est tonnelé, donc muni de sa topologie de Mackey (cf. théorème 3.11, i et ii).

L'espace $\mathcal{L}(F,G)_\sigma$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(F,G)^{\dagger\circledast}$, donc muni de la topologie induite par $\sigma\left(\mathcal{L}(F,G)^{\dagger\circledast}, \mathcal{L}(F,G)^\dagger\right)$ et $\mathcal{L}(F,G)^{\dagger\circledast}$ est complet pour cette topologie. Il suffit alors de remarquer que

$$\mathcal{L}_+(F,G) = L_+(F,G) = \bigcap_{\varphi\in F, \nu\in G_+^\dagger} \{T \in L(F,G) \mid \langle T\varphi | \nu\rangle \geqslant 0\} ,$$

car $G_+ = \left(G_+^\dagger\right)^\circ$, puis que la forme linéaire

$$T \longmapsto \langle T\varphi | \nu\rangle : \mathcal{L}(F,G) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est continue. □

10.7 Séries entières

THEOREME *Soient F un espace localement convexe séquentiellement complet, $\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l \cdot z^l$ une série entière à valeur dans F dont le rayon de convergence est R et, pour tout $\mu \in F^\dagger$, désignons par R_μ le rayon de convergence de la série $\sum_{l=0}^{\infty} \langle \mu | \varphi_l \rangle \cdot z^l$, . Alors*

(i) La série $\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l \cdot z^l$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ et on a la ***formule d'Hadamard***

$$R = \frac{1}{\limsup_k \|\varphi_k\|^{\frac{1}{k}}} .$$

Elle converge dans F normalement, donc uniformément, sur tout disque fermé $B(0, \rho)$ tel que $\rho < R$.

(ii) On a

$$R = \inf_{\mu \in F^\dagger} R_\mu .$$

Dmonstration de (i) Cela se démontre comme dans le cas classique.

Dmonstration de (ii) Il est clair que, pour tout $\mu \in F^\dagger$, on a $R \leqslant R_\mu$. Soit donc $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \inf_{\mu \in F^\dagger} R_\mu$. Choisissons $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $|z| < r < \inf_{\mu \in F^\dagger} R_\mu$. Puisque la série $\sum_{l=0}^{\infty} \langle \mu | \varphi_l \rangle \cdot r^l$ converge absolument, la suite $\left(\langle \mu | \varphi_l \rangle \cdot r^l\right)_{l \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 , donc est bornée. Cela signifie que la suite $\left(\varphi_l \cdot r^l\right)_{l \in \mathbb{N}}$ est faiblement bornée, donc bornée dans F . Si p est une semi-norme continue sur F , on a donc $\sup_{l \in \mathbb{N}} p\left(\varphi_l \cdot r^l\right) < \infty$ et on obtient

$$\sum_{l=0}^{\infty} p\left(\varphi_l \cdot z^l\right) = \sum_{l=0}^{\infty} p\left(\varphi_l \cdot r^l\right) \cdot \left(\frac{|z|}{r}\right)^l < \infty$$

puisque $\frac{|z|}{r} < 1$. Ceci montre que la série est normalement convergente, donc convergente par le critère de Weierstraß. Ainsi $|z| \leqslant R$, donc $\inf_{\mu \in F^\dagger} R_\mu \leqslant R$. □

10.8 Complétion et compacité

PROPOSITION *Soient F un espace localement convexe et $\mathcal{P}$ une famille de semi-normes s.c.i. sur F définissant une topologie plus fine que celle de F . Pour qu'un filtre $\mathfrak{F}$ sur F converge dans $F_{\mathcal{P}}$, il faut et il suffit qu'il soit un filtre de Cauchy pour $F_{\mathcal{P}}$ et qu'il converge dans F .*

En particulier si C est une partie complète dans F , alors C est complète dans $F_{\mathcal{P}}$.

Puisque $F_{\mathcal{P}} \longrightarrow F$ est continue, la condition est nécessaire. Réciproquement soit $\varphi = \lim \mathfrak{F}$ dans F . Etant donné $p \in \mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathfrak{F}$ tel que $p(A - A) \leqslant \varepsilon$. Pour tout $\psi \in A$, on a donc $p(\psi - A) \leqslant \varepsilon$, et comme φ appartient à l'adhérence de A dans F et que $\{p(\psi - \diamond) \leqslant \varepsilon\}$ est fermé dans F , on obtient $p(\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon$, i.e. $p(A - \varphi) \leqslant \varepsilon$. Ceci finit de prouver que $\varphi = \lim \mathfrak{F}$ dans $F_{\mathcal{P}}$.

Si $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy sur C pour $F_{\mathcal{P}}$, c'est un filtre de Cauchy dans F , qui converge dans C . Il converge donc dans $F_{\mathcal{P}}$ par ce qui précède. $\square$

REMARQUE 1 Les topologies localement convexes auxquelles on peut appliquer ce résultat sont exactement celles qui sont plus fines que celle de F et moins fine que $\beta\left(F, F^{\dagger}\right)$.

REMARQUE En particulier si F est quasi-complet, alors F l'est aussi pour $\tau\left(F, F^{\dagger}\right)$ et $\beta\left(F, F^{\dagger}\right)$.

LEMME *Soient $\left\langle F \middle| F^{\dagger} \right\rangle$ une semi-dualité séparante et $A \subset F$. On munit F d'une topolgie localement convexe entre $\sigma\left(F, F^{\dagger}\right)$ et $\beta\left(F, F^{\dagger}\right)$.*

(i) Si toute suite infinie de A a une valeur d'adhérence, alors A est précompacte.

(ii) Pour que A soit relativement compacte, il faut et il suffit que que A soit précompacte et relativement compacte dans F_{σ} .

THEOREME *Soient F espace localement convexe séparé et A une partie de F . Nous supposons que $\overline{\text{cs}}(A)$ est complète pour $\tau\left(F, F^{\dagger}\right)$.*

(i) ***Eberlein*** *Pour que A soit relativement compacte, il faut et il suffit que que toute suite infinie de A ait une valeur d'adhérence.*

(ii) ***Krein*** *Si A est relativement compacte, alors $\overline{\text{cs}}(A)$ est compacte.*

REMARQUE 2 Le théorème est applicable lorsque F est quasi-complet pour $\tau\left(F, F^{\dagger}\right)$.

En effet, dans les deux cas A est nécessairement précompacte, donc bornée, par le lemme; $\overline{\text{cs}}(A)$ est donc bornée, et par suite complète pour $\tau\left(F, F^{\dagger}\right)$. $\square$

COROLLAIRE (Šmulian) *Si F est limite inductive stricte d'une suite d'espace de Fréchet et A une partie de F , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est relativement compacte dans* F_σ .

(ii) *Toute suite infinie de points de A a une valeur d'adhérence dans* F_σ .

(iii) *De toute suite infinie de points de A , on peut extraire une sous-suite qui converge dans* F_σ .

10.9 Fonctions holomorphes vectorielles

PROPOSITION *Soient F un espace localement convexe quasi-complet pour la topologie de Mackey $\tau\left(F, F^{\dagger}\right)$, X un espace compact, m une intégrale de Radon sur X et $\zeta : X \longrightarrow F$ une application faiblement continue. Alors ζ est m-intégrable dans F .*

Si p est une semi-norme de Mackey sur F , on a

$$p\left(\int \zeta\, dm\right) \leqslant m(X) \cdot \|p \circ \zeta\|_{\infty} \ .$$

En particulier si $(\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications faiblement continues de X dans F_τ qui converge uniformément vers ζ , i.e. pour toute semi-norme de Mackey p sur F , on a

$$\lim_k \|p \circ (\zeta_k - \zeta)\|_{\infty} = 0 \ ,$$

alors

$$\lim_k \int \zeta_k\, dm = \int \zeta\, dm \ .$$

La première partie a été démontrée dans la remarque 3.12.3. Elle utilise le théorème de Krein [3]. Si $\zeta : X \longrightarrow F_\tau$ est continue, la démonstration est simple. Puisque $\zeta(X)$ est compacte dans F_τ , elle est précompacte, donc aussi $\overline{\mathrm{cs}}\,[\zeta(X)]$. Mais cette partie est fermée bornée, donc complète par hypothèse et par suite compacte pour la topologie de Mackey, donc faiblement compacte !

Par le corollaire 3.6.ii, on a

$$p\left(\int \zeta\, dm\right) = \sup_{\mu\in F^{\dagger},|\langle\mu\rangle|\leqslant p} \left|\left\langle \int \zeta\, dm \right| \mu \right\rangle\right| \leqslant \sup_{\mu\in F^{\dagger},|\langle\mu\rangle|\leqslant p} \int |\langle \zeta | \mu\rangle|\, dm \leqslant$$

$$\leqslant m(X) \cdot \sup_{\mu\in F^{\dagger},|\langle\mu\rangle|\leqslant p, x\in X} |\langle \zeta | \mu\rangle| = m(X) \cdot \sup_{x\in X} p(\zeta(x)) = m(X) \cdot \|p \circ \zeta\|_{\infty} \ .$$

□

LEMME *Pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < r$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\int_0^1 \frac{\left(r \cdot e^{2\pi i\cdot t}\right)^{k+1}}{r \cdot e^{2\pi i\cdot t} - z}\, dt = 1_{\mathbb{R}_+}(k) \cdot \left(\frac{z}{r}\right)^k \ .$$

En effet

$$\int_0^1 \frac{\left(r \cdot e^{2\pi i\cdot t}\right)^{k+1}}{r \cdot e^{2\pi i\cdot t} - z}\, dt = \int_0^1 \frac{\left(r \cdot e^{2\pi i\cdot t}\right)^{k}}{1 - \frac{z}{r} \cdot e^{-2\pi i\cdot t}}\, dt = \int_0^1 \sum_{l=0}^{\infty} \left(r \cdot e^{2\pi i\cdot t}\right)^k \cdot \left(\frac{z}{r} \cdot e^{-2\pi i\cdot t}\right)^l =$$

$$= r^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{z}{r}\right)^l \cdot \int_0^1 e^{2\pi i(k-l)\cdot t}\, dt = r^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{z}{r}\right)^l \cdot \delta_{l,k} = 1_{[0,\infty[}(k) \cdot z^k \ .$$

□

[3] N. Bourbaki, EVT IV, §5, n°5, théorème 3.

THEOREME *Soient F un espace localement convexe complexe quasi-complet pour la topologie de Mackey $\tau\left(F,F^{\dagger}\right)$, Z un ouvert de $\mathbb{C}$, $f:Z\longrightarrow F$ et, pour tout $\mu\in F^{\dagger}$*

$$\langle\mu|\, f\rangle : Z\longrightarrow\mathbb{C} : z\longmapsto\langle\mu\,|f\,(z)\rangle\ \ .$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est holomorphe à valeurs dans F_τ , i.e. pour tout $z\in Z$,

$$\partial f\,(z) := \lim\nolimits_{\mathbb{C}^*\ni h\to 0}\frac{1}{h}\cdot[f\,(z+h)-f\,(z)]$$

existe dans F_τ .

(ii) f est faiblement holomorphe, i.e. $\langle\mu|\, f\rangle$ est holomorphe pour tout $\mu\in F^{\dagger}$.

(iii) f est faiblement analytique, i.e. $\langle\mu|\, f\rangle$ est analytique pour tout $\mu\in F^{\dagger}$.

*(iv) **Formule de Cauchy** f est faiblement continue et, pour tout disque fermé B de rayon r contenu dans Z , la fonction $w\longmapsto\frac{f(w)}{w-z}:\partial B\longrightarrow F$ intégrable dans F et on a*

$$f\,(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f\,(w)}{w-z}\,dw\ \ .$$

(v) f est analytique, i.e. f est développable en une série entière convergente dans F_τ au voisinage de chaque point $z\in Z$.

Dans ce cas, pour tout $z\in Z$, on a

$$\langle\mu\,|\partial f\,(z)\rangle=\partial\,\langle\mu|\, f\rangle\,(z)\ \ ,$$

f est indéfiniment dérivable, pour tout $l\in\mathbb{N}$, la fonction $\frac{f}{(\diamond-z)^l}:\partial B\longrightarrow F$ est intégrable dans F et on a

$$f\,(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f\,(w)}{(w-c)^{l+1}}\,dw\right]\cdot(z-c)^l\ \ ,$$

ainsi que

$$\partial^l f\,(c)=\frac{l!}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f\,(w)}{(w-c)^{l+1}}\,dw\ \ .$$

En outre la série entière $\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\partial^l f(c)}{l!}\cdot(z-c)^l$ est convergente dans le plus grand disque ouvert D de centre c contenu dans Z .

(i) $\Rightarrow$ (ii) Puisque $\mu\in F^{\dagger}$ est continue sur F , on a

$$\langle\mu\,|\partial f\,(z)\rangle=\lim\nolimits_{\mathbb{C}^*\ni h\to 0}\frac{1}{h}\cdot[\langle\mu|\, f\,(z+h)\rangle-\langle\mu\,|f\,(z)\rangle]=\partial\,\langle\mu|\, f\rangle\,(z)\ \ .$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Soient B un disque fermé de rayon r , de centre c , contenu dans Z et $z\in B^{\circ}$. Le bord ∂B est paramétré par

$$t\longmapsto c+r\cdot e^{2\pi i\cdot t}:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C}\ .$$

Pour $s,t\in[0,1]$, on a

$$\left|z+s\cdot\left[r\cdot e^{2\pi i\cdot t}-z\right]\right|=\left|(1-s)\cdot z+s\cdot r\cdot e^{2\pi i\cdot t}\right|\leqslant(1-s)\cdot|z|+s\cdot r\leqslant r$$

et posons

$$g\,(s):=\int_0^1\frac{\langle\mu\,|f\,(z+s\cdot[r\cdot e^{2\pi i\cdot t}-z])-f\,(z)\rangle}{c+r\cdot e^{2\pi i\cdot t}-z}\cdot r\cdot e^{2\pi i\cdot t}\,dt\ .$$

On peut montrer (Goursat) que g est dérivable de dérivée $\partial g = 0$; g est donc constante. Mais comme $g(0) = 0$, on obtient $g(1) = 0$, et par suite

$$\langle \mu | f(z) \rangle = \int_0^1 \frac{\langle \mu | f(z) \rangle}{c + r \cdot e^{2\pi i \cdot t} - z} \cdot r \cdot e^{2\pi i \cdot t} \, dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\langle \mu | f(z + [c + r \cdot e^{2\pi i \cdot t} - z]) \rangle}{c + r \cdot e^{2\pi i \cdot t} - z} \cdot r \cdot e^{2\pi i \cdot t} \, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{\langle \mu | f(w) \rangle}{w - z} \, dw \ ,$$

puisque $\int_0^1 \frac{r \cdot e^{2\pi i \cdot t}}{r \cdot e^{2\pi i \cdot t} - (z-c)} \, dt = 1$ par le second lemme.

Finalement, on a obtient

$$\langle \mu | f(z) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{\langle \mu | f(w) \rangle}{(w-c)\left(1 - \frac{z-c}{w-c}\right)} \, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \left[\frac{\langle \mu | f(w) \rangle}{w - c} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{z-c}{w-c} \right)^l \right] dw = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{\langle \mu | f(w) \rangle}{(w-c)^{l+1}} \, dw \right] \cdot (z-c)^l \ ,$$

car $\left| \frac{z-c}{w-c} \right| = \frac{|z-c|}{r} < 1$ pour tout $w \in \partial B$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Si f est faiblement analytique, la fonction $w \longmapsto \frac{f(w)}{w-z} : \partial B \longrightarrow F$ est faiblement continue, donc intégrable dans F par le premier lemme. D'autre part on a

$$\langle \mu | f(w) \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} a_l^{\mu} \cdot (w-c)^l \ ,$$

et il vient

$$\left\langle \mu \middle| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{w-z} \, dw \right\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{\langle \mu | f(w) \rangle}{w - z} \, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{1}{w-z} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l^{\mu} \cdot (w-c)^l \right) dw = \sum_{l=0}^{\infty} a_l^{\mu} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{(w-c)^l}{w-z} \, dw =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} a_l^{\mu} \cdot (z-c)^l = \langle \mu | f(z) \rangle \ ,$$

puisque

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{(w-c)^l}{w-z} \, dw = \int_0^1 \frac{\left(r \cdot e^{2\pi i \cdot t}\right)^{l+1}}{r \cdot e^{2\pi i \cdot t} - (z-c)} \, dt = (z-c)^l$$

par le second lemme. Nous avons donc montré que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{w-z} \, dw \ .$$

(iv) $\Rightarrow$ (v) Si c est le centre de B , on a évidemment

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{(w-c)\left(1 - \frac{z-c}{w-c}\right)} \, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w-c} \cdot \left(\frac{z-c}{w-c} \right)^l \right] dw = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{(w-c)^{l+1}} \, dw \right] \cdot (z-c)^l \ ,$$

car la série $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{f}{\diamond - c} \cdot \left(\frac{z-c}{\diamond - c}\right)^l$ converge dans F_τ normalement, donc uniformément sur ∂B . En effet $\left|\frac{z-c}{w-c}\right| = \frac{|z-c|}{r} < 1$ pour tout $w \in \partial B$ et la partie $f(\partial B)$ est faiblement compacte, donc faiblement bornée et par suite bornée pour la topologie de Mackey. On a donc $\|p \circ f\|_{\infty,\partial B} < \infty$ et

$$\left\|p \circ \left(\frac{f}{\diamond - c} \cdot \left(\frac{z-c}{\diamond - c}\right)^l\right)\right\|_{\infty,\partial B} = \|p \circ f\|_{\infty,\partial B} \cdot \frac{|z-c|^l}{r^{l+1}} \ .$$

(v) $\Rightarrow$ (i) Il suffit de recopier la démonstration classique. $\square$

DIVERS

Version du 8 mai 2001

10.1 Dérivées d'ordre supérieures

REMARQUE Les systèmes de semi-normes $(p_{K,k})_{k\in\mathbb{N},K\in\mathfrak{K}(X)}$, $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(p_{K,k|\mathcal{D}(X,K)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, que nous avons introduits dans les exemples 5 et 6 de 2.1, 5 et 6 de 2.3 et 3 de 2.10, ne sont pas très pratiques lorsqu'il est nécessaire d'utiliser la formule de dérivation des fonctions composées. Nous allons construire d'autres systèmes de semi-normes équivalents.

Soient X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction k-fois (totalement) dérivable (cf. cours d'Analyse [17], 11.5). On a

$$Df : X \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad \text{et} \quad D^2 f : X \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \ .$$

Comme en 3.13, on voit facilement que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ est isomorphe à l'espace vectoriel des applications bilinéaires $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ définies sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Pour tout $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, on a

$$D^2 f(x)(v_1, v_2) = \left[D^2 f(x) v_1\right] v_2 = \left(\left(\partial_{l_2}\partial_{l_1} f(x)\right)_{l_1=1,\ldots,n} v_1\right)_{l_2=1,\ldots,n} v_2 =$$

$$= \sum_{l_2=1}^n \left(\sum_{l_1=1}^n \partial_{l_2}\partial_{l_1} f(x) \cdot v_{1,l_1}\right) \cdot v_{2,l_2} \ ;$$

l'application bilinéaire $D^2 f(x)$ est donc représentée par la matrice ligne formée de vecteurs ligne

$$\left(\left(\partial_{l_2}\partial_{l_1} f(x)\right)_{l_1=1,\ldots,n}\right)_{l_2=1,\ldots,n} \ .$$

Plus généralement

$$D^k f : X \longrightarrow \mathcal{L}_k\left([\mathbb{R}^n]^k, \mathbb{R}^m\right)$$

est à valeurs dans l'espace vectoriel des applications k-linéaires et on a

$$D^k f(x)(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{l_k=1}^n \left(\ldots \left(\sum_{l_1=1}^n \partial_{l_k} \ldots \partial_{l_1} f(x) \cdot v_{1,l_1}\right) \cdot \ldots\right) \cdot v_{k,l_k} \ .$$

Rappelons que $D^k f(x)$ est une application k-linéaire symétrique (cf. Dieudonné [4], 8.12.14).

En se rappelant le critère de continuité pour une application bilinéaire (cf. proposition 2.4), il est naturel d'introduire la norme d'une application k-linéaire $\mathfrak{s} \in \mathcal{L}_k\left([\mathbb{R}^n]^k, \mathbb{R}^m\right)$ par

$$\|\mathfrak{s}\| := \sup_{v_1,\ldots,v_k\in\mathbb{R}^n, |v_1|,\ldots,|v_k|\leqslant 1} |\mathfrak{s}(v_1, \ldots, v_k)| \ .$$

[4] J. Dieudonné, Foundations of modern Analysis, Academic Press, 1960.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a alors

$$\partial^\alpha f(x) = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f(x) = D^{|\alpha|_1} f(x) \left(\underbrace{e_n, \ldots, e_n}_{\alpha_n\text{-fois}}, \ldots, \underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{\alpha_1\text{-fois}} \right) ,$$

donc

$$\left|\partial^\alpha f(x)\right| \leqslant \left\| D^{|\alpha|_1} f(x) \right\| .$$

D'autre part

$$\left\| D^k f(x) \right\| \leqslant \sum_{l_k=1}^{n} \left(\ldots \left(\sum_{l_1=1}^{n} \left|\partial_{l_k} \ldots \partial_{l_1} f(x)\right| \right) \ldots \right) \leqslant kn \cdot \max_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|_1 = k} \left|\partial^\alpha f(x)\right| .$$

Ceci nous montre que l'on peut remplacer les semi-normes $p_{K,k}$ et p_k par

$$r_{K,k}(\varphi) := \max_{j=0,\ldots,k} \left\| D^j f \right\|_{\infty,K} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$$

et

$$r_k(\varphi) := \max_{j=0,\ldots,k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k D^j f \right\|_\infty \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) .$$

La formule de dérivation d'un produit n'est pas simple : Considérons tout d'abord $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$. On a évidemment

$$D(f \cdot g) = Df \cdot g + f \cdot Dg = \left(\partial_{l_1} f \cdot g\right)_{l_1=1,\ldots,n} + \left(f \cdot \partial_{l_1} g\right)_{l_1=1,\ldots,n} .$$

Mais

$$D(Df \cdot g) = \left(\left(\partial_{l_2}\partial_{l_1} f \cdot g\right)_{l_1=1,\ldots,n} \right)_{l_2=1,\ldots,n} + \left(\left(\partial_{l_1} f \cdot \partial_{l_2} g\right)_{l_1=1,\ldots,n} \right)_{l_2=1,\ldots,n} =$$

$$= D^2 f \cdot g + Df \cdot Dg ,$$

la multiplication de vecteurs lignes étant définie par

$$v \cdot w = \left(v \cdot w_{l_2}\right)_{l_2=1,\ldots,n} = \left(\left(v_{l_1}\right)_{l_1=1,\ldots,n} \cdot w_{l_2} \right)_{l_2=1,\ldots,n} ,$$

et

$$D(f \cdot Dg) = \left(\left(\partial_{l_2} f \cdot \partial_{l_1} g\right)_{l_1=1,\ldots,n} \right)_{l_2=1,\ldots,n} + \left(\left(f \cdot \partial_{l_2}\partial_{l_1} g\right)_{l_1=1,\ldots,n} \right)_{l_2=1,\ldots,n} =$$

$$= Dg \cdot Df + f \cdot D^2 g .$$

Ceci montre qu'il est préférable de considérer l'espace vectoriel des vecteurs ligne comme un espace vectoriel à droite et d'écrire

$$D(f \cdot g) = Df \cdot g + Dg \cdot f .$$

Chapitre 11

INVERSIBILITÉ DANS UNE ALGÈBRE SANS UNITÉ

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur $\mathbb{K}$.

Version du 15 septembre 2001

11.1 Idéaux réguliers et adversibilité

DEFINITION 1 Soit $\mathcal{A}$ une algèbre. Pour tout $a \in \mathcal{A}$ nous poserons

$$L_a : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} : x \longmapsto ax \quad \text{et} \quad R_a : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} : x \longmapsto xa \ .$$

Si $\mathfrak{I}$ est un idéal à droite de $\mathcal{A}$, on dit que $u \in \mathcal{A}$ est une *unité à gauche modulo* $\mathfrak{I}$ si $ua - a \in \mathfrak{I}$ pour tout $a \in \mathcal{A}$. On dit que $\mathfrak{I}$ est *régulier* s'il existe une unité à gauche modulo $\mathfrak{I}$.

On vérifie immédiatement que, pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, on a $L_a, R_a \in L(\mathcal{A})$, $L_{ab} = L_a L_b$ et $R_{ab} = R_b R_a$.

THEOREME

(i) Soit $\mathfrak{I}$ un idéal à droite. Si u est une unité à gauche modulo $\mathfrak{I}$, alors $u \notin \mathfrak{I}$ si, et seulement si, $\mathfrak{I} \neq \mathcal{A}$.

(ii) Tout idéal à droite régulier $\mathfrak{J}$ est contenu dans un idéal à droite régulier maximal $\mathfrak{I}$. Si u est une unité à gauche de $\mathfrak{J}$, alors u est aussi une unité à gauche de $\mathfrak{I}$.

(iii) Si $\mathcal{A}$ est commutative et $\mathfrak{I}$ est un idéal, alors $\mathfrak{I}$ est régulier maximal si, et seulement si, $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ est un corps.

(iv) Pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $z \in \mathbb{K}$, l'ensemble $(L_a - z \cdot \mathrm{Id})(\mathcal{A})$ est un idéal à droite. Si $z \in \mathbb{K}^*$, alors $\frac{1}{z}a$ est une unité à gauche de cet idéal.

Dmonstration de (i) Si $u \in \mathfrak{I}$, pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a $ua \in \mathfrak{I}$, donc $a \in \mathfrak{I}$.

Dmonstration de (ii) Cela découle du principe de maximalité de Hausdorff et de (i).

Dmonstration de (iii) C'est bien connu.

Dmonstration de (iv) Pour tout $b, c \in \mathcal{A}$, on a

$$(L_a - z \cdot \mathrm{Id})(b)\, c = (ab - z \cdot b)\, c = a\,(bc) - z \cdot (bc) = (L_a - z \cdot \mathrm{Id})(bc)$$

et

$$\left[\frac{1}{z}a\right] b - b = \frac{1}{z}(ab - z \cdot b) \in (L_a - z \cdot \mathrm{Id})(\mathcal{A}) \ .$$

DEFINITION 2 On introduit l'opération binéaire $\top$ dans $\mathcal{A}$ par

$$a \top b := a + b - ab \ .$$

On vérifie immédiatement que $\top$ est associative et que 0 est l'élément neutre.

DEFINITION 3 On dit que $b \in \mathcal{A}$ est un *adverse* à droite, respectivement à gauche, de $a \in \mathcal{A}$ si $a \top b = 0$, respectivement $b \top a = 0$, i.e. si a est inversible à droite, respectivement à gauche pour l'opération $\top$. On dit que a est *adversible* si a possède un adverse à gauche et à droite. On le note $a^{\top}$. Soit $\mathcal{ADV}(\mathcal{A})$ l'ensemble des éléments adversible de $\mathcal{A}$.

On a $0 \in \mathcal{ADV}(\mathcal{A})$.

REMARQUE 1 Si b est un adverse à droite de a et c un adverse à gauche de a , alors $b = c$.

En effet

$$b = 0 \top b = (c \top a) \top b = c \top (a \top b) = c \top 0 = c \ .$$

□

LEMME *Soit $a, u \in \mathcal{A}$.*

(i) L_a est inversible dans $L(\mathcal{A})$, i.e.bijective, si, et seulement si, il existe une unité à gauche $e \in \mathcal{A}$ et a est inversible, i.e. il existe $a^{-1} \in \mathcal{A}$ tel que $aa^{-1} = a^{-1}a = e$. Dans ce cas on a

$$\overset{-1}{L_a} = L_{a^{-1}} \quad , \quad e = \overset{-1}{L_a} a \quad \text{et} \quad a^{-1} = \overset{-1}{L_a}\left(\overset{-1}{L_a} a\right) \ .$$

(ii) Si $z \in \mathbb{K}^*$, alors $L_a - z \cdot \mathrm{Id}$ est inversible dans $L(\mathcal{A})$ si, et seulement si, $\frac{1}{z}a$ est adversible. Dans ce cas $\left(\frac{1}{z}a\right)^{\top} = (L_a - z \cdot \mathrm{Id})^{-1} a$ et, pour tout $b \in \mathcal{A}$, on a

$$(L_a - z \cdot \mathrm{Id})^{-1} b = \left(\frac{1}{z}a\right)^{\top} \top \frac{1}{z}(a - b) \ .$$

(iii) Si $\mathcal{A}$ est unifère et si $z \in \mathbb{K}^*$, alors $a - z \cdot e$ est inversible si, et seulement si, $\frac{1}{z}a$ est adversible. Dans cas $\left(\frac{1}{z}a\right)^{\top} = z \cdot (a - z \cdot e)^{-1} + e = (a - z \cdot e)^{-1} a = a (a - z \cdot e)^{-1}$.

(iv) Si $\mathcal{A}$ est une algèbre normée unifère et a est inversible, alors $\rho(a) > 0$.

Dmonstration de (i) Supposons tout d'abord que L_a est inversible, donc que l'équation $ax = b$ possède une unique solution pour tout $b \in \mathcal{A}$. Il existe donc $e \in \mathcal{A}$ tel que $ae = a$; on a $e = \overset{-1}{L_a} a$. Pour tout $x \in \mathcal{A}$, soit $b := ax$. Mais comme

$$a(ex) = (ae)x = ax = b \ ,$$

l'unicité montre que $ex = x$. Il existe d'autre part $a^{-1} \in \mathcal{A}$ tel que $aa^{-1} = e$; on a $a^{-1} = \overset{-1}{L_a}\left(\overset{-1}{L_a} a\right)$. Il vient alors

$$a\left(a^{-1}a\right) = \left(aa^{-1}\right)a = ea = a \ ,$$

et comme $ae = a$, l'unicité entraîne $a^{-1}a = e$.

Réciproquement si $ax = b$, on obtient $x = a^{-1}ax = a^{-1}b$, ce qui prouve l'unicité. D'autre part $x = a^{-1}b$ est une solution puisque $ax = aa^{-1}b = b$.

Dmonstration de (ii) L'équation $ax - z \cdot x = b$ est équivalente à $\frac{1}{z}a \top x = \frac{1}{z}a + x - \frac{1}{z}ax = \frac{1}{z}(a - b)$, donc $L_a - z \cdot \mathrm{Id}$ est inversible dans $L(\mathcal{A})$ si, et seulement si, l'équation

$$\left[\frac{1}{z}a\right] \top x = \frac{1}{z}(a - b) \tag{$*$}$$

possède une unique solution pour tout $b \in \mathcal{A}$. On déduit de $(*)$, en prenant $b = a$, que $\frac{1}{z}a$ est adversible à droite ; soit $c = (L_a - z \cdot \mathrm{Id})^{-1} a$ cet adverse à droite. On a alors

$$\frac{1}{z}a \top \left(c \top \left[\frac{1}{z}a\right]\right) = \left(\left[\frac{1}{z}a\right] \top c\right) \top \left[\frac{1}{z}a\right] = 0 \top \left[\frac{1}{z}a\right] = \frac{1}{z}a \ ,$$

donc $c \top \left[\frac{1}{z}a\right] = 0$, puisque $(*)$, en prenant $b = 0$, a 0 comme unique solution. Ceci finit de prouver que $\frac{1}{z}a$ est adversible.

Réciproquement si $\frac{1}{z}a$ est adversible d'adverse $\left[\frac{1}{z}a\right]^{\top}$, alors $(*)$ possède une unique solution

$$x = \left[\frac{1}{z}a\right]^{\top} \top \frac{1}{z}(a-b) \ .$$

Dmonstration de (iii) Pour $b \in \mathcal{A}$, les équations $(a - z \cdot e)\, b = e$ et $b\,(a - z \cdot e) = e$ sont respectivement équivalentes à

$$0 = zb + e - ab = \frac{1}{z}a + zb + e - \frac{1}{z}a\,(zb+e) = \frac{1}{z}a \top (zb+e)$$

et

$$0 = zb + e - ba = \frac{1}{z}a + zb + e - (zb+e)\,\frac{1}{z}a = (zb+e) \top \frac{1}{z}a \ .$$

Pour la formule il suffit d'écrire

$$z \cdot (a - z\cdot e)^{-1} + e = (a - z\cdot e)^{-1} z \cdot e + (a - z\cdot e)^{-1} (a - z\cdot e) = (a - z\cdot e)^{-1} a$$

et

$$z \cdot (a - z\cdot e)^{-1} + e = (a - z\cdot e)^{-1} z \cdot e + (a - z\cdot e)(a - z\cdot e)^{-1} = (a - z\cdot e)^{-1} a \ .$$

Dmonstration de (iv) Si b est l'inverse de a , alors $e = ab = ba$, donc $e = a^k b^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On a donc

$$\|e\|^{\frac{1}{k}} \leqslant \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}} \left\|b^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leqslant \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}} \|b\|$$

et par suite

$$1 = \inf_{k\in\mathbb{N}^*} \|e\|^{\frac{1}{k}} \leqslant \inf_{k\in\mathbb{N}^*} \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}} \|b\| = \rho(a) \cdot \|b\| \ .$$

REMARQUE 2 Pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $z \in \mathbb{K}^*$, l'inversibilité de $L_a - z \cdot \mathrm{Id}$ est équivalente à celle de $R_a - z \cdot \mathrm{Id}$. Par contre celle de L_a ne l'est pas avec celle de R_a !

11.2 Spectre et résolvente

THEOREME *On suppose que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach et soit $a \in \mathcal{A}$.*

(i) L'opération $\intercal$ est continue sur $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

(ii) Si $\rho(a) < 1$, alors a est adversible et $a^\intercal = -\sum_{l=1}^{\infty} a^l$.

(iii) $\frac{1}{z}a$ est adversible pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| > \rho(a)$.

(iv) $\mathcal{ADV}(\mathcal{A})$ est ouvert et

$$\mathcal{ADV}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{ADV}(\mathcal{A}) : a \longmapsto a^\intercal$$

est continue. En particulier si $\mathcal{A}$ possède une unité, alors $\mathbb{G}(\mathcal{A})$ est ouvert et

$$\mathbb{G}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{G}(\mathcal{A}) : a \longmapsto a^{-1}$$

est continue.

Dmonstration de (i) C'est évident, puisque

$$\intercal = add - mult \ .$$

Dmonstration de (ii) En effet

$$a \intercal \left(-\sum_{l=1}^{\infty} a^l\right) = \left(-\sum_{l=1}^{\infty} a^l\right) \intercal a = a - \sum_{l=1}^{\infty} a^l + \sum_{l=1}^{\infty} a^{l+1} = 0 \ .$$

Dmonstration de (iii) Il suffit de constater que $\rho\left(\frac{1}{z}a\right) < 1$.

Dmonstration de (iv) Si $b \in \mathcal{ADV}(\mathcal{A})$, pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a

$$a = b \intercal \left[a - b - b^\intercal (a-b)\right] \ ,$$

car

$$b \intercal \left[a - b - b^\intercal (a-b)\right] = b + a - b - b^\intercal (a-b) - b\left[a - b - b^\intercal (a-b)\right] =$$

$$= a - \left(b + b^\intercal - bb^\intercal\right)(a-b) = a - b \intercal b^\intercal (a-b) = a \ ,$$

puisque $b \intercal b^\intercal = 0$. Mais

$$\left\|a - b - b^\intercal (a-b)\right\| \leqslant \|a-b\| + \left\|b^\intercal\right\| \|a-b\| \leqslant \left(1 + \left\|b^\intercal\right\|\right) \|a-b\| \ ,$$

donc $a-b-b^\intercal (a-b)$ est adversible si $\|a-b\| < \frac{1}{1+\|b^\intercal\|}$. On en déduit que ces a sont adversibles et que

$$a^\intercal = \left\{b \intercal \left[a - b - b^\intercal (a-b)\right]\right\}^\intercal = \left[a - b - b^\intercal (a-b)\right]^\intercal \intercal b^\intercal \ .$$

Ainsi $D\left(b, \frac{1}{1+\|b^\intercal\|}\right) \subset \mathcal{ADV}(\mathcal{A})$, ce qui finit de prouver que $\mathcal{ADV}(\mathcal{A})$ est ouvert. En outre

$$a^\intercal - b^\intercal = \left[a - b - b^\intercal (a-b)\right]^\intercal \intercal b^\intercal - b^\intercal =$$

$$= \left(-\sum_{l=1}^{\infty} \left[a - b - b^\intercal (a-b)\right]^l\right) \intercal b^\intercal - b^\intercal =$$

$$= -\sum_{l=1}^{\infty} \left[a - b - b^{\intercal}(a-b)\right]^l + \left(\sum_{l=1}^{\infty} \left[a - b - b^{\intercal}(a-b)\right]^l\right) b^{\intercal} ,$$

donc

$$\left\|a^{\intercal} - b^{\intercal}\right\| \leqslant \left(\sum_{l=1}^{\infty} \left\|\left[a - b - b^{\intercal}(a-b)\right]\right\|^l\right) \left(1 + \left\|b^{\intercal}\right\|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + \left\|b^{\intercal}\right\|\right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} \left[\left(1 + \left\|b^{\intercal}\right\|\right) \|a-b\|\right]^l\right) = \frac{\left(1 + \left\|b^{\intercal}\right\|\right)^2 \|a-b\|}{1 - \left(1 + \left\|b^{\intercal}\right\|\right) \|a-b\|} ,$$

ce qui prouve la continuité de $a \longmapsto a^{\intercal}$.

Si maintenant $\mathcal{A}$ possède une unité e , on a

$$\mathbb{G}(\mathcal{A}) = \mathcal{ADV}(\mathcal{A}) - e$$

et $a^{-1} = a^{\intercal} - e$. □

DEFINITION 1 Soit $a \in \mathcal{A}$. On dit que $z \in \mathbb{K}$ est une *valeur régulière* de a (par rapport à $\mathcal{A}$) si $L_a - z \cdot \mathrm{Id}$ et $R_a - z \cdot \mathrm{Id}$ sont inversible dans $L(\mathcal{A})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur spectrale* de a (par rapport à $\mathcal{A}$) si $L_a - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ ou $R_a - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ n'est pas inversible dans $L(\mathcal{A})$. On désigne par $\mathrm{Sp}\, a$ (ou $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\, a$) l'ensemble des valeurs spectrales de a et on dit que c'est le *spectre* de a (dans $\mathcal{A}$).

On définit la *résolvente* $R(a,\cdot) : \mathbb{K} \smallsetminus \mathrm{Sp}\, a \longrightarrow \mathcal{A}$ par

$$R(a,z) := \left(\frac{1}{z} a\right)^{\intercal} \quad \text{si } z \in \mathbb{K}^*$$

et, si $0 \notin \mathrm{Sp}\, a$,

$$R(a,0) := e .$$

Si $0 \notin \mathrm{Sp}\, a$, alors $\mathcal{A}$ possède une unité e et

$$\left(\frac{1}{z} a\right)^{\intercal} = (a - z \cdot e)^{-1} a = a (a - z \cdot e)^{-1} .$$

PROPOSITION *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach.*

(i) Soient $a \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $\lambda \in \mathrm{Sp}\, a$ si, et seulement si,

$$\lambda = 0$$

et

$\mathcal{A}$ n'a pas unité ou bien a n'est pas inversible,

ou bien

$$\lambda \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda} a \text{ n'est pas adversible.}$$

(ii) $R(a,\cdot)$ est continue et, pour tout z tel que $|z| > \rho(a)$, on a

$$R(a,z) = -\sum_{l=1}^{\infty} a^l \cdot z^{-l} .$$

En posant $R(a,\infty) := 0$, on définit un prolongement continu de $R(a,\cdot)$ sur le compactifié d'Alexandroff $(\mathbb{K} \smallsetminus \operatorname{Sp} a) \cup \{\infty\}$.

(iii) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Il existe $\lambda \in \operatorname{Sp} a$ tel que $|\lambda| = \rho(a)$.

(iv) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si $\mathcal{A}$ est un corps, alors $\mathcal{A} = \mathbb{C} \cdot e \approx \mathbb{C}$.

(v) Soit $u \in \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ est commutative, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u est non-adversible.

(b) u est une unité modulo un idéal $\neq \mathcal{A}$.

(c) u est une unité modulo un idéal maximal.

(d) Il existe un caractère χ tel que $\langle u | \chi \rangle = 1$.

Dmonstration de (i) C'est immédiat par ce qui précède.

Dmonstration de (ii) La continuité de $R(a,\cdot)$ sur $\mathbb{K} \smallsetminus (\operatorname{Sp} a \cup \{0\})$ découle du théorème (iv). Si $0 \notin \operatorname{Sp} a$, nous savons que $\mathcal{A}$ possède une unité e et $\left(\frac{1}{z}a\right)^{\top} = (a - z \cdot e)^{-1} a$ converge vers e .

Pour la dernière partie, il suffit de constater que $\rho\left(\frac{1}{z}a\right) < 1$.

Dmonstration de (iii) Nous pouvons supposer que $\rho(a) > 0$, car si $0 \notin \operatorname{Sp} a$, on a $\rho(a) > 0$, par le lemme (iv). Nous allons montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{1}{\lambda}a$ ne soit pas adversible et que $|\lambda| = \rho(a)$. Si tel n'est pas le cas, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geqslant \rho(a)$, l'élément $\frac{1}{z}a$ est adversible. En faisant le changement de variable $w = \frac{1}{z}$, l'application

$$w \longmapsto (wa)^{\top} : B\left(0, \frac{1}{\rho(a)}\right) \longrightarrow \mathbb{C}$$

est continue, donc uniformément continue. Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|v - w| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad \left\|(va)^{\top} - (wa)^{\top}\right\| \leqslant \varepsilon \ .$$

Si P et Q sont des polynômes sans terme constant, on a

$$P \top Q := P + Q - PQ = P(1-Q) + Q = 1 - (1-P)(1-Q) \ ,$$

donc

$$1 - P \top Q = (1-P)(1-Q) \ .$$

Par récurrence on obtient immédiatement

$$\mathop{\top}_{j=1}^{n} P_j = 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - P_j) \ .$$

En effet

$$1 - \mathop{\top}_{j=1}^{n+1} P_j = \left(1 - \mathop{\top}_{j=1}^{n} P_j\right)(1 - P_{n+1}) = \prod_{j=1}^{n} (1-P_j)(1-P_{n+1}) = \prod_{j=1}^{n+1} (1-P_j) \ ,$$

En outre, pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a

$$(P \top Q)(a) = P(a) \top Q(a) \ .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, considérons les racines n-ièmes de l'unité $(u_j)_{j=0,\ldots,n-1}$ et posons $w_j :=$

$u_j \cdot w$. Considérons les polynômes $w_j \cdot X$. On obtient

$$\mathop{\top}_{j=0}^{n-1} w_j \cdot a = \left[1 - \prod_{j=0}^{n-1} (1 - w_j \cdot X)\right](a) = [1 - (1 - w^n \cdot X^n)](a) =$$

$$= w^n \cdot a^n \ ,$$

ce qui montre que $w^n \cdot a^n$ est adversible, puisqu'il en est de même de $w \cdot a$. Pour tout $l \in \{0, \ldots, n-1\}$, il vient également

$$\mathop{\top}_{j=0, j \neq l}^{n-1} w_j \cdot a = \left[1 - \prod_{j=0, j \neq l}^{n-1} (1 - w_j \cdot X)\right](a) = \left[1 - \frac{1 - w^n \cdot X^n}{1 - w_l \cdot X}\right](a) =$$

$$= -\left[\sum_{j=1}^{n-1} (w_l \cdot X)^j\right](a) = -\sum_{j=1}^{n-1} (w_l \cdot a)^j \ ,$$

donc

$$\sum_{l=0}^{n-1} \left(\mathop{\top}_{j=0, j \neq l}^{n-1} w_j \cdot a\right) = -\sum_{l=0}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} (u_l \cdot w \cdot a)^j\right) = -\sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{l=0}^{n-1} u_l^j\right) \cdot (w \cdot a)^j = 0 \ .$$

Mais comme $w^n \cdot a^n = (w_l \cdot a) \top \left(\mathop{\top}_{j=0, j \neq l}^{n-1} w_j \cdot a\right)$, on voit que l'adverse de $w_l \cdot a$ est

$$(w_l \cdot a)^{\top} = \left(\mathop{\top}_{j=0, j \neq l}^{n-1} w_j \cdot a\right) \top (w^n \cdot a^n)^{\top} \ ,$$

donc

$$\sum_{l=0}^{n-1} (w_l \cdot a)^{\top} = \sum_{l=0}^{n-1} \left[\left(\mathop{\top}_{j=0, j \neq l}^{n-1} w_j \cdot a\right) \top (w^n \cdot a^n)^{\top}\right] =$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} \left[\left(\mathop{\top}_{j=0, j \neq l}^{n-1} w_j \cdot a\right) + (w^n \cdot a^n)^{\top} - \left(\mathop{\top}_{j=0, j \neq l}^{n-1} w_j \cdot a\right)(w^n \cdot a^n)^{\top}\right] =$$

$$= n \cdot (w^n \cdot a^n)^{\top} \ .$$

Pour tout $w \in \left[\frac{1}{\rho(a)} - \delta, \frac{1}{\rho(a)}\right[$, on a $0 < \left|w_l - u_l \cdot \frac{1}{\rho(a)}\right| \leqslant \delta$, donc

$$\left\|(w_l \cdot a)^{\top} - \left(u_l \cdot \frac{1}{\rho(a)} \cdot a\right)^{\top}\right\| \leqslant \varepsilon$$

et par suite

$$\left\|(w^n \cdot a^n)^{\top} - \left(\frac{1}{\rho(a)^n} \cdot a^n\right)^{\top}\right\| = \left\|\frac{1}{n} \cdot \sum_{l=0}^{n-1} \left[(w_l \cdot a)^{\top} - \left(u_l \cdot \frac{1}{\rho(a)} \cdot a\right)^{\top}\right]\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n} \cdot \sum_{l=0}^{n-1} \left\|(w_l \cdot a)^{\top} - \left(u_l \cdot \frac{1}{\rho(a)} \cdot a\right)^{\top}\right\| \leqslant \varepsilon \ .$$

Mais comme $w < \frac{1}{\rho(a)}$ signifie que $\lim_k \left\|w^k \cdot a^k\right\|^{\frac{1}{k}} < 1$, la série $\sum_k w^k \cdot a^k$ est convergente, donc $\lim_k w^k \cdot a^k = 0$. On en déduit (théorème iv) que $\lim_k \left(w^k \cdot a^k\right)^{\top} = 0$, donc que $\left\|\left(\frac{1}{\rho(a)^n} \cdot a^n\right)^{\top}\right\| \leqslant$

2ε pour n assez grand. Ceci montre que $\lim_n \left(\frac{1}{\rho(a)^n} \cdot a^n\right)^{\intercal} = 0$ et par suite $\lim_n \frac{1}{\rho(a)^n} \cdot a^n = 0$. Mais ceci est impossible, puisque

$$\inf_n \left\| \frac{1}{\rho\,(a)^n} \cdot a^n \right\|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho\,(a)} \cdot \inf_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = 1 \ .$$

Dmonstration de (iv) Soit $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}\, a$, donc tel que $a - \lambda \cdot e$ ne soit pas inversible. On a donc $a = \lambda \cdot e$.

Dmonstration de (v)

(a) $\Rightarrow$ (b) L'ensemble $\mathfrak{J} := \{ub - b \mid b \in \mathcal{A}\}$ est un idéal contenu dans tout idéal pour lequel u est une unité. Il suffit alors de remarquer que $u \notin \mathfrak{J}$, puisque

$$0 \neq u \intercal b = u + b - ub \quad \text{pour tout } b \in \mathcal{A} \ .$$

(b) $\Rightarrow$ (c) C'est évident par le théorème (i).

(c) $\Rightarrow$ (d) Soit $\mathfrak{J}$ un idéal maximal ne contenant pas u . Par le théorème (i) et le théorème de Mazur

$$\chi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{J} \longrightarrow \mathbb{C}$$

est un caractère tel que $\langle u | \rangle = 1$.

(d) $\Rightarrow$ (a) Si u était adversible, on aurait $0 = u + u^{\intercal} - uu^{\intercal}$, donc

$$0 = \langle u | \, \chi \rangle + \langle u^{\intercal} | \, \chi \rangle - \langle u | \, \chi \rangle \cdot \langle u^{\intercal} | \, \chi \rangle = 1 \ ,$$

ce qui est absurde!

Chapitre 12

EXPOSÉ ERLANGEN,

10 décembre 1991

Comment calculer

LA PARTIE ABSOLUMENT CONTINUE D'UN OPERATEUR

Markus Beuse et Claude Portenier

Version du 15 septembre 2001

1 Soit μ, ν des intégrales de Radon sur $\mathbb{R}^n$. Nous désignerons par μ_ν la partie ν-absolument continue et par μ_s la partie ν-singulière de μ . La décomposition de Lebesgue est donc

$$\mu = \mu_\nu + \mu_s \ .$$

Par le théorème de Radon-Nikodym, il existe $\rho \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\nu)$ tel que $\mu_\nu = \rho \cdot \nu$. On a

$$\rho > 0 \quad \mu_\nu\text{-presque partout.}$$

D'après Federer, Geometric measure theory, 2.9.7 et 2.9.15, si $B_r(x)$ désigne la boule fermée de centre x et de rayon $r > 0$, on a la

PROPOSITION *On a*

$$\rho = \lim_{r \to 0+} \frac{\mu(B_r(\cdot))}{\nu(B_r(\cdot))} \quad \nu\text{-}\textit{presque partout}$$

et

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\mu(B_r(\cdot))}{\nu(B_r(\cdot))} = \infty \quad \mu_s\text{-}\textit{presque partout.}$$

En particulier

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\mu(B_r(\cdot))}{\nu(B_r(\cdot))} \quad \textit{existe dans } \overline{\mathbb{R}}_+ \textit{ et est } > 0 \ \mu\text{-}\textit{presque partout.}$$

2 Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et T un opérateur normal (non- nécessairement borné) dans $\mathcal{H}$. On peut montrer que si F est un sous-espace localement convexe de $\mathcal{H}$ (i.e. l'injection canonique est continue), tonnelé, nucléaire et dense, alors T est diagonalisable dans $F^\dagger$.

Ceci signifie tout d'abord qu'il existe une décomposition directe de $\mathcal{H}$ dans $F^\dagger$, i.e. une intégrale de Radon μ sur $\mathbb{C}$ et une application μ-intégrable (au sens de Pettis) $\widehat{\mathcal{H}}$ de $\mathbb{C}$ dans $Hilb\left(F^\dagger\right)$, l'ensemble des sous-espaces hilbertiens de $F^\dagger$, tels que $\mathcal{H} = \int^{\boxplus} \widehat{\mathcal{H}}\, d\mu$. Si $\mathbf{L}^2\left(\mu, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ désigne l'ensemble des champs de carré μ-intégrables, alors

$$\mathbf{L}^2\left(\mu, \widehat{\mathcal{H}}\right) \longrightarrow \mathcal{H} : \zeta \longmapsto \int \zeta \ d\mu$$

est une bijection. Si $\widehat{\xi}$ est l'unique champ de $\mathbf{L}^2\left(\mu, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ tel que $\xi = \int \widehat{\xi} d\mu$, alors on a

$$T\xi = \int \mathrm{id} \cdot \widehat{\xi}\, d\mu \text{ pour tout } \xi \in \mathcal{H} \ .$$

On a $\mathrm{Sp}\, T = \mathrm{supp}\, \mu$ et l'intégrale spectrale de T est donnée par

$$M_\alpha \xi = \int \alpha \cdot \widehat{\xi}\, d\mu \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathcal{C}^0(\mathbb{C}) \ \ (\text{ou } \mathbf{L}^\infty(\mu) \ ) \text{ et } \xi \in \mathcal{H} \ .$$

Malheureusement μ et $\widehat{\mathcal{H}}$ ne sont pas connus. Notre but est de donner un procèder permettant de les calculer, du moins théoriquement. L'idée est, pour certaines intégrales de Radon ν bien connues, de déterminer la partie ν-absolument continue $\mathcal{H}_\nu := \int \widehat{\mathcal{H}}_\nu \, d\nu$, en ayant avec les notations de 1 posé $\widehat{\mathcal{H}}_\nu := \rho \cdot \widehat{\mathcal{H}}$.

Au niveau des noyaux des sous-espaces hilbertiens, pour tout $\varphi \in F$, on a

$$\left\langle \varphi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle \cdot \mu = \left\langle \varphi \middle| \widehat{h}_\nu \varphi \right\rangle \cdot \nu + \left\langle \varphi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle \cdot \mu_s \ .$$

Comment peut-on calculer $\left\langle \varphi \middle| \widehat{h}_\nu \varphi \right\rangle$, ne connaissant que T ?

Considérons les fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathbb{C})$

$$\theta_{\lambda,\varepsilon} := \frac{1}{|\cdot - \lambda|^2 + \varepsilon^2} \quad \text{et} \quad \Theta_{\lambda,\varepsilon} := \frac{1}{c_{\lambda,\varepsilon}} \cdot \theta_{\lambda,\varepsilon}$$

pour certaines constantes $c_{\lambda,\varepsilon} \sim \int_{|z|\leqslant 1} \theta_{\lambda,\varepsilon}(z) \, d\nu(z)$ lorsque $\varepsilon \to 0+$.

Nous montrerons que l'on a

$$\left\langle \varphi \middle| \widehat{h}_\nu(\lambda)\,\varphi \right\rangle = \lim\nolimits_{\varepsilon\to 0} \int \Theta_{\lambda,\varepsilon} \cdot \left\langle \varphi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle d\mu \quad \text{pour } \nu\text{-presque tous les } \lambda \in \mathbb{C} \ , \tag{$*$}$$

et que

$$\lim\nolimits_{\varepsilon\to 0} \int \Theta_{\lambda,\varepsilon} \cdot \left\langle \varphi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle d\mu = \infty \quad \text{pour } \left\langle \varphi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle \cdot \mu_s\text{-presque tout les } \lambda \in \mathbb{C} \ . \tag{$**$}$$

Mais

$$\int \Theta_{\lambda,\varepsilon} \cdot \left\langle \varphi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle d\mu = \frac{1}{c_{\lambda,\varepsilon}} \cdot \left\langle \varphi \middle| \left[\varepsilon^2 + (T-\lambda)^*(T-\lambda)\right]^{-1} \varphi \right\rangle$$

et, si T est auto-adjoint,

$$\int \Theta_{\lambda,\varepsilon} \cdot \left\langle \varphi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle d\mu = \frac{1}{2i\varepsilon \cdot c_{\lambda,\varepsilon}} \cdot \left\langle \varphi \middle| \left[(T-\lambda-i\varepsilon)^{-1} - (T-\lambda+i\varepsilon)^{-1}\right] \varphi \right\rangle \ .$$

Ceci permet de calculer $\widehat{h}_\nu$ grâce à la première formule $(*)$, la seconde $(**)$ donnant certaines informations sur μ_s .

Remarquons, par exemple, que l'on peut prendre

$$c_{\lambda,\varepsilon} = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2} & \nu = \varepsilon_\lambda \\ \frac{\pi}{\varepsilon} & \text{si} \quad \nu = \lambda_{\mathbb{R}} \\ 2\pi \cdot \ln \frac{1}{\varepsilon} & \nu = \lambda_{\mathbb{C}} \end{cases} \ .$$

3 Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, α, β des fonctions croissantes sur J et μ_α, μ_β les intégrales de Stieltjes correspondantes. Pour tout $a, b \in J$, on a

$$\mu_\alpha([a,b]) = \alpha(b+) - \alpha(a-) \ ,$$

avec la convention $\alpha(a-) := \alpha(a)$ si a est l'extrémité inférieure de J et $\alpha(b+) := \alpha(b)$ si b est l'extrémité supérieure de J .

PROPOSITION *On a la formule d'intégration par partie*

$$\int_{[a,b]} \alpha(s+) \, d\mu_\beta(s) + \int_{[a,b]} \beta(t-) \, d\mu_\alpha(t) = \alpha(b+)\,\beta(b+) - \alpha(a-)\,\beta(a-) =: \alpha\beta|_{[a,b]} \ .$$

En effet le théorème de Fubini montre que

$$\int_{[a,b]} \left(\int_{[a,s]} d\mu_\alpha(t) \right) d\mu_\beta(s) = \int_{[a,b]} \left(\int_{[t,b]} d\mu_\beta(s) \right) d\mu_\alpha(t) \ .$$

Mais le membre de gauche est égal à

$$\int_{[a,b]} [\alpha(s+) - \alpha(a-)] \; d\mu_\beta(s) = \int_{[a,b]} \alpha(s+) \; d\mu_\beta(s) - \alpha(a-) \cdot [\beta(b+) - \beta(a-)] \ ,$$

tandis que le membre de droite l'est à

$$\int_{[a,b]} [\beta(b+) - \beta(t-)] \; d\mu_\alpha(t) = \beta(b+) \cdot [\alpha(b+) - \alpha(a-)] - \int_{[a,b]} \beta(t-) \; d\mu_\alpha(t) \ ,$$

d'où le résultat. $\square$

4 THEOREME

Soient ν, μ des intégrales de Radon sur $\mathbb{R}_+$ et (Θ_k) une suite de fonctions continues positives décroissantes sur $\mathbb{R}_+$ telles que

(a) $\lim_k \int_{[0,1]} \Theta_k \, d\nu = 1$ *et* $\Theta_k \in \mathbf{L}^1(\mu)$ *pour tout* k .

(b) $\lim_k \int_{]t,1]} \Theta_k \, d\nu = \lim_k \int_{]t,\infty[} \Theta_k \, d\mu = 0$ *pour tout* $t \in \left]0,1\right]$.

Si $0 \in \operatorname{supp} \nu$, *i.e.* $\nu([0,r]) > 0$ *pour tout* $r > 0$ *assez petit, et si*

$$c := \lim_{r \to 0+} \frac{\mu([0,r])}{\nu([0,r])} \quad \textit{existe dans } \overline{\mathbb{R}}_+ \ ,$$

alors

$$\lim_k \int \Theta_k \, d\mu = c \ .$$

Désignons par μ_k l'intégrale de Stieltjes (positive) associée à $-\Theta_k$; elle est diffuse. Soit α, β les fonctions de répartition de μ et $1_{[0,1]} \cdot \nu$ respectivement, définies par

$$\alpha(s) := \mu([0,s]) \quad \text{et} \quad \beta(s) := 1_{[0,1]} \cdot \nu([0,s])$$

pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha(0) = \beta(0) := 0$; elles sont continues à droite sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $c \in \mathbb{R}_+$, pour tout $t \in \left]0,1\right]$, on a alors

$$\int_{[0,t]} \Theta_k \, d\mu - c \cdot \int_{[0,t]} \Theta_k \, d\nu = \Theta_k \cdot (\alpha - c \cdot \beta)|_{[0,t]} + \int_{]0,t]} (\alpha - c \cdot \beta)(s) \; d\mu_k(s) \ .$$

En posant

$$c(t) := \sup_{s \in]0,t]} \left| \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} - c \right| \ ,$$

on a $\lim_{t \to 0+} c(t) = 0$ et il vient

$$\left| \int_{[0,t]} \Theta_k \, d\mu - c \cdot \int_{[0,t]} \Theta_k \, d\nu \right| \leqslant c(t) \cdot \left[\Theta_k(t) \cdot \beta(t) + \int_{]0,t]} \beta(s) \; d\mu_k(s) \right] =$$

$$= c(t) \cdot \left[\Theta_k(t) \cdot \beta(t) - \Theta_k \cdot \beta|_{[0,t]} + \int_{[0,t]} \Theta_k(s) \; d\nu(s) \right] \leqslant c(t) \cdot \int_{[0,1]} \Theta_k \, d\nu \ .$$

Finalement,

$$\left|\int \Theta_k \, d\mu - c\right| \leqslant c\,(t) \cdot \int_{[0,1]} \Theta_k \, d\nu + \int_{]t,\infty[} \Theta_k \, d\mu + c \cdot \int_{]t,1]} \Theta_k \, d\nu + c \cdot \left|\int_{[0,1]} \Theta_k \, d\nu - 1\right| \ ,$$

donc

$$\limsup_k \left|\int \Theta_k \, d\mu - c\right| \leqslant c\,(t) \quad \text{pour tout } t \in \left]0,1\right] \ ,$$

ce qui prouve notre assertion dans ce cas.

Si $c = \infty$, il existe $t \in \left]0,1\right]$ tel que $\frac{\mu([0,r])}{\nu([0,r])} \geqslant 1$, i.e. $\beta(r) \leqslant \alpha(r)$, pour tout $r \in \left]0,t\right]$, donc

$$\int_{[0,t]} \Theta_k \, d\mu = \Theta_k \cdot \alpha|_{[0,t]} + \int_{]0,t]} \alpha \ d\mu_k \geqslant \Theta_k \cdot \beta|_{[0,t]} + \int_{]0,t]} \beta \ d\mu_k =$$

$$= \int_{[0,t]} \Theta_k \, d\nu = \int_{[0,1]} \Theta_k \, d\nu - \int_{]t,1]} \Theta_k \, d\nu \geqslant \frac{1}{2}$$

pour tout k assez grand. Ceci prouve que $\inf_k \int \Theta_k \, d\mu > 0$. Il suffit alors de remplacer Θ_k par $\frac{\Theta_k}{\int \Theta_k \, d\mu}$ et d'appliquer ce qui précède à μ et $1_{[0,1]} \cdot \nu$. On obtient alors

$$\lim_k \frac{1}{\int \Theta_k \, d\mu} \cdot \int_{[0,1]} \Theta_k \, d\nu = 0 \ ,$$

donc $\int \Theta_k d\mu = \infty$. □

PROPOSITION *Soit (θ_k) une suite croissante de fonctions continues positives décroissantes sur $\mathbb{R}_+$ et $\theta := \sup \theta_k$ telle que*

(i) *θ est finie sur $\mathbb{R}_+^*$ et μ-intégrable à l'infini.*

(ii) *$\theta \notin \mathbf{L}^1(1_{[0,1]} \cdot \nu)$.*

Alors

$$\Theta_k := \frac{\theta_k}{c_k}$$

satisfait aux hypothèses du théorème si $c_k \sim \int_{[0,1]} \theta_k \, d\nu$.

Il est clair que (a) est satisfaite, par la continuité des θ_k et (i), puisque

$$\lim_k \int_{[0,1]} \Theta_k \, d\nu = \lim_k \frac{1}{c_k} \cdot \int_{[0,1]} \theta_k \, d\nu = 1 \ .$$

Comme

$$\Theta_k(t) \leqslant \frac{\theta\,(t)}{c_k} \ ,$$

et

$$\sup_k c_k = \sup_k \int_{[0,1]} \theta_k \, d\nu = \int_{[0,1]}^* \theta \ d\nu = \infty$$

par (ii) et l'hypothèse, on obtient (b) grâce à (i). □

COROLLAIRE *Soit θ une fonction continue positive décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que*

(i) *θ est μ-intégrable à l'infini.*

(ii) $\theta \notin \mathbf{L}^1(1_{[0,1]} \cdot \nu)$.

Alors

$$\theta_k := \frac{1}{\frac{1}{\theta} + \varepsilon_k}$$

satisfait aux hypothèses de la proposition, si (ε_k) *est une suite décroissante convergente vers* 0 *de* $\mathbb{R}_+^*$.

En effet θ ne peut être bornée au voisinage de 0 , donc $\frac{1}{\theta}$ se prolonge continûment par 0 en 0 . Il n'est alors pas difficile de vérifier que la suite (θ_k) satisfait aux hypothèses de la proposition, puisque $\sup_k \theta_k = \theta$. □

EXEMPLE La fonction $\frac{1}{\mathrm{id}^n}$ satisfait aux hypothèses si μ est bornée et $\nu = \mathrm{id}^{n-1} \cdot \lambda$.

5 Nous désignerons, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, par $B(x)$ la boule fermée de centre x et de rayon 1 .

THEOREME *Soit* θ *une fonction continue positive décroissante sur* $\mathbb{R}_+^*$ *telle que*

$$\theta \notin \mathbf{L}^1(1_{[0,1]} \cdot \mathrm{id}^{n-1} \cdot \lambda) ,$$

et ν *une intégrale de Radon sur* $\mathbb{R}^n$ *. Alors*

$$\theta(|\cdot - x|_2) \notin \mathbf{L}^1(1_{B(x)} \cdot \nu) \quad \textit{pour} \quad \nu\textit{-presque tous les } x \in \mathbb{R}^n .$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, soit ν_x l'image dans $\mathbb{R}_+$ par $|\cdot - x|_2$ de $1_{B(x)} \cdot \nu$; c'est une intégrale bornée. Remarquons que l'image $\widetilde{\nu}$ de $1_{B(x)} \cdot \lambda^n$ par cette application est $\mathrm{id}^{n-1} \cdot \lambda$ à une constante multiplicative près. D'après l'exemple du numéro précédent, on peut appliquer le théorème à $\widetilde{\nu}$ et ν_x . Mais d'après la proposition 1, pour ν-presque tout les $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\nu(B_r(x))}{\lambda^n(B_r(x))} = \lim_{r \to 0+} \frac{\nu_x([0,r])}{\widetilde{\nu}([0,r])}$$

existe et est > 0 , donc aussi

$$\lim_k \int \Theta_k \, d\nu_x = \lim_k \frac{1}{c_k} \cdot \int \theta_k \, d\nu_x$$

e ayant posé $c_k := \int \theta_k \, d\widetilde{\nu}$. Mais comme $\lim_k c_k = \sup_k \int_{[0,1]} \theta_k \, d\nu = \int_{[0,1]}^* \theta \; d\nu = \infty$, on en déduit que

$$\int_{B(x)}^* \theta(|\cdot - x|_2) \, d\nu = \int^* \theta \, d\nu_x = \lim_k \int \theta_k \, d\nu_x = \infty ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

EXEMPLE Pour toute intégrale de Radon ν sur $\mathbb{R}^n$ on a

$$\frac{1}{|\cdot - x|_2^n} \notin \mathbf{L}^1(1_{B(x)} \cdot \mu) \quad \text{pour } \nu\text{-presque tous les } x \in \mathbb{R}^n .$$

6 Nous pouvons maintenant formuler le théorème principal, sachant que l'hypothèse est satisfaite dans le cas de l'exemple précédent !

THEOREME *Soient ν, μ des intégrales de Radon sur $\mathbb{R}^n$, (θ_k) une suite croissante de fonctions continues positives décroissantes sur $\mathbb{R}_+$ et $\theta := \sup_k \theta_k$ telles que*

(i) θ *est finie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\theta(|\cdot|_2)$ *est* μ*-intégrable à l'infini.*

(ii) $\theta(|\cdot - x|_2) \notin \mathbf{L}^1(1_{B(x)} \cdot \nu)$ *pour* ν*-presque tous les* $x \in \mathbb{R}^n$ *.*

Alors la densité ρ *de la partie* ν*-absolument continue de* μ *est donnée par*

$$\rho(x) = \lim_k \frac{1}{c_{x,k}} \cdot \int \theta_k(|\cdot - x|_2)\, d\mu \quad \text{pour } \nu\text{-presque tous les } x \in \mathbb{R}^n$$

si $c_{x,k} \sim \int \theta_k(|\cdot - x|_2)\, d\nu$ *lorsque* $k \to \infty$ *.*

En outre

$$\lim_k \frac{1}{c_{x,k}} \cdot \int \theta_k(|\cdot - x|_2)\, d\mu = \infty \quad \text{pour } \mu_s\text{-presque tous les } x \in \mathbb{R}^n \ .$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on peut appliquer le théorème 4, grâce à la proposition 4, aux images ν_x et μ_x de ν et μ par $|\cdot - x|_2$, en tenant compte de la proposition 1. $\square$

Chapitre 13

ALGÈBRES DE CONVOLUTION

Version du 24 janvier 2002

13.1 La topologie stricte

Soit X un espace topologique complètement régulier. Nous désignerons par $\mathcal{C}^b(X)$ l'espace de Banach des fonctions continues bornées sur X muni de la norme uniforme.

Rappelons que $\mathcal{C}^b(X)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{C}(\beta X)$, où βX est le spectre (compact) de l'algèbre stellaire unifère $\mathcal{C}^b(X)$. On dit que c'est le compactifié de Stone-Čech de X . Par le théorème de représentation de Riesz, son dual est l'espace $\mathcal{M}(\beta X)$ des intégrales de Radon sur βX . Nous allons dans ce qui suit éviter de considérer ce compactifié.

Etant donné $\kappa : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+^*$, pour toute fonction f sur X , on pose

$$\|f\|_\kappa := \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ \mid |f| \leqslant \alpha \cdot \kappa\} \in \overline{\mathbb{R}}_+ .$$

On a

$$\|f\|_\kappa = \left\|\frac{f}{\kappa}\right\|_\infty ,$$

en posant $\frac{z}{\infty} = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En outre $\|f\|_\kappa \leqslant 1$ si, et seulement si, $|f| \leqslant \kappa$.

La fonctionnelle $\|\cdot\|_\kappa : \mathbb{C}^X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est évidemment positivement homogène et sous-additive. D'autre part, pour que

$$\kappa = \sup\left\{\varphi \in \mathcal{C}^b(X) \;\middle|\; |\varphi| \leqslant \kappa\right\} ,$$

il faut et il suffit que κ soit s.c.i. .

DEFINITION 1 Nous dirons qu'une fonction $\kappa : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+^*$ *tend vers l'infini à l'infini* si elle est $\neq \infty$ et si, pour tout $M \in \mathbb{R}_+$, la partie $\{\kappa \leqslant M\}$ est contenue dans une partie compacte de X .

REMARQUE 1 Si une telle fonction κ est s.c.i., elle atteint son minimum et

$$\|\cdot\|_\kappa \leqslant \frac{1}{\min \kappa(X)} \cdot \|\cdot\|_\infty ,$$

donc $\|\cdot\|_\kappa$ est une semi-norme continue sur $\mathcal{C}^b(X)$.

En effet, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\{\kappa \leqslant M\}$ soit un compact non-vide et sur lequel κ atteint son minimum. L'inégalité est alors évidente, donc $\|\cdot\|_\kappa$ est finie sur $\mathcal{C}^b(X)$. □

DEFINITION 2 Nous désignerons par $\mathcal{C}_s^b(X)$ l'espace $\mathcal{C}^b(X)$ muni de la *topologie stricte* , définie par l'ensemble des semi-normes $\|\cdot\|_\kappa$, où κ parcourt l'ensemble des fonctions s.c.i. qui tendent vers l'infini à l'infini.

REMARQUE 2 Si f est une fonction positive non-bornée sur X , il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de X telle que $f(x_k) > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\lim_k f(x_k) = \infty$. Définissons κ par

$$\kappa(x_k) := f(x_k)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

et

$$\kappa(y) := \infty \quad \text{si } y \neq x_k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

C'est évidemment une fonction s.c.i. tendant vers l'infini à l'infini et $\|f\|_\kappa = \infty$. Ceci montre que

$\mathcal{C}^b(X)$ est l'ensemble des fonctions continues f sur X telles que $\|f\|_\kappa < \infty$ pour toute les fonctions s.c.i. tendant vers l'infini à l'infini.

REMARQUE 3 Pour tout compact K de X définissons κ_K par

$$\kappa_K(x) = 1 \text{ si } x \in K \quad \text{et} \quad \kappa_K(x) = \infty \text{ si } x \notin K \ .$$

C'est évidemment une fonction s.c.i. tendant vers l'infini à l'infini et, pour toute fonction f sur X , on a

$$\|f\|_{\kappa_K} = \sup_{x\in K} |f(x)| =: \|f\|_{\infty,K} \ .$$

Lorsque K parcourt les compacts de X , les fonctionnelles $\|\cdot\|_{\kappa_K}$ sont des semi-normes sur $\mathcal{C}(X)$ définissant la topologie de la convergence compacte. On désigne par $\mathcal{C}_c(X)$ cet espace localement convexe.

Pour tout $x \in X$ posons $\kappa_x := \kappa_{\{x\}}$. On a donc

$$\kappa_x(x) := 1 \quad \text{et} \quad \kappa(y) := \infty \text{ pour tout } y \in X \setminus \{x\} \ .$$

L'ensemble de ces semi-normes $\|\cdot\|_{\kappa_x}$, pour $x \in X$, définit la topologie de la convergence ponctuelle.

REMARQUE 4 La semi-norme associée à la fonction constante 1 , qui ne tend vers l'infini à l'infini que si X est compact, est celle de la convergence uniforme.

PROPOSITION *La norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ est s.c.i. sur $\mathcal{C}^b_s(X)$. En particulier $\mathcal{C}^b_s(X)$ est tonnelé si, et seulement si, X est compact.*

On a

$$\|\cdot\|_\infty = \sup_{x\in X} \|\cdot\|_{\kappa_x} \ ,$$

ce qui montre que la norme uniforme est bien s.c.i.

Si $\mathcal{C}^b_s(X)$ est tonnelé, alors $\|\cdot\|_\infty$ est continue et il existe une fonction s.c.i. κ tendant vers l'infini à l'infini telle que $\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_\kappa$. On en déduit que $\kappa \leqslant 1$, donc que $X = \{\kappa \leqslant 1\}$ est compact. La réciproque est évidente, puisque dans le cas compact la topologie stricte est celle de la convergence uniforme. □

13.2 L'espace des intégrales de Radon bornées

DEFINITION 1 Nous dirons qu'une partie A de $\mathcal{C}^b(X)^*$ est *uniformément bornée* si

$$\sup_{\mu\in A}\|\mu\| < \infty \ ,$$

où évidemment

$$\|\mu\| := \sup\left\{\langle\varphi|\,\mu\rangle \;\middle|\; \varphi\in\mathcal{C}^b(X) \text{ et } \|\varphi\|_\infty \leqslant 1\right\} = |\mu|(1) \ .$$

Nous dirons que A est *uniformément tendue* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de X tel que l'on ait

(T) $\quad |\langle\varphi|\,\mu\rangle| \leqslant \varepsilon$ pour tout $\mu\in A$ et tout $\varphi\in\mathcal{C}^b(X)$ tel que $|\varphi|\leqslant 1$ et $\varphi = 0$ sur K .

REMARQUE 1 Pour que A soit uniformément tendue, il faut et il suffit que $|A|$ le soit. Si $A\subset\mathcal{C}^b(X)^*_+$, on peut se restreindre dans la condition (T) aux $\varphi\in\mathcal{C}^b(X)$ tels que $0\leqslant\varphi\leqslant 1$.

En effet, pour tout $\varphi\in\mathcal{C}^b(X)$ et $\mu\in A$, on a

$$\left|\left\langle\varphi\,\middle|\,|\mu|\right\rangle\right| \leqslant \left\langle|\varphi|\,\middle|\,|\mu|\right\rangle = \sup_{\psi\in\mathcal{C}^b(X),|\psi|\leqslant|\varphi|}|\langle\psi\,|\mu\rangle|$$

et

$$|\langle\varphi\,|\mu\rangle| \leqslant \left\langle|\varphi|\,\middle|\,|\mu|\right\rangle \ .$$

□

LEMME *Pour qu'une partie A de $\mathcal{C}^b(X)^*$ soit équicontinue pour la topologie stricte, il faut et il suffit que A soit uniformément bornée et uniformément tendue.*

L'équicontinuité de A signifie qu'il existe une fonction κ s.c.i. tendant vers l'infini à l'infini telle que, pour tout $\varphi\in\mathcal{C}^b(X)$, on ait

$$\sup_{\mu\in A}|\langle\varphi\,|\mu\rangle| \leqslant \|\varphi\|_\kappa \ .$$

Mais comme

$$\|\varphi\|_\kappa \leqslant \frac{1}{\min\kappa(X)}\cdot\|\varphi\|_\infty \ ,$$

on en déduit que A est uniformément bornée. Montrons que A est uniformément tendue. Etant donné $\varepsilon > 0$, soit $K := \left\{\kappa\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\right\}$. Pour tout $\varphi\in\mathcal{C}^b(X)$ tel que $|\varphi|\leqslant 1$ et $\varphi = 0$ sur K , on a $|\varphi|\leqslant\varepsilon\cdot\kappa$, et par suite

$$|\langle\varphi\,|\mu\rangle| \leqslant \|\varphi\|_\kappa \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } \mu\in A \ .$$

Réciproquement si A est uniformément bornée par C et uniformément tendue, on peut construire par récurrence une suite croissante $(K_l)_{l\in\mathbb{N}}$ de compacts de X telle que l'on ait $K_0 = \emptyset$ et que K_l satisfasse à la condition (T) pour $\frac{C}{2^l}$ et $|A|$. On définit alors

$$\kappa := \sum_{l=0}^{\infty} 1_{\complement K_l} \ .$$

Pour tout $M \in \mathbb{R}_+$, on a $\{\kappa \leqslant M\} = K_{\lfloor M \rfloor}$, donc κ est s.c.i. et tend vers l'infini à l'infini. Si $\varphi \in \mathcal{C}^b(X)$ satisfait à $\|\varphi\|_\kappa \leqslant 1$, i.e. à $|\varphi| \leqslant \kappa$, en posant $k := \lfloor \|\varphi\|_\infty \rfloor + 1$ et

$$\varphi_l := \min(|\varphi|, l) - \min(|\varphi|, l-1) \quad \text{pour } l = 1, \ldots, k \ ,$$

on a

$$0 \leqslant \varphi_l \leqslant 1 \quad , \quad \varphi_l = 0 \text{ sur } K_{l-1} \quad \text{et} \quad |\varphi| = \sum_{l=1}^{k} \varphi_l \ .$$

Il vient alors

$$|\langle \varphi | \mu \rangle| \leqslant \langle |\varphi| \, | \, |\mu| \rangle \leqslant \sum_{l=1}^{k} \langle \varphi_l | \, |\mu| \rangle \leqslant \sum_{l=1}^{k} \frac{C}{2^l} \leqslant C$$

quel que soit $\mu \in A$, ce qui finit de prouver que A est équicontinue. □

Ce lemme montre en particulier que le dual de $\mathcal{C}_s^b(X)$ est formé des formes linéaires bornées et tendues, donc s'identifie à l'aide du théorème de représentation de Riesz à l'espace $\mathcal{M}^b(X)$ des intégrales de Radon bornées sur X . Ce sont aussi les intégrales de Radon sur βX portées par X .

La condition de tension (T) s'exprime alors sous la forme

$$|\mu| \left(\complement K\right) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } \mu \in A \ .$$

DEFINITION 2 Nous désignerons par $\mathcal{M}_e^b(X)$ ce dual muni de la topologie faible, par rapport à $\mathcal{C}^b(X)$! On dit que c'est la *topologie étroite* .

Elle est induite par la topologie faible, dite vague, de $\mathcal{M}(\beta X)$ en dualité avec $\mathcal{C}(\beta X) \simeq \mathcal{C}^b(X)$.

13.3 Le théorème général de Stone-Kakutani

DEFINITION 1 Soit F un espace vectoriel réticulé muni d'une topologie localement convexe. Nous dirons que c'est un espace localement convexe réticulé s'il existe une famille $\mathcal{P}$ de semi-normes sur F définissant la topologie de F telle que tout $p \in \mathcal{P}$ soit croissante sur F_+ et que

$$p(|\varphi|) = p(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

PROPOSITION *Soient X un ensemble ayant au moins deux points, G un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^X$. Si G est coréticulé ou une sous-algèbre, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Pour tout $x, y \in X$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tels que $(\alpha, x) \neq (\beta, y)$ et $\alpha + \beta > 0$, il existe un $\gamma \in G$ tel que

$$\alpha \cdot \gamma(x) \neq \beta \cdot \gamma(y) \ .$$

(ii) Pour tout $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $\theta, \vartheta \in G$ tel que $\theta(x) \cdot \vartheta(y) \neq \theta(y) \cdot \vartheta(x)$.

(iii) Pour tout $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $\gamma \in G$ tel que $\gamma(x) \neq 0$ et $\gamma(y) = 0$.

(iv) Pour tout $x, y \in X$ tels que $x \neq y$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe un $\gamma \in G$ tel que $\gamma(x) = \alpha$ und $\gamma(y) = \beta$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Pour $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ dans (i), il existe $\gamma \in G$ mit $\gamma(x) \neq 0$. Posons $\theta := |\gamma| \in G$ respectivement $\theta := \gamma^2$. En prenant maintenant $\alpha = \theta(y)$ et $\beta = \theta(x)$, il existe $\vartheta \in G$ tel que

$$\theta(x) \cdot \vartheta(y) \neq \theta(y) \cdot \vartheta(x) \ .$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Il suffit de considérer

$$\gamma := \frac{1}{\theta(x) \cdot \vartheta(y) - \theta(y) \cdot \vartheta(x)} \cdot (\vartheta(y) \cdot \theta - \theta(y) \cdot \vartheta) \ .$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) D'après (iii) il existe $\theta, \vartheta \in G$ tels que $\theta(x) = \vartheta(y) = 1$ und $\theta(y) = \vartheta(x) = 0$ .Il suffit de poser $\gamma := \alpha \cdot \theta + \beta \cdot \vartheta$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Si $x = y$, on a $\alpha \neq \beta$. Mais comme X contient au moins deux points il existe $\gamma \in G$ tel que $\gamma(x) \neq 0$. Si $x \neq y$, nous pouvons supposer que $\alpha \neq 0$. Il suffit alors de choisir $\gamma \in G$ tel que $\gamma(x) = 1$ et $\gamma(y) = 0$.

DEFINITION 2 Si la propriété (i) de la proposition est satisfaite, donc toutes lorsque X a au moins deux points, nous dirons que G est *linéairement séparant* .

Nous dirons que G est *séparante* si, pour tout $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $\gamma \in G$ tel que $\gamma(x) \neq \gamma(y)$.

REMARQUE 1 Supposons que $1 \in G$. Pour que G soit linéairement séparante, il faut et il suffit que G soit séparante.

C'est immédiat en considérant (ii). □

THEOREME *Soient X un espace complètement régulier et F un espace localement convexe séparé coréticulé de fonctions continues réelles sur X tel que toute intégrale de Dirac sur X soit continue, $\mathcal{S}_-(X) \subset F_\phi$ et toute forme linéaire continue μ soit tendue, i.e. pour tout $\varphi \in F$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathfrak{K}(X)$ tel que*

$$\psi \in F \ , \ |\psi| \leqslant |\varphi| \ \text{ et } \psi = 0 \text{ sur } K \quad \Longrightarrow \quad |\langle \psi, \mu \rangle| \leqslant \varepsilon \ .$$

Pour qu'un sous-espace vectoriel coréticulé G de F soit dense, il faut et il suffit qu'il soit linéairement séparant.

REMARQUE 2 Le fait que μ soit tendue signifie que μ est représentable par une intégrale de Radon (réelle) que nous noterons encore par μ . Cela découle du théorème de représentation 4.2 de Anger-Portenier [5].

La condition est nécessaire. Si la propriété (i) de la proposition est fausse, pour tout $\gamma \in G$, on a

$$\langle \gamma, \alpha \cdot \varepsilon_x \rangle = \alpha \cdot \gamma(x) = \beta \cdot \gamma(y) = \langle \gamma, \beta \cdot \varepsilon_y \rangle \ ,$$

donc $\alpha \cdot \varepsilon_x = \beta \cdot \varepsilon_y$ par la continuité des intégrales de Dirac et la densité de G .

Si $x = y$, en choisissant $\chi \in F$ tel que $\chi \geqslant 1_{\{x\}}$, on a $\langle \chi, \varepsilon_x \rangle = \chi(x) = 1$ et on en déduit

$$\alpha = \langle \chi, \alpha \cdot \varepsilon_x \rangle = \langle \chi, \beta \cdot \varepsilon_x \rangle = \beta \ ,$$

ce qui est absurde. Si $x \neq y$, on a $\alpha, \beta > 0$ et il existe $\chi \in F$ tel que $\chi \geqslant 1_{\{x\}}$ et $\chi(y) < \frac{\alpha}{\beta}$, donc

$$\langle \chi, \alpha \cdot \varepsilon_x \rangle \geqslant \alpha > \beta \cdot \chi(y) = \langle \chi, \beta \cdot \varepsilon_y \rangle \ ,$$

ce qui est aussi absurde.

Si X n'a qu'un point, l'hypothèse de séparation montre qu'il existe $\gamma \in G$ tel que $\gamma \neq 0$, donc $G = F$, puisque $\dim F = 1$.

Si X contient au moins deux points nous allons prouver que G est faiblement dense dans F . Soient donc μ une forme linéaire continue sur F qui s'annule sur G et $\varphi \in F$. Puisque F est réticulé, nous pouvons supposer que $\varphi \in F_+$ et il nous suffit de montrer que $\langle \varphi, \mu \rangle = 0$.

Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathfrak{K}(X)$ tel que

$$\int_{\complement K} \varphi \, d|\mu| \leqslant \frac{\varepsilon}{5} \ .$$

Pour tout $x \in K$, il existe $\chi_x \in G_+$ tel que $\chi_x(x) > \varphi(x)$. Par compacité et la max-stabilité de G , il existe $\gamma \in G_+$ tel que $\chi \geqslant \varphi$ sur K . Soit alors $L \in \mathfrak{K}(X)$ tel que $K \subset L$ et

$$\int_{\complement L} \chi \, d|\mu| \leqslant \frac{\varepsilon}{5} \ .$$

Pour tout $x \in L$, il existe $\gamma_x \in G_+$ tel que $\gamma_x(x) = \varphi(x)$ et, pour tout $y \in L$, $y \neq x$, il existe $\gamma_y \in G_+$ tel que $\gamma_y(x) = \varphi(x)$ et $\gamma_y(y) = \varphi(y)$ par (iv). Grâce à la continuité des $\gamma_y - \varphi$ et $\left(\gamma_y - \varphi\right)(y) = 0$ pour $y \in L$, la compacité de L et la min-stabilité de G , il existe un $\theta_x \in G_+$ tel que $\theta_x(x) = \varphi(x)$, $\theta_x \leqslant \varphi + \frac{\varepsilon}{5|\mu|(L)}$ sur L . De même grâce à la continuité des

[5] B. Anger, C. Portenier, *Radon integrals and Riesz representation,* Measure Theory, Oberwolfach 1990, Suppl. Rend. Cir. Mat. Palermo, 28 (1992), p.269-300.

$\theta_x - \varphi$ et $(\theta_x - \varphi)(x) = 0$, la compacité de L et la max-stabilité de G , il existe un $\theta \in G_+$ tel que

$$\varphi - \frac{\varepsilon}{5\,|\mu|\,(L)} \leqslant \theta \leqslant \varphi + \frac{\varepsilon}{5\,|\mu|\,(L)} \quad \text{sur } L \ .$$

On a alors $\min(\theta, \chi) \in G_+$,

$$\varphi - \frac{\varepsilon}{5\,|\mu|\,(L)} \leqslant \min(\theta, \chi) \leqslant \varphi + \frac{\varepsilon}{5\,|\mu|\,(L)} \quad \text{sur } K \ ,$$

et

$$\int_{\complement L} \min(\theta, \chi)\; d\,|\mu| \leqslant \int_{\complement L} \chi\, d\,|\mu| \leqslant \frac{\varepsilon}{5} \ .$$

Finalement, puisque $\int \min(\theta, \chi)\; d\mu = 0$, on obtient

$$\left| \int \varphi\, d\mu \right| = \left| \int (\varphi - \min(\theta, \chi))\; d\mu \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_K |\varphi - \min(\theta, \chi)|\; d\,|\mu| + \int_{\complement K} |\varphi|\; d\,|\mu| + \int_{\complement K \cap L} \theta\, d\,|\mu| + \int_{\complement L} \chi\, d\,|\mu| \leqslant$$

$$\leqslant \int_K \frac{\varepsilon}{5\,|\mu|\,(L)}\, d\,|\mu| + \frac{\varepsilon}{5} + \int_{\complement K \cap L} \left(\varphi + \frac{\varepsilon}{5\,|\mu|\,(L)} \right) d\,|\mu| + \frac{\varepsilon}{5} \leqslant \varepsilon \ .$$

Ceci finit de prouver que $\int \varphi\, d\mu = 0$. □

13.4 Le théorème général de Stone-Weierstraß

PROPOSITION *Il existe une suite croissante de polynômes (P_n) sans terme constant sur $[0,1]$ telle que*

$$\sqrt{\cdot} = \sup_n P_n \ .$$

La convergence est uniforme.

On la définit par récurrence en posant $P_0 := 0$ et

$$P_{n+1}(x) := P_n(x) + \frac{1}{2}\left[x - P_n^2(x)\right] \ .$$

Montrons tout d'abord que $P_n(x) \leqslant \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0,1]$. C'est évident pour $n = 0$ et le pas de récurrence découle de

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = \sqrt{x} - P_n(x) - \frac{1}{2}\left[x - P_n^2(x)\right] =$$

$$= \left[\sqrt{x} - P_n(x)\right]\left[1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x))\right] \geqslant 0 \ .$$

On en déduit la croissance de (P_n) :

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - P_n(x))(\sqrt{x} + P_n(x)) \geqslant 0 \ .$$

La suite (P_n) converge donc ponctuellement et en passant à la limite il vient

$$\lim_n P_n(x) = \lim_n P_{n+1}(x) = \lim_n P_n(x) + \frac{1}{2}\left[x - \lim_n P_n^2(x)\right] \ ,$$

donc $\lim_n P_n^2(x) = x$, i.e. $\sup_n P_n(x) = \sqrt{x}$. La convergence uniforme découle donc du théorème de Dini. □

THEOREME *Soient X un espace complètement régulier et F un espace localement convexe séparée coréticulé de fonctions continues bornées réelles sur X telle que toute intégrale de Dirac soit continue, $\mathcal{S}_-(X) \subset F_\phi$ et toute forme linéaire continue μ soit tendue, i.e. pour tout $\varphi \in F$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathfrak{K}(X)$ tel que*

$$\psi \in F\ ,\ |\psi| \leqslant |\varphi| \ \text{ et } \psi = 0 \text{ sur } K \quad \Longrightarrow \quad |\langle \psi, \mu \rangle| \leqslant \varepsilon \ .$$

Pour qu'une sous-algèbre G de fonctions contenue dans F soit dense, il faut et il suffit que G soit linéairement séparante.

La démonstration de la nécessité est identique à celle du thèorème de Stone-Kakutani. Pour la suffisance nous allons montrer que $\overline{G}$ est un sous-espace vectoriel coréticulé, ce qui nous ramène au théorème de Stone-Kakutani. Il nous suffit, pour tout $\gamma \in G$ de prouver que $|\gamma| = \sqrt{\gamma^2} \in \overline{G}$. Par homogénéité nous pouvons supposer que $0 \leqslant \gamma^2 \leqslant 1$. On a alors

$$|\gamma| = \lim_n P_n \circ \gamma^2 \in \overline{G}$$

pour la topologie faible grâce au théorème de Lebesgue. □

COROLLAIRE (Cas complexe) *Pour qu'une sous-algèbre involutive G de fonctions contenue dans le complexifié $F_{\mathbb{C}}$ de F soit dense, il faut et il suffit que G soit linéairement séparante.*

C'est immédiat en séparant partie réelle et partie imaginaire. □

REMARQUE Le théorème de Stone-Weierstraß n'est pas valable dans le cas non-borné comme le montre l'exemple suivant. Cet exemple montre aussi qu'il n'y a pas unicité pour le problème des moments de Stieltjes [6], p. 105, ou Widder [7], Ch. III, §8, p. 125-126.

En faisant le changement de variable $t = u^4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\int_0^\infty t^n \cdot \sin t^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-t^{\frac{1}{4}}}\, dt = 4 \int_0^\infty u^{4n+3} \cdot \sin u \cdot e^{-u}\, du = 4 \operatorname{Im} \int_0^\infty u^{4n+3} \cdot e^{(i-1)\cdot u}\, du = 0 \ ,$$

car

$$\int_0^\infty u^{4n+3} \cdot e^{(i-1)\cdot u}\, du = \left[u^{4n+3} \cdot \frac{e^{(i-1)\cdot u}}{i-1} \right]_0^\infty - \int_0^\infty (4n+3)\, u^{4n+2} \cdot \frac{e^{(i-1)\cdot u}}{i-1}\, du =$$

$$= \ldots = \frac{(4n+3)!}{(i-1)^{4n+3}} \cdot \int_0^\infty e^{(i-1)\cdot u}\, du = \frac{(4n+3)!}{(i-1)^{4n+4}} \cdot \left[e^{(i-1)\cdot u} \right]_0^\infty = -\frac{(4n+3)!}{2^{4n+4}} \cdot (1+i)^{4n+4} =$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{(4n+3)!}{4^{n+1}} \ ,$$

en remarquant que $(1+i)^4 = -4$.

Soit alors F l'espace vectoriel coréticulé des fonctions continues φ sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) \cdot e^{-t} = 0 \ ,$$

muni de la norme

$$\|\varphi\|_{e^{\mathrm{id}}} := \left\| \frac{\varphi}{e^{\mathrm{id}}} \right\|_\infty \ .$$

On peut montrer que F satisfait aux hypothèses du théorème de Stone-Kakutani. L'algèbre des polynômes $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$ sur $\mathbb{R}_+$ est contenue dans F et est évidemment linéairement séparante, mais elle n'est pas dense car l'intégrale de Radon réelle $\sin\left(\mathrm{id}^{\frac{1}{4}}\right) \cdot e^{-\mathrm{id}^{\frac{1}{4}}} \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+}$ définit une forme linéaire continue sur F qui s'annule sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$.

Pour la non-unicité du problème de Stieltjes, il suffit de considérer les intégrales de Radon positives

$$\sin_+\left(\mathrm{id}^{\frac{1}{4}}\right) \cdot e^{-\mathrm{id}^{\frac{1}{4}}} \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+} \quad \text{et} \quad \sin_-\left(\mathrm{id}^{\frac{1}{4}}\right) \cdot e^{-\mathrm{id}^{\frac{1}{4}}} \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+} \ ,$$

évidemment différentes, qui ont les mêmes moments.

[6] T.J. Stieltjes, *Recherches sur les fractions continues,* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 8 (1894), p. 1-122.
[7] D.V. Widder, *The Laplace transform,* Princeton University Press, Princeton, 1946.

13.5 Diffusions et opérateurs

Dans tout ce qui suit et sauf mention expresse du contraire, X et Y seront des espaces topologiques complètement réguliers.

PROPOSITION *Il y a correspondance biunivoque entre les applications*

$$m : Y \longrightarrow \mathcal{M}^b(X) : y \longmapsto m_y$$

et les opérateurs continus

$$m : \mathcal{C}^b_s(X) \longrightarrow \mathbb{C}^Y : \varphi \longmapsto m\varphi$$

par

$$\langle \varphi | m_y \rangle = \langle m\varphi | e_y \rangle = \overline{m\varphi(y)} \quad \textit{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}^b(X) \ \textit{ et } y \in Y \ .$$

(i) Pour que l'on ait $m(Y) \subset \mathcal{M}^b_+(X)$, il faut et il suffit que l'opérateur $m : \mathcal{C}^b(X) \longrightarrow \mathbb{C}^Y$ soit positif, i.e. que $m(\mathcal{C}^b_+(X)) \subset \mathbb{R}^Y_+$.

(ii) Pour que $m : Y \longrightarrow \mathcal{M}^b_e(X)$ soit continue, il faut et il suffit que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^b(X)$ la fonction $m\varphi$ soit continue.

Dans ce cas, l'opérateur $m : \mathcal{C}^b(X) \longrightarrow \mathcal{C}_c(Y)$ est continu et, pour tout compact L de Y , la partie $m(L)$ est uniformément bornée.

En outre, cet opérateur est strictement continu si, et seulement si, pour tout compact L de Y , la partie $m(L)$ est uniformément tendue.

(iii) Pour que $m(Y)$ soit étroitement bornée, il faut et il suffit que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^b(X)$ la fonction $m\varphi$ soit bornée.

Dans ce cas, l'opérateur $m : \mathcal{C}^b(X) \longrightarrow \ell^\infty(Y)$ est continu de norme

$$\|m\| = \sup_{y \in Y} \|m_y\| \ ;$$

en particulier $m(Y)$ est uniformément bornée.

En outre cet opérateur est strictement continu si, et seulement si, $m(Y)$ est uniformément tendue.

La première partie, (i) et les premières assertions de (ii) et (iii) découlent immédiatement des définitions.

Pour la deuxième assertion de (ii), on remarque tout d'abord que $\varphi \longmapsto |\langle \varphi, m_y \rangle|$ est, pour tout $y \in Y$, une semi-norme continue sur $\mathcal{C}^b(X)$. Si L est une partie compacte de Y , alors

$$\varphi \longmapsto \|m\varphi\|_{\infty,L} = \sup_{y \in L} |\langle \varphi | m_y \rangle| < \infty$$

est aussi une semi-norme continue sur $\mathcal{C}^b(X)$, puisque cet espace est tonnelé. Ainsi

$$\sup_{y \in L} \|m_y\| = \sup_{\varphi \in \mathcal{C}^b(X), \|\varphi\|_\infty \leqslant 1} \sup_{y \in L} |\langle \varphi | m_y \rangle| < \infty \ .$$

La deuxième assertion de (iii) se démontrent de la même manière en remplaçant L par Y .

Finalement, la troisième assertion de (ii) découle du lemme, puisque la continuité pour la topologie stricte de la semi-norme

$$\varphi \longmapsto \|m\varphi\|_{\infty,L} = \sup_{y \in L} |\langle \varphi | m_y \rangle|$$

signifie que $m(L)$ est équicontinue. Il en est de même de la troisième assertion de (iii). $\square$

COROLLAIRE *Une application $m : Y \longrightarrow \mathcal{M}_e^b(X)$ est continue, bornée et à valeurs dans $\mathcal{M}_+^b(X)$ si, et seulement si, m est un opérateur continu et positif de $\mathcal{C}^b(X)$ dans $\mathcal{C}^b(Y)$.*

Dans ce cas, $m(Y)$ est uniformément bornée et, pour que $m : \mathcal{C}_s^b(X) \longrightarrow \mathcal{C}_s^b(Y)$ soit continu, il faut et il suffit que $m(L)$ soit uniformément tendue pour tout compact L de Y .

Il nous suffit de montrer l'équivalence finale. La nécessité est immédiate par (ii), puisque l'injection canonique $\mathcal{C}_s^b(Y) \hookrightarrow \mathcal{C}_c(Y)$ est continue.

Réciproquement, soit θ une fonction s.c.i. et tendant vers l'infini à l'infini sur Y . Nous devons montrer qu'il existe une fonction κ s.c.i. et tendant vers l'infini à l'infini sur X telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^b(X)$, on ait

$$\sup_{y\in Y} \frac{|\langle \varphi | m_y \rangle|}{\theta(y)} = \|m\varphi\|_\theta \leqslant \|\varphi\|_\kappa \ .$$

Mais ceci signifie que $\frac{m}{\theta}(Y)$ est équicontinue. Il nous suffit donc de montrer que cette partie est uniformément tendue, puisqu'elle est uniformément bornée, θ ayant un minimum strictement positif. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Posons $L := \left\{\theta \geqslant \frac{\|m\|}{\varepsilon}\right\}$. Comme $m(L)$ est uniformément tendue, il existe un compact K de X satisfaisant à la propriété (T) pour $\varepsilon \cdot \min\theta(Y)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^b(X)$ tel que $|\varphi| \leqslant 1$ et $\varphi = 0$ sur K , on obtient alors

$$\left|\left\langle \varphi \middle| \frac{m_y}{\theta(y)} \right\rangle\right| \leqslant \frac{1}{\theta(y)} \cdot \varepsilon \cdot \min\theta(Y) \leqslant \varepsilon \quad \text{si } y \in L$$

et

$$\left|\left\langle \varphi \middle| \frac{m_y}{\theta(y)} \right\rangle\right| \leqslant \frac{\|m_y\|}{\theta(y)} \leqslant \varepsilon \quad \text{si } y \notin L \ .$$

$\square$

13.6 Diffusions convenables

DEFINITION Si $m : Y \longrightarrow \mathcal{M}^b(X)$ est telle que m soit un opérateur continu et positif de $\mathcal{C}_s^b(X)$ dans $\mathcal{C}_s^b(Y)$, nous dirons que c'est une *diffusion convenable* de Y dans X .

PROPOSITION *Soit m est une diffusion convenable de Y dans X . Pour toute intégrale de Radon bornée ν sur Y , la forme semi-linéaire*

$$\nu m : \varphi \longmapsto \int \langle \varphi | m_y \rangle \, d\nu(y) : \mathcal{C}^b(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

est une intégrale de Radon bornée sur X . Si ν est positive, on a

$$\int^* s \, d\nu m = \int^* \left(\int^* s \, dm_y \right) d\nu(y) \quad \text{pour tout } s \in \mathcal{SK}(X) \ .$$

On a $\nu m = m^\dagger \nu$. En effet $m : \mathcal{C}_s^b(X) \longrightarrow \mathcal{C}_s^b(Y)$ est continu, donc l'adjointe $m^\dagger$ est une application linéaire de $\mathcal{M}^b(Y)$ dans $\mathcal{M}^b(X)$ et, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^b(X)$, on a

$$\left\langle \varphi \middle| m^\dagger \nu \right\rangle = \langle m\varphi | \nu \rangle = \int \overline{m\varphi(y)} \, d\nu(y) = \int \langle \varphi | m_y \rangle \, d\nu(y) \ .$$

La dernière assertion découle alors de la propriété de Bourbaki, car on a

$$s = \sup \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^b(X) \;\middle|\; \varphi \leqslant s \right\}$$

et $y \longmapsto \int \varphi \, dm_y = \langle \overline{\varphi} | m_y \rangle$ est une fonction continue sur Y . □

REMARQUE 1 Pour tout $y \in Y$, on a $\varepsilon_y m = m_y$.

REMARQUE 2 La proposition montre que $(m_y)_{y \in Y}$ est une désintégration de νm par rapport à ν . Nous pouvons donc appliquer les résultats du cours d'Analyse [17], §6, sans aucun problèmes puisque les intégrales de Radon que nous considérons sont bornées, et par suite modérées.

13.7 Prolongement d'une diffusion convenable

On peut également prolonger l'opérateur m aux fonctions inférieurement bornées f sur X en posant

$$mf := \int^* f \, dm_\diamond : Y \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}} \ .$$

Il est positivement homogène, sous-additif et permute avec les enveloppes supérieures dénombrables (propriété de Daniell).

DEFINITION Nous désignerons par $\mathcal{B}^b(X)$ le sous-espace vectoriel fermé de $\ell^\infty(X)$ des fonctions boréliennes bornées.

PROPOSITION *Soit m une diffusion convenable de Y dans X . Alors m se prolonge en un opérateur continu*

$$m : \mathcal{B}^b(X) \longrightarrow \mathcal{B}^b(Y) : f \longmapsto mf := \int f \, dm_\diamond \ .$$

On a tout d'abord

$$\left\| \int f \, dm_\diamond \right\| \leqslant \sup_{y \in X} \|f\|_\infty \cdot \|m_y\| = \|m\| \cdot \|f\|_\infty \ ,$$

donc m est un opérateur continu de $\mathcal{B}^b(X)$ dans $\ell^\infty(Y)$. Comme $\mathcal{B}^b(Y)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\ell^\infty(Y)$, l'ensemble $\mathcal{F}$ des $f \in \mathcal{B}^b_{\mathbb{R}}(X)$ tels que $mf \in \mathcal{B}^b(Y)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}^b_{\mathbb{R}}(X)$ et on a $\mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}$ par la propriété de Daniell. Il nous suffit de montrer que $\mathcal{F} = \mathcal{B}^b_{\mathbb{R}}(X)$.

Soit s une fonction s.c.i. positive bornée. Puisque $s = \sup_{\varphi \in \mathcal{C}^0(X), \varphi \leqslant s} \varphi$, par la propriété de Bourbaki, la fonction

$$\int s \, dm_\diamond = \sup_{\varphi \in \mathcal{C}^0(X), \varphi \leqslant s} \int \varphi \, dm_\diamond = \sup_{\varphi \in \mathcal{C}^0(X), \varphi \leqslant s} m\varphi$$

est s.c.i., puisque $m\varphi$ est continue. On a donc $s \in \mathcal{F}$. L'ensemble des fonctions s.c.i. positives et bornées étant stable pour la multiplication (ponctuelle), le théorème suivant permet de conclure. $\square$

THEOREME *Soient*

(i) $\mathcal{F}$ *un espace vectoriel de fonctions réelles contenant les constantes et tel que*

$$\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\downarrow = \mathcal{F} \ ,$$

(ii) $\mathcal{S}$ *un sous-cône convexe min-stable de* $\mathcal{F}$ *tel que*

$$\min(s,1) \in \mathcal{F} \quad \textit{pour tout} \quad s \in \mathcal{S} \ ,$$

(iii) $\mathfrak{A}$ *la tribu engendrée par* $\mathcal{S}$.

Alors

$$\mathcal{M}(\mathfrak{A}) \cap \mathcal{F}_\downarrow \subset \mathcal{F} \ .$$

Par le lemme de Zorn, il existe un sous-cône convexe min-stable $\widetilde{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{F}$, qui soit maximal et contenant $\mathcal{S}$.

$\left[\,?\right]$

13.8 Cas localement compact

Nous supposerons maintenant que X est un espace localement compact. L'espace des intégrales de Radon $\mathcal{M}(X)$ et le sous-espace $\mathcal{M}^b(X)$ de celles qui sont bornées sont considérés comme le dual de $\mathcal{K}(X)$ et $\mathcal{C}^0(X)$ respectivement. La topologie faible par rapport à $\mathcal{K}(X)$ sur $\mathcal{M}(X)$ sera dite vague , pour la distinguer de celle par rapport à $\mathcal{C}^0(X)$ sur $\mathcal{M}^b(X)$.

PROPOSITION *Il y a correspondance biunivoque entre les applications $m : Y \longrightarrow \mathcal{M}(X)$ et les opérateurs continus $m : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbb{C}^Y$ par*

$$\langle \varphi | m_y \rangle = \overline{m\varphi(y)} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}(X) \text{ et } y \in Y \ .$$

(i) Pour que l'on ait $m(Y) \subset \mathcal{M}_+(X)$, il faut et il suffit que l'opérateur $m : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbb{C}^Y$ soit positif, i.e. que $m(\mathcal{K}_+(X)) \subset \mathbb{R}_+^Y$.

(ii) Pour que $m : Y \longrightarrow \mathcal{M}_\sigma(X)$ soit continue, il faut et il suffit que pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ la fonction $m\varphi$ soit continue.

Dans ce cas, $m : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{C}_c(Y)$ est un opérateur continu.

(iii) Pour que $m(Y)$ soit vaguement bornée, il faut et il suffit que pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ la fonction $m\varphi$ soit bornée.

Dans ce cas, $m : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \ell^\infty(Y)$ est un opérateur continu et $m(Y)$ est fortement bornée dans $\mathcal{M}(X)$.

La démonstration est analogue à celle de la proposition 1.3, à part la dernière assertion. Si B est une partie bornée de $\mathcal{K}(X)$ et ρ_B la semi-norme correspondante sur $\mathcal{M}(X)$, alors

$$\sup\nolimits_{y \in Y} \rho_B(m_y) = \sup\nolimits_{y \in Y} \sup\nolimits_{\varphi \in B} |\langle \varphi | m_y \rangle| =$$

$$= \sup\nolimits_{\varphi \in B} \sup\nolimits_{y \in Y} |m\varphi(y)| = \sup\nolimits_{\varphi \in B} \|m\varphi\|_\infty < \infty \ ,$$

puisque $\varphi \longmapsto \|m\varphi\|_\infty$ est une semi-norme continue sur $\mathcal{K}(X)$, ce qui montre que $m(Y)$ est fortement bornée. □

DEFINITION Nous dirons qu'une application continue $m : Y \longrightarrow \mathcal{M}_\sigma(X)$ à valeurs dans $\mathcal{M}_+(X)$ est une *diffusion* (continue) de Y dans X .

PROBLEME Comment peut-on généraliser cette situation au cas complètement régulier ? Faut-il sortir des espaces vectoriels et considérer des conoïdes localement convexes ?

13.9 Diffusions convenables dans le cas localement compact

LEMME *Soit $m : Y \longrightarrow \mathcal{M}(X)$. On a $m(Y) \subset \mathcal{M}^b(X)$ si, et seulement si, $m : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbb{C}^Y$ est continu en munissant $\mathcal{K}(X)$ de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.*

Dans ce cas l'unique prolongement continu de m à $\mathcal{C}^0(X)$, encore noté m est donné par

$$\langle \varphi | m_y \rangle = \overline{m\varphi(y)} \quad \textit{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}^0(X) \textit{ et } y \in Y \ .$$

Rappelons tout d'abord qu'une intégrale de Radon μ appartient à $\mathcal{M}^b(X)$ si, et seulement si, on a

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{K}(X), \|\varphi\|_\infty \leqslant 1} |\langle \varphi | \mu \rangle| = |\mu|(1) < \infty \ .$$

Comme la continuité de m pour $\|\cdot\|_\infty$ signifie que, pour tout $y \in Y$, on a

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{K}(X), \|\varphi\|_\infty \leqslant 1} |\langle \varphi | m_y \rangle| = \sup_{\varphi \in \mathcal{K}(X), \|\varphi\|_\infty \leqslant 1} |m\varphi(y)| < \infty \ ,$$

le résultat en découle. □

Ceci montre que l'opérateur $m : \mathcal{C}^0(X) \longrightarrow \mathbb{C}^Y$ est la restriction de celui que nous avons considéré en 1.3 : $m : \mathcal{C}^b(X) \longrightarrow \mathbb{C}^Y$. Cet opérateur est un prolongement particulier, défini par intégration !

Si $m(Y) \subset \mathcal{M}_+^b(X)$, alors

$$mf = \sup_{\varphi \in \mathcal{C}^0(X), \varphi \leqslant f} m\varphi \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{SC}^0(X) \ .$$

PROPOSITION *Soit $m : Y \longrightarrow \mathcal{M}^b(X)$.*

(i) Pour que $m : Y \longrightarrow \mathcal{M}_\sigma^b(X)$ soit continue, il faut et il suffit que la fonction $m\varphi$ soit continue pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^0(X)$.

Dans ce cas, $m : \mathcal{C}^0(X) \longrightarrow \mathcal{C}_c(Y)$ est un opérateur continu.

(ii) Pour que $m : Y \longrightarrow \mathcal{M}_e^b(X)$ soit continue, i.e. que la fonction $m\varphi$ soit continue pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^b(X)$, il faut et il suffit que $m : Y \longrightarrow \mathcal{M}_\sigma^b(X)$ soit continue et que $m1$ soit une fonction continue.

Dans ce cas, pour tout compact L de Y , la partie $m(L)$ est uniformément tendue. En particulier $m : \mathcal{C}_s^b(X) \longrightarrow \mathcal{C}_c(Y)$ est continu.

(iii) Pour que $m(Y)$ soit uniformément bornée, il faut et il suffit que $m(Y)$ soit faiblement bornée, i.e. que la fonction $m\varphi$ soit bornée pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^0(X)$.

La première assertion de (i) découle immédiatement des définitions. La seconde se démontre comme dans la proposition 1.3.

La condition de (ii) est évidemment nécessaire par (i). Réciproquement, la formule ci-dessus montre que $m\varphi$ est s.c.i. pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_+^b(X)$. Il en est de même si $\varphi \in \mathcal{C}^b(X)$, car $m\varphi = m(\varphi + \|\varphi\|_\infty \cdot 1) - \|\varphi\|_\infty \cdot m1$. Finalement, puisque $m\varphi = -m(-\varphi)$ est s.c.s., $m\varphi$ est continue. Montrons que $m(L)$ est uniformément tendue pour tout compact L de Y . Remarquons, puisque X est localement compact, que $(K^\circ)_{K \in \mathfrak{K}(X)}$ est une famille filtrante croissante d'ouverts de réunion X . Par la propriété de Bourbaki on obtient

$$m1(y) = \int \sup_{K\in\mathfrak{K}(X)} 1_{K^\circ} dm_y = \sup_{K\in\mathfrak{K}(X)} m1_{K^\circ}(y) \quad \text{pour tout } y \in Y \ ,$$

et

$$m1_{K^\circ} = \int \sup_{\varphi\in\mathcal{C}^0_+(X),\varphi\leqslant 1_{K^\circ}} \varphi \, dm_\diamond = \sup_{\varphi\in\mathcal{C}^0_+(X),\varphi\leqslant 1_{K^\circ}} m\varphi$$

est une fonction s.c.i. sur Y . Le théorème de Dini montre alors que la famille filtrante croissante $(m1_{K^\circ})_{K\in\mathfrak{K}(X)}$ converge uniformément sur L vers $m1$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc un compact K de X tel que

$$m_y\left(\complement K\right) = m1(y) - m1_K(y) \leqslant m1(y) - m1_{K^\circ}(y) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } y \in L \ ,$$

ce qui montre que $m(L)$ est uniformément tendue.

La condition de (iii) est trivialement nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. La semi-norme

$$\varphi \longmapsto \|m\varphi\|_\infty = \sup_{y\in Y} |\langle\varphi|m_y\rangle|$$

est continue sur $\mathcal{C}^0(X)$, puisque cet espace est tonnelé. Ainsi $m : \mathcal{C}^0(X) \longrightarrow \ell^\infty(Y)$ est continu de norme

$$M := \sup_{\varphi\in\mathcal{C}^0(X),\|\varphi\|_\infty\leqslant 1} \sup_{y\in Y} |\langle\varphi|m_y\rangle| \ .$$

Mais alors

$$\sup_{y\in Y} \|m_y\| = \sup_{y\in Y} |m_y|(1) = \sup_{y\in Y} \sup_{\varphi\in\mathcal{C}^0_+(X),\varphi\leqslant 1} |\langle\varphi||m_y|\rangle| =$$

$$= \sup_{y\in Y} \sup_{\varphi\in\mathcal{C}^0(X),\|\varphi\|_\infty\leqslant 1} |\langle\varphi|m_y\rangle| = M < \infty \ .$$

□

COROLLAIRE *Pour que $m : Y \longrightarrow \mathcal{M}^b(X)$ soit une diffusion convenable de Y dans X , il faut et il suffit que $m : Y \longrightarrow \mathcal{M}^b_\sigma(X)$ soit continue bornée et que $m1$ soit une fonction continue.*

C'est immédiat par le corollaire 1.3. □

THEOREME *Soit m une diffusion uniformément bornée. Pour que $m\varphi \in \mathcal{C}^0(Y)$ quel que soit $\varphi \in \mathcal{C}^0(X)$, il faut et il suffit que, pour toute partie compacte K de Y et tout $\varepsilon > 0$,l'ensemble*

$$\{y \in Y \mid m_y(K) \geqslant \varepsilon\}$$

soit compact.

Chapitre 14

ORTHOPROJECTEURS

Version du 20 décembre 2001

14.1 Théorie

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre stellaire.

LEMME *Pour qu'une matrice de $\mathbb{M}_2(\mathcal{A})$ soit hermitienne, il faut et il suffit qu'elle soit de la forme*

$$\begin{pmatrix} a & b^* \\ b & d \end{pmatrix}$$

et que

$$a = a^* \quad et \quad d = d^* \ . \tag{$*$}$$

C'est immédiat puisque

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^H = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} \ .$$

□

DEFINITION On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{M}_2(\mathcal{A})$ est un *orthoprojecteur* si les relations A est hermitienne et $A^2 = A$.

PROPOSITION *Soient $a, b, d \in \mathcal{A}$ tels que $a = a^*$ et $d = d^*$.*

(i) *Pour que $\begin{pmatrix} a & b^* \\ b & d \end{pmatrix}$ soit un orthoprojecteur, il faut et il suffit que*

$$a = a^2 + b^*b \ , \tag{$**$}$$

$$b = ba + db \tag{$***$}$$

et

$$d = bb^* + d^2 \ . \tag{$****$}$$

(ii) *Soit $t \in \mathcal{A}$ et posons $a := (e + t^*t)^{-1}$. On a $a \in \mathbb{G}(\mathcal{A})$ et*

$$\begin{pmatrix} a & at^* \\ ta & tat^* \end{pmatrix}$$

est un orthoprojecteur dans $\mathbb{M}_2(\mathcal{A})$.

Dmonstration de (i) En effet

$$\begin{pmatrix} a & b^* \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b^* \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^*b & ab^* + b^*d \\ ba + db & bb^* + d^2 \end{pmatrix} .$$

Dmonstration de (ii) On a donc

$$a := (e + t^*t)^{-1} \quad , \quad b := ta \quad \text{et} \quad d := tat^* .$$

Il est clair que $a \in \mathbb{G}(\mathcal{A})$ et que la condition $(*)$ est satisfaite. Il en est de même des autres conditions car

$$a^2 + b^*b = a^2 + at^*ta = a(e + t^*t)a = a ,$$

$$ba + db = ta^2 + tat^*ta = ta(e + t^*t)a = b$$

et

$$bb^* + d^2 = taat^* + tat^*tat^* = ta(e + t^*t)at^* = tat^* = d .$$

□

PROBLEME Décrire tous les orthoprojecteur de $\mathbb{M}_2(\mathcal{A})$. En particulier, quelles sont les solutions de $(**)$?

$$\left(a - \frac{e}{2}\right)^2 = \frac{e}{4} - b^*b$$

REMARQUE 1 Soient $a, b \in \mathcal{A}$ tels que

$$a^* = a = a^2 + b^*b .$$

Puisque $b^*b \geqslant 0$, il vient $a \geqslant a^2 \geqslant 0$, donc $0 \leqslant a \leqslant e$ par le calcul fonctionnel. Etant donné un tel a on a $a - a^2 \geqslant 0$. Pour tout $u \in \mathcal{A}$ tel que $u^*u = e$, $b := u(a - a^2)^{\frac{1}{2}} = ua^{\frac{1}{2}}(e - a)^{\frac{1}{2}}$ est une solution. Est-ce que toute solution est de cette forme pour un $u \in \mathcal{A}^{\dagger\dagger}$?

Peut-on résoudre $(***)$, i.e.

$$dua^{\frac{1}{2}}(e - a)^{\frac{1}{2}} = b(e - a) = ua^{\frac{1}{2}}(e - a)^{\frac{3}{2}} \ ?$$

Peut-on en déduire

$$du = u(e - a) \ ,$$

donc

$$duu^* = u(e - a)u^* ?$$

Remarquons que uu^* est un orthoprojecteur de $\mathcal{A}$.

Si $b \in \mathbb{G}(\mathcal{A})$, alors

$$d := e - bab^{-1}$$

est solution de $(***)$ et

$$bb^* + d^2 = bb^* + \left(e - bab^{-1}\right)^2 = bb^* + e - 2bab^{-1} + ba^2b^{-1} =$$

$$= bb^* + e + b\left(a^2 - a\right)b^{-1} - bab^{-1} = e - bab^{-1} = d ,$$

donc aussi de $(****)$.

$$bb^* + d^2 =$$

REMARQUE 2 Si $a \in \mathbb{G}(\mathcal{A})$, posons

$$t := ba^{-1} \in \mathcal{A} \ .$$

Grâce à $(*)$ et $(**)$, on obtient

$$e + t^*t = e + a^{-1}b^*ba^{-1} = e + a^{-1}(e-a)\,aa^{-1} = a^{-1} \ ,$$

donc

$$a = (e + t^*t)^{-1}$$

et

$$b = ta = t\,(e + t^*t)^{-1} \ .$$

Remarquons maintenant que

$$b - ba = b\left(a^{-1} - e\right)a = bt^*t\,(e + t^*t)^{-1} = bt^*b = ba^{-1}b^*b \ ,$$

ce qui montre que $(***)$ est équivalent à

$$db = ba^{-1}b^*b \ ,$$

donc à

$$\left(d - ba^{-1}b^*\right)b = 0 \ .$$

Si $b \in \mathbb{G}(\mathcal{A})$, on obtient

$$d = ba^{-1}b^* = tat^* \ .$$

Puisque $t \in \mathbb{G}(\mathcal{A})$, il vient en outre

$$b = t\,(e + t^*t)^{-1}\,t^* = \left[(t^*)^{-1}\,(e + t^*t)\,t^{-1}\right]^{-1} = \left[e + (t^*)^{-1}\,t^{-1}\right]^{-1} \ .$$

REMARQUE 3 Soient $a, b \in \mathcal{A}$ tels que

$$a^* = a = a^2 + b^*b$$

et $t \in \mathcal{A}$ une solution de

$$ta = b\,;$$

alors

$$a\,(e + t^*t)\,a = a^2 + b^*b = a$$

et, en posant $d := tat^*$, on obtient

$$ba + db = ta^2 + tat^*ta = ta\,(e + t^*t)\,a = ta = b$$

et

$$bb^* + d^2 = taat^* + tat^*tat^* = ta\,(e + t^*t)\,at^* = tat^* = d \ .$$

Que peut-on en tirer ?

REMARQUE Pour la réciproque : $(***)$ entraîne grâce à $(**)$

$$db = b - ba = ta - ta^2 = tb^*b \ ,$$

donc

$$(d - tb^*)\,b = 0 \ .$$

14.2 Exemples

$$\text{Soit } \mathcal{A} := \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \ .$$

EXEMPLE 1

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'algèbre $\mathcal{A}(T)$ est commutative, mais C n'est pas inversible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 2

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'algèbre $\mathcal{A}(T)$ est commutative

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 3

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'algèbre $\mathcal{A}(T)$ est commutative

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 4

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T n'est pas normale, mais B l'est.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 5

$$T=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$$

T et B ne sont pas normales.

$$\begin{pmatrix}\frac{6}{11}&-\frac{1}{11}&\frac{5}{11}&-\frac{2}{11}\\-\frac{1}{11}&\frac{2}{11}&\frac{1}{11}&\frac{4}{11}\\\frac{5}{11}&\frac{1}{11}&\frac{6}{11}&\frac{2}{11}\\-\frac{2}{11}&\frac{4}{11}&\frac{2}{11}&\frac{8}{11}\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\frac{6}{11}&-\frac{1}{11}&\frac{5}{11}&-\frac{2}{11}\\-\frac{1}{11}&\frac{2}{11}&\frac{1}{11}&\frac{4}{11}\\\frac{5}{11}&\frac{1}{11}&\frac{6}{11}&\frac{2}{11}\\-\frac{2}{11}&\frac{4}{11}&\frac{2}{11}&\frac{8}{11}\end{pmatrix}$$

EXEMPLE 6

$$T=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Toutes les matrices sont normales, mais C n'est pas inversible.

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

EXEMPLE 7

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

A et C ne sont pas inversibles.

14.3 Calculs

Soit

$$\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Est-ce que T est une matrice normale ?

$$T^H T - T T^H = 0$$

$$A = \left(\mathrm{Id} + T^H T\right)^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Id} + T^H T}$$

$$B = T\left(\mathrm{Id} + T^H T\right)^{-1} = \frac{T}{\mathrm{Id} + T^H T}$$

Est-ce que B commute avec A ?

$$AB - BA = 0$$

Est-ce que B est une matrice normale ?

$$B^H B - B B^H = 0$$

$$C = T\left(\mathrm{Id} + T^H T\right)^{-1} T^H = \frac{T}{\mathrm{Id} + T^H T} T^H$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \text{ concatenate : } \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^H = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \text{ concatenate : } \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}^H = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \text{ concatenate : } \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

14.4 Transposition

DEFINITION On définit la matrice *transposée* de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathcal{A})$ par

$$^t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} .$$

EXEMPLE 1 On a $\operatorname{Sp} {}^t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \operatorname{Sp}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Par exemple dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{M}_2(\mathbb{C}))$, le polynôme caractéristique de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est $(X-1)^4$, tandis que celui de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est $X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 5X + 2$, dont les racines sont $2, 1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

PROPOSITION *Soient $a, b, c \in \mathcal{A}$ tels que $a = a^*$ et $c = c^*$. Pour que $\begin{pmatrix} a & b^* \\ b & c \end{pmatrix}$ et $^t\begin{pmatrix} a & b^* \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$ soit des orthoprojecteurs, il faut et il suffit que b soit normale et que*

$$a = a^2 + b^*b \ ,$$

$$b = ba + cb$$

et

$$c = bb^* + c^2 \ .$$

C'est immédiat par la proposition ci-dessus. □

EXEMPLE 2 Le polynôme caractéristique et les valeurs propres de

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sont $X^4 - 2X^3 + X^2$ et $1, 1, 0, 0$, tandis que ceux de

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sont $X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{16}{625}$ et $\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{41}, \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{41}$.

Chapitre 15

ALGÈBRE DES FONCTIONS RÉGLÉES

Version du 15 septembre 2001

DEFINITION Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous dirons que la fermeture uniforme de l'algèbre des fonctions en escaliers et à support compact sur J est l' *algèbre des fonctions réglées* sur J et nous la désignerons par $\mathcal{R}(J)$.

PROBLEME Quel est son spectre ?

Rappelons que la topologie gauche, respectivement droite de J , est engendrée par les intervalles semi-ouverts à gauche, respectivement à droite. Si O est un ouvert pour l'une de ces topologies nous désignerons par O° sont intérieur dans J .

THEOREME *Le spectre* $\mathrm{Sp}\,\mathcal{R}(J)$ *contient la réunion* $J \times \{g\} \cup J \cup J \times \{d\}$ *de trois copies disjointes de* J *munie de la topologie formée des ensembles de la forme*

$$O_g \times \{g\} \cup O_g^\circ \cup O \cup O_d^\circ \cup O_d \times \{d\} \ ,$$

où O_g *et* O_d *sont des ouverts de* J *pour la topologie gauche, respectivement droite, et* O *une partie quelconque de* J *.*

Rappelons que $\mathcal{R}(J)$ est formé des fonctions s'annulant à l'infini et ayant des limites à gauche et à droite. Pour tout $t \in J$, soient

$$\varepsilon_{g,t} : f \longmapsto \lim_{s \to t-} f(s) \ ,$$

$$\varepsilon_t : f \longmapsto f(t)$$

et

$$\varepsilon_{d,t} : f \longmapsto \lim_{s \to t+} f(s) \ .$$

On vérifie immédiatement que ces applications sont injectives et d'images disjointes deux à deux. D'autre part un voisinage typique de $\varepsilon_{g,t}$ est de la forme

$$V = \{\chi \in \mathrm{Sp}\,\mathcal{R}(J) \mid |\langle f_j | \chi - \varepsilon_{g,t} \rangle| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } j = 1, \ldots, n\} \ .$$

Mais puisque chaque f_j possède un limite à gauche, il existe $\delta > 0$ tel que

$$f_j(]t - \delta, t[) \subset \{|f_j - f_j(t)| \leqslant \varepsilon\} \ ,$$

donc $\varepsilon(]t - \delta, t[) \subset V$, mais aussi $\varepsilon_g(]t - \delta, t]) \subset V$.

Chapitre 16

CHAMPS D'OPÉRATEURS

16.1 Anti-dualité.

Compatibilité. $\langle E|E^{\dagger}\rangle$ et $\langle G|G^{\dagger}\rangle$ sont dites compatibles s'il existe $\langle F|F^{\dagger}\rangle$ et des injections canoniques $E^{\dagger} \hookrightarrow F^{\dagger}$ et $G^{\dagger} \hookrightarrow F^{\dagger}$?

Les anti-dualités $\langle F|F^{\dagger}\rangle$ et $\langle \mathcal{H}|\mathcal{H}^{\dagger}\rangle$ sont liées par la formule

$$\langle \varphi|\Psi^{\dagger}\xi\rangle_F = \langle \Psi\varphi|\xi\rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \xi \in \mathcal{H}^{\dagger} \ .$$

Si Ψ est d'image dense, alors $\Psi^{\dagger}$ est injective et, en identifiant $\mathcal{H}^{\dagger}$ avec $\Psi^{\dagger}(\mathcal{H}^{\dagger})$, i.e. en considérant $\Psi^{\dagger}$ comme une injection canonique, le noyau de $\mathcal{H}^{\dagger} \hookrightarrow F^{\dagger}$ est

$$R\Psi : F \longrightarrow \mathcal{H}^{\dagger} \ .$$

On a évidemment

$$\langle \varphi|\xi\rangle_F = \langle \Psi\varphi|\xi\rangle_{\mathcal{H}} = (R\Psi\varphi|\xi)_{\mathcal{H}^{\dagger}} \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \xi \in \mathcal{H}^{\dagger} \ .$$

Si en plus Ψ est une injection canonique, on l'omettra aussi et on a

$$\langle \varphi|\xi\rangle_F = \langle \varphi|\xi\rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \xi \in \mathcal{H}^{\dagger} \ .$$

On dit alors que les anti-dualités $\langle F|F^{\dagger}\rangle$ et $\langle \mathcal{H}|\mathcal{H}^{\dagger}\rangle$ sont compatibles par rapport à l'injection canonique (continue) $F \hookrightarrow \mathcal{H}$. Mais attention, $\mathcal{H}$ ne possède pas nécessairement de plongement canonique dans $F^{\dagger}$ (cf. 2.5).

16.2 Intégration vectorielle.

Dans ce qui suit soit Λ un espace topologique séparé et σ une intégrale de Radon sur Λ .

Soit G un espace localement convexe tonnelé et $\kappa : \Lambda \longrightarrow \mathcal{L}(G, F_\sigma^\dagger)$ une application. Pour tout $\psi \in G$ on définit

$$\kappa\psi : \lambda \longmapsto \kappa(\lambda)\psi : \Lambda \longrightarrow F^\dagger \ .$$

REMARQUE 1 Pour que κ soit scalairement σ-intégrable, respectivement σ-mesurable, il faut et il suffit que, pour tout $\psi \in G$, l'application $\kappa\psi$ soit scalairement σ-intégrable, respectivement σ-mesurable, i.e. que pour tout $\varphi \in F$ et $\psi \in G$, on ait $\langle\varphi|\kappa\psi\rangle \in \mathbf{L}^1(\sigma)$, respectivement que $\langle\varphi|\kappa\psi\rangle$ soit σ-mesurable.

REMARQUE 2 Si κ est scalairement σ-intégrable, alors κ est absolument σ-intégrable dans $\mathcal{L}(G, F_\sigma^\dagger)$ si, et seulement si

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \int |\langle\varphi|\kappa\psi\rangle| d\sigma$$

est séparément une semi-norme continue sur F respectivement G .

C'est immédiat par le théorème 5.4.(ii) et la définition de la topologie sur $F \bowtie_i G$, montrant que κ est absolument σ-intégrable dans $\mathcal{L}(G, F_\sigma^\dagger)$ si, et seulement si, l'application

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \langle\varphi|\kappa\psi\rangle : F \times G \longrightarrow L^1(\sigma)$$

est séparément continue. □

Plus précisément on a la

PROPOSITION *Pour que κ soit absolument σ-intégrable dans $\mathcal{L}(G, F_\sigma^\dagger)$, il faut et il suffit que, pour tout $\psi \in G$, l'application $\kappa\psi$ soit absolument σ-intégrable dans $F^\dagger$ et que, pour tout $f \in \mathcal{L}^\infty(\sigma)$, l'application*

$$\psi \longmapsto \int f \cdot \kappa\psi \ d\sigma : G \longrightarrow F_\sigma^\dagger$$

soit (faiblement) continue.

D'après la remarque 1, nous pouvons supposer que $\kappa\psi$ est scalairement σ-intégrable pour tout $\psi \in G$. Il suffit alors de constater que la condition de continuité de la remarque 2 signifie d'une part que, pour tout $\psi \in G$, la fonction

$$\varphi \longmapsto \int |\langle\varphi|\kappa\psi\rangle| d\sigma$$

est une semi-norme continue sur F , donc que $\kappa\psi$ est absolument σ-intégrable dans $F^\dagger$, et d'autre part que

$$\psi \longmapsto \int |\langle\varphi|\kappa\psi\rangle| d\sigma = \sup_{|f|_\infty \leqslant 1} \left| \int \langle\varphi|\kappa\psi\rangle f \ d\sigma \right| = \sup_{|f|_\infty \leqslant 1} \left| \left\langle\varphi \middle| \int f \cdot \kappa\psi \ d\sigma\right\rangle \right|$$

est une semi-norme continue sur F , d'où le résultat puisque F est tonnelé. $\square$

16.3 INTEGRATION VECTORIELLE

1.2 PROPOSITION. Si $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est μ-mesurable et finie μ-presque partout, alors l'ensemble des parties compactes K telles que $f_{|K}$ soit bornée est μ-dense.

Soit K une partie compacte et $\varepsilon > 0$. On a

$$K = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{|f| \leqslant n\} \cap K \right) \cup N \ ,$$

où N est une partie μ-négligeable. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(K \smallsetminus \{|f| \leqslant n\}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, puis une partie compacte $K_\varepsilon \subset \{|f| \leqslant n\} \cap K$ telle que

$$\mu(\{|f| \leqslant n\} \cap K \smallsetminus K_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

On a alors $\mu(K \smallsetminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ et $f_{|K_\varepsilon}$ est bornée. □

DEFINITION. Nous dirons qu'une application $\zeta : X \longrightarrow F_\sigma^\dagger$ est Lusin μ-bornée si l'ensemble des parties compactes, sur lesquelles ζ (faiblement) bornée, est μ-dense.

THEOREME. Si ζ est scalairement μ-intégrable et Lusin μ-bornée, alors ζ est absolument μ-intégrable dans $F^\dagger$.

Si K est une partie compacte sur laquelle ζ est bornée, on a

$${}_K\!\int |\langle\varphi|\zeta\rangle| d\mu \leqslant \mu(K) \cdot \sup_{x\in K} |\langle\varphi|\zeta(x)\rangle|$$

et

$$\varphi \longmapsto \ \sup_{x\in K} |\langle\varphi|\zeta(x)\rangle|$$

est une semi-norme continue, puisque F est tonnelé. Il en est donc de même de

$$\varphi \longmapsto \int |\langle\varphi|\zeta\rangle| d\mu = \ \sup_{K_K} \int |\langle\varphi|\zeta\rangle| d\mu \ ,$$

K parcourant l'ensemble μ-dense des parties compactes sur lesquelles ζ est bornée. □

REMARQUE. On dit que ζ est Lusin μ-mesurable si l'ensemble des parties compactes, sur lesquelles ζ est (faiblement) continue, est μ-dense. Dans ce cas, ζ est scalairement μ-négligeable si, et seulement si, ζ est μ-négligeable.

C'est immédiat, puisque l'on peut se restreindre aux parties compactes contenues dans le support de μ . □

1.3 THEOREME DE LEBESGUE. Soit (ζ_k) une suite de $\mathcal{L}^1(\mu, F^\dagger)$ convergente μ-presque partout vers ζ dans $F_\sigma^\dagger$. Si, pour tout $\varphi \in F$, il existe une fonction μ-intégrable g_φ telle que, pour tout k on ait $|\langle\varphi|\zeta_k\rangle| \leqslant g_\varphi$, alors ζ est absolument μ-intégrable dans $F^\dagger$ et on a

$$\int \zeta \ d\mu = \ \lim \int \zeta_k d\mu \text{ dans } \ F_\sigma^\dagger.$$

Par le théorème de Lebesgue classique il est clair que ζ est scalairement μ-intégrable et, pour tout $\varphi \in F$, on a

$$\int |\langle\varphi|\zeta\rangle| d\mu \leqslant \int^\bullet \sup_k |\langle\varphi|\zeta_k\rangle| d\mu = \ \sup_k \int \ \max_{l=0,..,k} |\langle\varphi|\zeta_l\rangle| d\mu \leqslant \int g_\varphi d\mu < \infty \ .$$

Comme

$$\int \max_{l=0,..,k} |\langle\varphi|\zeta_l\rangle| d\mu \leqslant \sum_{l=0}^{k} \int |\langle\varphi|\zeta_l\rangle| d\mu \ ,$$

et puisque le membre de droite est une semi-norme continue, il en est de même du membre de gauche. F étant tonnelé, on en déduit alors que

$$\varphi \longmapsto \int \sup_k |\langle\varphi|\zeta_k\rangle| d\mu$$

est une semi-norme continue, donc aussi

$$\varphi \longmapsto \int |\langle\varphi|\zeta\rangle| d\mu \ .$$

Ceci finit de prouver que ζ est absolument μ-intégrable dans $F^\dagger$. □

1.4 REMARQUES. Soit G un espace localement convexe tonnelé et $\kappa : X \longrightarrow \mathcal{L}(G, F_\sigma^\dagger)$ une application. Pour tout $\psi \in G$ on définit

$$\kappa\psi : x \longmapsto \kappa(x)\psi : X \longrightarrow F^\dagger \ .$$

(1) Pour que κ soit scalairement μ-intégrable, respectivement μ-mesurable, il faut et il suffit que, pour tout $\psi \in G$, l'application $\kappa\psi$ soit scalairement μ-intégrable, respectivement μ-mesurable, i.e. que pour tout $\varphi \in F$ et $\psi \in G$, on ait $\langle\varphi|\kappa\psi\rangle \in \mathbf{L}^1(\mu)$, respectivement que $\langle\varphi|\kappa\psi\rangle$ soit μ-mesurable.

(2) Si κ est scalairement μ-intégrable, alors κ est absolument μ-intégrable dans $\mathcal{L}(G, F_\sigma^\dagger)$, si et seulement si

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \int |\langle\varphi|\kappa\psi\rangle| d\mu$$

est séparément une semi-norme continue sur F respectivement G.

C'est immédiat par le théorème 1.1.(ii) et la définition de la topologie sur $F \bowtie_i G$, montrant que κ est absolument μ-intégrable dans $\mathcal{L}(G, F_\sigma^\dagger)$ si, et seulement si, l'application

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \langle\varphi|\kappa\psi\rangle : F \times G \longrightarrow L^1(\mu)$$

est séparément continue.□

Plus précisément on a la

PROPOSITION. Pour que κ soit absolument μ-intégrable dans $\mathcal{L}(G, F_\sigma^\dagger)$, il faut et il suffit que, pour tout $\psi \in G$,l'application $\kappa\psi$ soit absolument μ-intégrable dans $F^\dagger$ et que, pour tout $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$,l'application

$$\psi \longmapsto \int f \cdot \kappa\psi \ d\mu : G \longrightarrow F_\sigma^\dagger$$

soit (faiblement) continue.

D'après la remarque 1, nous pouvons supposer que $\kappa\psi$ est scalairement μ-intégrable pour tout $\psi \in G$. Il suffit alors de constater que la condition de continuité de la remarque 2 signifie d'une part que, pour tout $\psi \in G$, la fonction

$$\varphi \longmapsto \int |\langle\varphi|\kappa\psi\rangle| d\mu$$

est une semi-norme continue sur F , donc que $\kappa\psi$ est absolument μ-intégrable dans $F^\dagger$, et d'autre part que

$$\psi \longmapsto \int |\langle\varphi|\kappa\psi\rangle| d\mu = \sup_{|f|_\infty \leqslant 1} \left|\int \langle\varphi|\kappa\psi\rangle f \, d\mu\right| = \sup_{|f|_\infty \leqslant 1} \left|\langle\varphi| \int f \cdot \kappa\psi \, d\mu\rangle\right|$$

est une semi-norme continue sur F , d'où le résultat puisque F est tonnelé.□

Soient $\widehat{h} : X \longrightarrow \mathcal{L}_+\left(F, F^\dagger\right)$ et $\widehat{\mathcal{H}} : X \longrightarrow Hilb\left(F^\dagger\right)$ l'application correspondante par le théorème de Schwartz.

DEFINITION 2. Soit G un espace localement convexe tonnelé. On dit qu'une application

$$\widehat{\alpha} : X \longrightarrow \mathcal{L}(G, F^\dagger)$$

est un champ d'opérateurs (à valeurs dans $\widehat{\mathcal{H}}$) si l'on a $\widehat{\alpha}(x) \in \mathcal{L}(G, \widehat{\mathcal{H}}(x))$ pour μ-presque tous les $x \in X$. On définit

$$\widehat{\alpha}^\dagger \widehat{\alpha} : x \longmapsto \widehat{\alpha}(x)^\dagger \widehat{\alpha}(x) : X \longrightarrow \mathcal{L}_+(G, G^\dagger) \ .$$

On sait que $\widehat{\alpha}(x)^\dagger \widehat{\alpha}(x)$ est le noyau de l'image $\widehat{\alpha}(x)^\dagger \left(\widehat{\mathcal{H}}(x)\right) \hookrightarrow G^\dagger$. On désigne par $\widehat{\alpha}^\dagger \left(\widehat{\mathcal{H}}\right)$ l'application correspondante dans $\mathrm{Hilb}(G^\dagger)$.

Remarquons que $\widehat{h}$ est un champ d'opérateurs à valeurs dans $\widehat{\mathcal{H}}$. On a $\widehat{h}^\dagger \widehat{h} = \widehat{h}$, puisque $\widehat{h}(x)^\dagger$ est l'injection canonique de $\widehat{\mathcal{H}}(x)$ dans $F^\dagger$.

REMARQUE.

(1) Pour que $\widehat{\alpha}^\dagger \widehat{\alpha}$ soit scalairement μ-mesurable, il faut et il suffit que, pour tout $\psi \in G$, la fonction $\|\widehat{\alpha}\psi\|$ soit μ-mesurable.

C'est évident, car $\langle\varphi|\widehat{\alpha}^\dagger \widehat{\alpha}\psi\rangle = (\widehat{\alpha}\varphi|\widehat{\alpha}\psi)$ s'exprime à l'aide de fonctions du type $\|\widehat{\alpha}\psi\|$ grâce à l'identité polaire. □

PROPOSITION. Pour que $\widehat{\alpha}^\dagger \widehat{\alpha}$ soit absolument μ-intégrable dans $\mathcal{L}(G, G^\dagger)$, il faut et il suffit que , pour tout $\psi \in G$, on ait $\|\widehat{\alpha}\psi\| \in L^2(\mu)$ et que $\psi \longmapsto \|\widehat{\alpha}\psi\|_2$ soit une semi-norme continue sur G.

En effet si $\widehat{\alpha}^\dagger \widehat{\alpha}$ est absolument μ-intégrable dans $\mathcal{L}\left(G, G^\dagger\right)$, alors

$$x \longmapsto \|\widehat{\alpha}\psi\|^2(x) = (\widehat{\alpha}(x)\psi|\widehat{\alpha}(x)\psi)_x = \langle\psi|\widehat{\alpha}(x)^\dagger \widehat{\alpha}(x)\psi\rangle$$

est μ-intégrable, et

$$\psi \longmapsto \|\widehat{\alpha}\psi\|_2 = \left(\int \|\widehat{\alpha}\psi\|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int \langle\psi|\widehat{\alpha}^\dagger \widehat{\alpha}\psi\rangle d\mu\right)^{\frac{1}{2}} = \langle\psi| \left(\int \widehat{\alpha}^\dagger \widehat{\alpha} d\mu\right) \psi\rangle^{\frac{1}{2}}$$

est une semi-norme continue sur G , puisque $\int \widehat{\alpha}^\dagger \widehat{\alpha} d\mu$ est un noyau positif.

Réciproquement, $\widehat{\alpha}^\dagger \widehat{\alpha}$ est scalairement μ-mesurable par la remarque ci-dessus. D'autre part, pour tout $\varphi, \psi \in G$ on a

$$|\langle\varphi|\widehat{\alpha}^\dagger \widehat{\alpha}\psi\rangle| = |(\widehat{\alpha}\varphi|\widehat{\alpha}\psi)| \leqslant \|\widehat{\alpha}\varphi\| \cdot \|\widehat{\alpha}\psi\| \ ,$$

donc

$$\int^\bullet |\langle\varphi|\widehat{\alpha}^\dagger \widehat{\alpha}\psi\rangle| d\mu \leqslant \|\widehat{\alpha}\varphi\|_2 \|\widehat{\alpha}\psi\|_2 \ ,$$

d'où le résultat par la remarque 1.4.2. □

NOTATION. Dans ce cas $\int \widehat{\alpha}^\dagger \widehat{\alpha} \, d\mu$ est le noyau d'un sous-espace hilbertien que nous noterons $\int \widehat{\alpha}^\dagger \left(\widehat{\mathcal{H}}\right) d\mu$.

COROLLAIRE. Pour que $\widehat{h} : X \longrightarrow \mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$ soit absolument μ-intégrable dans

$\mathcal{L}(F, F^\dagger)$, il faut et il suffit que, pour tout $\varphi \in F$, on ait $\|\widehat{h}\varphi\| \in L^2(\mu)$ et que

$$\varphi \longmapsto \|\widehat{h}\varphi\|_2$$

soit une semi-norme continue sur F.

Dans ce cas, tout $\zeta \in \Lambda^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})$ est absolument μ-intégrable dans $F^\dagger$ et

$$\int : \zeta \longmapsto \int \zeta \, d\mu : \Lambda^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}}) \longrightarrow F^\dagger_\sigma$$

est continue.

Pour la seconde partie il suffit de constater que, pour tout $\varphi \in F$, on a

$$\int^\bullet |\langle\varphi|\zeta\rangle| d\mu \leqslant \int^\bullet |(\widehat{h}\varphi|\zeta)| d\mu \leqslant \|\widehat{h}\varphi\|_2 \|\zeta\|_2 \ ,$$

d'où le résultat. $\square$

REMARQUE.

(2) Dans ce cas, pour tout $\varphi \in F$, on a $\widehat{h}\varphi \in \Lambda^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})$ et, pour tout champ $\zeta \in \Lambda^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})$ la fonction $\langle\varphi|\zeta\rangle = (\widehat{h}\varphi|\zeta)$ est μ-intégrable ! Ainsi, Ker $\int$ est l'ensemble de ces champs tels que, pour tout $\varphi \in F$, on ait

$$\int (\widehat{h}\varphi|\zeta) d\mu = 0 \ ,$$

i.e. l'orthogonal de $h(F)$ dans $\Lambda^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})$. Mais attention, $\Lambda^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})$ n'est pas un espace de Hilbert. Seul ces produits scalaires particuliers ont un sens.

Ceci nous conduit à poser la

1.6 DEFINITION. Soit $\widehat{h} : X \longrightarrow \mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$ une application absolument μ-intégrable dans $\mathcal{L}(F, F^\dagger)$. Considérons $\widehat{h}(F) \bowtie L^\infty(\mu)$ comme un sous-espace vectoriel de $\Lambda^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})$ grâce à l'application injective déduite de l'application sesquilinéaire à droite

$$(\widehat{h}\varphi, f) \longmapsto \bar{f} \cdot \widehat{h}\varphi \ .$$

On désigne alors par $L^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})$ la fermeture de $\widehat{h}(F) \bowtie L^\infty(\mu)$ dans $\Lambda^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})$.

THEOREME. $L^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})$ est un espace de Hilbert. Plus précisément, pour tout $\zeta, \theta \in L^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})$, les fonctions

$$\|\zeta\| : x \longmapsto \|\zeta(x)\|_x \text{ et } (\zeta|\theta) : x \longmapsto (\zeta(x)|\theta(x))_x$$

sont μ-mesurables et le produit scalaire est donné par

$$(\zeta|\theta)_{L^2} = \int (\zeta|\theta) d\mu.$$

C'est immédiat par le théorème 1.5, puisque pour tout $\varphi \in F$, le champ $\widehat{h}\varphi$ est tel que $\|\widehat{h}\varphi\|^2 = (\widehat{h}\varphi|\widehat{h}\varphi) = \langle\varphi|\widehat{h}\varphi\rangle$ soit μ-mesurable et que

$$\|\widehat{h}\varphi\|_2^2 = \int \|\widehat{h}\varphi\|^2 d\mu = \int (\widehat{h}\varphi|\widehat{h}\varphi) d\mu. \square$$

COROLLAIRE. Si $\widehat{\alpha}$ est un champ d'opérateurs tel que

$$\psi \longmapsto \widehat{\alpha}\psi : G \longrightarrow L^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})$$

soit continue, alors $\widehat{\alpha}^\dagger\widehat{\alpha}$ est absolument μ-intégrable dans $\mathcal{L}(G, G^\dagger)$. En outre, pour tout champ $\zeta \in L^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})$, l'application $\widehat{\alpha}^\dagger\zeta$ est un champ à valeurs dans $\widehat{\alpha}^\dagger(\widehat{\mathcal{H}})$, qui est absolument μ-

intégrable dans $G^\dagger$,

$$\int \widehat{\alpha}^\dagger : \zeta \longmapsto \int \widehat{\alpha}^\dagger \zeta \ d\mu : L^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}}) \longrightarrow G^\dagger_\sigma$$

est continue, et on a

$$\int \widehat{\alpha}^\dagger (L^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})) = \int \widehat{\alpha}^\dagger (\widehat{\mathcal{H}}) d\mu .$$

La première partie découle immédiatement de la proposition 1.5. Quant à la seconde, on a

$$\int^\bullet |\langle \psi | \widehat{\alpha}^\dagger \zeta \rangle| d\mu = \int^\bullet |(\widehat{\alpha}\psi | \zeta)| d\mu \leqslant \|\widehat{\alpha}\psi\|_2 \|\zeta\|_2 < \infty$$

et $\psi \longmapsto \|\widehat{\alpha}\psi\|_2$ est une semi-norme continue sur G . D'autre part

$$([\int \widehat{\alpha}^\dagger]^\dagger \psi | \zeta)_{L^2} = \langle \psi | \int \widehat{\alpha}^\dagger \zeta \ d\mu \rangle = \int (\widehat{\alpha}\psi | \zeta) d\mu = (\widehat{\alpha}\psi | \zeta)_{L^2} \ ,$$

ce qui montre que le noyau de $\int \widehat{\alpha}^\dagger (L^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})) \hookrightarrow G^\dagger$ est

$$\psi \longmapsto \int \widehat{\alpha}^\dagger \widehat{\alpha} \psi \ d\mu \ , \text{ i.e. } \int \widehat{\alpha}^\dagger \widehat{\alpha} d\mu \ ,$$

d'où le résultat. □

Nous allons maintenant expliciter le thérème de l'image dans cette situation. Tout d'abord le noyau de $\mathcal{H} := \int \widehat{\mathcal{H}} d\mu$ est $h := \int \widehat{h} d\mu$ et

$$\mathcal{H} = \int (L^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}}) \ ,$$

ce qui signifie que tout élément $\xi \in \mathcal{H}$ est de la forme $\int \zeta \ d\mu$ pour un $\zeta \in L^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})$. On dit que ζ est une décomposition de ξ . D'autre part Ker $\int$ est l'ensemble des $\zeta \in L^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})$ tels que $(\widehat{h}\varphi | \zeta)_{L^2} = 0$ pour tout $\varphi \in F$, donc

$$(Ker \int)^{\perp L^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})} =^{L^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})} \quad .$$

Remarquer la différence entre

$$^{L^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})} \text{ et } L^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}}) =^{\Lambda^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})} \quad .$$

La décomposition de Parseval $\hat{\xi}$ de $\xi \in \mathcal{H}$ est l'unique décomposition ζ de ξ adhérente à $\widehat{h}(F)$. C'est aussi l'unique décomposition telle que $\|\xi\|^2_{\mathcal{H}} = \int \|\zeta\|^2 d\mu$.

Nous dirons que $\widehat{\mathcal{H}}$ est une décomposition de $\mathcal{H}$, et qu'elle est directe si $\int : L^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}}) \longrightarrow \mathcal{H}$ est injective, i.e. si $\widehat{h}(F)$ est dense dans $L^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})$.

Pour tout $\varphi \in F$, la décomposition de Parseval de $h\varphi \in \mathcal{H}$ est $\widehat{h}\varphi \in L^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}})$, puisque

$$\|h\varphi\|^2_{\mathcal{H}} = \langle \varphi | h\varphi \rangle = \int \langle \varphi | \widehat{h}\varphi \rangle d\mu = \int \|\widehat{h}\varphi\|^2 d\mu \ .$$

Comme tout $\xi \in \mathcal{H}$ est limite d'une suite $(h\varphi_k)$, puisque $h(F)$ est dense dans $\mathcal{H}$, on a $\hat{\xi} = \lim \widehat{h}\varphi_k$, ce qui permet en principe de calculer $\hat{\xi}$!

REMARQUE. L'application continue

$$\int \widehat{\alpha}^\dagger : \zeta \longmapsto \int \widehat{\alpha}^\dagger \zeta \ d\mu : L^2(\mu, \widehat{\mathcal{H}}) \longrightarrow G^\dagger_\sigma$$

induit une application linéaire continue

$$\xi \longmapsto \int \widehat{\alpha}^{\dagger}\hat{\xi} d\mu : \mathcal{H} = \int \widehat{\mathcal{H}} d\mu \longrightarrow \mathcal{G} = \int \widehat{\alpha}^{\dagger}(\widehat{\mathcal{H}}) d\mu \ ,$$

puisque

$$|\langle\psi| \int \widehat{\alpha}^{\dagger}\hat{\xi} d\mu\rangle| = |\int (\widehat{\alpha}\psi|\hat{\xi}) d\mu| = |(\widehat{\alpha}\psi|\hat{\xi})_{L^2}| \leqslant \|\widehat{\alpha}\psi\|_2 \|\hat{\xi}\|_2 \leqslant \|\widehat{\alpha}\psi\|_2 \|\xi\|_{\mathcal{H}} \ ,$$

donc

$$\| \int \widehat{\alpha}^{\dagger}\hat{\xi} d\mu\|_{\mathcal{G}} \leqslant \sup_{\langle\psi|g\psi\rangle\leqslant 1} \|\widehat{\alpha}\psi\|_2 \cdot \|\xi\|_{\mathcal{H}} \ ,$$

en désignant par g le noyau de $\mathcal{G}$. Sa norme est donc plus petite que

$$\sup_{\langle\psi|g\psi\rangle\leqslant 1} \|\widehat{\alpha}\psi\|_2 \ .$$

16.4 Familles sommables de sous-espaces hilbertiens

Nous retrouverons cet exemple sous une forme plus générale dans le cadre de l'intégration de sous-espaces hilbertiens au §4.

DEFINITION Nous dirons qu'une famille $(\mathcal{H}_j)_{j\in J}$ de sous-espaces hilbertiens est sommable si la famille $(h_j)_{j\in J}$ des noyaux correspondants est sommable dans $\mathcal{L}_s\left(F, F_\sigma^\dagger\right)$. Cela signifie que, pour tout $\varphi, \psi \in F$, la famille $(\langle \varphi | h_j\psi\rangle)_{j\in J}$ est sommable dans $\mathbb{C}$, i.e. toute série formée des termes non-nuls est commutativement ou absolument convergente, et la forme sesquilinéaire

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \sum_{j\in J} \langle \varphi | h_j\psi\rangle$$

est séparement continue, i.e. définit une application linéaire continue $h : F \longrightarrow F_\sigma^\dagger$.

DEFINITION Si $h := \sum_{j\in J} h_j$, nous écrirons $\mathcal{H} := \sum_{j\in J} \mathcal{H}_j$ pour le sous-espace hilbertien correspondant.

PROPOSITION *Soit $(\mathcal{H}_j)_{j\in J}$ une famille de sous-espaces hilbertiens de $F^\dagger$. Pour que $(\mathcal{H}_j)_{j\in J}$ soit sommable, il faut et il suffit que, pour tout $\varphi \in F$, on ait $\left(\|h_j\varphi\|_{\mathcal{H}_j}\right)_{j\in J} \in \ell^2(J)$.*

Dans ce cas, pour tout $\psi \in F$, la famille $(h_j\psi)_{j\in J}$ est sommable dans $F_\sigma^\dagger$. Cela signifie que, pour tout $\varphi \in F$, la famille $(\langle \varphi | h_j\psi\rangle)_{j\in J}$ est sommable dans $\mathbb{C}$ et que

$$\varphi \longmapsto \sum_{j\in J} \langle \varphi | h_j\psi\rangle$$

est une forme anti-linéaire continue sur F.

Dans ce cas, $\sum_{j\in J} h_j \in \mathcal{L}_+(F, F^\dagger)$, $\sum_{j\in J} \|h_j\varphi\|_{\mathcal{H}_j}^2 = \left\langle \varphi \middle| \left(\sum_{j\in J} h_j\right)\varphi\right\rangle$ pour tout $\varphi \in F$, et

$$\varphi \longmapsto \left(\sum_{j\in J} \|h_j\varphi\|_{\mathcal{H}_j}^2\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

ainsi que les fonctions partielles de

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \sum_{j\in J} |\langle \varphi | h_j\psi\rangle|$$

sont des semi-norme continue sur F.

Il est clair, par la proposition 5.9, que (i) entraîne (ii). Si (ii) est satisfait, l'application $h : \varphi \longmapsto \int \widehat{h}\varphi \, d\sigma : F \longrightarrow F^\dagger$ est linéaire, hermitienne et positive, puisque pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a

$$\langle \psi | h\varphi\rangle = \left\langle \psi \middle| \int \widehat{h}\varphi \, d\sigma \right\rangle = \int \left\langle \psi \middle| \widehat{h}\varphi \right\rangle d\sigma = \int \left\langle \widehat{h}\xi \middle| \varphi \right\rangle d\sigma = \langle h\psi | \varphi\rangle \ .$$

D'après 5.1, nous avons $h \in \mathcal{L}(F, F^\dagger)$ et $h = \int \widehat{h}\, d\sigma$, donc (iii).

Si $\widehat{h}$ est σ-intégrable dans $\mathcal{L}(F, F^\dagger)$, alors

$$\left\|\widehat{h}\varphi\right\|^2 = \left(\widehat{h}\varphi\middle|\widehat{h}\varphi\right) = \left\langle\varphi\middle|\widehat{h}\varphi\right\rangle \in \mathbf{L}^1(\sigma) \ ,$$

donc $\widehat{h}\varphi$ est un champ. En outre

$$\varphi \longmapsto \left\|\widehat{h}\varphi\right\|_2 = \left(\int \left\|\widehat{h}\varphi\right\|^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int \left\langle\varphi\middle|\widehat{h}\varphi\right\rangle d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} = \left\langle\varphi\middle|\left(\int \widehat{h}\varphi\, d\sigma\right)\varphi\right\rangle^{\frac{1}{2}}$$

est une semi-norme continue sur F d'après le théorème de Schwartz 5.3, puisque $\int \widehat{h}\, d\sigma$ est évidemment un noyau positif :

$$\langle\varphi|\, h\varphi\rangle = \left\langle\varphi\middle|\int \widehat{h}\varphi\, d\sigma\right\rangle = \int \left\langle\varphi\middle|\widehat{h}\varphi\right\rangle d\sigma \geqslant 0 \ .$$

Ceci finit de prouver (iv).

Finalement (iv) implique (i), car pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a $\left\langle\varphi\middle|\widehat{h}\psi\right\rangle = \left(\widehat{h}\varphi\middle|\widehat{h}\psi\right)$ et la décomposition polaire montre que $\widehat{h}$ est scalairement σ-mesurable. En outre,

$$\left|\left\langle\varphi\middle|\widehat{h}\psi\right\rangle\right| = \left|\left(\widehat{h}\varphi\middle|\widehat{h}\psi\right)\right| \leqslant \left\|\widehat{h}\varphi\right\| \cdot \left\|\widehat{h}\psi\right\| \in \mathbf{L}^1(\sigma) \ .$$

16.5 Topologie sur $Hilb\left(F^{\dagger}\right)$

DEFINITION Nous munirons $Hilb\left(F^{\dagger}\right)$ de la topologie provenant de $\mathcal{L}_s\left(F, F^{\dagger}\right)$ par l'application de Schwartz $\mathcal{H} \longmapsto h$. Un filtre sur $Hilb(F^{\dagger})$ converge vers le sous-espace hilbertien $\mathcal{H}$ si le filtre $\mathfrak{G}$ correspondant sur $\mathcal{L}_s(F, F^{\dagger})$ converge vers h , i.e. si pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a

$$\langle \varphi | h\psi \rangle = \lim_{g \in \mathfrak{G}} \langle \varphi | g\psi \rangle \ .$$

PROPOSITION *Pour que $\mathfrak{G}$ converge vers h , il faut et il suffit que, pour tout $\varphi \in F$, on ait*

$$\|h\varphi\|_{\mathcal{H}} = \lim_{g \in \mathfrak{G}} \|g\varphi\|_{\mathcal{G}} \ .$$

C'est immédiat par la décomposition polaire. □

Chapitre 17

EXTRA

17.1 Orthogonalité.

DEFINITION On dit qu'une partie A de F est *totale dans* F , si le sous-espace vectoriel engendré par A est dense dans F , i.e. si le sous-espace vectoriel fermé engendré par A est égal à F .

Pour toute partie $A \subset F$, respectivement $B \subset F^\dagger$, on pose

$$A^\perp := \left\{\mu \in F^\dagger \mid \langle A| \mu\rangle = \{0\}\right\} \quad \text{, resp.} \quad B^\perp := \{\varphi \in F \mid \langle \varphi| B\rangle = \{0\}\} \ .$$

THEOREME *Soient* A *et* B *sont des parties de* F *et* $F^\dagger$ *respectivement. Alors*

(i) $A^\perp$ *est un sous-espace vectoriel fermé de* $F^\dagger$ *et* $B^\perp$ *un sous-espace vectoriel fermé de* F *et* F_σ .

(ii) $A^{\perp\perp} := \left(A^\perp\right)^\perp$ *est le sous-espace vectoriel fermé, de* F *comme de* F_σ *, engendré par* A .

(iii) $A^{\perp\perp\perp} := \left(A^{\perp\perp}\right)^\perp = A^\perp$.

La première partie est immédiate grâce aux formules

$$A^\perp = \bigcap_{\varphi\in A} \langle\varphi|^{-1}(0) \quad \text{et} \quad B^\perp = \bigcap_{\mu\in B} |\mu\rangle^{-1}(0) \ ,$$

puisque $\langle\varphi|$, resp. $|\mu\rangle$, est continue sur $F^\dagger$, resp. F et F_σ .

On a évidemment $A \subset A^{\perp\perp}$. Si H désigne le sous-espace vectoriel fermé engendré par A , on a $H \subset A^{\perp\perp}$, puisque $A^{\perp\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé. Pour prouver l'autre inclusion, considérons $\varphi \in F \smallsetminus H$. On a $[\varphi] \in F/H \smallsetminus \{0\}$; comme F/H est séparé (théorème 1.8), par le théorème de Hahn-Banach 2.6, il existe $\tilde{\mu} \in (F/H)^\dagger$ tel que $\langle [\varphi]| \tilde{\mu}\rangle \neq 0$. La forme semi-linéaire

$$\mu : F \xrightarrow{\pi} F/H \xrightarrow{\tilde{\mu}} \mathbb{K}$$

est continue, et on a

$$\langle A| \mu\rangle \subset \langle H| \mu\rangle = \langle [H]| \tilde{\mu}\rangle = \{\langle 0| \tilde{\mu}\rangle\} = \{0\} \quad \text{et} \quad \langle \varphi| \mu\rangle = \langle [\varphi]| \tilde{\mu}\rangle \neq 0 \ .$$

Ceci montre que $\tilde{\mu} \in A^\perp$, donc que $\varphi \notin A^{\perp\perp}$. Nous avons donc prouvé que $A^{\perp\perp}$ est le sous-espace vectoriel fermé de F engendré par A . Comme $A^{\perp\perp}$ est faiblement fermé par (i), et que la topologie faible est moins fine que celle de F (corollaire 2.5), $A^{\perp\perp}$ est aussi le sous-espace vectoriel fermé de F_σ engendré par A .

Finalement, on a $A^\perp \subset \left(A^\perp\right)^{\perp\perp} = A^{\perp\perp\perp}$ par (ii), mais aussi $A \subset A^{\perp\perp}$, donc $A^{\perp\perp\perp} = \left(A^{\perp\perp}\right)^\perp \subset A^\perp$. □

17.2 Fonctionnelles sous-linéaires s.c.i..

Il est utile de comparer le lemme qui suit avec la proposition 1.2 et la remarque 1.2.7.

LEMME *Soit $p : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle sous-linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *p est s.c.i. en 0 .*

(ii) *Il existe une boule de centre 0 sur laquelle p est minorée.*

(iii) *Il existe une semi-norme continue q tel que $p \geqslant -q$.*

(i)⇒(ii) : Si p est s.c.i. en 0 , il existe un voisinage V de 0 tel que $p(V) \subset \left]-1, \infty\right]$, d'où le résultat.

(ii)⇒(iii) : Soient q une semi-norme continue telle que p soit minorée par $-M$ sur $B_q(0,1)$ et $\varphi \in F$. Si $q(\varphi) > 0$, alors $\frac{\varphi}{q(\varphi)} \in B_q(0,1)$, donc $p\left(\frac{\varphi}{q(\varphi)}\right) \geqslant -M$ et par suite $p(\varphi) \geqslant -M \cdot q(\varphi)$. Si $q(\varphi) = 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on a $q(\alpha \cdot \varphi) = 0$, donc $\alpha \cdot \varphi \in B_q(0,1)$ et par suite $\alpha \cdot p(\varphi) = p(\alpha \cdot \varphi) \geqslant -M$. On en déduit que $p(\varphi) \geqslant -\frac{M}{\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, ce qui prouve que $p(\varphi) \geqslant 0 = -M \cdot q(\varphi)$.

(iii)⇒(i) : Il suffit de constater que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$p(B_q(0,\varepsilon)) \subset \left]-\varepsilon, \infty\right] \ .$$

□

THEOREME *Soit F un espace localement convexe réel. Pour toute fonctionnelle sous-linéaire s.c.i. $p : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$, on a*

$$p = \sup\{\mu \in F' \mid \mu \leqslant p\} \ .$$

Il nous suffit de montrer, pour tout $\psi \in F$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\gamma < p(\psi)$, qu'il existe $\mu \in F'$ tel que $\mu \leqslant p$ et $\mu(\psi) \geqslant \gamma$. En définissant

$$q : \mathbb{R}_+ \cdot (-\psi) \longrightarrow \mathbb{R} : -\alpha \cdot \psi \longmapsto -\alpha \cdot \gamma \ ,$$

cela revient à construire une forme linéaire μ telle que $\mu \leqslant p$, $\mu \leqslant \tilde{q}$ et $\mu \leqslant r$ pour une semi-norme continue r convenable. Grâce au corollaire 2.6, il nous reste donc à prouver l'existence d'une semi-norme continue r telle que $p \wedge \tilde{q} \wedge r$ soit une forme sous-linéaire.

Puisque p est s.c.i. en 0 , il existe par le lemme une semi-norme continue r_1 telle que $p \geqslant -r_1$. Comme

$$\varphi \longmapsto p(\varphi + \psi) - \gamma : F \longrightarrow \mathbb{R}$$

est aussi s.c.i. en 0 et que $p(\psi) - \gamma > 0$, il existe une semi-norme continue r_2 telle que

$$p(\varphi + \psi) - \gamma \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ tel que } r_2(\varphi) \leqslant 1 \ .$$

Etant donné $\varphi \in F$, si $0 \leqslant \alpha \leqslant r_2(\varphi)$, on a

$$r_1(\alpha \cdot \psi) \leqslant r_1(\psi) \cdot r_2(\varphi) \ ,$$

donc

$$r_1(\varphi + \alpha \cdot \psi) \leqslant r_1(\varphi) + r_1(\psi) \cdot r_2(\varphi) \ ,$$

et par suite

$$p(\varphi + \alpha \cdot \psi) - \alpha \cdot \gamma \geqslant -r_1(\varphi + \alpha \cdot \psi) - \gamma \cdot r_2(\varphi) \geqslant -\left[r_1(\varphi) + \left(r_1(\psi) + \gamma^+\right) \cdot r_2(\varphi)\right] \ .$$

Si $\alpha \geqslant r_2(\varphi)$, on a

$$r_2\left(\frac{1}{\alpha} \cdot \varphi\right) = \frac{1}{\alpha} \cdot r_2(\varphi) \leqslant 1 \ ,$$

donc

$$p(\varphi + \alpha \cdot \psi) - \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot \left[p\left(\frac{1}{\alpha} \cdot \varphi + \psi\right) - \gamma\right] \geqslant 0 \ .$$

Nous avons donc prouvé que, pour tout $\varphi \in F$ et tout $\alpha \geqslant 0$, on a

$$p(\varphi + \alpha \cdot \psi) - \alpha \cdot \gamma \geqslant -r(\varphi)$$

en ayant défini la semi-norme continue

$$r := r_1 + \left[r_1(\psi) + \gamma^+\right] \cdot r_2 \ .$$

Ceci montre que $p \wedge \tilde{q} \geqslant -r$, puisque

$$p \wedge \tilde{q}(\varphi) = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}_+} p(\varphi + \alpha \cdot \psi) - \alpha \cdot \gamma \geqslant -r(\varphi) \ .$$

On en déduit que $p \wedge \tilde{q} \wedge r > -\infty$ sur F , car pour tout $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in F$ tels que $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$, on a

$$p \wedge \tilde{q}(\varphi_1) + r(\varphi_2) \geqslant -r(\varphi_1) + r(-\varphi_2) \geqslant -r(\varphi) > -\infty \ .$$

Par le lemme 2.6.(iii) $p \wedge \tilde{q} \wedge \check{r}$ est une fonctionnelle sous-linéaire. C'est une forme sous-linéaire car $p \wedge \tilde{q} \wedge r \leqslant r$. $\square$

17.3 Perturbations.

Soient T et S des opérateurs fermés tels que $D(T) = D(S)$. On a alors $\mathcal{D}(T) \simeq \mathcal{D}(S)$ et le produit scalaire de $\mathcal{D}(S)$ est continu sur $\mathcal{D}(T)$. Il existe donc $U \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(T))$ tel que

$$(\xi|\,\eta)_{\mathcal{D}(S)} = (\xi|\,U\eta)_{\mathcal{D}(T)} \quad \text{pour tout } \xi, \eta \in D(T) \ .$$

LEMME *Soit T un opérateur fermé symétrique dans $\mathcal{H}$. Si $z \in \mathbb{C}$ et $\operatorname{Im} z \neq 0$, alors $T - z \cdot \mathrm{Id}$ est injectif et $\operatorname{Im}(T - z \cdot \mathrm{Id})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$.*

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $y \neq 0$ tels que $z = x + i \cdot y$. Pour tout $\xi \in D(T)$, on a

$$\|(T - z \cdot \mathrm{Id})\,\xi\|^2 = \|T\xi - x \cdot \xi\|^2 - (T\xi - x \cdot \xi|\,iy \cdot \xi) - (iy \cdot \xi|\,T\xi - x \cdot \xi) + \|y \cdot \xi\|^2 =$$

$$= \|T\xi - x \cdot \xi\|^2 + \|y \cdot \xi\|^2 \ .$$

17.4 Représentations dans un sous-espace hilbertien.

LEMME *Soient $\mathcal{H}$ un sous-espace hilbertien de noyau $h \in \mathcal{L}_+^{\mathcal{A}}\left(F, F^\dagger\right)$, $a \in \mathcal{A}$ et $\varphi \in F$. Alors*

$$\|ah\varphi\|^2 \leqslant \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\sum_{l=1}^k \frac{1}{2^l}} \cdot \left\langle \varphi \left| (a^*a)^{2^k} h\varphi \right.\right\rangle^{\frac{1}{2^k}} \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

On a

$$\|ah\varphi\|^2 = (h(a\varphi)| ah\varphi) = \langle a\varphi | ah\varphi \rangle = \langle \varphi | a^*ah\varphi \rangle \ ,$$

ce qui prouve la formule pour $k = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il vient alors

$$\left\langle \varphi \left| (a^*a)^{2^k} h\varphi \right.\right\rangle \leqslant \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}} \cdot \left\langle (a^*a)^{2^k} \varphi \left| (a^*a)^{2^k} h\varphi \right.\right\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}} \cdot \left\langle \varphi \left| (a^*a)^{2^{k+1}} h\varphi \right.\right\rangle^{\frac{1}{2}} \ ,$$

d'où notre assertion par récurrence. □

COROLLAIRE *On a*

$$\|ah\varphi\|^2 \leqslant \langle \varphi | h\varphi \rangle \cdot \liminf_k \left\langle \varphi \left| (a^*a)^{2^k} h\varphi \right.\right\rangle^{\frac{1}{2^k}} \ .$$

C'est immédiat puisque

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = 1 \ .$$

□

THEOREME *Si $h : F \longrightarrow F^\dagger$ est $\mathcal{A}$-linéaire, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{H}$ *est $\mathcal{A}$-invariant.*

(ii) *Il existe une semi-norme sous-multiplicative p sur $\mathcal{A}$ telle que*

$$|\langle \varphi | a\xi \rangle| \leqslant p(a) \cdot \|\xi\| \cdot \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2}} \quad \textit{pour tout } a \in \mathcal{A} \ , \ \xi \in \mathcal{H} \textit{ et } \varphi \in F \ .$$

(iii) *Il existe une semi-norme sous-multiplicative p sur $\mathcal{A}$ telle que*

$$|\langle \varphi | ah\varphi \rangle| \leqslant p(a) \cdot \langle \varphi | h\varphi \rangle \quad \textit{pour tout } a \in \mathcal{A} \textit{ et } \varphi \in F \ .$$

(iv) *Pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a*

$$\sup_{\varphi \in F} \liminf_k \left\langle \varphi \left| (a^*a)^{2^k} h\varphi \right.\right\rangle^{\frac{1}{2^k}} < \infty \ .$$

Dans ce cas

$$\|\pi(a)\|^2 = \sup_{\varphi \in F} \liminf_k \left\langle \varphi \left| (a^*a)^{2^k} h\varphi \right.\right\rangle^{\frac{1}{2^k}} \ .$$

Démonstration. L'implication (i)⇒(ii) découle du théorème 9.2.(i), puisque $a \longmapsto \|\pi(a)\|$ est une semi-norme sous-multiplicative, et (ii)⇒(iii) est triviale. Grâce à (iii), pour tout $a \in \mathcal{A}$

et $\varphi \in F$, on a

$$\left\langle \varphi \left| (a^* a)^{2^k} h\varphi \right.\right\rangle \leqslant p\left((a^* a)^{2^k}\right) \cdot \langle \varphi | h\varphi \rangle \leqslant \langle \varphi | h\varphi \rangle \cdot p\,(a^* a)^{2^k} \ ,$$

donc

$$\left\langle \varphi \left| (a^* a)^{2^k} h\varphi \right.\right\rangle^{\frac{1}{2^k}} \leqslant \langle \varphi | h\varphi \rangle^{\frac{1}{2^k}} \cdot p\,(a^* a) < \infty \ ,$$

d'où l'on déduit (iv), ainsi que

Pour terminer la boucle, il nous suffit de montrer que, pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $\xi \in \mathcal{H}$, on a $a^* \xi \in \mathcal{H}$. Mais en utilisant le corollaire on obtient

$$|\langle \varphi | a^* \xi \rangle|^2 = |(ah\varphi | \xi)|^2 \leqslant \|ah\varphi\|^2 \cdot \|\xi\|^2 \leqslant \left(\sup_{\varphi \in F} \liminf_k \left\langle \varphi \left| (a^* a)^{2^k} h\varphi \right.\right\rangle^{\frac{1}{2^k}}\right) \cdot \|\xi\|^2 \cdot \langle \varphi | h\varphi \rangle \ ,$$

d'où le résultat par la proposition 5.3.(ii).

Finalement on a

$$\|\pi\,(a^*)\|^2 \leqslant \sup_{\varphi \in F} \liminf_k \left\langle \varphi \left| (a^* a)^{2^k} h\varphi \right.\right\rangle^{\frac{1}{2^k}} \leqslant \|\pi\,(a^* a)\|$$

17.5 p-normes.

PROPOSITION *Soient μ une intégrale de Radon sur X et f une fonction μ-mesurable.*

(i) Si f est μ-modérée, on a

$$\|f\|_{\infty,\mu} = \sup_{K \in \mathfrak{K}(X)} \|f\|_{\infty,\mu,K} \ .$$

(ii) Si μ est bornée, alors

$$\|f\|_{\infty,\mu} = \lim_p \|f\|_p \ .$$

Démonstration de (i). L'inégalité $\geqslant$ est triviale. Soit alors $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $M < \|f\|_{\infty,\mu}$. L'ensemble $\{|f| > M\}$ n'est donc pas μ-négligeable ; mais comme il est μ-mesurable et μ-modéré, il existe $K \in \mathfrak{K}(X)$ tel que $K \subset \{|f| > M\}$ et $\mu(K) > 0$ (cf. corollaire AN.20.14). On a donc $\|f\|_{\infty,\mu,K} \geqslant M$. $\square$

Démonstration de (ii). On a évidemment

$$\|f\|_p = \left(\int^* |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_{\infty,\mu} \cdot \mu(X)^{\frac{1}{p}} \ ,$$

donc

$$\limsup_p \|f\|_p \leqslant \|f\|_{\infty,\mu} \ .$$

Etant donné $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $M < \|f\|_{\infty,\mu}$, puisque μ est modérée, il existe $K \in \mathfrak{K}(X)$ tel que $K \subset \{|f| > M\}$ et $\mu(K) > 0$. On obtient alors

$$\|f\|_p \geqslant \left(\int^* 1_K \cdot |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant M \cdot \mu(K)^{\frac{1}{p}} \ ,$$

donc

$$\liminf_p \|f\|_p \geqslant M \ ,$$

et par suite

$$\liminf_p \|f\|_p \geqslant \|f\|_{\infty,\mu} \geqslant \limsup_p \|f\|_p \ .$$

$\square$

17.6 L'adjoint d'un opérateur

PROPOSITION *Soit $\gamma \in \mathcal{G}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe $\xi \in \mathcal{H}$ tel que l'on ait*

$$(T\theta|\,\gamma)_{\mathcal{G}} = \left(\theta|\,T^{\dagger}\gamma\right)_{\mathcal{D}(T)} = (\theta|\,\xi)_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \theta \in \mathcal{D}(T) \ .$$

(ii) *La forme semi-linéaire*

$$\theta \longmapsto (T\theta|\,\gamma)_{\mathcal{G}} : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est continue pour la topologie induite par $\mathcal{H}$.

(iii) $T^{\dagger}\gamma \in D_T(\mathcal{H})$.

Dans ce cas on peut prendre $\xi = D_T^{-1}T^{\dagger}\gamma$, D_T^{-1} étant l'application de Parseval associée à l'image $D_T(\mathcal{H})$.

Démonstration de (i)⇒(ii). Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Démonstration de (ii)⇒(iii). Remarquons qu'il existe par (iii) une constante $c \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\left|\left(\theta|\,T^{\dagger}\gamma\right)_{\mathcal{D}(T)}\right| = \left|(T\theta|\,\gamma)_{\mathcal{G}}\right| \leqslant c \cdot (\theta|\,\theta)_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} = c \cdot (\theta|\,D_T\theta)_{\mathcal{D}(T)}^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour tout } \theta \in \mathcal{D}(T) \ ;$$

la proposition 5.3.(ii) montre alors que $T^{\dagger}\gamma \in D_T(\mathcal{H})$, puisque le noyau de $D_T(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{D}(T)$ est $D_{T|\mathcal{D}(T)}$ par l'exemple 5.4.7.

Démonstration de (iii)⇒(i). Pour tout $\theta \in \mathcal{D}(T)$, on a

$$(T\theta|\,\gamma)_{\mathcal{G}} = \left(\theta|\,T^{\dagger}\gamma\right)_{\mathcal{D}(T)} = \left(\theta|\,D_T^{-1}T^{\dagger}\gamma\right)_{\mathcal{H}} \ ,$$

d'où le résultat et la formule. □

DEFINITION On désigne par T^* l'opérateur dans $\mathcal{G}$ à valeurs dans $\mathcal{H}$ défini sur

$$D(T^*) = \left(T^{\dagger}\right)^{-1}(D_T(\mathcal{H})) = \left\{\gamma \in \mathcal{G} \mid T^{\dagger}\gamma \in D_T(\mathcal{H})\right\}$$

par

$$T^*\gamma := D_T^{-1}T^{\dagger}\gamma \ .$$

On dit que T^* est l'*adjoint* de T .

Remarquons que nous n'avons pas supposé que T est de domaine dense.

THEOREME *T^* est un opérateur fermé. En outre on a*

(i)

$$\mathcal{G} = \mathcal{D}(T^*) + T(\mathcal{D}(T)) \quad \text{et} \quad T^*D_{T^*} = D_T^{-1}D_TD_T^{\dagger}T^{\dagger} \ ,$$

où $D_T^{-1}D_T$ est l'orthoprojecteur sur $(\operatorname{Ker} D_T)^{\perp}$.

(ii)

$$\mathcal{H} = \mathcal{D}(T) + T^*(\mathcal{D}(T^*))$$

et

$$T^* (\mathcal{D}(T^*)) = \mathcal{H} \cap T^\dagger (\mathcal{G}) \ .$$

Considérons une suite de Cauchy $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}(T^*)$, donc telle que $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(T^*\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soient des suites de Cauchy dans $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ respectivement. Si $\gamma := \lim_k \gamma_k \in \mathcal{G}$ et $\xi := \lim_k T^*\gamma_k \in \mathcal{H}$ et comme les applications

$$T^\dagger : \mathcal{G} \longrightarrow F^\dagger \quad \text{et} \quad \mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$$

sont continues, on a $T^\dagger\gamma = \lim_k T^\dagger\gamma_k$ et $\xi = \lim_k T^\dagger\gamma_k$ dans $F^\dagger$, donc $T^\dagger\gamma = \xi \in \mathcal{H}$. Ceci montre que $\gamma \in \mathcal{D}(T^*)$ et que $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}(T^*)$ vers γ .

Dmonstration de (i) Le noyau de $T(\mathcal{D}(T)) \hookrightarrow \mathcal{G}$ est $TT^\dagger$ par le théorème 5.4. Il nous suffit donc de montrer, par la proposition 5.7, que celui de $\mathcal{D}(T^*) \hookrightarrow \mathcal{G}$ est $\mathrm{Id}_{\mathcal{G}} - TT^\dagger$, donc que pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$ et $\vartheta \in D(T^*)$, on a

$$\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}} - TT^\dagger\right)\gamma \in \mathcal{D}(T^*)$$

et

$$(\gamma|\,\vartheta)_{\mathcal{G}} = \left(\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}} - TT^\dagger\right)\gamma\middle|\,\vartheta\right)_{\mathcal{D}(T^*)} \ .$$

Mais

$$T^\dagger\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}} - TT^\dagger\right) = \left(\mathrm{Id}_{\mathcal{D}(T)} - T^\dagger T\right)T^\dagger = D_T D_T^\dagger T^\dagger \tag{$*$}$$

par la proposition 7.1.(iii) ; on a donc

$$T^\dagger\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}} - TT^\dagger\right)\gamma = D_T D_T^\dagger T^\dagger\gamma \in D_T(\mathcal{H}) \ ,$$

ce qui prouve l'appartenance. En outre

$$T^*\left(\gamma - TT^\dagger\gamma\right) = D_T^{-1} D_T D_T^\dagger T^\dagger\gamma\,;$$

on a alors

$$\left(\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}} - TT^\dagger\right)\gamma\middle|\,\vartheta\right)_{\mathcal{D}(T^*)} = \left(\gamma - TT^\dagger\gamma\middle|\,\vartheta\right)_{\mathcal{G}} + \left(D_T^{-1} D_T D_T^\dagger T^\dagger\gamma\middle|\, T^*\vartheta\right)_{\mathcal{H}} =$$

$$= (\gamma|\,\vartheta)_{\mathcal{G}} - \left\langle T^\dagger\gamma\middle|\, T^\dagger\vartheta\right\rangle_{\mathcal{D}(T)} + \left\langle T^\dagger\gamma\middle|\, D_T D_T^{-1} D_T T^*\vartheta\right\rangle_{\mathcal{D}(T)} = (\gamma|\,\vartheta)_{\mathcal{G}} \ .$$

La seconde formule est alors immédiate par $(*)$.

Le noyau de $D_T T^*(\mathcal{D}(T^*)) = T^\dagger(\mathcal{D}(T^*)) \hookrightarrow \mathcal{D}(T)$ est

$$T^\dagger\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}} - TT^\dagger\right)T = D_T D_T^\dagger T^\dagger T$$

par la formule $(*)$, tandis que ceux de $D_T(\mathcal{D}(T)) \hookrightarrow \mathcal{D}(T)$ et $D_T(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{D}(T)$ sont $\left(D_T D_T^\dagger\right)^2$ et $D_T D_T^\dagger$ par l'exemple 5.4.7. Mais comme

$$\left(D_T D_T^\dagger\right)^2 + D_T D_T^\dagger T^\dagger T = D_T D_T^\dagger\left(D_T D_T^\dagger + T^\dagger T\right) = D_T D_T^\dagger$$

la proposition 5.7 montre que

$$D_T(\mathcal{D}(T)) + T^\dagger(\mathcal{D}(T^*)) = D_T(\mathcal{H}) \ .$$

Dmonstration de (i) Pour calculer le noyau de

$$\mathcal{H} \cap \widehat{T}^\dagger(\mathcal{G}) = \mathcal{H} \cap T^\dagger(\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{H} + T^\dagger(\mathcal{G}) = \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta$$

– cf. proposition 7.3.(i) – nous allons utiliser la proposition 5.9, mais attention en considérant la semi-dualité $\left\langle \mathcal{D}\left(T\right)_{\beta}^{\dagger} \middle| \mathcal{D}\left(T\right)_{\beta}^{\dagger} \right\rangle$. Les noyaux de $\mathcal{H}$, $\widehat{T}^{\dagger}\left(\mathcal{G}\right)$ et $\mathcal{H}\cap\widehat{T}^{\dagger}\left(\mathcal{G}\right)$ sont alors respectivement $\widehat{h}^{\dagger}\overline{\widehat{h}Q}^{-1}$, $\widehat{T}^{\dagger}\overline{\widehat{T}Q}^{-1}$ et $\widehat{h}^{\dagger}\overline{\widehat{h}Q}^{-1}\widehat{T}^{\dagger}\overline{\widehat{T}Q}^{-1}$, d’où le résultat.

Chapitre 18

FONCTIONS HOLOMORPHES

Version du 15 septembre 2001

18.1 Chemins

Z est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Pour la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes nous citerons le livre de J. Dieudonné [8].

LEMME *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est (localement) lipschitzienne si, et seulement si, il existe une fonction $g \in \mathbf{L}^{\infty}_{\mathrm{loc}}(I, \mathbb{C})$ telle que*

$$f = f(\tau) + \int_{\tau}^{\diamond} g \ .$$

La classe de la fonction g est univoquement déterminée. On dit que c'est la dérivée de f et on la note f' .

DEFINITION 1 Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\tau \in I$ et $\gamma : I \longrightarrow Z$ est une application (localement) lipschitzienne, on dit que $\gamma = (\gamma, I, \tau)$ est un *chemin* dans Z si γ est non-constant dans chaque intervalle ouvert non-vide de I .

S'il faut préciser nous écrirons I_γ et τ_γ .

Nous dirons que γ est un *lacet* dans Z si les limites $\lim_{t \to \sup I_\gamma} \gamma(t)$ et $\lim_{t \to \inf I_\gamma} \gamma(t)$ existent dans Z et sont égales.

Nous dirons que deux chemins γ et δ sont *équivalents* s'il existe un isomorphisme lipschitzien croissant $\alpha : I_\gamma \longrightarrow I_\delta$ tel que $\alpha(\tau_\gamma) = \tau_\delta$ et $\gamma = \delta \circ \alpha$.

REMARQUE 1 En pratique il est utile de pouvoir paramétriser les chemins à l'aide d'intervalles ouverts quelconques. Si les limites $\lim_{t \to \sup I_\gamma} \gamma(t)$ et $\lim_{t \to \inf I_\gamma} \gamma(t)$ existent dans Z , nous prolongerons γ à $I \cup \{\sup I_\gamma, \inf I_\gamma\}$. En théorie nous pouvons supposer que cet intervalle est $\mathbb{R}$ et que $\tau_\gamma = 0$.

DEFINITION 2 On désigne par $\mathcal{CH}(Z)$ l'ensemble des chemins lipschitziens dans Z définis sur $\mathbb{R}$ muni des semi-normes

$$\gamma \longmapsto \|\gamma\|_{\infty,K} + \|\gamma'\|_{\infty,K} \ ,$$

où $K \in \mathfrak{K}(\mathbb{R})$.

C'est un espace de Fréchet.

[8] J. Dieudonné, *Grunzüge der Analysis,* Bd. 1, Kap. IX, ?.

REMARQUE 2 On peut se restreindre si l'on veut aux chemins continûment dérivables par morceaux, mais ce sous-espace n'est pas fermé dans $\mathcal{CH}(Z)$. Il est préférable de prendre l'ensemble des chemins qui sont primitives de fonction réglées (cf. 8.7.2 et 7.6).

EXEMPLE 1 Si γ est un chemin, alors

$$\gamma^\circ : -I_\gamma \longrightarrow Z : t \longmapsto \gamma(-t)$$

et $\tau_{\gamma^\circ} := -\tau_\gamma$ est un chemin, dit *opposé* à γ .

EXEMPLE 2 Si γ, δ sont des chemins dans Z tels que les limites

$$\lim_{t \to \sup I_\gamma} \gamma(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \to \inf I_\delta} \delta(t)$$

existent dans Z et sont égales, il existe un chemin noté $\gamma \vee \delta$ dans Z tel que à équivalence près on ait

$$\sup I_\gamma = \inf I_\delta \ ,$$

$$I_{\gamma\vee\delta} = I_\gamma \cup \{\sup I_\gamma\} \cup I_\delta \ ,$$

$$\tau_{\gamma\vee\delta} = \tau_\gamma$$

et

$$\gamma = (\gamma \vee \delta)_{|I_\gamma} \quad \text{et} \quad \delta = (\gamma \vee \delta)_{|I_\delta} \ .$$

18.2 Fonctions holomorphes multivalentes

Z, W **sont des ouverts de** $\mathbb{C}$.

Si Z est connexe, il existe un ouvert simplement connexe maximal $\widetilde{Z} \subset Z$ et un tel ouvert est dense dans Z . Dans chaque cas nous choisirons un tel ouvert.

DEFINITION 1 On pose

$$\widetilde{\mathcal{CH}}(Z) := \left\{ \gamma \in \mathcal{CH}(Z) \mid \gamma(\tau_\gamma) \in \widetilde{Z} \right\} .$$

On dit qu'une application continue $F : \widetilde{\mathcal{CH}}(Z) \longrightarrow \mathcal{CH}(\mathbb{C})$ est une *fonction holomorphe multivalente* dans Z si

(a) Pour tout $\gamma \in \widetilde{\mathcal{CH}}(Z)$, on a

$$I_{F(\gamma)} = I_\gamma \quad \text{et} \quad \tau_{F(\gamma)} = \tau_\gamma .$$

(b) Pour tout $\gamma \in \widetilde{\mathcal{CH}}(Z)$ et tout $t \in I_\gamma$, il existe un intervalle ouvert J dans I_γ contenant t et tel que l'on ait

$$F(\gamma)(s) = f(\gamma(s)) \quad \text{pour tout } s \in J ,$$

où f est une fonction holomorphe définie dans un ouvert U de Z contenant $\gamma(J)$.

(c) Il existe une fonction holomorphe

$$\widetilde{F} : \widetilde{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

telle pour tout $\gamma \in \widetilde{\mathcal{CH}}(Z)$ on ait $F(\gamma)(\tau_\gamma) = \widetilde{F}(\gamma(\tau_\gamma))$. On dit que $\widetilde{F}$ est la *branche principale* de F .

Nous désignerons par $\mathcal{O}(Z)$ l'ensemble des fonctions holomorphes et par $\widetilde{\mathcal{O}}(Z)$ l'ensemble des fonctions holomorphes multivalentes dans Z .

REMARQUE 1 Dans (b) la fonction holomorphe f est univoquement déterminée. En particulier $F(\gamma) = \widetilde{F} \circ \gamma$ au voisinage de τ_γ .

Cela découle de 9.4.3 puisque $\gamma(J)$ est infini. $\square$

PROPOSITION *(i) Si $f \in \mathcal{O}(Z)$, alors*

$$\gamma \longmapsto f \circ \gamma : \widetilde{\mathcal{CH}}(Z) \longrightarrow \mathcal{CH}(\mathbb{C})$$

est une fonction holomorphe multivalente (mieux univalente).

(ii) Soient V un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $h : V \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe de plusieurs variables complexe, $g : W \longrightarrow Z$ une fonction holomorphe telle que $g\left(\widetilde{W}\right) \subset \widetilde{Z}$, et $(F_j)_{j=1,\ldots,n} \subset \widetilde{\mathcal{O}}(Z)$ une suite de fonctions holomorphes multivalentes telle que

$$(F_j(\gamma))_{j=1,\ldots,n}(I_\gamma) \subset V \quad \textit{pour tout } \gamma \in \widetilde{\mathcal{CH}}(Z) .$$

Alors

$$\delta \longmapsto h \circ (F_j (g \circ \delta))_{j=1,\ldots,n} : \widetilde{\mathcal{CH}}(W) \longrightarrow \mathcal{CH}(\mathbb{C})$$

est une fonction holomorphe multivalente.

En particulier pour tout $F, G \in \widetilde{\mathcal{O}}(Z)$, on a $F + G, F \cdot G \in \widetilde{\mathcal{O}}(Z)$.

Dmonstration de (i) C'est immédiat.

Dmonstration de (ii) Pour tout $\delta \in \widetilde{\mathcal{CH}}(W)$, on a $g \circ \delta \in \widetilde{\mathcal{CH}}(Z)$ car $g \circ \delta (\tau_\delta) \in \widetilde{Z}$ et

$$(F_j (g \circ \delta))_{j=1,\ldots,n} (\tau_\delta) = (F_j (g (\delta (\tau_\delta))))_{j=1,\ldots,n} = \left(\widetilde{F_j}\right)_{j=1,\ldots,n} \circ g (\delta (\tau_\delta)) \ ,$$

donc

$$h \circ (F_j (g \circ \delta))_{j=1,\ldots,n} (\tau_\delta) = h \circ \left(\widetilde{F_j}\right)_{j=1,\ldots,n} \circ g (\delta (\tau_\delta)) \ .$$

Pour la dernière assertion il suffit de constater que les application

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

sont holomorphes. □

LEMME *Soient $F \in \widetilde{\mathcal{O}}(Z)$ et $\gamma, \delta \in \widetilde{\mathcal{CH}}(Z)$ des chemins équivalents. Pour que $F(\gamma) \cdot \gamma' \in \mathbf{L}^1(I_\gamma)$, il faut et il suffit que $F(\delta) \cdot \delta' \in \mathbf{L}^1(I_\delta)$. Dans ce cas*

$$\int_{I_\gamma} F(\gamma) \cdot \gamma' = \int_{I_\delta} F(\delta) \cdot \delta'$$

En effet si $\alpha : I_\gamma \longrightarrow I_\delta$ est un isomorphisme lipschitzien tel que $\gamma = \delta \circ \alpha$, on a $\gamma' = \delta' \circ \alpha \cdot \alpha'$ et l'image de $\alpha' \cdot \lambda_{I_\gamma}$ par α est λ_{I_δ} , d'où le résultat (cf. AN, § 22.6).

DEFINITION 2 Soient $F \in \widetilde{\mathcal{O}}(Z)$ et $\gamma \in \widetilde{\mathcal{CH}}(Z)$. Si $F(\gamma) \cdot \gamma' \in \mathbf{L}^1(I_\gamma)$, on écrit $F \in \mathbf{L}^1(\gamma)$, on définit l' *intégrale de F le long de γ* par

$$\int_\gamma F := \int_{I_\gamma} F(\gamma) \cdot \gamma' \ .$$

Si $t \in I_\gamma$, nous utiliserons la notation suivante :

$$\int_\gamma^t F := \int_\tau^t F(\gamma) \cdot \gamma' \ .$$

THEOREME *(i) Pour tout $F \in \widetilde{\mathcal{O}}(Z)$, il existe une unique fonction holomorphe multivalente $F' \in \widetilde{\mathcal{O}}(Z)$ telle que l'on ait*

$$F(\gamma)' = F'(\gamma) \cdot \gamma' \quad \textit{pour tout } \gamma \in \widetilde{\mathcal{CH}}(Z) \ .$$

On a

$$F(\gamma)(t) = F(\gamma)(\tau) + \int_\gamma^t F' \ .$$

(ii) Pour tout $F, G \in \widetilde{\mathcal{O}}(Z)$, on a

$$(F+G)' = F' + G' \quad \textit{et} \quad (F \cdot G)' = F' \cdot G + F \cdot G' \ .$$

Si $\gamma \in \widetilde{\mathcal{CH}}(Z)$ *et* $F' \cdot G, F \cdot G' \in \mathbf{L}^1(\gamma)$ *, alors*

$$\lim\nolimits_{t \to \sup I_\gamma} F \cdot G(\gamma)(t) \quad \textit{et} \quad \lim\nolimits_{t \to \inf I_\gamma} F \cdot G(\gamma)(t)$$

existent et on a

$$\int_\gamma (F' \cdot G + F \cdot G') = \lim\nolimits_{t \to \sup I_\gamma} F \cdot G(\gamma)(t) - \lim\nolimits_{t \to \inf I_\gamma} F \cdot G(\gamma)(t) =: F \cdot G|_\gamma \ .$$

(iii) Pour tout $F \in \widetilde{\mathcal{O}}(Z)$ *telle que* $F\left(\widetilde{\mathcal{CH}}(Z)\right) \subset \widetilde{\mathcal{CH}}(W)$ *et* $G \in \widetilde{\mathcal{O}}(W)$ *, on a*

$$(G \circ F)' = G' \circ F \cdot F' \ .$$

(iv) Tout $F \in \widetilde{\mathcal{O}}(Z)$ *possède une primitive* G *, i.e.* $G \in \widetilde{\mathcal{O}}(Z)$ *est telle que* $G' = F$ *. Si* $\widetilde{G}$ *désigne une fonction holomorphe primitive de* $\widetilde{F}$ *dans* $\widetilde{Z}$ *, alors*

$$G(\gamma)(t) = \widetilde{G}(\gamma(\tau_\gamma)) + \int_\gamma^t F \ .$$

(v) Pour tout lacet $\gamma \in \widetilde{\mathcal{CH}}(Z)$ *homotope au lacet constant ayant les mêmes extrémités et tout* $F \in \widetilde{\mathcal{O}}(Z) \cap \mathbf{L}^1(\gamma)$ *, alors*

$$\int_\gamma F = 0 \ .$$

Dmonstration de (i) Avec les notation de la définition 2.1.(b) on peut définir

$$F'(\gamma)(s) := f'(\gamma(s)) \quad \text{pour tout } s \in J \ .$$

En effet si J_1 et J_2 sont de tels intervalles et $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$, pour tout $s \in J_1 \cap J_2$, on a

$$f_1(\gamma(s)) = F(\gamma)(s) = f_2(\gamma(s)) \ ,$$

donc $f_1 = f_2$ dans $U_1 \cap U_2$ et par suite

$$f_1'(\gamma(s)) = f_2'(\gamma(s)) \ .$$

On a alors

$$F'(\gamma) \cdot \gamma' = f' \circ \gamma \cdot \gamma' = (f \circ \gamma)' = F(\gamma)' \ .$$

Montrons que F' est une fonction holomorphe multivalente. Les conditions (a) et (b) sont évidemment satisfaites. D'autre part la remarque 2.1 montre que

$$F'(\gamma)(\tau_\gamma) = \widetilde{F}'(\gamma(\tau_\gamma)) \ ,$$

ce qui prouve (c).

Chapitre 19

POUBELLE

19.1 Polynômes classiques exceptionnels

Nous sommes donc ramenés à discuter l'équation différentielle

$$p \cdot \partial^2 f + q \cdot \partial f + \lambda_k \cdot f = 0 \ .$$

Soit $q = s \cdot \mathrm{id} + t$.

Le théorème 1.13 ne discute pas les cas suivants :

(1) $p = 0$

(a) Si $s = 0$ et $t \neq 0$, il vient $p_k = e^{-\frac{\lambda_k}{t} \cdot \mathrm{id}}$.

(b) Si $s \neq 0$, on se ramène à l'équation différentielle $\mathrm{id} \cdot \partial f + \lambda_k \cdot f = 0$, dont les solutions normées sont $\mathrm{id}^{-\lambda_k}$. On obtient donc le système de polynômes $\left(\mathrm{id}^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ et $\lambda_k = -k$; mais deux monômes de puissance paire (ou impaire) ne peuvent être orthogonaux.

(2) p possède une racine double.

A l'aide d'une transformation affine on se ramène au cas $p = \mathrm{id}^2$, donc à l'équation différentielle

$$\mathrm{id}^2 \cdot \partial^2 f + (s \cdot \mathrm{id} + t) \cdot \partial f + \lambda_k \cdot f = 0 \ ,$$

d'où l'on tire

$$[k(k-1) + s \cdot k + \lambda_k] \cdot \mathrm{id}^k \in \mathcal{P}_{k-1} \ ,$$

et par suite $\lambda_k = -k(k+s-1)$. Choisissons ρ tel que

$$\frac{\partial \rho}{\rho} \cdot p + \partial p = \frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho} = q = s \cdot \mathrm{id} + t \ ,$$

donc tel que

$$\frac{\partial \rho}{\rho} = \frac{s \cdot \mathrm{id} + t - 2 \cdot \mathrm{id}}{\mathrm{id}^2} = \frac{s-2}{\mathrm{id}} + \frac{t}{\mathrm{id}^2} \ .$$

On peut prendre

$$\rho = \mathrm{id}^{s-2} \cdot e^{-\frac{t}{\mathrm{id}}} \ .$$

Ce n'est pas un poids !

Puisque

$$\frac{\partial(\rho \cdot p)}{\rho} = s \cdot \mathrm{id} + t \in \mathcal{P}_1 \ ,$$

la remarque 2 ci-dessus montre qu'en définissant $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par la formule de Rodrigues, on obtient un système de polynômes. Ces polynômes satisfont à l'équation différentielle grâce à la démonstration (ii)⇒(iii).

(a) Si $t = 0$, on a

$$p_k = \frac{1}{d_k} \cdot \mathrm{id}^{2-s} \cdot \partial^k \left(\mathrm{id}^{s-2+2k}\right) = \mathrm{id}^k$$

en prenant $d_k := (s-2+2k) \cdots (s-2+k+1)$. Mais l'équation différentielle

$$\mathrm{id}^2 \cdot \partial^2 f + s \cdot \mathrm{id} \cdot \partial f - k(k+s-1) \cdot f = 0$$

possède encore d'autres solutions. En faisant l'Ansatz $f = g \cdot \mathrm{id}^k$, on en déduit l'équation différentielle

$$\mathrm{id} \cdot \partial^2 g + (2k+s) \cdot \partial g = 0$$

ayant comme solution particulière

$$\partial g = -(2k+s-1) \cdot \mathrm{id}^{-(2k+s)} \quad , \text{puis} \quad g = \mathrm{id}^{-(2k+s-1)} \ .$$

Ainsi $\mathrm{id}^k + c_k \cdot \mathrm{id}^{1-s-k}$ est une autre solutions $\in \mathcal{P}_k$ si, et seulement si, $c_k \neq 0$, $0 \leqslant m := -1-k-s < k$. et $m \in \mathbb{N}$. On a donc $s \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$ doit satisfaire aux inégalités

$$\frac{-1-s}{2} < k \leqslant -1-s \ .$$

En particulier $s \leqslant -2$. Par exemple si $s = -2$, le seul k possible est 1 et comme autre solution on a $\mathrm{id} + c_1$.

(b) Si $t \neq 0$, on obtient à un système de polynômes qui n'a semble-t-il pas été spécialement étudié, par manque de propriétés intéressantes probablement (essai de discussion dans le paragraphe qui suit).

19.2 L'équa-diff associée aux polynômes classiques exceptionnels

REMARQUE 1 Dans la situation de la proposition nous pouvons admettre que J est le plus grand intervalle sur lequel $p > 0$. Puisque $\deg p \leqslant 2$, le seul cas que nous n'avons pas discuté dans le théorème 1.13 est celui où, après une transformation affine convenable, on a $J =]0, \infty[$ et $p = \mathrm{id}^2$. Si $q = s \cdot \mathrm{id} + t$, on peut prendre

$$\rho = \frac{e^{-t}}{\mathrm{id}^2} \cdot \exp\left(\int_1^\diamond \frac{s \cdot \mathrm{id} + t}{\mathrm{id}^2}\right) = \mathrm{id}^{s-2} \cdot e^{-\frac{t}{\mathrm{id}}} \ .$$

Remarquons que ρ n'est pas un poids !

La formule de Rodrigues fournit un système de polynômes $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfaisant à une équation différentielle de type hypergéométrique où

$$\lambda_k = -k \cdot (s + k - 1) \ .$$

Elle s'écrit

$$\mathrm{id}^{2-s} \cdot e^{\frac{t}{\mathrm{id}}} \cdot \partial\left(\mathrm{id}^s \cdot e^{-\frac{t}{\mathrm{id}}} \cdot \partial h\right) + \lambda_k \cdot h = 0 \qquad (*)$$

ou bien

$$\mathrm{id}^2 \cdot \partial^2 h + [s \cdot \mathrm{id} + t] \cdot \partial h + \lambda_k \cdot h = 0 \ .$$

Cas $t = 0$ On a

$$p_k = \frac{1}{d_k} \cdot \mathrm{id}^{2-s} \cdot \partial^k \left(\mathrm{id}^{s-2+2k}\right) = \mathrm{id}^k$$

en prenant $d_k := (s - 2 + 2k) \cdots (s - 2 + k + 1) = \frac{(s-2+2k)!}{(s-2+k)!}$.

Cas $t \neq 0$ On obtient à un système de polynômes qui n'a semble-t-il pas été spécialement étudié, par manque de propriétés intéressantes probablement.

Considérons la transformation $\Phi : h \longmapsto g := \left(\frac{t}{\mathrm{id}}\right)^{\frac{s}{2}-1} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot h \circ \frac{t}{\mathrm{id}}$. Puisque

$$\rho = \mathrm{id}^{s-2} \cdot e^{-\frac{t}{\mathrm{id}}} \quad , \quad p = \mathrm{id}^2 \quad \text{et} \quad q = -\lambda_k \ ,$$

il vient

$$\widetilde{\rho} = \frac{\frac{t}{\mathrm{id}^2} \cdot \left(\frac{t}{\mathrm{id}}\right)^{s-2} \cdot e^{-\frac{t}{\frac{t}{\mathrm{id}}}}}{\left(\frac{t}{\mathrm{id}}\right)^{s-2} \cdot e^{-\mathrm{id}}} = \frac{t}{\mathrm{id}^2} \quad , \quad \widetilde{p} = \frac{\left(\frac{t}{\mathrm{id}}\right)^2}{\left(\frac{t}{\mathrm{id}^2}\right)^2} = \mathrm{id}^2$$

et, utilisant la formule de Leibniz,

$$\widetilde{q} = \left(\frac{t}{\mathrm{id}}\right)^{-\frac{s}{2}+1} \cdot e^{\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot \frac{\mathrm{id}^2}{t} \cdot \partial\left(\frac{t}{\mathrm{id}^2} \cdot \mathrm{id}^2 \cdot \partial\left[\left(\frac{t}{\mathrm{id}}\right)^{\frac{s}{2}-1} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}}\right]\right) - \lambda_k =$$

$$= \mathrm{id}^{\frac{s}{2}+1} \cdot e^{\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot \partial^2 \left[\mathrm{id}^{1-\frac{s}{2}} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}}\right] - \lambda_k =$$

$$= \mathrm{id}^{\frac{s}{2}+1} \cdot e^{\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot \left[\left(1-\frac{s}{2}\right)\cdot\left(-\frac{s}{2}\right)\cdot \mathrm{id}^{-1-\frac{s}{2}} + 2\cdot\left(1-\frac{s}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{id}^{-\frac{s}{2}} + \frac{1}{4}\cdot \mathrm{id}^{1-\frac{s}{2}}\right]\cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}} - \lambda_k =$$

$$= -\left[\frac{s}{2}\cdot\left(1-\frac{s}{2}\right) + \left(1-\frac{s}{2}\right)\cdot \mathrm{id} - \frac{1}{4}\cdot \mathrm{id}^2 - k\cdot(s+k-1)\right] =$$

$$= -\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{s}{2}-\frac{1}{2}+k\right)^2 + \left(1-\frac{s}{2}\right)\cdot \mathrm{id} - \frac{1}{4}\cdot \mathrm{id}^2\right] .$$

On obtient donc l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{id}^2}{t}\cdot\partial\left(t\cdot\partial g\right) + \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{s}{2}-\frac{1}{2}+k\right)^2 + \left(1-\frac{s}{2}\right)\cdot \mathrm{id} - \frac{1}{4}\cdot \mathrm{id}^2\right]\cdot g = 0 ,$$

i.e.

$$\partial^2 g + \left[\frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{s}{2}-\frac{1}{2}+k\right)^2}{\mathrm{id}^2} + \frac{1-\frac{s}{2}}{\mathrm{id}} - \frac{1}{4}\right]\cdot g = 0 .$$

C'est une équation différentielle de Whittaker avec $\kappa := 1-\frac{s}{2}$ et $\mu := \left(\frac{s}{2}-\frac{1}{2}+k\right)$.

Les solutions s'expriment donc à l'aide des fonction de Kummer M et U . Pour transformer $(*)$ directement en l'équation différentielle de Kummer écrivons-la sous la forme

$$\mathrm{id}^{2\kappa} \cdot e^{\frac{t}{\mathrm{id}}} \cdot \partial\left(\mathrm{id}^{-2\kappa+2} \cdot e^{-\frac{t}{\mathrm{id}}} \cdot \partial h\right) + \lambda_k \cdot h = 0 .$$

Considérons la transformation

$$\Phi : h \longmapsto f := \mathrm{id}^{-\frac{b}{2}} \cdot e^{\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot \left(\frac{t}{\mathrm{id}}\right)^{\frac{s}{2}-1} \cdot e^{-\frac{\mathrm{id}}{2}} \cdot h\circ\frac{t}{\mathrm{id}} = t^{-\kappa}\cdot \mathrm{id}^{\kappa-\frac{1}{2}-\mu} \cdot h\circ\frac{t}{\mathrm{id}} ,$$

en se rappelant que les paramètres a et b de l'équation de Kummer sont liés à ceux de l'équation de Whittaker par $\kappa = \frac{b}{2} - a$ et $\mu = \frac{b}{2} - \frac{1}{2}$. Puisque dans ce cas

$$\rho = \mathrm{id}^{-2\kappa} \cdot e^{-\frac{t}{\mathrm{id}}} \quad , \quad p = \mathrm{id}^2 \quad \text{et} \quad q = -\lambda_k ,$$

il vient

$$\widetilde{\rho} = \frac{\frac{t}{\mathrm{id}^2}\cdot\left(\frac{t}{\mathrm{id}}\right)^{-2\kappa}\cdot e^{-\frac{t}{\frac{t}{\mathrm{id}}}}}{t^{-2\kappa}\cdot \mathrm{id}^{2\kappa-1-2\mu}} = t\cdot \mathrm{id}^{2\mu-1} \cdot e^{-\mathrm{id}} = t\cdot e^{b-2}\cdot e^{-\mathrm{id}} \quad , \quad \widetilde{p} = \frac{\left(\frac{t}{\mathrm{id}}\right)^2}{\left(\frac{t}{\mathrm{id}^2}\right)^2} = \mathrm{id}^2$$

et

$$\widetilde{q} = \frac{\partial\left(t\cdot \mathrm{id}^{2\mu-1} \cdot e^{-\mathrm{id}} \cdot \mathrm{id}^2 \cdot \partial\left[t^{-\kappa}\cdot \mathrm{id}^{\kappa-\frac{1}{2}-\mu}\right]\right)}{t^{-\kappa}\cdot \mathrm{id}^{\kappa-\frac{1}{2}-\mu} \cdot t\cdot \mathrm{id}^{2\mu-1} \cdot e^{-\mathrm{id}}} - \lambda_k =$$

$$= \left(\kappa-\frac{1}{2}-\mu\right)\cdot \mathrm{id}^{-\kappa+\frac{3}{2}-\mu} \cdot e^{\mathrm{id}} \cdot \partial\left(\mathrm{id}^{\kappa-\frac{1}{2}+\mu} \cdot e^{-\mathrm{id}}\right) - \lambda_k =$$

$$= \left(\kappa-\frac{1}{2}-\mu\right)\cdot \mathrm{id}^{-\kappa+\frac{3}{2}-\mu} \cdot e^{\mathrm{id}} \cdot \left[\left(\kappa-\frac{1}{2}+\mu\right)\cdot \mathrm{id}^{\kappa-\frac{3}{2}+\mu} - \mathrm{id}^{\kappa-\frac{1}{2}+\mu}\right]\cdot e^{-\mathrm{id}} - \lambda_k =$$

$$= \left(\kappa-\frac{1}{2}\right)^2 - \mu^2 - \lambda_k - \left(\kappa-\frac{1}{2}-\mu\right)\cdot \mathrm{id} = a\cdot \mathrm{id} .$$

On obtient donc l'équation différentielle

$$\mathrm{id}^{2-b} \cdot e^{\mathrm{id}} \cdot \partial \left(\mathrm{id}^b \cdot e^{-\mathrm{id}} \cdot \partial f \right) - a \cdot \mathrm{id} \cdot f = 0 \ ,$$

i.e.

$$\mathrm{id}^{1-b} \cdot e^{\mathrm{id}} \cdot \partial \left(\mathrm{id}^b \cdot e^{-\mathrm{id}} \cdot \partial f \right) - a \cdot f = 0$$

ou bien

$$\mathrm{id} \cdot \partial^2 f + (b - \mathrm{id}) \cdot \partial f - a \cdot f = 0 \ ,$$

qui est bien celle de Kummer et dont les constantes sont données par

$$a = \frac{b}{2} - \kappa = \mu + \frac{1}{2} - \kappa = \frac{s}{2} + k - \left(1 - \frac{s}{2} \right) = s + k - 1$$

et

$$b = 2\mu + 1 = 2 \left(\frac{s}{2} - \frac{1}{2} + k \right) + 1 = s + 2k \ .$$

19.3 Problèmes aux limites sans poids

EXEMPLE 1 Considérons tout d'abord le problème (inhomogène) aux limites homogènes suivant :

$$-\partial^2 f + f = g \quad \text{sur }]0,1[\quad \text{et} \quad f(0) = f(1) = 0 \tag{$*$}$$

Si $f \in \mathcal{C}^{(2)}([0,1])$ est solution de $(*)$, on dit que c'est une *solution classique* . Remarquons que l'existence d'une solution classique entraîne nécessairement $g \in \mathcal{C}([0,1])$.

Par opposition on dit qu'une solution $\xi \in \mathcal{H}_0^{(1)}(]0,1[)$ de

$$\int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \xi + \int_0^1 \overline{\partial\gamma} \cdot \partial\xi = \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot g \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{H}_0^{(1)}(]0,1[) \tag{$**$}$$

est *faible* . Ici il suffit que $g \in \mathbf{L}^2([0,1])$.

Remarquons tout d'abord qu'une solution classique est solution faible : on a évidemment $f \in \mathcal{H}_0^{(1)}(]0,1[)$ et en en intégrant par parties il vient

$$\int_0^1 \overline{\gamma} \cdot f + \int_0^1 \overline{\partial\gamma} \cdot \partial f = \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot f + \left[\overline{\gamma} \cdot \partial f\right]_0^1 - \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \partial^2 f =$$

$$= \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \left(f - \partial^2 f\right) = \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot g \ .$$

Réciproquement si $\xi \in \mathcal{H}_0^{(1)}(]0,1[)$ est une solution faible, en posant

$$H := \int_0^{\diamond} (g - \xi) \in \mathcal{AC}(]0,1[) \ ,$$

on obtient

$$\int_0^1 \overline{\partial\gamma} \cdot \partial\xi = \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot (g - \xi) = \left[\overline{\gamma} \cdot H\right]_0^1 - \int_0^1 \overline{\partial\gamma} \cdot H = -\int_0^1 \overline{\partial\gamma} \cdot H \ ,$$

donc $\partial\xi = -H + c$ pour une constante $c \in \mathbb{K}$ par la proposition (ii). Ceci montre que $\xi \in \mathcal{H}^{(2)}(]0,1[)$ et intégrant le membre de gauche par parties il vient

$$\int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \left(g - \xi + \partial^2\xi\right) = 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{H}_0^{(1)}(]0,1[) \supset \mathcal{K}^{(1)}(]0,1[) \ .$$

On en déduit $g - \xi + \partial^2\xi = 0$ dans $\mathbf{L}^2(]0,1[)$ grâce à la proposition (iii).

Si en plus $g \in \mathcal{C}([0,1])$, on a $H \in \mathcal{C}^{(1)}([0,1])$, donc $\xi \in \mathcal{C}^{(2)}([0,1])$, puis $g - \xi + \partial^2\xi = 0$ partout, puisque cette fonction est continue. Ceci montre que la solution faible ξ est une solution classique.

Montrons maintenant qu'il existe une unique solution faible. Il suffit de constater que $(**)$ peut s'écrire sous la forme

$$(\gamma|\,\xi)_{(1)} = \langle\gamma|\,g\rangle \ ,$$

où $|g\rangle$ désigne la forme semi-linéaire $\mathcal{H}_0^{(1)}(]0,1[) \longrightarrow \mathbb{K} : \gamma \longmapsto \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot g$. Elle est évidemment continue, puisque

$$|\langle \gamma | g \rangle| \leqslant \|\gamma\|_2 \cdot \|g\|_2 \leqslant \|g\|_2 \cdot \|\gamma\|_{2,(1)} \ .$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème de Lax-Milgram 1.6 à la forme hermitienne $(\cdot|\cdot)_{(1)}$, qui est évidemment coercitive en choisissant $\varepsilon = 1$! Plus simplement on peut ici utiliser le théorème de représentation de Riesz. Nous avons donc prouver :

Pour tout $g \in \mathbf{L}^2(]0,1[)$ *, il existe une unique solution* $\xi \in \mathcal{H}_0^{(1)}(]0,1[)$ *de*

$$\int_0^1 \overline{\gamma} \cdot \xi + \int_0^1 \overline{\partial \gamma} \cdot \partial \xi = \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot g \quad \textit{pour tout } \gamma \in \mathcal{H}_0^{(1)}(]0,1[)$$

et elle s'obtient en minimisant

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(|\gamma|^2 + |\partial \gamma|^2\right) - \mathrm{Re} \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot g$$

sur $\mathcal{H}_0^{(1)}(]0,1[)$ *. On* $\xi \in \mathcal{H}^{(2)}(]0,1[)$ *et c'est une solution de* $(*)$ *dans* $\mathbf{L}^2(]0,1[)$ *.*

Si $g \in \mathcal{C}([0,1])$ *, alors* $\xi \in \mathcal{C}^{(2)}([0,1])$ *et c'est une solution (classique) de* $(*)$ *.*

EXEMPLE 2 Considérons maintenant le problème aux limites inhomogènes suivant :

$$-\partial^2 f + f = g \quad \text{sur }]0,1[\quad \text{et} \quad f(0) = \alpha \quad , \quad f(1) = \beta \qquad (\circledast)$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Dans $\mathcal{H}^{(1)}(]0,1[)$ on considère le sous-espace affine

$$\mathcal{G} := \left\{\gamma \in \mathcal{H}^{(1)}(]0,1[) \mid \gamma(0) = \alpha \ , \ \gamma(1) = \beta\right\} \ ,$$

qui est évidemment un ensemble convexe fermé.

Si $f \in \mathcal{C}^{(2)}([0,1])$ est une solution classique de $(\circledast)$, donc $g \in \mathcal{C}([0,1])$, ou plus généralement si $\xi \in \mathcal{H}^2(]0,1[)$ est solution de $(\circledast)$ dans $\mathbf{L}^2(]0,1[)$, donc $g \in \mathbf{L}^2(]0,1[)$, en intégrant par parties il vient

$$\int_0^1 \overline{(\xi-\gamma)} \cdot \xi + \int_0^1 \overline{\partial(\xi-\gamma)} \cdot \partial\xi = \int_0^1 \overline{(\xi-\gamma)} \cdot \xi + \left[\overline{(\xi-\gamma)} \cdot \partial\xi\right]_0^1 - \int_0^1 \overline{(\xi-\gamma)} \cdot \partial^2\xi =$$

$$= \int_0^1 \overline{(\xi-\gamma)} \cdot \left(\xi - \partial^2\xi\right) = \int_0^1 \overline{(\xi-\gamma)} \cdot g \ ,$$

donc en particulier

$$\int_0^1 \overline{(\xi-\gamma)} \cdot \xi + \int_0^1 \overline{\partial(\xi-\gamma)} \cdot \partial\xi \geqslant \int_0^1 \overline{(\xi-\gamma)} \cdot g \ .$$

Ceci nous conduit à utiliser le théorème de Stampacchia :

Etant donné $g \in \mathbf{L}^2(]0,1[)$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *, il existe une unique solution* $\xi \in \mathcal{G}$ *de*

$$\int_0^1 \overline{(\xi-\gamma)} \cdot \xi + \int_0^1 \overline{\partial(\xi-\gamma)} \cdot \partial\xi \geqslant \int_0^1 \overline{(\xi-\gamma)} \cdot g \quad \textit{pour tout } \gamma \in \mathcal{G} \qquad (\circledast\circledast)$$

et elle s'obtient en minimisant

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(|\gamma|^2 + |\partial \gamma|^2\right) - \mathrm{Re} \int_0^1 \overline{\gamma} \cdot g$$

sur $\mathcal{G}$ *. On a* $\xi \in \mathcal{H}^{(2)}(]0,1[)$ *et c'est une solution de* $(\circledast)$ *dans* $\mathbf{L}^2(]0,1[)$ *.*

Si $g \in \mathcal{C}([0,1])$ *, alors* $\xi \in \mathcal{C}^{(2)}([0,1])$ *et c'est une solution classique de* $(\circledast)$.

Comme dans l'exemple précédent on utilise la forme hermitienne coercitive $(\cdot|\cdot)_{(1)}$, d'où la première partie. En faisant $\gamma := \xi \pm \eta$ avec $\eta \in \mathcal{H}_0^{(1)}(]0,1[)$ dans $(\circledast\circledast)$, il vient

$$\int_0^1 \overline{\eta} \cdot \xi + \int_0^1 \overline{\partial \eta} \cdot \partial \xi = \int_0^1 \overline{\eta} \cdot g \ .$$

Les dernières assertions se montrent alors comme ci-dessus. $\square$

19.4 Produit de convolution

LEMME *Pour tout* $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *, on a*

(i) $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *, ainsi que*

$$\partial^\alpha (\varphi * \psi) = (\partial^\alpha \varphi) * \psi \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(\varphi * \psi) = \mathcal{F}\varphi \cdot \mathcal{F}\psi \ .$$

(ii) L'application

$$\diamond * \psi : \gamma \longmapsto \gamma * \psi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

est continue.

(iii) L'application

$$\varphi(\diamond) \cdot \psi_\diamond : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : y \longmapsto \varphi(y) \cdot \psi_y$$

tend vers 0 *à l'infini.*

(iv) Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *, l'application* $\varphi(\diamond) \cdot \psi_\diamond : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *est* $\lambda_{\mathbb{R}^n}$*-intégrable dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *et on a*

$$\int \varphi(y) \cdot \psi_y \, dy = \varphi * \psi \ .$$

Dmonstration de (i) Les deux premières formules découlent du théorème (ii), et comme $\mathcal{F}(\varphi * \psi) = \mathcal{F}\varphi \cdot \mathcal{F}\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on obtient

$$\varphi * \psi = \overset{-1}{\mathcal{F}} \mathcal{F}(\varphi * \psi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ .$$

Dmonstration de (ii) C'est immédiat par le théorème 4.8 et la formule

$$\diamond * \psi = \overset{-1}{\mathcal{F}} \circ M_{\mathcal{F}\psi} \circ \mathcal{F} \ .$$

Dmonstration de (iii) On a

$$p_k\left(\varphi(y) \cdot \psi_y\right) \leqslant 2^k \cdot \langle y \rangle^{-1} \cdot \langle y \rangle^{k+1} \cdot |\varphi(y)| \cdot p_k(\psi) \leqslant 2^k \cdot \langle y \rangle^{-1} \cdot p_{k+1}(\varphi) \cdot p_k(\psi) \ ,$$

d'où le résultat puisque $\langle \mathrm{id} \rangle^{-1} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$.

Dmonstration de (iv) L'application $\varphi(\diamond) \cdot \psi_\diamond : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ peut s'écrire sous la forme

$$\varphi(\diamond) \cdot \psi_\diamond = \langle \diamond \rangle^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \cdot \langle \diamond \rangle^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \cdot \varphi(\diamond) \cdot \psi_\diamond ;$$

mais $\langle \diamond \rangle^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \cdot \varphi(\diamond) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, donc $\langle \diamond \rangle^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \cdot \varphi(\diamond) \cdot \psi_\diamond$ tend vers 0 à l'infini grâce à (iv) et l'exercice 3.9.3 montre que l'image de $\langle \diamond \rangle^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \cdot \varphi(\diamond) \cdot \psi_\diamond$ est contenue dans une partie convexe compacte de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Comme $\langle \diamond \rangle^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ (exemple 2.3.6.a), $\varphi(\diamond) \cdot \psi_\diamond$ est λ-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par la remarque 3.12.2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a en particulier

$$\left(\int \varphi(y) \cdot \psi_y \, dy \right)(x) = \left\langle \delta_x \middle| \int \varphi(y) \cdot \psi_y \, dy \right\rangle = \int \left\langle \delta_x \middle| \varphi(y) \cdot \psi_y \right\rangle =$$

$$= \int \varphi(y) \cdot \psi(x-y)\, dy = \varphi * \psi(x) \ ,$$

donc

$$\int \varphi(y) \cdot \psi_y \, dy = \varphi * \psi \ .$$

□

REMARQUE 1 Si $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, les théorèmes de Tonelli et Fubini montrent que

$$\langle \varphi | \, \psi * f \rangle = \int \overline{\varphi(x)} \left(\int \psi(x-y) f(y)\, dy \right) dx = \int \left(\int \overline{\varphi(x)} \psi(x-y)\, dx \right) \cdot f(y)\, dy =$$

$$= \int \overline{\int \overline{\psi(x-y)} \cdot \varphi(x)\, dx} \cdot f(y)\, dy = \left\langle \overset{\vee}{\overline{\psi}} * \varphi \middle| f \right\rangle \ .$$

Ceci nous conduit à la

DEFINITION 1 Pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$\psi^* := \overline{(\psi^\vee)} = \left(\overline{\psi}\right)^\vee \ .$$

Pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$, on définit le *produit de convolution* de ψ par μ en posant

$$\langle \varphi | \, \psi * \mu \rangle := \langle \psi^* * \varphi | \, \mu \rangle \ .$$

THEOREME *Soient $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.*

(i) On a $\psi * \mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$,

$$\partial^\alpha (\psi * \mu) = \psi * \partial^\alpha \mu = (\partial^\alpha \psi) * \mu \quad \textit{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \ ,$$

ainsi que

$$\mathcal{F}(\psi * \mu) = \mathcal{F}\psi \cdot \mathcal{F}\mu \ .$$

(ii) La fonction

$$\langle (\psi^*)_\diamond | \, \mu \rangle : x \longmapsto \langle (\psi^*)_x | \, \mu \rangle = \left\langle \overline{\psi}(x - \diamond) \middle| \, \mu \right\rangle$$

est tempérée et elle est égale à la distribution $\psi * \mu$.

En outre

$$\psi * \mu = \int \psi(y) \cdot \mu_y \, dy \ .$$

En particulier si $\mu \in \mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\psi * \mu(x) = \int \overline{\psi(x-y)}\, d\mu(y) \ .$$

Dmonstration de (i) Par la proposition (iii) ci-dessus, il est clair que $\psi * \mu$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et on a

$$\langle \varphi | \, \partial^\alpha (\psi * \mu) \rangle = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \langle \psi^* * (\partial^\alpha \varphi) | \, \mu \rangle = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \langle \partial^\alpha (\psi^* * \varphi) | \, \mu \rangle =$$

$$= \langle \psi^* * \varphi | \, \partial^\alpha \mu \rangle = \langle \varphi | \, \psi * \partial^\alpha \mu \rangle \ ,$$

mais aussi

$$\langle \varphi | \, \partial^\alpha (\psi * \mu) \rangle = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \langle \partial^\alpha (\psi^*) * \varphi | \, \mu \rangle = \langle (\partial^\alpha \psi)^* * \varphi | \, \mu \rangle = \langle \varphi | \, (\partial^\alpha \psi) * \mu \rangle \ .$$

D'autre part, pour tout $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il vient

$$\langle \gamma | \, \mathcal{F}(\psi * \mu) \rangle = \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}} \gamma \middle| \, \psi * \mu \right\rangle = \left\langle \psi^* * \left(\overset{-1}{\mathcal{F}} \gamma \right) \middle| \, \mu \right\rangle = \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}} (\mathcal{F}(\psi^*) \cdot \gamma) \middle| \, \mu \right\rangle =$$

$$= \langle \mathcal{F}(\psi^*) \cdot \gamma | \, \mathcal{F}\mu \rangle = \left\langle \overline{\mathcal{F}\psi} \cdot \gamma \middle| \, \mathcal{F}\mu \right\rangle = \langle \gamma | \, \mathcal{F}\psi \cdot \mathcal{F}\mu \rangle \ ,$$

ce qui finit de prouver la première partie.

Dmonstration de (ii) Puisque $\psi^* * \varphi = \varphi * \psi^* = \int \varphi(y) \cdot (\psi^*)_y \, dy$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (proposition v), pour tout $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$, on obtient

$$\langle \varphi | \, \psi * \mu \rangle = \langle \psi^* * \varphi | \, \mu \rangle = \int \overline{\varphi(y)} \cdot \left\langle (\psi^*)_y \middle| \, \mu \right\rangle dy = \langle \varphi(\diamond) | \, \langle (\psi^*)_\diamond | \, \mu \rangle \rangle \ ,$$

ce qui montre que $\psi * \mu = \langle (\psi^*)_\diamond | \, \mu \rangle$. Il nous reste à prouver que $\langle (\psi^*)_\diamond | \, \mu \rangle \in \mathcal{C}^{(\infty)}_{\text{temp}}(\mathbb{R}^n)$. Mais la remarque 4.8.1 nous permet, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ et $j = 1, \ldots, n$, de calculer

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\left\langle (\psi^*)_{y + h \cdot e_j} \middle| \, \mu \right\rangle - \left\langle (\psi^*)_y \middle| \, \mu \right\rangle \right] = \left\langle \partial_j (\psi^*)_y \middle| \, \mu \right\rangle = - \left\langle (\psi^*)_y \middle| \, \partial_j \mu \right\rangle \ .$$

On a donc $\langle (\psi^*)_\diamond | \, \mu \rangle \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ par récurrence. D'autre part, il existe par la continuité de μ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ un $k \in \mathbb{N}$ tel que, en utilisant la proposition (iv), on ait

$$\left| \left\langle (\psi^*)_y \middle| \, \mu \right\rangle \right| \leqslant p_k \left((\psi^*)_y \right) \leqslant 2^k \cdot \langle y \rangle^k \cdot p_k(\psi^*)$$

et par suite

$$\left\| \langle \diamond \rangle^{-k} \cdot \langle (\psi^*)_\diamond | \, \mu \rangle \right\|_\infty \leqslant 2^k \cdot p_k(\psi^*) < \infty \ .$$

On a $\psi * \mu = \int \psi(y) \cdot \mu_y \, dy$ car

$$\int \psi(y) \cdot \langle \varphi | \mu_y \rangle \, dy = \int \psi(y) \cdot \langle \varphi_{-y} | \, \mu \rangle \, dy = \left\langle \int \overline{\psi}(y) \cdot \varphi_{-y} \, dy \middle| \, \mu \right\rangle =$$

$$= \left\langle \int \overset{\vee}{\overline{\psi}}(y) \cdot \varphi_y \, dy \middle| \, \mu \right\rangle = \langle \psi^* * \varphi | \, \mu \rangle = \langle \varphi | \, \psi * \mu \rangle \ .$$

□

REMARQUE 2 Dans la démonstration ci-dessus (ii) nous avons utilisé la commutativité de la convolution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Cela n'est pas nécessaire puisque $\psi^* * \varphi = \int (\psi^*)_y \cdot \varphi(y) \, dy$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, résultat qui se généralise au cas d'un groupe localement compact non-commutatif non-nécessairement unimodulaire en introduisant l'intégrale de Haar à droite !

REMARQUE 3 Pour tout $f \in \mathbf{L}^1_{\text{mod}}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\langle \varphi | \, f^* \rangle = \int \overline{\varphi(y)} \cdot \overline{f(-y)} \, dy = \overline{\int \varphi(-y) \cdot f(y) \, dy} = \overline{\langle \varphi^* | \, f \rangle} \ ,$$

$$(\varphi * \psi)^*(x) = \overline{\int \varphi(-x - y) \cdot \psi(y) \, dy} = \int \overline{\varphi(-x + y)} \cdot \overline{\psi(-y)} \, dy = \varphi^* * \psi^*(x)$$

et l'application $\varphi \longmapsto \varphi^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est évidemment continue.

COROLLAIRE *Soient $\mu \in \mathcal{M}_{\text{rap}}(\mathbb{R}^n)$, i.e. telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $\langle \text{id} \rangle^k \cdot f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.*

(i) La fonction

$$f(\diamond) \cdot \mu_\diamond : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' : y \longmapsto f(y) \cdot \mu_y$$

est $\lambda_{\mathbb{R}^n}$-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$; on dit que

$$f * \mu := \int f(y) \cdot \mu_y \, dy$$

est la convolution *de f par μ .*

(ii) La fonction

$$f(\diamond) \cdot \psi_\diamond : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : y \longmapsto f(y) \cdot \psi_y$$

est $\lambda_{\mathbb{R}^n}$-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\int f(y) \cdot \psi_y \, dy = f * \psi \ .$$

(iii) On a

$$\langle \varphi | \, f * \mu \rangle = \langle f^* * \varphi | \, \mu \rangle \ ,$$

$$\partial^\alpha (f * \mu) = f * \partial^\alpha \mu \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \ ,$$

$$\partial^\alpha (f * \mu) = \partial^\alpha f * \mu \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha|_1 \leqslant k \text{ si } f \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\mathcal{F}(f * \mu) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}\mu \ .$$

(iv) La fonction

$$\langle (\psi^*)_\diamond | \, \mu \rangle : x \longmapsto \langle (\psi^*)_x | \, \mu \rangle = \left\langle \overline{\psi}(x - \diamond) \middle| \, \mu \right\rangle$$

est tempérée, elle est égale à la distribution $\psi * \mu$ et on a

$$\partial^\alpha (\psi * \mu) = \psi * \partial^\alpha \mu = (\partial^\alpha \psi) * \mu \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \ .$$

En particulier si $\mu \in \mathcal{M}^{\text{mod}}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\psi * \mu(x) = \int \overline{\psi(x - y)} \, d\mu(y) \ .$$

Dmonstration de (i) En effet il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|\langle \varphi | \, \mu \rangle| \leqslant c \cdot p_k(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; grâce au lemme il vient alors

$$\int |f(y)| \cdot \left| \left\langle \varphi \middle| \mu_y \right\rangle \right| \, dy = \int |f(y)| \cdot \left| \left\langle \varphi_{-y} \middle| \, \mu \right\rangle \right| \, dy \leqslant c \cdot \int |f(y)| \cdot p_k(\varphi_{-y}) \, dy \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \cdot c \cdot \left(\int \langle \text{id} \rangle^k \cdot f \, d\lambda_{\mathbb{R}^n} \right) \cdot p_k(\varphi) \leqslant 2^k \cdot c \cdot \left\| \langle \text{id} \rangle^{k + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \cdot f \right\|_\infty \cdot \left(\int \langle \text{id} \rangle^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \, d\lambda_{\mathbb{R}^n} \right) \cdot p_k(\varphi) \ ,$$

ce qui prouve l'intégrabilté (cf. définition 3.12.3 et proposition 3.12).

Dmonstration de (ii) Les inégalités

$$p_k(f(y) \cdot \psi_y) = f(y) \cdot p_k(\psi_y) \leqslant 2^k \cdot f(y) \cdot \langle y \rangle^{k+1} \cdot p_k(\psi) \cdot \langle y \rangle^{-1} \leqslant c_k \cdot \langle y \rangle^{-1}$$

montrent que $f(\diamond)\cdot\psi_\diamond$ tend vers 0 à l'infini.

Pour tout $K\in\mathfrak{K}(\mathbb{R}^n)$, on a $f(\diamond)\cdot\psi_\diamond(K)\subset\|f\|_\infty\cdot\overline{\mathrm{cs}}(\psi_K)\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mais ψ_K est une partie compacte de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, puisque $\psi_\diamond$ est continue (lemme 4.6 étendu à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$), donc $\overline{\mathrm{cs}}(\psi_K)$ est compacte par l'exercice 3.9.2.b. L'exercice 3.9.3 montre alors que $f(\diamond)\cdot\psi_\diamond$ est contenue dans une partie convexe compacte de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Il suffit maintenant d'écrire $f(\diamond)\cdot\psi_\diamond$ sous la forme

$$f(\diamond)\cdot\psi_\diamond=\langle\diamond\rangle^{-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}\cdot\left[\langle\diamond\rangle^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}\cdot f(\diamond)\cdot\psi_\diamond\right]$$

pour pouvoir appliquer la remarque 3.12.5 fait à propos du théorème 3.12.i, puisque $\langle\diamond\rangle^{-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}\in\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ (exemple 2.3.6.a). Pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, on a en particulier

$$\left(\int f(y)\cdot\psi_y\,dy\right)(x)=\left\langle\delta_x\middle|\int f(y)\cdot\psi_y\,dy\right\rangle=\int\left\langle\delta_x\middle|f(y)\cdot\psi_y\right\rangle=$$

$$=\int f(y)\cdot\psi(x-y)\,dy=f*\psi(x)\ ,$$

donc

$$\int f(y)\cdot\psi_y\,dy=f*\psi\ .$$

Dmonstration de (iii) Pour tout $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle\varphi|\,f*\mu\rangle=\int f(y)\cdot\left\langle\varphi\,|\mu_y\right\rangle\,dy=\int f(y)\cdot\left\langle\varphi_{-y}\middle|\,\mu\right\rangle\,dy=$$

$$=\left\langle\int\overline{f(-y)}\cdot\varphi_y\,dy\middle|\,\mu\right\rangle=\langle f^**\varphi|\,\mu\rangle\ .$$

et

$$\partial^\alpha(f*\mu)=\partial^\alpha\left(\int f(y)\cdot\mu_y\,dy\right)=\int f(y)\cdot\partial^\alpha\left(\mu_y\right)\,dy=$$

$$=\int f(y)\cdot(\partial^\alpha\mu)_y\,dy=f*\partial^\alpha\mu\ .$$

Si $f\in\mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha\in\mathbb{N}^n$ est tel que $|\alpha|_1\leqslant k$, alors

$$\langle\varphi|\,\partial^\alpha(f*\mu)\rangle=(-1)^{|\alpha|_1}\cdot\langle f^**(\partial^\alpha\varphi)|\,\mu\rangle=(-1)^{|\alpha|_1}\cdot\langle\partial^\alpha(f^*)*\varphi|\,\mu\rangle=$$

$$=\langle(\partial^\alpha f)^**\varphi|\,\mu\rangle=\langle\varphi|\,(\partial^\alpha f)*\mu\rangle\ .$$

Quant à la dernière formule, pour tout $\gamma\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle\gamma\,|\mathcal{F}(f*\mu)\rangle=\left\langle\gamma\middle|\int f(y)\cdot\mathcal{F}\mu_y\,dy\right\rangle=\int f(y)\cdot\langle\gamma\,|e_{-y}\cdot\mathcal{F}\mu\rangle\,dy=$$

$$=\int f(y)\cdot\langle e_y\cdot\gamma\,|\mathcal{F}\mu\rangle\,dy=\left\langle\int\overline{f(y)}\cdot e_y\cdot\gamma\,dy\middle|\,\mathcal{F}\mu\right\rangle$$

mais

$$\left\langle\int\overline{f(y)}\cdot e_y\cdot\gamma\,dy\middle|\,\delta_\lambda\right\rangle=\int f(y)\cdot\langle e_y\cdot\gamma|\,\delta_\lambda\rangle\,dy=\int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet y}\cdot f(y)\cdot\overline{\gamma(\lambda)}\,dy=$$

$$=\overline{\gamma(\lambda)}\cdot\mathcal{F}f(\lambda)=\left\langle\overline{\mathcal{F}f}\cdot\gamma\middle|\,\delta_\lambda\right\rangle\ ,$$

c'est-à-dire $\int \overline{f(y)} \cdot e_y \cdot \gamma \, dy = \overline{\mathcal{F} f} \cdot \gamma$, donc

$$\langle \gamma | \mathcal{F}(f * \mu) \rangle = \left\langle \overline{\mathcal{F} f} \cdot \gamma \right| \mathcal{F}\mu \right\rangle = \langle \gamma | \mathcal{F} f \cdot \mathcal{F}\mu \rangle \ .$$

Dmonstration de (iv) Puisque $\psi^* * \varphi = \varphi * \psi^* = \int \varphi(y) \cdot (\psi^*)_y \, dy$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (proposition v), pour tout $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$, on obtient

$$\langle \varphi | \psi * \mu \rangle = \langle \psi^* * \varphi | \mu \rangle = \int \overline{\varphi(y)} \cdot \left\langle (\psi^*)_y \right| \mu \right\rangle dy = \left\langle \varphi(\diamond) \right| \langle (\psi^*)_\diamond | \mu \rangle \right\rangle \ ,$$

ce qui montre que $\psi * \mu = \langle (\psi^*)_\diamond | \mu \rangle$. Il nous reste à prouver que $\langle (\psi^*)_\diamond | \mu \rangle \in \mathcal{C}^{(\infty)}_{\mathrm{temp}}(\mathbb{R}^n)$. Mais la remarque 4.8.1 nous permet, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ et $j = 1, \ldots, n$, de calculer

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\left\langle (\psi^*)_{y + h \cdot e_j} \right| \mu \right\rangle - \left\langle (\psi^*)_y \right| \mu \right\rangle \right] = \left\langle \partial_j (\psi^*)_y \right| \mu \right\rangle = - \left\langle (\psi^*)_y \right| \partial_j \mu \right\rangle \ .$$

On a donc $\langle (\psi^*)_\diamond | \mu \rangle \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ par récurrence. D'autre part, il existe par la continuité de μ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ un $k \in \mathbb{N}$ tel que, en utilisant le lemme, on ait

$$\left| \left\langle (\psi^*)_y \right| \mu \right\rangle \right| \leqslant p_k \left((\psi^*)_y \right) \leqslant 2^k \cdot \langle y \rangle^k \cdot p_k(\psi^*)$$

et par suite

$$\left\| \langle \diamond \rangle^{-k} \cdot \langle (\psi^*)_\diamond | \mu \rangle \right\|_\infty \leqslant 2^k \cdot p_k(\psi^*) < \infty \ .$$

□

REMARQUE 4 Dans la démonstration ci-dessus (ii) nous avons utilisé la commutativité de la convolution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Cela n'est pas nécessaire puisque $\psi^* * \varphi = \int (\psi^*)_y \cdot \varphi(y) \, dy$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, résultat qui se généralise au cas d'un groupe localement compact non-commutatif non-nécessairement unimodulaire en introduisant l'intégrale de Haar à droite !

REMARQUE 5 Nous aurions pu définir $f * \mu$ par la première formule de (iii) en remarquant que

$$f^* * \diamond : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \varphi \longmapsto f^* * \varphi$$

est continue. La démonstration de (iv) peut aussi se faire sans utiliser (ii), mais en exprimant le produit de convolution $\psi^* * \varphi$ comme une limite de sommes de Riemann dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Il me semble plus naturel d'introduire l'intégration vectorielle.

En effet pour tout $k \in \mathbb{N}$, grâce au lemme 2.1 on obtient

$$p_k(f^* * \varphi) = \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^\alpha (f^* * \varphi) \right\|_\infty =$$

$$= \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \int f(\mathrm{id} - y) \cdot \partial^\alpha \varphi(y) \, dy \right\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \cdot \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \int \langle \mathrm{id} - y \rangle^k \cdot f(\mathrm{id} - y) \cdot \langle y \rangle^k \cdot \partial^\alpha \varphi(y) \, dy \right\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \cdot \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot f \right\|_\infty \cdot \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{k + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \cdot \partial^\alpha \varphi \right\|_\infty \cdot \left(\int \langle y \rangle^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \, dy \right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \cdot \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot f \right\|_\infty \cdot \left(\int \langle y \rangle^{-\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1} \, dy \right) \cdot p_{k + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1} (\varphi) \ .$$

$\square$

Ces inégalités montrent également que le produit de convolution

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : (\varphi, \psi) \longmapsto \varphi * \psi$$

est une application bilinéaire (globalement) continue.

19.5 Fonctions holomorphes multivalentes

DEFINITION 1

(a) Pour tout $\gamma \in \mathcal{CH}(Z)$, on a

$$I_{F(\gamma)} = I_\gamma \quad \text{et} \quad \tau_{F(\gamma)} = \tau_\gamma \ .$$

(b) Pour tout $\gamma, \delta \in \mathcal{CH}(Z)$ tels que $\gamma(\tau_\gamma) = \delta(\tau_\delta)$, on a $F(\gamma)(\tau_\gamma) = F(\delta)(\tau_\delta)$, i.e. il existe une fonction $\widetilde{F} : Z \longrightarrow \mathbb{C}^m$ telle que

$$F(\gamma)(\tau_\gamma) = \widetilde{F}(\gamma(\tau_\gamma)) \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{CH}(Z) \ .$$

On dit que $\widetilde{F}$ est la *branche principale* de F .